



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL
**MÉTODOS GEOMÉTRICOS EN
TEORÍAS CLÁSICAS DE CAMPOS E
INTEGRACIÓN NUMÉRICA**

Autor: AITOR SANTAMARÍA MERINO
**Directores: MANUEL DE LEÓN ROGRÍGUEZ Y DAVID
MARTÍN DE DIEGO**

MADRID 2004

MÉTODOS GEOMÉTRICOS EN TEORÍAS CLÁSICAS DE CAMPOS E INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Memoria de tesis doctoral presentada por

Aitor Santamaría Merino

Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Zaragoza

Master of Science por la Universidad de Oxford

Ingeniero técnico en Informática de Sistemas por la UNED

para optar al grado de Doctor en Ingeniería Matemática

Dirigida por

Manuel de León Rodríguez

Profesor de Investigación en el CSIC

David Martín de Diego

Científico Titular en el CSIC

Lector:

Antonio García García

Profesor titular de la Universidad Carlos III de Madrid

Octubre de 2004

Agradecimientos

Quisiera aprovechar la ocasión que brinda la culminación de mi tesis doctoral para mostrar mi gratitud por todos aquellos que de forma directa, por su labor de enseñanza o trabajo en equipo, o de forma indirecta, enriqueciendo mi vida de una u otra manera, han contribuido a la conclusión de este proyecto.

En primer lugar quisiera mencionar a mis padres, Francisco Javier y María Teresa, así como a mis abuelos, tíos y primos, por su cariño y su apoyo continuado, y especial en esta fase de mi vida.

En segundo lugar, a todos los que han contribuido en mi formación como investigador, más que meramente transmisores de conocimientos, comenzando en el instituto con Jose María e Inmaculada, en la Universidad del País Vasco a Marta, Gustavo y Josu, en Zaragoza a Alberto, Fernando y Manuel, y durante mi doctorado, a todos aquéllos con cuya discusión científica me ha abierto puertas, especialmente a Juan Carlos Marrero, Miguel Muñoz, Alberto Ibort, Narciso Román, Marcelo Epstein y Mike Crampin.

Muy especialmente a mis tutores y maestros, Manuel de León Rodríguez y David Martín de Diego, por sus enseñanzas, consejos, esfuerzos y desvelos durante todos estos años.

Y también a los grandes maestros en cuyos hombros se asienta este trabajo, como Newton, Hamilton, Lagrange, Laplace, Leibniz, Einstein, Poincaré, Noether y un largo etcétera.

Finalmente, aunque no en importancia, por todos mis amigos, que al fin y al cabo son los que mantienen mi integridad intelectual y emocional, una lista larga en la que no hay gratitud suficiente que pueda dar a todos ellos. En especial a Mónica, Jaime y Raúl. En el País Vasco, a Iván, Luis, Jesús, Pedro, Javi y Toño. En Zaragoza, a Nacho, Esther (ambas), Cristina (ambas), Begoña, Jose y Mariló. En Inglaterra a Nico, Alan, Angelo. Y finalmente, en Madrid, donde este trabajo ha tenido lugar, a Ángeles, Marina, Juany, Pedro, Andreas, Roberto, Paco, Alberto, Vicente, Diego y Ana María. A todos ellos por enriquecerme, apoyarme, alegrarme y aguantarme.

1. Geometría simpléctica y mecánica	13
1.1. Geometría simpléctica	13
1.1.1. Álgebra simpléctica	13
1.1.2. Variedades simplécticas	15
1.1.3. Campos de vectores y funciones hamiltonianas en variedades simplécticas	16
1.1.4. Triples de Tulczyjew	17
1.2. Geometría cosimpléctica	18
1.2.1. Álgebra cosimpléctica	18
1.2.2. Variedades cosimplécticas	18
1.2.3. Campos de vectores y funciones hamiltonianas en variedades cosimplécticas	19
1.3. Estructura geométrica del fibrado tangente	20
1.4. Formulación geométrica de la mecánica	21
1.4.1. Formalismo lagrangiano	22
1.4.2. El caso singular	23
1.4.3. La transformación de Legendre y el teorema de equivalencia	23
1.4.4. Lagrangianos casi regulares	24
2. Geometría multisimpléctica y variedades de jets	27
2.1. Álgebra multisimpléctica	27
2.1.1. Espacios vectoriales multisimplécticos	27
2.1.2. Bases de Darboux para espacios vectoriales multisimplécticos	29

2.2.	Variedades multisimplécticas	32
2.2.1.	Definición	32
2.2.2.	Campos y formas hamiltonianos	34
2.2.3.	Coordenadas de Darboux	35
2.3.	Variedades de jets	40
2.3.1.	Definición y notaciones	40
2.3.2.	Formas de contacto. Prolongación jet de campos de vectores	43
2.3.3.	Conexiones de Ehresmann y multivectores	46
2.3.4.	Espacio de jets dual, forma de Liouville y forma multisimpléctica	49
2.3.5.	Elevación de campos de vectores al fibrado de jets dual	49
3.	Teorías clásicas de campos	51
3.1.	Descripción lagrangiana	52
3.1.1.	Formalismo lagrangiano	52
3.1.2.	Lagrangianos regulares. Ecuaciones de De Donder	56
3.1.3.	El caso singular	59
3.2.	Descripción hamiltoniana y teorema de la equivalencia	60
3.2.1.	Formalismo hamiltoniano	60
3.2.2.	Transformación de Legendre	61
3.2.3.	El teorema de equivalencia	63
3.2.4.	Lagrangianos casi regulares	63
3.3.	Formalismo de Cartan en los espacios de datos de Cauchy	65
3.3.1.	Superficies de Cauchy. Problema del valor inicial	66
3.3.2.	Integración de formas	67
3.3.3.	Las ecuaciones de De Donder en los espacios de datos de Cauchy	70
3.3.4.	El caso singular	71
3.3.5.	Corchetes	74
3.4.	Triples de Tulczyjew en teorías clásicas de campos	75
3.4.1.	El multisimplectomorfismo $\tilde{\alpha}$	75
3.4.2.	El multisimplectomorfismo $\tilde{\beta}$	77
3.4.3.	Relacionando $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$	79

4. Simetrías y cantidades conservadas	81
4.1. Simetrías de las ecuaciones de Euler-Lagrange	82
4.1.1. Simetrías del lagrangiano	82
4.1.2. Simetrías de Noether	84
4.1.3. Simetrías de Cartan	85
4.2. Simetrías de las ecuaciones de De Donder	87
4.3. Simetrías de sistemas lagrangianos singulares	91
4.4. Simetrías en el formalismo hamiltoniano	92
4.5. La transformación de Legendre y las simetrías	93
4.6. Simetrías en el formalismo hamiltoniano para lagrangianos casi regulares	93
4.7. Simetrías en los espacios de datos de Cauchy	94
4.8. Preservación de cantidades conservadas a lo largo de soluciones	94
4.9. Simetrías localizables. Segundo teorema de Noether	95
4.10. Aplicación momento	96
4.10.1. Acción de un grupo	96
4.10.2. Aplicación momento	96
4.10.3. Aplicación momento en los espacios de datos de Cauchy	97
4.11. Ejemplos	98
4.11.1. La cuerda bosónica	98
4.11.2. La ecuación de Klein-Gordon	102
5. La teoría de superficies de Cauchy	105
5.1. Revisión de las ecuaciones de campo	106
5.2. Estructura de \tilde{Z}	108
5.2.1. Secciones de $\tilde{\pi}$	108
5.2.2. Estructura de \tilde{Z}	108
5.2.3. Endomorfismo vertical	108
5.3. Formalismo lagrangiano	109
5.3.1. Forma lagrangiana	109
5.3.2. Forma de Poincaré-Cartan	109
5.4. Descomposición compatible	111
5.4.1. La integral de acción	112
5.4.2. Forma de Poincaré-Cartan instantánea	112
5.5. Formalismo hamiltoniano	113
5.6. La transformación de Legendre	113

6. Métodos numéricos geométricos	115
6.1. Formulación geométrica de sistemas no holónomos	116
6.2. Teoría de control óptimo	119
6.3. Funciones generatrices	122
6.3.1. Funciones generatrices de primera especie	123
6.3.2. La acción como función generatriz	125
6.4. Comparación de integradores variacionales con métodos basados en funciones generatrices	126
6.4.1. Integradores variacionales discretos	126
6.4.2. Mecánica variacional discreta y funciones generatrices	127
6.5. Aplicaciones a la mecánica no holónoma	128
6.5.1. Funciones generatrices y mecánica no holónoma	129
6.5.2. Construcción de integradores no holónomos	134
6.6. Sistemas mecánicos con ligaduras lineales. Métodos numéricos geométricos que preservan las ligaduras	138
6.6.1. Integradores no holónomos que preservan las ligaduras	141
6.7. Aplicaciones a la teoría de control óptimo	143
6.7.1. Solución al problema del control óptimo discreto	144
6.7.2. Funciones generatrices de segunda especie	145
6.7.3. Funciones generatrices de segunda especie y el problema de control óptimo discreto	147
6.8. Sistemas hamiltonianos discretos	149
7. Conclusiones. Trabajo futuro	151
7.1. Métodos numéricos en teorías clásicas de campos	152
7.1.1. Métodos numéricos geométricos basados en funciones generatrices	152

Índice de figuras

1.1. Lagrangianos casi regulares y transformación de Legendre	25
1.2. Relación los algoritmos de ligaduras	26
2.1. El homomorfismo ϕ	37
2.2. La variedad de jets de primer orden	41
3.1. Lagrangianos casi regulares y transformación de Legendre	64
3.2. Relacionando los algoritmos de ligaduras	65
3.3. Espacios de datos de Cauchy	67
3.4. El morfismo $\tilde{\alpha}$	76
3.5. La aplicación $\tilde{\beta}$	78
3.6. Relacionando $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$	79
6.1. Las ecuaciones de control óptimo	120
6.2. Una función generatriz de primera especie	124
6.3. Nuestro método frente a Runge-Kutta	136
6.4. Nuestro método frente al de Cortés-Martínez	137
6.5. Preservación de la ligadura	138
6.6. Conservación de la ligadura del método nuevo frente a Runge-Kutta	143

La Geometría Simpléctica ha demostrado ser históricamente el marco natural que describe el movimiento de los cuerpos, los principios que lo originan, y todos los conceptos que aparecen en la descripción que se originan en la Mecánica Analítica, establecida por Newton, Lagrange, D'Alembert, Poincaré, Hamilton, y muchos de los científicos más relevantes de los tres últimos siglos, como la energía, las ligaduras, las simetrías, las fuerzas y un largo etcétera.

En particular, tenemos que

- Las configuraciones admisibles del sistema vienen descritas por una variedad Q cuya dimensión es igual al número de grados de libertad del sistema. Por ejemplo, ésta es la situación que tiene lugar al considerar ligaduras holónomas en \mathbb{R}^n .
- El espacio de fases de las velocidades se modela con TQ (o respectivamente $TQ \times \mathbb{R}$ para el caso dependiente del tiempo), donde se define una función lagrangiana de primer orden, y mediante un principio variacional se obtienen las ecuaciones del movimiento. Como veremos, su dual T^*Q (o $\mathbb{R} \times T^*Q$ respectivamente) también forma parte de la descripción. Para el caso de las ligaduras no holónomas, se considera además una distribución $D \subseteq TQ$.
- Los conceptos y herramientas de la geometría simpléctica (respectivamente, geometría cosimpléctica para el caso dependiente del tiempo) se usan para definir de forma intrínseca las ecuaciones de evolución del sistema, las cantidades conservadas, y eventualmente, una reducción del problema a otro problema más simple. La descripción geométrica de la mecánica en términos de la geometría simpléctica (o cosimpléctica) será brevemente expuesta en los primeros capítulos de este trabajo.
- Finalmente, la teoría de funciones generatrices aparece como una forma general de definir métodos numéricos, para así calcular de forma efectiva las soluciones a los problemas, como se detalla al principio del capítulo 6.

Se sabe también que muchas de las otras Teorías Clásicas de Campos provienen de un principio variacional sobre una función lagrangiana definida en cierto espacio. Uno de estos modelos para

describir este fenómeno, y que ha sido recientemente de interés para un gran número de investigadores, es la geometría multisimpléctica sobre variedades de jets, que es una posible extensión natural de la geometría simpléctica, y que se expone en los capítulos 2 y 3 de este trabajo. Más precisamente,

- Un campo se representa por una sección de cierta fibración $\pi : Y \longrightarrow X$
- Una función lagrangiana L se define sobre la variedad de jets de primer orden $J^1\pi$, que reemplaza de forma natural el espacio de fases de las velocidades. Las ecuaciones de evolución se originan a partir de un principio variacional que involucra a la función lagrangiana.
- Los conceptos y herramientas de la geometría multisimpléctica se usan para definir intrínsecamente las ecuaciones de evolución del sistema, desde las cuales podemos estudiar la presencia de simetrías, cantidades conservadas, y una eventual reducción del problema a uno más simple. El segundo capítulo se dedica a la geometría multisimpléctica en variedades de jets, mientras que el tercer capítulo describe las Teorías Clásicas de Campos que utilizan este formalismo.

En particular, en este trabajo pretendo exponer los resultados de los trabajos de investigación de los que he sido partícipe en los últimos años con la finalidad de cumplir con el programa expuesto anteriormente. En particular:

- En el capítulo 2, dedicado a la geometría multisimpléctica sobre variedades de jets, se describirán los resultados encaminados a obtener coordenadas de Darboux para un tipo concreto de variedades multisimplécticas, en las cuales la forma multisimpléctica puede identificarse de forma local con la forma multisimpléctica canónica.
- En el capítulo 3, que describe de forma general el modelo para las variadas teorías clásicas de campos en términos de geometría multisimpléctica sobre variedades de jets, obtenemos, en el caso regular, un resultado análogo al obtenido por Tulczyjew en [153, 154] (en el que se identifica TT^*M con T^*TM y T^*T^*M) para las Teorías Clásicas de Campos.
- En el capítulo 4 analizamos la presencia de simetrías para las ecuaciones de campos en sus diversos enfoques, y obtenemos un teorema de Noether para obtener cantidades conservadas.
- El capítulo 5 describe la geometrías de las superficies de Cauchy en las teorías clásicas de campos, con especial atención al caso en que la variedad base X se puede descomponer en un producto de una variedad temporal unidimensional, y una variedad especial, lo cual nos permite simplificar las ecuaciones.
- Finalmente, el capítulo 6 explica cómo puede utilizarse la teoría de las funciones generatrices como origen para una nueva familia de métodos numéricos con mejores propiedades geométricas. Aplicamos estas ideas a dos casos particulares: el caso de la mecánica con ligaduras no holónomas, y al caso de la teoría de control óptimo. Se expondrá también en el último capítulo cómo estas ideas podrían utilizarse para producir métodos numéricos para teorías clásicas de campos.

A lo largo de este trabajo, se supondrá que se dispone de un conocimiento básico de la geometría diferencial. Utilizaremos también la siguiente notación: \mathcal{L}_X para denotar la derivada de Lie con respecto a un campo de vectores X , $\mathfrak{X}^k(M)$ para denotar los k -multicampos de vectores en M (es decir, las secciones de $\Lambda^k TM$), y por $\Lambda^k M$ las k -formas en M (es decir, secciones de $\Lambda^k T^*M$); $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$, y $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$ denotarán las proyecciones canónicas. Si G es un grupo de Lie que actúa sobre una variedad M , y \mathfrak{g} es su álgebra de Lie, entonces para $\xi \in \mathfrak{g}$, ξ_M denotará el campo de vectores fundamental (o generador infinitesimal) determinado por ξ .

Geometría simpléctica y mecánica

Este capítulo introductorio tiene por objetivo visitar brevemente algunos conceptos fundamentales de las geometrías simpléctica y cosimpléctica, y mostrar cómo estas teorías constituyen un modelo natural para describir intrínsecamente las propiedades y comportamiento de la mecánica no dependiente y dependiente del tiempo, respectivamente. Nos centraremos en particular en la descripción de la mecánica dependiente del tiempo en términos de la geometría cosimpléctica.

Los resultados mencionados en este capítulo son bien conocidos, y las demostraciones se encuentran ampliamente difundidas en la literatura especializada (por ejemplo, en [1]), por lo que en muchas ocasiones se omitirán.

En ambas descripciones simpléctica y cosimpléctica se consideran tanto los aspectos algebraicos como los diferenciales, así como una breve discusión sobre funciones hamiltonianas.

1.1. Geometría simpléctica

Esta sección versa sobre geometría simpléctica. Se tratarán simultáneamente los casos tanto finito como infinito dimensionales cuando nos sea posible, y siempre que la dimensionalidad finita no se pida explícitamente.

1.1.1. Álgebra simpléctica

Definición 1.1.1. Sea V un espacio vectorial (de dimensión finita o infinita), y sea ω una 2-forma en V . Definimos la aplicación lineal $\omega^{\flat} : V \rightarrow V^*$

$$\langle \omega^{\flat}(v_1) | v_2 \rangle := \omega(v_1, v_2)$$

Decimos que ω es **débilmente** (resp. **fuertemente**) **no degenerada** cuando ω^{\flat} es inyectiva, o en otras palabras, $\iota_v \omega = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (resp. un isomorfismo).

Obviamente, si V es de dimensión finita, ambos conceptos coinciden, y decimos simplemente que ω es **no degenerada**. Esto no es así si V es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Definición 1.1.2. Una **forma simpléctica** (débil, fuerte) en un espacio vectorial V es una 2-forma (débilmente, fuertemente) no degenerada.

Un **espacio vectorial simpléctico** (débil, fuerte) es un espacio vectorial V equipado con una forma simpléctica (débil, fuerte).

En todo espacio vectorial simpléctico se tiene:

Proposición 1.1.3. Sea ω una 2-forma en un espacio vectorial de dimensión finita V . Entonces,

(i) ω es no degenerada si y sólo si V es de dimensión par ($\dim V = 2n$) y ω^n es una forma de volumen en V .

(ii) Si ω es simpléctica, entonces existe una base de V respecto a la cual, la matriz asociada a ω tiene la siguiente expresión en bloques

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

donde 0 denota la matriz nula $n \times n$, e I es la matriz identidad de dimensión n .

Una forma simpléctica puede utilizarse para definir relaciones de ortogonalidad y complementariedad.

Definición 1.1.4. Si W es un subespacio de un espacio vectorial simpléctico (V, ω) , entonces definimos su **complemento ortogonal** por

$$W^\perp := \{v \in V \mid \iota_v \wedge \omega = 0 \text{ para todo } w \in W\}$$

Definición 1.1.5. Un subespacio vectorial W de un espacio vectorial simpléctico se dice que es

(i) **isótropo** si $W \subseteq W^\perp$

(ii) **coisótropo** si $W^\perp \subseteq W$

(iii) **lagrangiano** si es isótropo o coisótropo, o en otras palabras, $W^\perp = W$

(iv) **simpléctico** si $W \cap W^\perp = \{0\}$ (y por tanto $(W, \omega|_W)$ es un espacio vectorial simpléctico)

También tenemos que

Proposición 1.1.6. Dado un subespacio vectorial $W \leq V$,

(i) W es lagrangiano si y sólo si W es maximalmente isótropo

(ii) si V es de dimensión finita, entonces W es lagrangiano si y sólo si W es isótropo y $\dim V = 2 \dim W$

Ejemplo 1.1.7. Sea V un espacio vectorial arbitrario. Consideremos el producto directo $V \times V^*$. Definamos una 2-forma ω_V en $V \times V^*$ como sigue:

$$\omega_V((v, \alpha), (w, \beta)) := \beta(v) - \alpha(w)$$

Un breve cálculo basta para mostrar que ω_V es simpléctica. Además, $V \times \{0\}$ y $\{0\} \times V^*$ son subespacios lagrangianos.

1.1.2. Variedades simplécticas

Las definiciones anteriores se pueden extender a variedades diferenciables.

Definición 1.1.8. Sea ω una 2-forma en una variedad diferenciable (de dimensión finita o infinita) M modelada sobre un espacio de Banach. Para cada $x \in M$, consideremos la aplicación $\omega_x^b : T_x M \rightarrow T_x^* M$ definida por

$$\omega_x^b(V) := \iota_V \omega_x.$$

Decimos que ω es **débilmente no degenerada** en x cuando ω_x^b es inyectiva, o en otras palabras, $\iota_V \omega_x = 0 \Leftrightarrow V = 0$, y **fuertemente no degenerada** cuando es un isomorfismo de espacios vectoriales.

ω se dice que es una **forma simpléctica** (débil, fuerte) en M cuando es cerrada y (débilmente, fuertemente) no degenerada en cada punto. Por lo tanto, ω_x es una forma simpléctica en $T_x M$ para cada $x \in M$. En el caso de la simplecticidad débil, tenemos que la aplicación inducida $\omega^b : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Lambda(M)$ definida por

$$\omega^b(X) := \iota_X \omega_x.$$

es inyectiva, pero no suprayectiva en general.

Una **variedad simpléctica** es una variedad M equipada con una forma simpléctica.

En tal caso, si M es de dimensión finita, entonces es una variedad de dimensión par (digamos $\dim M = 2n$), y la forma ω^n es una forma de volumen en M .

Tenemos también el siguiente teorema de Darboux:

Teorema 1.1.9. (Darboux) Si ω es una 2-forma no degenerada en una variedad M de dimensión finita, ($\dim M = 2n$), entonces ω es cerrada si y sólo si existe un entorno coordenado (U, \mathbf{x}) en torno a cada $x \in M$ tal que $\mathbf{x}(x) = 0$, con $\mathbf{x}(u) = (q^1(u), \dots, q^n(u), p_1(u), \dots, p_n(u))$ para $u \in U$, y

$$\omega|_U = dq^i \wedge dp_i$$

Las coordenadas dadas por el entorno coordenado mencionado (U, \mathbf{x}) se llaman habitualmente **coordenadas de Darboux**.

Definición 1.1.10. Una subvariedad N de una variedad simpléctica (M, ω) se dice que es **isotrópica** (resp. **coisotrópica**, **lagrangiana**, **simpléctica**) cuando $T_x N$ es un subespacio vectorial isotrópico (resp. coisótropo, lagrangiano, simpléctico) de $(T_x M, \omega_x)$, para cada $x \in N$.

Finalmente, tenemos:

Definición 1.1.11. Un difeomorfismo Φ entre dos variedades simplécticas (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) se dice que es un **simplectomorfismo** o una **transformación canónica** cuando $\Phi^* \omega_2 = \omega_1$.

Ejemplo 1.1.12. Sea Q una variedad arbitraria. Definimos la siguiente 1-forma θ_Q en T^*Q , denominada la **forma de Liouville**, donde para todo $W \in T_\alpha T^*Q$,

$$\langle (\theta_Q)_\alpha | W \rangle := \langle \alpha | T\pi_Q W \rangle$$

siendo π_Q la proyección canónica.

Si Q es de dimensión finita, y (q^i, p_i) son coordenadas canónicas en T^*Q , entonces $\theta_Q = p_i dq^i$.

Consideremos $\omega_Q := -d\theta_Q$. Es una 2-forma cerrada, y no degenerada, por lo tanto es una forma simpléctica. Si Q tiene dimensión finita, y (q^i, p_i) son coordenadas canónicas en T^*Q , entonces $\omega_Q = dq^i \wedge dp_i$. Esta forma se denomina la **forma simpléctica canónica** en T^*Q .

Recibe el nombre de canónica porque el teorema de Darboux garantiza que en torno a cada punto de una variedad simpléctica, la forma simpléctica puede ser asimilada a la forma simpléctica canónica de cierta variedad Q . Cuando una variedad es globalmente simplectomorfa a (T^*Q, ω) entonces se dirá que es una **variedad simpléctica especial** (de acuerdo con la terminología introducida por W. Tulczyjew en [153, 154]).

1.1.3. Campos de vectores y funciones hamiltonianas en variedades simplécticas

A lo largo de esta sección, supondremos que (M, ω) es una variedad simpléctica. Los resultados de esta sección son bien conocidos para variedades de dimensión finita, y para variedades de dimensión infinita aparecen recogidos por ejemplo en [129, 150].

Definición 1.1.13. *Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dirá que es*

(i) **hamiltoniano** si existe una función h (llamada **función hamiltoniana**) tal que

$$\iota_X \omega = dh$$

(ii) **localmente hamiltoniano** si $\mathfrak{L}_X \omega = 0$

Nótese que, en particular, el flujo de un campo de vectores hamiltoniano preserva la forma simpléctica, esto es, el flujo F_t es una transformación canónica.

La no degeneración de ω garantiza que, para una función hamiltoniana h , si existe un campo de vectores hamiltoniano asociado, entonces éste es único, y se denotará por X_h . También denotamos por

$$\mathcal{H}(M) := \{h \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid dh = \iota_X \omega \text{ para algún } X \in \mathfrak{X}(M)\}$$

Si M es de dimensión finita, entonces $\mathcal{H}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, pero para variedades de dimensión infinita esto no puede garantizarse.

En coordenadas locales de Darboux en el espacio de Banach modelo, X_h viene dado por

$$X_h(u, w) = \left(\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial w} \right)$$

(para más detalles, ver [150]).

Definición 1.1.14. *En $\mathcal{H}(M)$ podemos definir el corchete de Poisson :*

$$\{f, g\} := \iota_{X_g} \iota_{X_f} \omega = \omega(X_f, X_g)$$

Aún más, tenemos que

Proposición 1.1.15. *El corchete de Poisson tiene las siguientes propiedades para $f, g, h \in \mathcal{H}(M)$:*

1. $\{f, g\} = -\{g, f\}$
2. $\{f+g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$
3. $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

Proposición 1.1.16. *Si $f, g \in \mathcal{H}(M)$, entonces $\{f, g\} \in \mathcal{H}(M)$, y*

$$X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$$

Por lo tanto, el conjunto de campos de vectores hamiltonianos forman un subálgebra de Lie del álgebra de campos de vectores en M con el corchete de Lie.

De forma similar se puede mostrar que $\mathcal{H}(M)$ es un álgebra de Lie con el corchete de Poisson definido arriba.

1.1.4. Triples de Tulczyjew

En [153, 154], Tulczyjew introdujo una identificación de TT^*M con T^*TM y T^*T^*M (ver [123] para un análisis en profundidad de estos isomorfismos, y también [30]). Para un estudio directo, ver [106].

Las variedades TT^*M y T^*T^*M se identifican haciendo uso del isomorfismo dado por contracción con la forma simpléctica canónica de T^*M . Localmente viene dado por $\beta(q, p, \dot{q}, \dot{p}) = (q, p, -\dot{p}, \dot{q})$.

Para definir el isomorfismo $\alpha : TT^*M \longrightarrow T^*TM$ requerimos dos ingredientes adicionales.

Uno de ellos es la involución canónica en TTM , definida como sigue: $\kappa_M : TTM \longrightarrow TTM$ dada por

$$\kappa_M\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \chi(s, t)\right) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{\chi}(s, t)$$

donde para $\chi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ definimos $\tilde{\chi} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ por $\tilde{\chi}(s, t) = \chi(t, s)$. En coordenadas locales se obtiene que $\kappa_M(q, v, \dot{q}, \dot{v}) = (q, \dot{q}, v, \dot{v})$.

El segundo ingrediente es la paridad tangente. Dadas dos variedades M y N , y una paridad $\langle \cdot | \cdot \rangle$ entre ellas, la paridad tangente $\langle \cdot | \cdot \rangle^T : TM \times TN \longrightarrow \mathbb{R}$ viene determinado por

$$\left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma(t) \mid \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \delta(t) \right\rangle^T = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \gamma(t), \delta(t) \rangle$$

Finalmente, definimos α por $\langle \alpha(z) | w \rangle = \langle z | \kappa_M(w) \rangle^T$ para $z \in TT^*M$ y $w \in TTM$, que en coordenadas locales viene dada por $\alpha(q, p, \dot{q}, \dot{p}) = (q, \dot{q}, \dot{p}, p)$.

1.2. Geometría cosimpléctica

1.2.1. Álgebra cosimpléctica

Definición 1.2.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión $2n + 1$, y sean Ω y η una 2-forma y una 1-forma en V , respectivamente. Decimos que (V, Ω, η) es un **espacio vectorial cosimpléctico** cuando

$$\Omega^n \wedge \eta \neq 0$$

Podemos definir la siguiente aplicación lineal $\flat : V \rightarrow V^*$ dada por

$$\flat(v) := \iota_v \Omega + \eta(v)\eta$$

En un espacio vectorial cosimpléctico se puede probar que \flat es un isomorfismo. El vector $R := \flat^{-1}(\eta)$ se llama el **vector de Reeb**, y viene dado por las ecuaciones:

$$\iota_R \Omega = 0, \quad \iota_R \eta = 1$$

Los espacios vectoriales cosimplécticos se pueden expresar en coordenadas de forma adecuada como sigue:

Proposición 1.2.2. En todo espacio vectorial cosimpléctico (V, Ω, η) existe una base de V (que llamaremos una **base de Darboux**, con cierto abuso de notación) (u^i, v_i, w) , cuya base dual es $((u^i)^*, (v_i)^*, w^*)$, tal que $\Omega = (u^i)^* \wedge (v_i)^*$, $\eta = w^*$.

Ejemplo 1.2.3. El ejemplo canónico de espacio vectorial cosimpléctico viene dado por $V \times V^* \times \mathbb{R}$ para cualquier espacio vectorial real V , donde Ω es la forma simpléctica canónica heredada de $V \times V^*$, y $\eta = dt$ es el *pullback* de la forma dt en \mathbb{R} .

1.2.2. Variedades cosimplécticas

Definición 1.2.4. Una **variedad cosimpléctica** es un triple (M, Ω, η) donde M es una variedad $(2n + 1)$ -dimensional, Ω es una 2-forma cerrada, η es una 1-forma cerrada, y para cada $x \in M$, $(T_x M, \Omega_x, \eta_x)$ es un espacio vectorial cosimpléctico.

En una variedad cosimpléctica puede definirse la siguiente aplicación $\flat : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Lambda M$, dada por

$$\flat(V) := \iota_V \Omega + \eta(V)\eta,$$

y puede probarse fácilmente que es un isomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulos.

El campo de vectores $R := \flat^{-1}(\eta)$ se llama el **campo de vectores de Reeb**, y viene dado por las ecuaciones:

$$\iota_R \Omega = 0, \quad \iota_R \eta = 1$$

En una variedad cosimpléctica se pueden también inducir coordenadas adecuadas, como se muestra en

Proposición 1.2.5. *En cada variedad cosimpléctica (M, Ω, η) , cada punto admite un entorno coordinado (q^i, p_i, t) (que llamaremos **coordenadas de Darboux** con cierto abuso de notación) tal que $\Omega = dq^i \wedge dp_i$, $\eta = dt$.*

Finalmente, tenemos la siguiente

Definición 1.2.6. *Un difeomorfismo Φ entre dos variedades cosimplécticas (M_1, ω_1, η_1) y (M_2, ω_2, η_2) se dice que es un **cosimplectomorfismo** cuando $\Phi^*\omega_2 = \omega_1$, y $\Phi^*\eta_2 = \eta_1$.*

Ejemplo 1.2.7. El ejemplo canónico de variedad cosimpléctica viene dado por $T^*Q \times \mathbb{R}$ para cualquier variedad Q , donde Ω es la forma simpléctica canónica ω_Q de T^*Q , y η es la forma dt de \mathbb{R} .

Extendiendo la terminología introducida por Tulczyjew, diremos que una variedad cosimpléctica (M, Ω, η) es una **variedad cosimpléctica especial** cuando exista una variedad Q y un difeomorfismo $\Phi : M \rightarrow T^*Q \times \mathbb{R}$ tal que $\Phi^*\omega_Q = \Omega$ y $\Phi^*(dt) = \eta$.

Cualquier variedad cosimpléctica especial posee también una forma $\Theta = \Phi^*\theta_Q$ tal que $-d\Theta = \Omega$.

1.2.3. Campos de vectores y funciones hamiltonianas en variedades cosimplécticas

En esta sección, (M, Ω, η) denotará una variedad cosimpléctica con campo de Reeb R . Para una descripción más completa de los conceptos descritos en esta sección, ver [18].

Definición 1.2.8. *Para una función $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida en M , podemos definir:*

(i) *El **campo de vectores gradiente** $\text{grad } h := \flat^{-1}(dh)$, dado por las ecuaciones*

$$\begin{aligned}\iota_{\text{grad } h}\eta &= R(h) \\ \iota_{\text{grad } h}\Omega &= dh - R(h)\eta\end{aligned}$$

y expresión en coordenadas locales canónicas

$$\text{grad } h = \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

(ii) *El **campo de vectores hamiltoniano** $X_h := \flat^{-1}(dh - R(h)\eta)$, dado por las ecuaciones*

$$\begin{aligned}\iota_{X_h}\eta &= 0 \\ \iota_{X_h}\Omega &= dh - R(h)\eta\end{aligned}$$

y expresión en coordenadas locales canónicas

$$X_h = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

(iii) *El **campo de vectores evolución** $E_h := R + X_h$, dado por las ecuaciones*

$$\begin{aligned}\iota_{E_h}\eta &= 0 \\ \iota_{E_h}\Omega &= 1\end{aligned}$$

donde $\Omega_h = dh \wedge \eta + \Omega$, y expresión en coordenadas locales canónicas

$$E_h = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Las definiciones precedentes nos permiten definir una estructura de Poisson en $\mathcal{C}^\infty(M)$, dada por

$$\{f, g\} := \Omega(\text{grad} f, \text{grad} g)$$

de forma que la aplicación $\mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por $f \mapsto X_f$ es un antihomomorfismo de álgebras de Lie, es decir,

$$X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$$

Notar que también tenemos que

$$(i) \iota_{X_h} \Omega = \iota_{\text{grad} h} \Omega$$

$$(ii) X_h = \text{grad} h \Leftrightarrow R(h) = 0$$

Finalmente, observamos que para cada función $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en M , podemos definir otra estructura cosimpléctica en M , dada por (M, Ω_h, η) , donde $\Omega_h := dh \wedge \eta + \Omega$. De esta manera, el campo de vectores evolución para h es precisamente el campo de vectores de Reeb para esta nueva estructura cosimpléctica, como se definió en 1.2.8. Aún más, su flujo preserva la estructura cosimpléctica dada por Ω_h y η . Esto es, si denotamos por F_t el flujo de E_h entonces tenemos $F_t^* \Omega_h = \Omega_h$ y $F_t^* \eta = \eta$.

1.3. Estructura geométrica del fibrado tangente

En esta sección se definen los conceptos de levantamiento vertical y completo de campos de vectores en una variedad a su fibrado tangente, y se introduce el endomorfismo vertical. Estos conceptos serán utilizados más tarde para describir la mecánica en términos geométricos. Denotaremos por (q^i, \dot{q}^i) coordenadas fibradas en TQ , el fibrado tangente de cierta variedad Q , que se asumirá fija en toda la sección. Denotemos también por $\tau_Q : TQ \longrightarrow Q$ la proyección canónica, en coordenadas $\tau_Q(q^i, \dot{q}^i) = (q^i)$.

Si X es un campo de vectores en Q con flujo Φ_t , entonces $T\Phi_t$ es una familia uniparamétrica de transformaciones en TQ .

Definición 1.3.1. Si $X \in \mathfrak{X}(Q)$ tiene flujo Φ_t , entonces el generador infinitesimal X^c de $T\Phi_t$ en TQ se llama el **levantamiento completo** de X a TQ .

En coordenadas locales, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ entonces tenemos

$$X^c = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{q}^j \frac{\partial X^i}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

También definimos

Definición 1.3.2. Para una fibración $\pi : N \longrightarrow M$, un vector tangente $v \in T_y N$ tal que $\pi(v) = 0$ se llama un **vector tangente vertical**. El subespacio de vectores tangentes a y verticales se denotará por $\mathcal{V}_y \pi$, y el subfibrado de vectores verticales por $\mathcal{V}\pi$.

Se define el levantamiento vertical de vectores tangentes y campos de vectores como sigue:

Definición 1.3.3. Sea $V \in T_q Q$, definimos la aplicación lineal $T_q Q \longrightarrow \mathcal{V}_V TQ$, para $X \in T_q Q$, como sigue

$$X^v := \frac{d}{dt}(V + tX)|_{t=0}$$

y se denomina el **levantamiento vertical** de X a TQ en V . El levantamiento vertical de campos de vectores se define puntualmente.

En coordenadas locales, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ entonces tenemos

$$X^v = X^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

Finalmente, con estos ingredientes podemos definir el endomorfismo vertical S :

Definición 1.3.4. Definimos el siguiente endomorfismo S en TQ . Sea $V \in TQ$, entonces para $Y \in T_V TQ$

$$S_V(Y) := ((T\tau_Q)_V(Y))^v$$

En coordenadas locales, S viene dado por

$$S = dq^i \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

El fibrado tangente TQ está también equipado con otro objeto geométrico fundamental (ver [118]):

Definición 1.3.5. el **campo de vectores de Liouville** o **campo de vectores dilatación** Δ , definido intrínsecamente como un campo de vectores en TQ dado por

$$\Delta(V) = (V^v)_V$$

En coordenadas locales canónicas se expresa como

$$\Delta = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

1.4. Formulación geométrica de la mecánica

Las variedades simplécticas y cosimplécticas son el ambiente natural para describir la mecánica independiente y dependiente del tiempo, respectivamente. En esta sección, centraremos nuestra atención en la descripción geométrica del caso dependiente del tiempo, y por tanto, en la descripción cosimpléctica.

Comenzamos con una variedad Q de las posibles configuraciones (no sujetas a ligaduras holónomas). El fibrado tangente TQ es el espacio de fases de las velocidades de la variedad Q .

1.4.1. Formalismo lagrangiano

Consideremos una **función lagrangiana** L definida en $\mathbb{R} \times TQ$. Introducimos la siguiente notación que usaremos frecuentemente $\hat{p}_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$.

Definimos también la **energía lagrangiana** $E_L = \Delta(L) - L$ en términos del campo de vectores de Liouville, con expresión local

$$E_L = -\hat{p} := \dot{q}^i \hat{p}_i - L$$

En algunos casos, deberemos asumir algunas condiciones de regularidad sobre el lagrangiano:

Definición 1.4.1. Para cada función lagrangiana $L : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se define su **matriz Hessiana**

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right)_{i,j}.$$

El lagrangiano se dice **regular en** un punto cuando la dicha matriz es regular en tal punto, y **regular** cuando es regular en todos los puntos. En caso contrario, se dice que el lagrangiano es **singular**.

Definición 1.4.2. Para un lagrangiano dado L definimos la **1-forma de Poincaré-Cartan** como

$$\Theta_L := Ldt + S^*(dL) \tag{1.1}$$

En coordenadas fibradas, tiene la forma

$$\begin{aligned} \Theta_L &= \left(L - \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i \\ &= \hat{p} dt + \hat{p}_i dq^i \end{aligned}$$

A partir de esta forma consideramos también su diferencial

Definición 1.4.3. La **2-forma de Poincaré-Cartan** se define como

$$\Omega_L := -d\Theta_L.$$

Se expresa en coordenadas fibradas

$$\Omega_L = dt \wedge d\hat{p} + dq^i \wedge d\hat{p}_i,$$

donde vemos claramente que si L es regular, entonces $(\mathbb{R} \times TQ, \Omega_L, dt)$ es una variedad cosimpléctica, y recíprocamente.

La dinámica del sistema viene dada por curvas $c(t) = (t, q(t), \dot{q}(t))$ que hagan extremal la siguiente integral, llamada la **acción**

$$S(c) = \int_{[t_0, t_1]} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt$$

para cada intervalo compacto $[t_0, t_1]$.

Las variaciones a dichas curvas se introducen perturbando una curva $c(t)$, y la solución para el problema variacional son las bien conocidas ecuaciones de Euler-Lagrange.

Teorema 1.4.4. *Sea $c(t) = (t, q(t), \dot{q}(t))$ una curva. Entonces, c es un extremal de L si y sólo si*

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

Un cálculo sencillo muestra que, en el caso regular, ser curva solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange es equivalente a ser curva integral del campo de vectores de Reeb del sistema cosimpléctico $(\mathbb{R} \times TQ, \Omega_L, dt)$.

1.4.2. El caso singular

Para un lagrangiano singular L , uno no puede esperar encontrar soluciones definidas globalmente; en general, si tal solución existe, lo hace sólo en una subvariedad Z_f de $\mathbb{R} \times TQ$.

Esta variedad final se computa utilizando el algoritmo de Dirac-Bergmann-Gotay-Nester-Hinds para la mecánica (ver [25, 101] y también [34, 63, 66, 67, 68]).

Llamemos $Z_1 = \mathbb{R} \times TQ$. Consideramos el conjunto

$$Z_2 = \{z \in Z_1 \mid \exists R \in T_z Z_1 \quad \text{tal que } \iota_R \Omega_L = 0, \iota_R dt = 1\}.$$

Si Z_2 es una subvariedad, entonces hay soluciones en Z_2 a las ecuaciones que no son necesariamente tangentes a Z_2 , por lo que debemos introducir la condición de tangencia y considerar un nuevo paso:

$$Z_3 = \{z \in Z_2 \mid \exists R \in T_z Z_2 \quad \text{tal que } \iota_R \Omega_L = 0, \iota_R dt = 1\}.$$

Si Z_3 es una subvariedad de Z_2 , pero en algún punto no hay solución a dichas ecuaciones que no sea tangente a Z_3 , entonces vamos a un tercer paso, y así sucesivamente. En el caso favorable, obtendríamos una variedad final de ligaduras Z_f de dimensión no nula (que proyecta en un abierto de \mathbb{R} por la segunda proyección) donde las ecuaciones

$$(\iota_X \Omega_L = 0, \quad \iota_X dt = 1)|_{Z_f} \tag{1.2}$$

tienen solución.

1.4.3. La transformación de Legendre y el teorema de equivalencia

La transformación de Legendre conecta las descripciones lagrangiana y hamiltoniana. La definición depende de la 1-forma de Poincaré-Cartan, que como dijimos, depende del lagrangiano escogido para modelar la teoría.

Definición 1.4.5. *Definimos la **transformación de Legendre** $leg_L : \mathbb{R} \times TQ \longrightarrow \mathbb{R} \times T^*Q$ por $leg_L(v, t) = ((leg_L)_t(v), t)$ para cada $(v, t) \in \mathbb{R} \times TQ$. En esta definición, $(leg_L)_t : TQ \longrightarrow T^*Q$ denota la derivada fibrada usual sobre la restricción de L a cada valor de t (ver [1]). En coordenadas, $leg_L(t, q^i, \dot{q}^i) = (t, q^i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})$.*

Tenemos también una forma alternativa de construir la transformación de Legendre. Consideremos la proyección natural $\pi_{\mathbb{R} \times Q} : T^*(\mathbb{R} \times Q) \longrightarrow \mathbb{R} \times Q$, y definamos $\mu : T^*(\mathbb{R} \times Q) \longrightarrow \mathbb{R} \times T^*Q$ como la proyección canónica que verifica $p \circ \mu = \pi_{\mathbb{R} \times Q}$ (donde $p : \mathbb{R} \times T^*Q \longrightarrow \mathbb{R} \times Q$). Ahora definimos la transformación de Legendre extendida $Leg_L : \mathbb{R} \times TQ \longrightarrow T^*(\mathbb{R} \times Q)$ por

$$\langle Leg_L(t, v_q) | X \rangle := \langle (\Theta_L)_{(t, v_q)} | \tilde{X} \rangle$$

donde \tilde{X} es cualquier vector tangente a $\mathbb{R} \times TQ$ en (t, v_q) que proyecta en X , vector tangente a $\mathbb{R} \times Q$ en (t, q) . La transformación de Legendre es, en este caso, $leg_L := \mu \circ Leg_L$.

También tenemos la siguiente proposición trivial:

Proposición 1.4.6. *L es un lagrangiano regular si y sólo si leg_L es un difeomorfismo local*

Definición 1.4.7. *El lagrangiano L se dice **hiperregular** cuando leg_L es un difeomorfismo global.*

En tal caso, $H := (leg_L^{-1})^* E_L$ define una función en $\mathbb{R} \times T^*Q$. Aún más, definamos $\tilde{M}_1 := Leg_L(\mathbb{R} \times TQ)$, y denotemos por $\tilde{j} : \tilde{M}_1 \longrightarrow T^*(\mathbb{R} \times Q)$ la inclusión canónica, y por Leg_1 la correstricción de Leg_L a \tilde{M}_1 (esto es, $Leg_L = \tilde{j} \circ Leg_1$). Notar que cuando L es hiperregular, la restricción μ_1 de μ a \tilde{M}_1 es un difeomorfismo, y tiene un inverso $h_1 := \mu_1^{-1} = Leg_1 \circ leg_L^{-1}$. Por tanto, podemos también definir $h := \tilde{j} \circ h_1 : \mathbb{R} \times T^*Q \longrightarrow T^*(\mathbb{R} \times Q)$. Si escribimos h en coordenadas, tenemos precisamente que $h(t, q^i, p_i) = (t, q^i; -H(t, q^i, p_i), p_i)$.

Si denotamos por $\tilde{\eta}_1 = (pr_1 \circ \nu)^*(dt)$, donde $pr_1 : \mathbb{R} \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es la proyección natural, entonces $(\tilde{M}_1, \tilde{j}^* \omega_{\mathbb{R} \times Q}, \tilde{j}^* \tilde{\eta}_1)$ es una variedad cosimpléctica.

Además, podemos definir $\Theta_h := h^* \theta_{\mathbb{R} \times Q}$, y $\Omega_h := h^* \omega_{\mathbb{R} \times Q} = -d\Theta_h$, que coincide precisamente con $\Theta_H = -Hdt + \Theta$ and $\Omega_H = dH \wedge dt + \Omega$, respectivamente, y también $\eta_1 := h^* \tilde{\eta}_1$. De esta manera, $(\mathbb{R} \times T^*Q, \Omega_h, \eta_1)$ es una variedad cosimpléctica.

Tras un breve cálculo, deducimos el siguiente resultado.

Proposición 1.4.8. *Tenemos que*

$$(leg_L)^* \Theta_h = \Theta_L, \quad (leg_L)^* \Omega_h = \Omega_L,$$

Teorema 1.4.9. (Teorema de equivalencia). *Supongamos que el lagrangiano es hiperregular. Entonces, R es el campo de Reeb para $(\mathbb{R} \times TQ, \Omega_L, dt)$, si y sólo si $Tleg_L(R)$ es el campo de Reeb para $(\mathbb{R} \times T^*Q, \Omega_h, dt)$. Además, las aplicaciones Leg_1, μ_1 y leg_L son cosimplectomorfismos.*

1.4.4. Lagrangianos casi regulares

Cuando el lagrangiano no es regular, entonces para desarrollar una descripción hamiltoniana, necesitamos alguna condición de regularidad débil sobre el lagrangiano L , la condición de casi regularidad. Los resultados de esta sección han sido ampliamente explorados en [25] y [101].

Definición 1.4.10. *Un lagrangiano $L : \mathbb{R} \times TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es **casi regular** si $Leg_L(\mathbb{R} \times TQ) = \tilde{M}_1$ es una subvariedad de $T^*(\mathbb{R} \times Q)$, y $Leg_L : \mathbb{R} \times TQ \longrightarrow \tilde{M}_1$ es una submersión con fibras conexas.*

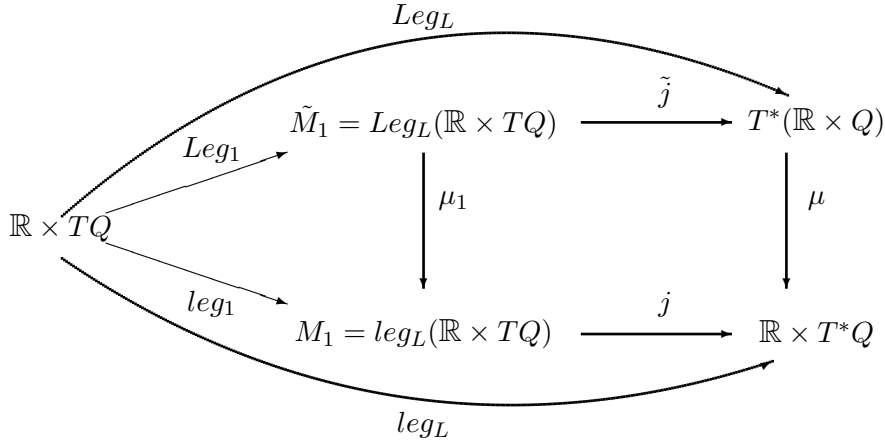


Figura 1.1: Lagrangianos casi regulares y transformación de Legendre

Si L es casi regular, deducimos que:

- $M_1 = \text{leg}_L(\mathbb{R} \times TQ)$ es una subvariedad de $\mathbb{R} \times T^*Q$.
- La restricción $\mu_1 : \tilde{M}_1 \rightarrow M_1$ de μ es un difeomorfismo.
- La aplicación $\text{leg}_L : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow M_1$ es una submersión con fibras conexas.

Bajo la hipótesis de casi regularidad, podemos definir una aplicación $h_1 = (\mu_1)^{-1} : M_1 \rightarrow \tilde{M}_1$, y una 2-forma Ω_{M_1} en M_1 por $\Omega_{M_1} = h_1^*(j^*\Omega)$ considerando la aplicación inclusión $j : \tilde{M}_1 \hookrightarrow T^*(\mathbb{R} \times Q)$. Obviamente, tenemos $\text{leg}_1^*\Omega_{M_1} = \Omega_L$, donde $j \circ \text{leg}_1 = \text{leg}_L$ (ver figura 1.1).

La descripción hamiltoniana se basa ahora en la ecuación

$$\iota_Y \Omega_{M_1} = 0, \quad \iota_Y \eta_{M_1} = 1$$

y podemos aplicar el algoritmo de ligaduras como sigue. Definimos

$$M_2 = \{y \in M_1 \mid \exists Y \in T_y M_1 \text{ tal que } \iota_Y \Omega_{M_1} = 0, \iota_Y \eta_{M_1} = 1\}$$

Si M_2 es una subvariedad, entonces hay soluciones puntuales, pero debemos también incluir la condición de tangencia a M_2 , y considerar un nuevo paso:

$$M_3 = \{y \in M_2 \mid \exists Y \in T_y M_2 \text{ tal que } \iota_Y \Omega_{M_1} = 0, \iota_Y \eta_{M_1} = 1\}$$

y así sucesivamente. Si suponemos que cada M_i así obtenido es una subvariedad de $\mathbb{R} \times T^*Q$, procediendo así obtenemos una secuencia de subvariedades embebidas una en otra

$$\dots \hookrightarrow M_3 \hookrightarrow M_2 \hookrightarrow M_1 \hookrightarrow \mathbb{R} \times T^*Q$$

Si el algoritmo se estabiliza, obtendremos una subvariedad final de ligaduras M_f de dimensión no nula en la que las ecuaciones

$$(\iota_X \Omega_{M_f} = 0, \quad \iota_X \eta_{M_f} = 1)|_{M_f}$$

$$\begin{array}{ccc}
Z_1 = Z & \xrightarrow{\text{leg}_1} & \text{leg}_L(Z) = M_1 \quad \searrow j \rightarrow \mathbb{R} \times T^*Q \\
\uparrow i_1 & & \uparrow j_1 \\
Z_2 & \xrightarrow{\text{leg}_2} & M_2 \\
\uparrow i_2 & & \uparrow j_2 \\
Z_3 & \xrightarrow{\text{leg}_3} & M_3 \\
\uparrow i_3 & & \uparrow j_3 \\
\vdots & & \vdots \\
\uparrow i_{k-2} & & \uparrow j_{k-2} \\
Z_{k-1} & \xrightarrow{\text{leg}_{k-1}} & M_{k-1} \\
\uparrow i_{k-1} & & \uparrow j_{k-1} \\
Z_k & \xrightarrow{\text{leg}_k} & M_k
\end{array}$$

Figura 1.2: Relación los algoritmos de ligaduras

tienen una solución bien definida.

Podemos entonces comparar el algoritmo a ambos lados. Un cálculo directo muestra que $\text{leg}_1(Z_a) = M_a$ para cada entero (ver la figura 1.2)

En consecuencia, ambos algoritmos tienen el mismo comportamiento; en particular, si uno de ellos se estabiliza, también lo hace el otro, y en el mismo paso. En particular, tenemos que $\text{leg}_1(Z_f) = M_f$. En tal caso, la restricción $\text{leg}_f : Z_f \rightarrow M_f$ es una submersión suprayectiva (esto es, una fibración) y $\text{leg}_f^{-1}(\text{leg}_f(z)) = \text{leg}_1^{-1}(\text{leg}_1(z))$, para cada $z \in Z_f$ (esto es, sus fibras son las de leg_1). Por lo tanto, los formalismos lagrangiano y hamiltoniano pueden ser comparados a través de la fibración $\text{leg}_f : Z_f \rightarrow M_f$.

Por último, si hemos obtenido una subvariedad final de ligaduras Z_f , el algoritmo de ligaduras no es suficiente para asegurar que las soluciones de (1.2) verifican la condición de ser solución para ecuaciones de segundo orden. Si el lagrangiano verifica condiciones extra de regularidad (ser admisible y degenerado, en particular, si es casi regular), entonces los autores de [25] prueban la existencia de una subvariedad S de Z_f en la que existe una única solución de (1.2) que verifica la condición de ecuación de segundo orden, y es tal que la restricción de leg_f a S es un difeomorfismo.

Geometría multisimpléctica y variedades de jets

La geometría multisimpléctica es una extensión natural de la geometría simpléctica, que, como trataremos de mostrar en los capítulos siguientes, es el marco natural para describir las teorías clásicas de campos, de la misma forma que la geometría simpléctica ha sido utilizada para describir la mecánica clásica.

Esta sección describe la geometría multisimpléctica en sus aspectos algebraicos y diferenciales, y termina con la descripción de las variedades de jets, que son una generalización de los fibrados tangente adecuadas a nuestros propósitos, en los que las formas multisimplécticas aparecen de forma natural, y pueden ser utilizadas para describir las diversas teorías clásicas de campos.

Para más referencias en geometría multisimpléctica, ver, por ejemplo, [16, 17, 50, 51, 84, 44].

Finalmente, notar que en esta sección, los espacios vectoriales y las variedades consideradas son de dimensión finita.

2.1. Álgebra multisimpléctica

2.1.1. Espacios vectoriales multisimplécticos

Definición 2.1.1. Una **forma multisimpléctica** Ω en un espacio vectorial real V es una forma de grado k , para $1 < k \leq \dim V$ que verifica la siguiente condición de no degeneración

$$\iota_v \Omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$$

Utilizando la siguiente notación,

$$\text{Ker}\Omega := \{v \in V \mid \iota_v \Omega = 0\},$$

entonces la propiedad de no degeneración puede reescribirse como $\text{Ker}\Omega = 0$.

Un **espacio vectorial multisimpléctico** de orden k es un espacio vectorial equipado con una k -forma multisimpléctica.

Un **multisimplectomorfismo** $\phi : (V_1, \Omega_1) \longrightarrow (V_2, \Omega_2)$ entre dos espacios vectoriales multisimplécticos es un isomorfismo que preserva la forma multisimpléctica, esto es, $\phi^*\Omega_2 = \Omega_1$.

Obsérvese que una 2-forma multisimpléctica es una forma simpléctica.

Definición 2.1.2. Cualquier k -forma Ω en V induce los siguientes homomorfismos

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_j : \bigwedge^j V &\longrightarrow \bigwedge^{k-j} V^* \\ U &\longmapsto \iota_U \Omega \end{aligned}$$

para $1 \leq j \leq k$. La multisimplecticidad implica que $\hat{\Omega}_1$ es inyectiva, y $\hat{\Omega}_{k-1}$ es suprayectiva.

Una forma multisimpléctica puede utilizarse para definir condiciones de ortogonalidad y complementariedad.

Definición 2.1.3. Si W es un subespacio de un espacio vectorial multisimpléctico (V, Ω) de grado k , entonces para cada l tal que $1 \leq l \leq k - 1$ definimos el **l -ésimo complemento ortogonal** de W por

$$W^{\perp, l} := \{v \in V \mid \iota_{v \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_l} \Omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i \in \{1, 2, \dots, l\}\}$$

En particular, tenemos la siguiente filtración de complementos ortogonales

$$W^{\perp, 1} \subseteq W^{\perp, 2} \subseteq \dots \subseteq W^{\perp, k}$$

Tenemos que obviamente $W^{\perp, l} = V$ cuando $l > \dim W$, y $W \cap W^{\perp, k} = \text{Ker}(\Omega|_W)$.

Definición 2.1.4. Un subespacio vectorial W de un espacio vectorial multisimpléctico se dice que es

- (i) **l -isótropo** si $W \subseteq W^{\perp, l}$
- (ii) **l -coisótropo** si $W^{\perp, l} \subseteq W$
- (iii) **l -lagrangiano** si es l -isótropo y l -coisótropo, o en otras palabras, $W^{\perp, l} = W$
- (iv) **multisimpléctico** si $W \cap W^{\perp, k} = \{0\}$

Obsérvese que para formas simplécticas, las definiciones de 1-isotropía, 1-coisotropía, ser 1-lagrangiano y ser multisimpléctico coinciden con las definiciones de la geometría simpléctica.

Ejemplo 2.1.5. Sea V un espacio vectorial arbitrario, consideremos el producto directo $\mathcal{V}_V = V \times \Lambda^k V^*$. Definamos una $(k+1)$ -forma Ω_V en \mathcal{V}_V :

$$\Omega_V((v_1, \gamma_1), \dots, (v_{k+1}, \gamma_{k+1})) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \gamma_i(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}),$$

para cada $(v_i, \gamma_i) \in \mathcal{V}_V$, $i = 1, \dots, k+1$, donde el acento circunflejo sobre una letra significa que el término es omitido. Un cálculo directo muestra que Ω_V es una forma multisimpléctica en \mathcal{V}_V .

Si E es un subespacio vectorial de V , consideremos el subespacio $\mathcal{V}_V^r = V \times \Lambda_r^k V^*$, donde $\Lambda_r^k V^*$ denota el espacio de las k -formas en V que se anulan al aplicarles al menos r argumentos de E . Por supuesto, \mathcal{V}_V^r equipado con la restricción Ω_V^r de Ω_V a \mathcal{V}_V^r es un espacio vectorial multisimpléctico. Si $E = \{0\}$, recuperamos \mathcal{V}_V .

Sean $(\mathcal{V}_1, \Omega_1)$ y $(\mathcal{V}_2, \Omega_2)$ dos espacios vectoriales multisimplécticos de grado $k + 1$. Tomemos el producto directo $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ con la $(k + 1)$ -forma $\Omega_1 \ominus \Omega_2 = \pi_1^* \Omega_1 - \pi_2^* \Omega_2$, donde $\pi_1 : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}_1$ y $\pi_2 : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2$ son las proyecciones canónicas. Entonces $(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2, \Omega_1 \ominus \Omega_2)$ es un espacio vectorial multisimpléctico.

Proposición 2.1.6. *Sean $(\mathcal{V}_1, \Omega_1)$ y $(\mathcal{V}_2, \Omega_2)$ dos espacios vectoriales multisimplécticos de grado $(k + 1)$, y $\phi : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ un isomorfismo. Entonces ϕ es un multisimplectomorfo si y sólo si su grafo es un subespacio k -lagrangiano del espacio vectorial multisimpléctico $(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2, \Omega_1 \ominus \Omega_2)$.*

Demostración. Recuérdese que

$$\begin{aligned} (\text{Graph } \phi)^{\perp, k} &= \{(x, y) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \mid (\Omega_1 \ominus \Omega_2)((x, y), (x_1, \phi(x_1)), \dots, (x_k, \phi(x_k))) = 0, \\ &\quad \forall x_1, \dots, x_k \in \mathcal{V}_1\} \end{aligned}$$

Supongamos que $\phi^* \Omega_2 = \Omega_1$, entonces si $(x, \phi(x)) \in \text{Graph } \phi$, tenemos

$$\begin{aligned} &(\Omega_1 \ominus \Omega_2)((x, \phi(x)), (x_1, \phi(x_1)), \dots, (x_k, \phi(x_k))) \\ &= \Omega_1(x, x_1, \dots, x_k) - \Omega_2(\phi(x), \phi(x_1), \dots, \phi(x_k)) \\ &= \Omega_1(x, x_1, \dots, x_k) - \phi^* \Omega_2(x, x_1, \dots, x_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo cual implica que $\text{Graph } \phi \subseteq (\text{Graph } \phi)^{\perp, k}$.

Recíprocamente, si $\text{Graph } \phi$ es k -isótropo, tenemos que $(x, \phi(x)) \in (\text{Graph } \phi)^{\perp, k}$ para todo $x \in \mathcal{V}_1$, y, por tanto, $\phi^* \Omega_2 = \Omega_1$.

Además, si $\text{Graph } \phi$ es k -isótropo, es también k -lagrangiano. En efecto, si $(x, y) \in (\text{Graph } \phi)^{\perp, k}$ entonces tenemos que

$$\Omega_2(\phi(x) - y, \phi(x_1), \dots, \phi(x_k)) = 0$$

para cada $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{V}_1$ y por consiguiente $y = \phi(x)$ debido a la regularidad de la forma multisimpléctica Ω_2 y el hecho de que ϕ es un isomorfismo. ■

2.1.2. Bases de Darboux para espacios vectoriales multisimplécticos

Los resultados de esta sección han sido desarrollados como parte de nuestro trabajo en [116], aunque algunos resultados están probados en [131, 132].

Proposición 2.1.7. *Sea V un espacio vectorial arbitrario. Entonces:*

1. V es un subespacio k -lagrangiano de \mathcal{V}_V y \mathcal{V}_V^r , para cada r ;

2. $\Lambda^k V^*$ (resp. $\Lambda_r^k V^*$) es un subespacio 1-isótropo de \mathcal{V}_V (resp. \mathcal{V}_V^r).

Demostración.

(i) Un cálculo directo muestra que

$$V^{\perp,k} = \{(x, \gamma) \mid \Omega_V((x, \gamma), (x_1, 0), \dots, (x_k, 0)) = 0, \text{ para todo } x_1, \dots, x_k\}$$

lo cual es equivalente a la condición $\gamma(x_1, \dots, x_k) = 0$ para cada $x_1, \dots, x_k \in V$, y, por tanto, $\gamma = 0$. De ahí que $V^{\perp,k} = V$.

La misma prueba se aplica para \mathcal{V}_V^r .

(ii) Debemos probar que

$$\Lambda^k V^* \subset (\Lambda^k V^*)^{\perp,1}$$

lo cual es obvio porque

$$i_{(0,\gamma_1) \wedge (0,\gamma_2)} \Omega_V = 0.$$

La misma prueba funciona para \mathcal{V}_V^r . ■

Nota 2.1.8. Además, obsérvese que

$$(\Lambda^k V^*)^{\perp,1} = \Lambda^k V^*$$

lo que implica que $\Lambda^k V^*$ es de hecho 1-lagrangiano.

Teorema 2.1.9. [131, 132] Sea (\mathcal{V}, Ω) un espacio vectorial multisimpléctico, y $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ un subespacio 1-isótropo tal que $\dim \mathcal{W} = \dim \Lambda^k(\mathcal{V}/\mathcal{W})^*$ y $\dim \mathcal{V}/\mathcal{W} > k$. Entonces existe un subespacio k -lagrangiano V de \mathcal{V} que es transversal a \mathcal{W} (es decir, $V \cap \mathcal{W} = \{0\}$) tal que (\mathcal{V}, Ω) es multisim-plectomorfo al modelo $(\mathcal{V}_V, \Omega_V)$.

Demostración. Primer paso: Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{W} &\longrightarrow \Lambda^k(\mathcal{V}/\mathcal{W})^* \\ v &\longmapsto \iota(v) = \widetilde{i_v \Omega} \end{aligned}$$

donde $\widetilde{i_v \Omega}$ es la forma inducida por $i_v \Omega \in \Lambda^k \mathcal{V}^*$. Obsérvese que $\widetilde{i_v \Omega}$ está bien definida por el carácter isótropo de \mathcal{W} . Además, ι es un isomorfismo debido a la regularidad de Ω .

Segundo paso: El subespacio \mathcal{W} es único. Primero probaremos que si $u, v \in \mathcal{V}$ son dos vectores linealmente independientes que satisfacen $i_{u \wedge v} \Omega = 0$, entonces $\text{span}(u, v) \cap \mathcal{W} \neq \{0\}$. En caso contrario, podríamos elegir $v_1, \dots, v_{k-2} \in \mathcal{V}$ con $v_i \notin \mathcal{W}$ tal que $\{u, v, v_1, \dots, v_{k-2}\}$ sean linealmente independientes y $\text{span}(u, v, v_1, \dots, v_{k-2}) \cap \mathcal{W} = \{0\}$, puesto que la codimensión de \mathcal{W} es al menos k . Pero para cualquier $w \in \mathcal{W}$ tendríamos que $i_{w \wedge u \wedge v \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_{k-2}} \Omega = 0$ lo que contradice que $\iota : \mathcal{W} \longrightarrow \Lambda^k(\mathcal{V}/\mathcal{W})^*$ sea un isomorfismo.

Por tanto, sean \mathcal{W} y \mathcal{W}' dos subespacios de \mathcal{V} que satisfacen las hipótesis del teorema. Supongamos que $\mathcal{W} \neq \mathcal{W}'$; entonces, existe $v \in \mathcal{W}'$ tal que $v \notin \mathcal{W}$. Por los argumentos expuestos arriba, deducimos que $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}'$ tiene dimensión al menos 1. Consideremos el subespacio $Z =$

$\pi(v) \wedge \Lambda_{k-1}(\mathcal{V}/\mathcal{W})$ de $\Lambda_k(\mathcal{V}/\mathcal{W})$, donde $\Lambda_r \mathcal{V}$ es el espacio de r -vectores en \mathcal{V} , y $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{W}$ es la proyección canónica. Por supuesto, $\dim Z > 1$, y tenemos que $\iota(w)(z) = 0$ para cualquier $w \in \mathcal{W} \cap \mathcal{W}'$ y para cualquier $z \in Z$. Por tanto se debe cumplir que $w \in \ker \iota$.

Tercer paso: Existe un subespacio k -lagrangiano V tal que $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus V$. Obviamente, hay subespacios k -isótropos U tales que $U \cap \mathcal{W} = \{0\}$. Para probar esto último, podríamos tomar un vector $v \in \mathcal{V}$ tal que $u \notin \mathcal{W}$. Es obvio que $\text{span}(u)$ es k -isótropo.

Supongamos que $U \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{W} \cap U^{\perp, k} \subset \ker \iota$ y por tanto $\mathcal{W} \cap U^{\perp, k} = \{0\}$. Por consiguiente, $U = U^{\perp, k}$, y U es k -lagrangiano.

Supongamos ahora que $U \oplus \mathcal{W} \neq \mathcal{V}$, entonces $U \neq U^{\perp, k}$; en efecto, si $U = U^{\perp, k}$ (esto es, si U fuera k -lagrangiano) entonces habría un vector $x \in \mathcal{V}$ tal que $x \notin U \oplus \mathcal{W}$, y entonces $U \oplus \text{span}(x)$ sería k -isótropo, contradiciendo la maximalidad de U . Por tanto, existe un vector $v \in U^{\perp, k}$ tal que $v \notin U \cup \mathcal{W}$, y tendríamos un subespacio k -isótropo $U' = U \oplus \text{span}(u)$ tal que $U' \cap \mathcal{W} = \{0\}$. Si $U' \oplus \mathcal{W} \neq \mathcal{V}$, entonces podemos repetir el argumento, y finalmente llegaríamos a un subespacio k -isótropo V complementario a \mathcal{W} . Usando el argumento anterior, concluimos que V es de hecho k -lagrangiano.

Cuarto paso: Definimos una aplicación lineal

$$\begin{aligned} \phi &: \mathcal{W} \rightarrow \Lambda^k V^* \\ \phi(w) &= -\frac{1}{k+1} (i_w \Omega)|_V \end{aligned}$$

Un cálculo directo muestra que ϕ es un isomorfismo. Ahora definimos

$$\begin{aligned} \psi &: \mathcal{V} \rightarrow V \times \Lambda^k V^* \\ \psi(v, w) &= (v, \phi(w)) \end{aligned}$$

que es también un isomorfismo tal que $\psi^* \Omega_V = \Omega$. ■

Nota 2.1.10. Una aplicación directa del teorema 2.1.9 muestra que existe una base (de Darboux) $\{e_1, \dots, e_n, f_{\alpha_1 \dots \alpha_k}\}$ tal que $\{e_i\}$ es una base de V y $\{f_{\alpha_1 \dots \alpha_k}\}$ es una base de \mathcal{W} que satisfacen las relaciones

$$i_{f_{\alpha_1 \dots \alpha_k}} \Omega = e_{\alpha_1}^* \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k}^*$$

donde $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ denota la base dual de $\{e_1, \dots, e_n\}$. Por tanto, tenemos que

$$\Omega = \sum_{\alpha} f_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^* \wedge e_{\alpha_1}^* \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k}^* \quad (2.1)$$

donde $\{f_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^*\}$ es la base dual de $\{f_{\alpha_1 \dots \alpha_k}\}$.

Definición 2.1.11. *Un triple $(\mathcal{V}, \Omega, \mathcal{W})$ que satisface las propiedades del teorema 2.1.9 será llamado un espacio vectorial multisimpléctico de tipo $(k+1, 0)$.*

Teorema 2.1.12. *Sea (\mathcal{V}, Ω) un espacio vectorial multisimpléctico y $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ un subespacio 1-isótropo. Supongamos que $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}/\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial cociente \mathcal{V}/\mathcal{W} . Denotemos por $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{W}$ la proyección canónica. Supongamos también que*

1. $i_{v_1 \wedge \dots \wedge v_r} \Omega = 0$ si $\pi(v_i) \in \mathcal{E}$, para cada $i = 1, \dots, r$;
2. $\dim \mathcal{W} = \dim \Lambda_r^k(\mathcal{V}/\mathcal{W})^*$, donde las formas horizontales lo son respecto al subespacio \mathcal{E} ;
3. $\dim(\mathcal{V}/\mathcal{W}) > k$.

Entonces, existe un subespacio k -lagrangiano V de \mathcal{V} que es transversal a \mathcal{W} (esto es, $V \cap \mathcal{W} = \{0\}$) tal que (\mathcal{V}, Ω) es multisimplectomorfo al modelo $(\mathcal{V}_V^r, \Omega_V^r)$.

Demostración. Definimos primero el isomorfismo

$$\begin{aligned} \iota & : \mathcal{W} \longrightarrow \Lambda_r^k(\mathcal{V}/\mathcal{W})^* \\ w & \mapsto \iota(w) = \widetilde{i_w \Omega} \end{aligned}$$

donde $\widetilde{i_w \Omega}$ es la k -forma inducida usando que \mathcal{W} es isótropo y que Ω satisface la primera condición descrita arriba.

Después, se siguen los pasos de la demostración del teorema 2.1.9. ■

Nota 2.1.13. Una aplicación directa del teorema 2.1.12 muestra que la forma multisimpléctica Ω puede escribirse como la forma multisimpléctica canónica Ω_V^r en \mathcal{V}_V^r eligiendo una base de Darboux conveniente.

Definición 2.1.14. Una triple $(\mathcal{V}, \Omega, \mathcal{W}, \mathcal{E})$ que satisface las hipótesis del teorema 2.1.12 será llamado un **espacio vectorial multisimpléctico de tipo** $(k + 1, r)$.

2.2. Variedades multisimplécticas

2.2.1. Definición

Las definiciones anteriores se pueden extender naturalmente al contexto de variedades diferenciables.

Definición 2.2.1. [60, 16] Una **forma multisimpléctica** en una variedad (diferenciable real de dimensión finita) M es una k -forma cerrada, con $1 < k \leq \dim M$, que verifica la siguiente condición de no degeneración: para cada $v \in T_x M$

$$\iota_v \Omega_x = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Por lo tanto, Ω_x es una forma multisimpléctica en $T_x M$ para cada $x \in M$.

Una **variedad multisimpléctica** de orden k es una variedad M equipada con una k -forma multisimpléctica.

Una forma multisimpléctica en M induce el siguiente morfismo de $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulos

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_j & : \mathfrak{X}^j(M) \longrightarrow \Lambda^{k-j} M \\ U & \longmapsto \iota_U \Omega \end{aligned}$$

Definición 2.2.2. Un difeomorfismo Φ entre dos variedades multisimplécticas (M_1, Ω_1) y (M_2, Ω_2) se dice que es un **multisimplectomorfismo** cuando $\Phi^*\Omega_2 = \Omega_1$.

Ejemplo 2.2.3. Dada una variedad n -dimensional M , el fibrado $\Lambda^k M$ de k -formas está equipado con la siguiente k -forma canónica Θ_M^k definida por

$$(\Theta_M^k)_\alpha(X_1, \dots, X_k) := \alpha(T\nu_k(X_0), \dots, T\nu_k(X_n))$$

donde $\nu_k : \Lambda^k M \rightarrow M$ es la proyección canónica y $X_1, \dots, X_k \in T_\alpha \Lambda^k M$. Esta forma se denomina la **forma de Liouville**, y tiene expresión local

$$\Theta_M^k = p_{i_1 \dots i_k} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_k}$$

en coordenadas adaptadas $\{q^i, p_{i_1 \dots i_k}\}$ en $\Lambda^k M$.

También definimos la **forma multisimpléctica canónica** en $\Lambda^k M$ por

$$\Omega_M^k := -d\Theta_M^k$$

con expresión en coordenadas locales

$$\Omega_M^k = -dp_{i_1 \dots i_k} \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_k}.$$

Un breve cálculo muestra que esta forma es, de hecho, multisimpléctica. En una sección posterior, introduciremos el concepto análogo a las coordenadas de Darboux para ciertas variedades multisimplécticas, para las cuales el modelo es precisamente el dado en este ejemplo.

Supongamos ahora que M es una variedad que fibra sobre otra variedad N , es decir, supongamos que $\pi : M \rightarrow N$ es una fibración. Consideremos el fibrado $\Lambda_r^k M$ de k -formas en M tales que son r -horizontales respecto a la fibración $\pi : M \rightarrow N$, esto es, aquellas k -formas γ en M tales que $i_{X_1 \wedge \dots \wedge X_r} \gamma = 0$ cuando X_1, \dots, X_r son π -verticales. El espacio $\Lambda_r^k M$ es una subvariedad de $\Lambda^k M$, y por tanto, tenemos la restricción $(\Theta_M)_r^k$ de Θ_M^k a $\Lambda_r^k M$. Un cálculo simple muestra que el par $(\Lambda_r^k M, (\Omega_M)_r^k = -d(\Theta_M)_r^k)$ es también una variedad multisimpléctica. Por supuesto, tenemos que $(\Omega_M^k)|_{\Lambda_r^k M} = (\Omega_M)_r^k$. La proyección canónica se denotará por $\rho_r^k : \Lambda_r^k M \rightarrow M$

Inspirados por la noción de variedad simpléctica especial introducida por Tulczyjew, podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.2.4. Una **variedad multisimpléctica especial** (\mathcal{P}, Ω) es una variedad multisimpléctica que es multisimplectomorfa a un fibrado de formas como ha sido definido en el ejemplo anterior. Más precisamente, $\Omega = -d\Theta$, y existe un difeomorfismo $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \Lambda^k M$ (o $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \Lambda_r^k M$) para alguna variedad M , y una fibración $\pi : \mathcal{P} \rightarrow M$ tal que $\rho \circ \alpha = \pi$ (resp. $\rho_r \circ \alpha = \pi$) y $\Theta = \alpha^* \Theta_M^k$ (resp. $\Theta = \alpha^* (\Theta_M)_r^k$).

Definición 2.2.5. Una subvariedad N de una variedad multisimpléctica (M, Ω) se dice **l -isótropa** (resp. **l -coisótropa**, **l -lagrangiana**, **multisimpléctica**) cuando $T_x N$ es un subespacio l -isotrópico (resp. l -coisótropo, l -lagrangiano, multisimpléctico) de $(T_x M, \Omega_x)$, para cada $x \in N$.

Siguen a continuación dos resultados interesantes relativos a subvariedades lagrangianas.

Proposición 2.2.6. *Un subespacio W es l -lagrangiano si y sólo si es maximalmente l -isótropo.*

Demostración. Si $W \subseteq V$ es l -lagrangiano, entonces es isótropo. Si $W \subseteq W'$ con W' isótropo, entonces tenemos

$$W \subseteq W' \subseteq W'^{\perp, l} \subseteq W^{\perp, l} = W$$

y así $W = W'$.

Recíprocamente, supongamos que W es maximalmente isótropo, y que $W \subset W'^{\perp, l}$. Tomemos $v \in W'^{\perp, l} - W$, y consideremos $W' = W \oplus \langle v \rangle$. Tenemos que $W \subset W'$, y W' es isótropo (porque $v \in W'^{\perp, l}$), lo que contradice nuestra suposición. ■

Proposición 2.2.7. *En $(\Lambda^k M, \Omega_M^k)$ tenemos*

1. *Las fibras de $\rho : \Lambda^k M \rightarrow M$ (y de $\rho_r : \Lambda_r^k M \rightarrow M$) son 1-isótropas.*
2. *La imagen de una k -forma γ en M (resp. una k -forma r -horizontal) es k -lagrangiana si y sólo si γ es cerrada.*

Demostración. Se deduce de la proposición 2.1.7. ■

Si γ es una k -forma (r -horizontal) cerrada en M , entonces $(-d(\Theta_M)_r^k)|_{\text{Im}\gamma} = 0$ (como sucede para cualquier otra subvariedad lagrangiana general) lo cual implica que $((\Theta_M)_r^k)|_{\text{Im}\gamma}$ es localmente exacta, es decir,

$$((\Theta_M)_r^k)|_{\text{Im}\gamma} = d\theta,$$

y θ se llama una **k -forma generatriz**. Nótese también que M es difeomorfa a $\text{Im}\gamma$, por lo que θ puede considerarse una $(k-1)$ -forma en M .

2.2.2. Campos y formas hamiltonianos

A lo largo de esta sección, (M, Ω) será una variedad multisimpléctica de orden $k+1$. Los conceptos mostrados en esta sección han sido ampliamente estudiados en [141], [58] y [16], a los que se refiere para una lectura más en profundidad de los conceptos introducidos en esta sección.

Definición 2.2.8. *Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dirá que es*

(i) **hamiltoniano** si hay una $(k-1)$ -forma α (llamada **forma hamiltoniana**) tal que

$$\iota_X \Omega = d\alpha$$

(ii) **localmente hamiltoniano** si $\mathfrak{L}_X \Omega = 0$

La no degeneración de Ω garantiza que para una forma α dada, si hay un campo de vectores hamiltoniano asociado, entonces es único, y se denotará por X_α .

Denotamos por

$$\mathcal{H}^{k-1}(M) := \{\alpha \in \Lambda^{k-1}(M) | d\alpha = \iota_X \Omega \text{ para algún } X \in \mathfrak{X}(M)\}$$

Definición 2.2.9. En $\mathcal{H}^{k-1}(M)$ podemos definir el siguiente *corchete de Poisson*:

$$\{\alpha, \beta\} := \iota_{X_\beta} \iota_{X_\alpha} \Omega$$

Aún más, tenemos que

Proposición 2.2.10. Si $\alpha, \beta \in \mathcal{H}^{k-1}(M)$, entonces $\{\alpha, \beta\}$ es una $(k-1)$ -forma hamiltoniana con campo hamiltoniano asociado $[X_\alpha, X_\beta]$. En otras palabras,

$$X_{\{\alpha, \beta\}} = -[X_\alpha, X_\beta]$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \iota_{[X_\alpha, X_\beta]} \Omega &= \mathcal{L}_{X_\alpha} \iota_{X_\beta} \Omega - \iota_{X_\beta} \mathcal{L}_{X_\alpha} \Omega \\ &= \mathcal{L}_{X_\alpha} d\beta - \iota_{X_\beta} d\iota_{X_\alpha} \Omega - \iota_{X_\beta} \iota_{X_\alpha} d\Omega \\ &= d\iota_{X_\alpha} d\beta - \iota_{X_\beta} dd\alpha \\ &= d\iota_{X_\alpha} \iota_{X_\beta} \Omega \\ &= -d\{\alpha, \beta\} \end{aligned}$$

y por unicidad, obtenemos el resultado deseado. ■

Por tanto, el conjunto de campos de vectores hamiltonianos es un subálgebra de Lie del álgebra de campos de vectores de M con el corchete de Lie.

Dado un campo de vectores hamiltoniano, su forma hamiltoniana puede determinarse salvo por una $(k-1)$ -forma cerrada. Si denotamos por $\mathcal{Z}^{k-1}(M)$ el conjunto de $(k-1)$ -formas cerradas, y por $\tilde{\mathcal{H}}^{k-1}(M) = \mathcal{H}^{k-1}(M)/\mathcal{Z}^{k-1}(M)$, entonces podemos inducir ahí un corchete bien definido.

De forma similar, podemos definir formas hamiltonianas de grado inferior, utilizando los llamados multicampos de vectores hamiltonianos, y relacionar el corchete de Poisson con el corchete de Schouten-Nijenhuis de multivectores. Estas formas hamiltonianas definen un álgebra graduada respecto a un cierto corchete. Todos los detalles se encuentran en [17].

2.2.3. Coordenadas de Darboux

En esta sección, encontraremos condiciones necesarias y suficientes para que una variedad multisimpléctica sea multisimplectomorfa a los modelos descritos en el ejemplo 2.2.3. Como consecuencia, seremos capaces de encontrar coordenadas de Darboux para estas variedades. Los resultados de esta sección han sido desarrollados como parte de nuestro trabajo en [116], aunque algunos resultados estaban probados en [131, 132].

La sección tiene dos partes, donde la primera parte se dedica a encontrar coordenadas de Darboux para variedades multisimplécticas de tipo $(k+1, 0)$, y la segunda parte se dedica a extender el resultado para variedades multisimplécticas generales de tipo $(k+1, r)$ (estos tipos se definen al principio de cada parte).

Definición 2.2.11. *Un triple $(\mathcal{P}, \Omega, \mathcal{W})$, donde \mathcal{W} es una distribución 1-isótropa involutiva en una variedad multisimpléctica (\mathcal{P}, Ω) tal que el triple $(T_x\mathcal{P}, \Omega_x, \mathcal{W}(x))$ es un espacio vectorial multisimpléctico del tipo $(k+1, 0)$ para cada $x \in \mathcal{P}$, será llamado una **variedad multisimpléctica del tipo $(k+1, 0)$** .*

En adelante, $(\mathcal{P}, \Omega, \mathcal{W})$ será una variedad multisimpléctica de tipo $(k+1, 0)$. Además, la distribución \mathcal{W} y el fibrado vectorial correspondiente $\pi_0 : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{P}$ sobre \mathcal{P} se denotarán con la misma letra.

Teorema 2.2.12. [131] *Sea \mathcal{L} una subvariedad k -lagrangiana tal que $T\mathcal{L} \cap \mathcal{W}|_{\mathcal{L}} = \{0\}$. Entonces, existe un entorno tubular U de \mathcal{L} en \mathcal{P} , una variedad \mathcal{N} y un difeomorfismo $\Phi : U \rightarrow V = \Phi(U) \subset \Lambda^k\mathcal{N}$ en un entorno abierto V de la sección cero en $\Lambda^k\mathcal{L}$ tal que $\Phi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{N}$ es una inmersión y $\Phi^*((\Omega_{\mathcal{N}}^k)|_V) = \Omega|_U$, donde $\Omega_{\mathcal{N}}^k$ es la $(k+1)$ -forma multisimpléctica canónica en $\Lambda^k\mathcal{N}$.*

Demostración. Es una consecuencia directa de los lemas 2.2.14 y 2.2.15 siguientes. ■

Antes, recordemos el lema relativo de Poincaré, que será útil en lo que sigue.

Lema 2.2.13. (Lema relativo de Poincaré) *Sea N una subvariedad de una variedad diferenciable M , y sea U un entorno tubular de N con aplicación fibrada $\pi_0 : U \rightarrow N$. Nótese que $\pi_0 : U \rightarrow N$ es un fibrado vectorial. Denotemos por Δ el campo de vectores dilatación de este fibrado vectorial, y sea φ_t la multiplicación por t . Si definimos un operador integral sobre formas en U como sigue*

$$I(\Omega)_p = \int_0^1 i_{\Delta_t} \varphi_t^* \Omega_p dt$$

donde $\Delta_t = \frac{1}{t}\Delta$, y $p \in U$, entonces tenemos

$$I(d\Omega) + d(I\Omega) = \Omega - \pi_0^*(\Omega|_N)$$

donde $\Omega|_N$ es la forma en N obtenida al restringir Ω punto a punto a TN (obsérvese que U puede tomarse como un fibrado normal a TN en M).

A continuación, probamos el siguiente resultado.

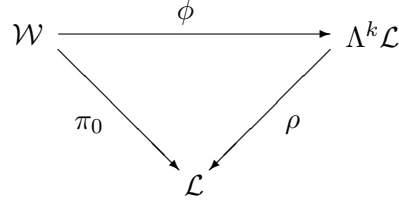
Lema 2.2.14. *Sea \mathcal{L} una subvariedad k -lagrangiana de \mathcal{P} complementaria a \mathcal{W} (esto es, $T\mathcal{L} \oplus \mathcal{W}|_{\mathcal{L}} = T\mathcal{P}|_{\mathcal{L}}$). Entonces existe un entorno tubular U de \mathcal{L} y un difeomorfismo $\Phi : U \rightarrow V \subset \Lambda^k\mathcal{L}$ donde V es un entorno de la sección cero, tal que $\Phi|_{\mathcal{L}}$ es la identificación estándar de \mathcal{L} con la sección cero de $\Lambda^k\mathcal{L}$, y*

$$\Phi^*((\Omega_{\mathcal{L}}^k)|_V) = \Omega|_U.$$

Prueba del lema 2.2.14.

En primer lugar, definimos un morfismo de fibrados vectoriales sobre la identidad de \mathcal{L} por

$$\phi(w) = -\frac{1}{k+1} i_w \Omega.$$

Figura 2.1: El homomorfismo ϕ

Obviamente ϕ es inyectiva, y por suposiciones de dimensionalidad, deducimos que ϕ es de hecho un isomorfismo de fibrados vectoriales (ver el diagrama 2.1).

Como $T\mathcal{P}|_{\mathcal{L}} = T\mathcal{L} \oplus \mathcal{W}|_{\mathcal{L}}$, entonces ϕ induce un difeomorfismo de un entorno tubular definido por \mathcal{W} a un entorno de \mathcal{L} en $\Lambda^k \mathcal{L}$ (como es usual, entendiendo como identificados \mathcal{L} con la sección cero). Denotaremos la restricción de ϕ a este entorno tubular por f . Nótese que la restricción de f a \mathcal{L} es la identidad, así que Tf es también la identidad en $T\mathcal{L}$; por otro lado, Tf restringido a \mathcal{W} coincide con ϕ porque es lineal fibra a fibra. Usando las identificaciones $T\mathcal{P}|_{\mathcal{L}} = T\mathcal{L} \oplus \mathcal{W}|_{\mathcal{L}}$ y $T\Lambda^k \mathcal{L}|_{\mathcal{L}} = T\mathcal{L} \oplus \Lambda^k \mathcal{L}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 f^* \Omega_{\mathcal{L}}^k((v_1, w_1), \dots, (v_{k+1}, w_{k+1})) &= \Omega_{\mathcal{L}}^k((v_1, \phi(w_1)), \dots, (v_{k+1}, \phi(w_{k+1}))) \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \phi(w_i)(v_1, \dots, \check{v}_i, \dots, v_{k+1}) \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{k+1} \Omega(v_1, \dots, w_i, \dots, v_{k+1}) \\
 &= \Omega((v_1, w_1), \dots, (v_{k+1}, w_{k+1}))
 \end{aligned}$$

lo que implica que $f^* \Omega_{\mathcal{L}}^k = \Omega$ en \mathcal{L} .

A continuación, usamos f para transportar la forma Ω y obtener una $k+1$ -forma Ω_1 en un entorno de \mathcal{L} en $\Lambda^k \mathcal{L}$. Usando el lema 2.2.13 deducimos que $\Omega_1 = d\Theta_1$, donde $\Theta_1 = I(\Omega_1)$. Recordar que $\Omega_{\mathcal{L}}^k = -d\Theta_{\mathcal{L}}^k$, y

$$(\Theta_{\mathcal{L}}^k)|_{\mathcal{L}} = (\Theta_1)|_{\mathcal{L}} = 0 \quad (2.2)$$

por definición de I . Sea ahora

$$\Omega_t = \Omega_{\mathcal{L}}^k + t(\Omega_1 - \Omega_{\mathcal{L}}^k), \quad t \in [0, 1].$$

Puesto que

$$(\Omega_t)|_{\mathcal{L}} = (\Omega_{\mathcal{L}}^k)|_{\mathcal{L}} = (\Omega_1)|_{\mathcal{L}}$$

es no singular, y ésta es una “condición abierta”, podemos encontrar un entorno de \mathcal{L} en $\Lambda^k \mathcal{L}$ en el que todas las Ω_t son no singulares para todo $t \in [0, 1]$. Además, $\mathcal{W}_{\mathcal{L}} = \ker\{T\rho : T\Lambda^k \mathcal{L} \rightarrow T\mathcal{L}\}$ es 1-isótropa para toda Ω_t , de forma que $(\Lambda^k \mathcal{L}, \Omega_t, \mathcal{W}_{\mathcal{L}})$ es una variedad multisimpléctica de tipo $(k+1, 0)$, para todo t . Nótese que $\Omega_1 - \Omega_{\mathcal{L}}^k = d(\Theta_1 + \Theta_{\mathcal{L}}^k)$.

De (2.2) deducimos que hay un único campo de vectores X_t dependiente del tiempo que toma valores en $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ (en otras palabras, ρ -vertical) tal que

$$i_{X_t} \Omega_t = -\Theta_{\mathcal{L}}^k + \Theta_1.$$

Como el campo de vectores X_t se anula en \mathcal{L} , podemos encontrar un entorno de \mathcal{L} en $\Lambda^k \mathcal{L}$ tal que el flujo φ_t de X_t está definido al menos para todo $t \leq 1$. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_t^* \Omega_t) &= \varphi_t^*(L_{X_t} \Omega_t) + \varphi_t^*\left(\frac{d\Omega_t}{dt}\right) \\ &= \varphi_t^*(di_{X_t} \Omega_t) + \varphi_t^*(\Omega_1 - \Omega_{\mathcal{L}}^k) \\ &= \varphi_t^*(-d(\Theta_1 - \Theta_{\mathcal{L}}^k) + \Omega_1 - \Omega_{\mathcal{L}}^k) = 0. \end{aligned}$$

Y así obtenemos

$$\varphi_1^* \Omega_1 = \varphi_0^* \Omega_{\mathcal{L}}^k = \Omega_{\mathcal{L}}^k.$$

Pero $(X_t)|_{\mathcal{L}} = 0$ implica que $(\varphi_t)|_{\mathcal{L}} = id|_{\mathcal{L}}$, y por tanto deducimos que $\varphi_1 \circ f$ da el deseado difeomorfismo local. \blacksquare

Lema 2.2.15. *Sea \mathcal{L}' una subvariedad k -isótropa de \mathcal{P} que es transversal a \mathcal{W} (esto es, $T\mathcal{L}' \cap \mathcal{W}|_{\mathcal{L}'} = \{0\}$). Entonces hay una subvariedad k -lagrangiana \mathcal{L} de \mathcal{P} que es complementaria a \mathcal{W} y contiene a \mathcal{L}' .*

Demostración del lema 2.2.15.

Como \mathcal{L}' es transversal a \mathcal{W} podemos elegir una subvariedad \mathcal{L}'' de U' tal que \mathcal{L}' es un retracto por deformación de \mathcal{L}'' , y \mathcal{L}'' es complementaria a \mathcal{W} . Como en el teorema anterior, puesto que $T\mathcal{P}|_{\mathcal{L}''} = T\mathcal{L}'' \oplus \mathcal{W}|_{\mathcal{L}''}$, entonces \mathcal{W} induce un entorno tubular de \mathcal{L}'' de la manera usual: $\pi_1 : U' \rightarrow \mathcal{L}''$.

Ahora aplicamos el lema relativo de Poincaré a la forma Ω restringida a este entorno tubular. Por tanto, hay una k -forma μ en U' tal que

$$d\mu = \Omega - \pi_1^*(\Omega|_{\mathcal{L}''})$$

(en efecto, $\mu = I(\Omega)$).

Podemos ahora repetir la construcción efectuada en la demostración del lema 2.2.14 para la $k+1$ -forma $d\mu$. De hecho, la aplicación $\psi : \mathcal{W} \rightarrow \Lambda^k \mathcal{L}''$ definida por $\psi(u) = -\frac{1}{k+1} (i_u d\mu)$ es un isomorfismo de espacios fibrados vectoriales, e induce un difeomorfismo local $g : U'' \subset U' \rightarrow g(U'') \subset \Lambda^k \mathcal{L}''$; g restringido a \mathcal{L}'' es la identidad, y ψ en las fibras. De nuevo podemos demostrar que

$$g^* \Omega_{\mathcal{L}''}^k = d\mu$$

puesto que $(d\mu)|_{\mathcal{L}''} = 0$. Procediendo como en la demostración del lema 2.2.14 podemos encontrar un difeomorfismo local Ψ desde un entorno tubular V de \mathcal{L}'' en un entorno de la sección cero de $\Lambda^k \mathcal{L}''$ que lleva \mathcal{L}'' en la sección cero, y tal que

$$\Psi^* \Omega_{\mathcal{L}''}^k = \Omega$$

en V .

Entonces, si $j : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}''$ es la inclusión natural, sabemos que j induce un isomorfismo en cohomología. Por tanto, $j^*(\Omega|_{\mathcal{L}''}) = \Omega|_{\mathcal{L}'} = 0$ implica que $[\Omega|_{\mathcal{L}'}]_{DR} = 0$, y deducimos que $\Omega|_{\mathcal{L}'} = d\nu$, para alguna k -forma ν en \mathcal{L}' . Un cálculo directo muestra que

$$\mathcal{L} = \Psi^{-1} \circ (-\nu)(\mathcal{L}'')$$

es una subvariedad k -lagrangiana de (\mathcal{P}, Ω) , y además $T\mathcal{P}|_{\mathcal{L}} = T\mathcal{L} \oplus \mathcal{W}|_{\mathcal{L}}$. ■

Corolario 2.2.16. *Una variedad multisimpléctica $(\mathcal{P}, \Omega, \mathcal{W})$ de tipo $(k+1, 0)$ es localmente multisimplectomorfa a una variedad multisimpléctica canónica $\Lambda^k M$ para alguna variedad M . Por tanto, existen coordenadas de Darboux alrededor de cada punto de \mathcal{P} .*

Demostración. Sólo tenemos que elegir un punto en el lema 2.2.15, y entonces aplicar el teorema 2.2.12. ■

Definición 2.2.17. *Sea (\mathcal{P}, Ω) una variedad multisimpléctica de orden $k+1$. Supongamos que \mathcal{W} es una foliación 1-isótropa de (\mathcal{P}, Ω) , y \mathcal{E} es una “distribución generalizada” de \mathcal{P} en el sentido de que $\mathcal{E}(x) \subset T_x\mathcal{P}/\mathcal{W}(x)$ es un subespacio vectorial para cada $x \in \mathcal{P}$. Supongamos que el cuádruple $(T_x\mathcal{P}, \Omega_x, \mathcal{W}(x), \mathcal{E}(x))$ es un espacio vectorial multisimpléctico del tipo $(k+1, r)$, para cada $x \in \mathcal{P}$. Un cuádruple $(\mathcal{P}, \Omega, \mathcal{W}, \mathcal{E})$ que satisfaga estas condiciones se llamará una variedad multisimpléctica del tipo $(k+1, r)$.*

Para el resto de la sección, $(\mathcal{P}, \Omega, \mathcal{W}, \mathcal{E})$ será una variedad multisimpléctica del tipo $(k+1, r)$.

Teorema 2.2.18. *Sea \mathcal{L} una subvariedad k -lagrangiana tal que $T\mathcal{L} \cap \mathcal{W}_{\mathcal{L}} = \{0\}$. Entonces existe un entorno tubular U de \mathcal{L} en \mathcal{P} , una variedad \mathcal{N} , y un difeomorfismo $\Phi : U \rightarrow V = \Phi(U) \subset \Lambda_r^k \mathcal{N}$ en un entorno abierto V de la sección cero en $\Lambda_r^k \mathcal{N}$ tal que $\Phi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{N}$ es una inmersión, y $\Phi^*((\Omega_{\mathcal{N}})_r^k)|_V = \Omega|_U$, where $(\Omega_{\mathcal{N}})_r^k$ es la $(k+1)$ -forma multisimpléctica canónica en $\Lambda_r^k \mathcal{N}$.*

Demostración. La prueba es una consecuencia de los dos siguientes lemas, que se prueban de forma similar a los lemas 2.2.14 y 2.2.15.

Lema 2.2.19. *Sea \mathcal{L} una subvariedad k -lagrangiana de \mathcal{P} que es complementaria a \mathcal{W} . Entonces existe un entorno tubular U de \mathcal{L} y un difeomorfismo $\Psi : U \rightarrow V \subset \Lambda_r^k \mathcal{L}$, donde V es un entorno de la sección cero, tal que $\Psi|_{\mathcal{L}}$ es la identificación estándar de \mathcal{L} con la sección cero de $\Lambda_r^k \mathcal{L}$, y*

$$\Psi^*((\Omega_{\mathcal{L}})_r^k)|_V = \Omega|_U.$$

Lema 2.2.20. *Sea \mathcal{L}' una subvariedad k -isótropa de \mathcal{P} que es transversal a \mathcal{W} . Entonces, existe una subvariedad k -lagrangiana \mathcal{L} de \mathcal{P} que es complementaria a \mathcal{W} y contiene a \mathcal{L}' .*

Corolario 2.2.21. *Una variedad multisimpléctica $(\mathcal{P}, \Omega, \mathcal{W}, \mathcal{E})$ de tipo $(k+1, r)$ es localmente multisimplectomorfa a una variedad multisimpléctica canónica $\Lambda_r^k M$ para alguna fibración $M \rightarrow N$. Por lo tanto, existen coordenadas de Darboux en torno a cada punto de \mathcal{P} .*

Demostración. Sólo tenemos que elegir un punto en el lema 2.2.20, y entonces aplicar el teorema 2.2.18. ■

2.3. Variedades de jets

El concepto de variedades de jets de primer orden generaliza la noción de vector tangente. Mientras una curva en una variedad Q se interpreta como una aplicación de un cierto intervalo I de la recta real en Q , o una sección del fibrado $I \times Q \rightarrow I$ usando la primera proyección, y los vectores tangentes son clases de equivalencia de tales curvas, los jets de primer orden son clases de equivalencia de secciones de un fibrado arbitrario $Y \rightarrow X$.

Por lo tanto, en toda esta sección consideraremos un fibrado fijo $\pi = \pi_{XY} : Y \rightarrow X$, donde X es una variedad $(n+1)$ -dimensional (posiblemente con borde ∂X), e Y será una variedad $(n+1+m)$ -dimensional (con borde $\partial Y := \pi^{-1}(\partial X)$). El conjunto de secciones de esta fibración se denotará por $\Gamma(\pi)$, y las secciones de $\Gamma(\pi)$ alrededor de un punto $x \in X$ se denotarán por $\Gamma_x(\pi)$. También supondremos que X está orientada y tiene una forma de volumen fija η .

Podemos tomar coordenadas locales fibradas (x^μ) en X y (x^μ, y^i) en Y de tal forma que la expresión local de π viene dada por $\pi(x^\mu, y^i) = (x^\mu)$. También supondremos que η puede expresarse como $\eta = d^{n+1}x = dx^0 \wedge \dots \wedge dx^n$. Los índices varían en los rangos $0 \leq \mu, \nu, \dots \leq n$ and $1 \leq i, j, \dots \leq m$.

Utilizaremos también la siguiente notación:

$$d^n x_\mu := \iota_{\partial/\partial x^\mu} d^{n+1}x, \quad d^{n-1} x_{\mu\nu} := \iota_{\partial/\partial x^\mu} \iota_{\partial/\partial x^\nu} d^{n+1}x,$$

y así sucesivamente.

2.3.1. Definición y notaciones

Definición 2.3.1. *La variedad de jets de orden k para la fibración π se define como el conjunto de clases de equivalencia alrededor de puntos de X que tienen en su expresión en coordenadas el mismo desarrollo de Taylor hasta orden k . Si $x \in X$ y $\phi : X \rightarrow Y$ es una sección de π definida en un entorno de x , entonces, tal clase de equivalencia se denota por $j_x^k \phi$. Por tanto,*

$$J^k \pi := \{j_x^k \phi | x \in X, \phi \in \Gamma(\pi)\}$$

A dicho conjunto se le equipa de forma sencilla con una estructura de variedad diferenciable con las cartas siguientes:

$$\begin{aligned} x^\mu(j_x^k \phi) &= x^\mu(x) \\ y^i(j_x^k \phi) &= y^i(\phi(x)) = \phi^i(x) \\ z_\mu^i(j_x^k \phi) &= \left. \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu} \right|_x \\ &\vdots \\ z_{\mu_1 \dots \mu_k}^i(j_x^k \phi) &= \left. \frac{\partial^k \phi^i}{\partial x^{\mu_1} \dots \partial x^{\mu_k}} \right|_x \end{aligned}$$

La dimensión se obtiene calculando las diversas derivadas parciales. Así, $\dim J^1\pi = (n + 1) + m + (n + 1)m$, $\dim J^2\pi = (n + 1) + m + (n + 1)m + \binom{n + 2}{2}m$, etcétera.

Para una sección ϕ , la prolongación k -jet de ϕ se define como $j^k\phi : X \longrightarrow J^k\phi$ por $j^k\phi(x) = j_x^k\phi$.

En lo que sigue, centraremos nuestra atención en la variedad de jets de primer orden, que denotaremos por $Z = J^1\pi$. Las proyecciones naturales se denotarán por $\pi_{YZ} : Z \longrightarrow Y$ y $\pi_{XZ} : Z \longrightarrow X$ (ver figura 2.2).

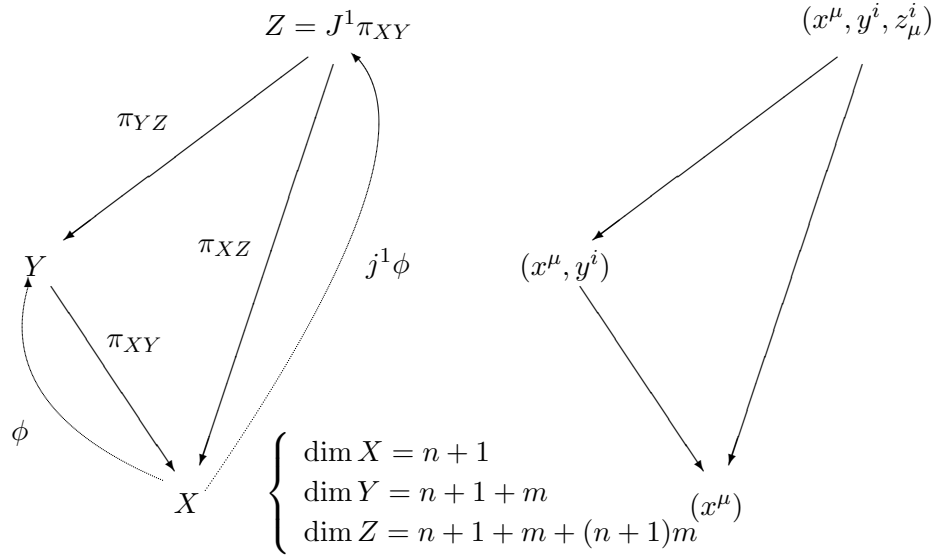


Figura 2.2: La variedad de jets de primer orden

Si X tiene borde ∂X , entonces Z es una variedad con borde $\partial Z := \pi_{XZ}^{-1}(\partial X)$. El mismo símbolo η se utilizará para denotar la forma de volumen en X , o su *pullback* a Y o Z .

Observar que si $\phi \in \Gamma(\pi)$, entonces $T\phi$ sólo depende de su primera derivada, y por tanto, $T_x\phi = T_x\phi'$ si y sólo si $j_x^1\phi = j_x^1\phi'$

Como es habitual, se pueden definir los conceptos de verticalidad mediante los siguientes subespacios y subfibrados:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_y\pi &:= (T_y\pi)^{-1}(0_x) \\ \mathcal{V}_z\pi_{XZ} &:= (T_z\pi_{XZ})^{-1}(0_x) \\ \mathcal{V}\pi &:= \bigcup_{y \in Y} \mathcal{V}_y\pi \\ \mathcal{V}\pi_{XZ} &:= \bigcup_{z \in Z} \mathcal{V}_z\pi_{XZ} \end{aligned}$$

y de horizontalidad local en la imagen de una sección dada $\phi \in \Gamma(\pi)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_y\pi_{YZ} &:= T_x\phi(T_xX) \\ \mathcal{H}\pi_{YZ} &:= \bigcup_{x \in X} T_x\phi(T_xX) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{H}_{\phi(x)}\pi_{YZ}\end{aligned}$$

Nótese que $\mathcal{H}_y\pi_{YZ}$ es el conjunto de prolongaciones holonómicas de vectores tangentes de T_xX por ϕ .

Cada campo de vectores a lo largo de ϕ puede descomponerse en una parte en $\mathcal{V}\pi$ y una parte en $\mathcal{H}\pi_{YZ}$, y aquéllos que tienen sólo parte en $\mathcal{H}\pi_{YZ}$ se llaman **derivadas totales**. Localmente, están generados como $\mathcal{C}^\infty(Z)$ -módulos por las formas

$$\frac{d}{dx^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + z^\mu_i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

llamadas habitualmente **derivadas totales coordinadas** (ver [149] para más detalles). La definición puede extenderse a grados superiores, obteniendo así

$$\frac{d}{dx^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + z^\mu_i \frac{\partial}{\partial y^i} + z^\mu_{i\nu} \frac{\partial}{\partial z^i_\nu} + \dots$$

Hay otras formas alternativas (y equivalentes) de definir la variedad de jets de primer orden, como considerar el fibrado afín sobre Y cuya fibra sobre $y \in \pi^{-1}(x)$ consiste en secciones lineales de $T\pi_{XY}$, modelada sobre el fibrado vectorial en Y cuya fibra sobre $y \in \pi^{-1}(x)$ es el espacio de las aplicaciones lineales de T_xX a $\mathcal{V}_y\pi$; en otras palabras, Z es un fibrado afín sobre Y modelado en el fibrado vectorial $\pi^*T^*X \otimes_Y \mathcal{V}\pi$ (ver [64, 149]).

En [149] y [29], los autores utilizan este modelo para definir otro objeto geométrico de interés asociado a cada forma de volumen, que es el **endomorfismo vertical**, que en este contexto no es puramente un endomorfismo, aunque extenderá de forma natural el bien conocido concepto para la mecánica (ver también capítulo 1 y [148]).

Lo que sigue es una forma alternativa de definirlo. En primer lugar, construimos el isomorfismo elevación vertical

$$v : \pi^*T^*X \otimes_Y \mathcal{V}\pi \longrightarrow \mathcal{V}\pi_{YZ}$$

como sigue: dada $f \in (\pi^*T^*X \otimes_Y \mathcal{V}\pi)|_{j_x^1\phi}$, consideramos la curva $\gamma_f : \mathbb{R} \longrightarrow \pi_{YZ}^{-1}(\pi_{YZ}(j_x^1\phi))$ dada por

$$\gamma_f(t) = j_x^1\phi + t f ,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Ahora definamos

$$f^v = \frac{d}{dt}\gamma_f(t)|_{t=0}$$

como la elevación vertical de f a Z en $j_x^1\phi$.

Si (x^μ, y^i) son coordenadas fibradas en Y y $f = f_\mu^i dx^\mu|_x \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\phi(x)}$, entonces

$$f^v = f_\mu^i \frac{\partial}{\partial z^i_\mu} \Big|_{j_x^1\phi} .$$

Sea x un punto en X y $\phi \in \Gamma_x(\pi)$. Si V_0, \dots, V_n son $n+1$ vectores tangentes a $J^1\pi$ en el punto $j_x^1\phi \in Z$, entonces tenemos que $T_{j_x^1\phi}\pi_{YZ}(V_\mu) - T_x\phi \circ T_{j_x^1\phi}\pi_{XZ}(V_\mu) \in (\mathcal{V}\pi)_{\phi(x)}$ (ésta es la derivada vertical de un campo de vectores en Z). A partir de la forma de volumen η , construimos también una familia de 1-formas η_i como sigue:

$$\eta_\mu(x) = (-1)^{n+1-\mu} \iota_{T_{j_x^1\phi}\pi_{XZ}(V_0)} \cdots \widehat{\iota_{T_{j_x^1\phi}\pi_{XZ}(V_\mu)}} \cdots \iota_{T_{j_x^1\phi}\pi_{XZ}(V_n)} \eta(x),$$

donde el acento circunflejo sobre un factor significa que el factor se omite.

Finalmente, definimos el **endomorfismo vertical** S_η como sigue:

$$(S_\eta)_{j_x^1\phi}(V_0, \dots, V_n) = \sum_{\mu=0}^n \left(\eta_\mu(x) \otimes (T_{j_x^1\phi}\pi_{YZ}(V_\mu) - T_x\phi \circ T_{j_x^1\phi}\pi_{XZ}(V_\mu)) \right)^v.$$

Si tomáramos una forma de volumen diferente $F\eta$, donde F es una función en X que no se anula, entonces $(F\eta)_\mu = F\eta_\mu$, de donde también obtenemos $S_{F\eta} = FS_\eta$.

El endomorfismo vertical se escribe en coordenadas locales como sigue:

$$S_\eta = (dy^i - z_\mu^i dx^\mu) \wedge d^n x_\nu \otimes \frac{\partial}{\partial z_\nu^i}$$

2.3.2. Formas de contacto. Prolongación jet de campos de vectores

Las formas de contacto son un tipo especial de formas que se utilizan para distinguir secciones de π_{XZ} que son prolongaciones 1-jet de secciones de π , esto es, las **secciones holónomas**.

Definición 2.3.2. Una 1-forma $\theta \in \Lambda^1(Z)$ se dice que es una **1-forma de contacto** (o en breve, una forma de contacto) cuando

$$(j^1\phi)^*\theta = 0$$

para cada sección ϕ de π .

Si (x^μ, y^i, z_μ^i) es un sistema de coordenadas locales en Z , entonces las formas de contacto están localmente generadas por la familia de 1-formas

$$\theta^i = dy^i - z_\mu^i dx^\mu$$

En efecto, si $\lambda = A_\mu dx^\mu + B_i dy^i + C_i^\mu dz_\mu^i$ fuese la expresión local de una forma de contacto, entonces $(j^1\phi)^*\lambda = 0$ se expresaría como

$$(j^1\phi)^*A_\mu + (j^1\phi)^*B_i \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu} + (j^1\phi)^*C_i^\nu \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0$$

para todas las secciones $\phi \in \Gamma(\pi)$. Como $j^1\phi$ se expresa sólo en términos de las primeras derivadas, de la expresión anterior deducimos que $C_i^\mu = 0$ y $A_\mu = -B_i z_\mu^i$, o en otras palabras, $\lambda = B_i \theta^i$.

Denotaremos por \mathcal{C} el ideal algebraico y por $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ el ideal diferencial generados respectivamente por las formas de contacto, en otras palabras, $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ es el ideal del álgebra exterior generado por las formas de contacto y sus diferenciales.

La distribución determinada por la anulación de las formas de contacto en Z se llama la **distribución de Cartan**, y juega un papel fundamental, puesto que es la estructura geométrica que diferencia las secciones holónomas (aquéllas que son prolongación de secciones de π_{XY}) de secciones arbitrarias de π_{XZ} . De hecho, se puede probar fácilmente, a partir de la expresión anterior en coordenadas, que

Proposición 2.3.3. *Dada $\sigma \in \Gamma(\pi_{XZ})$, si $\sigma^*\theta = 0$ para cada $\theta \in \mathcal{C}$, entonces σ es holónoma, esto es, $\sigma = j^1\phi$ para cierta $\phi \in \Gamma(\pi)$.*

Demostración. Si σ se expresa localmente como $\sigma(x) = (x, \sigma^i(x), \sigma_\mu^i(x))$, entonces

$$0 = \sigma^*\theta^i = d\sigma^i - \sigma_\mu^i dx^\mu = \left[\frac{\partial \sigma^i}{\partial x^\mu} - \sigma_\mu^i \right] dx^\mu$$

y por tanto $\sigma_\mu^i = \partial \sigma^i / \partial x^\mu$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. ■

Las formas de contacto pueden también definirse para orden superior, y ser utilizadas para distinguir secciones holónomas de no holónomas. Ver [13, 87, 136] para más detalles.

La distribución de Cartan puede también ser utilizada para inducir campos de vectores en Z a partir de campos de vectores de una forma natural, que se denomina su prolongación 1-jet.

Proposición 2.3.4. *Para cada campo de vectores X en Z , las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(i) *Para cada campo de vectores Y que recorre la distribución de Cartan, $\mathcal{L}_X Y$ pertenece a la distribución de Cartan; equivalentemente, X preserva la distribución de Cartan*

(ii) *X preserva \mathcal{C} , o equivalentemente, para cada $\theta \in \mathcal{C}$, $\mathcal{L}_X \theta \in \mathcal{C}$.*

Si cualesquiera de las dos anteriores es cierta, entonces X preserva $\mathcal{I}(\mathcal{C})$, o equivalentemente, para cada $\alpha \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$, $\mathcal{L}_Y \alpha \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$.

Demostración. Para todo Y en la distribución de Cartan, y toda $\theta \in \mathcal{C}$, $\theta(Y) = 0$ y tenemos que

$$(\mathcal{L}_X \theta)(Y) = \mathcal{L}_X(\theta(Y)) - \theta(\mathcal{L}_X Y) = -\theta(\mathcal{L}_X Y)$$

por tanto, (i) y (ii) son equivalentes.

Finalmente, $\mathcal{L}_X d\theta = d\mathcal{L}_X \theta$ proporciona la compatibilidad respecto a la diferencial exterior, de donde obtenemos la preservación del ideal diferencial $\mathcal{I}(\mathcal{C})$. ■

Definición 2.3.5. *Dado un campo de vectores $\xi_Y \in \mathfrak{X}(Y)$, entonces su **prolongación 1-jet** se define como el único campo de vectores $\xi_Y^{(1)} \in \mathfrak{X}(Z)$ proyectable sobre ξ_Y por π_{YZ} , y que preserva la distribución de Cartan (equivalentemente, $\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}} \theta \in \mathcal{C}$ para cada forma de contacto θ).*

Si ξ_Y se expresa localmente como

$$\xi_Y = \xi_Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \xi_Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

entonces la prolongación 1-jet de ξ_Y adquiere la forma siguiente:

$$\xi_Y^{(1)} = \xi_Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \xi_Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \left(\frac{d\xi_Y^i}{dx^\mu} - z_\nu^i \frac{d\xi_Y^\nu}{dx^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial z_\mu^i} \quad (2.3)$$

Supongamos que la expresión local de $\xi_Y^{(1)}$ es

$$\xi_Y^{(1)} = \xi_Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \xi_Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \xi_{\mu Y}^i \frac{\partial}{\partial z_\mu^i} \quad (2.4)$$

Para ver que (2.4) tiene la forma (2.3), tomemos $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, e impongamos la segunda condición $\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}} \theta^i \in \mathcal{C}$. Como obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}(dy^j) &= \frac{\partial \xi_Y^i}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial \xi_Y^i}{\partial y^j} dy^j \\ \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}(z_\mu^i dx^\mu) &= \xi_{\mu Y}^i dx^\mu + z_\mu^i \left(\frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu + \frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial y^j} dy^j \right) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}} \theta^i &= \frac{\partial \xi_Y^i}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial \xi_Y^i}{\partial y^j} dy^j - \xi_{\mu Y}^i dx^\mu - z_\mu^i \left(\frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu + \frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial y^j} dy^j \right) \\ &= \left(\frac{\partial \xi_Y^i}{\partial y^j} - z_\mu^i \frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial y^j} \right) dy^j - \left(-\frac{\partial \xi_Y^i}{\partial x^\nu} + \xi_{\nu Y}^i + z_\mu^i \frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial x^\nu} \right) dx^\nu \end{aligned}$$

Y por tanto,

$$-\frac{\partial \xi_Y^i}{\partial x^\nu} + \xi_{\nu Y}^i + z_\mu^i \frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial x^\nu} = z_\nu^j \left(\frac{\partial \xi_Y^i}{\partial y^j} - z_\mu^i \frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial y^j} \right),$$

y obtenemos

$$\xi_{\mu Y}^i = \frac{d\xi_Y^i}{dx^\mu} - z_\mu^j \frac{d\xi_Y^j}{dx^\mu}.$$

La prolongación jet de campos de vectores tiene también la siguiente interesante propiedad:

Proposición 2.3.6. *Si ξ_Y es un campo de vectores en Y tangente a una subvariedad en Y definida por $F \equiv 0$ (para $F \in \mathcal{C}^\infty(Y)$), entonces $\xi_Y^{(1)}$ es tangente a las subvariedades de $J^1\pi$ definidas por $F \circ \pi_Y Z = 0$, y $G_\mu \equiv \frac{dF}{dx^\mu} = 0$.*

Demostración. En esta prueba, usaremos la misma letra F para denotar a $F \circ F \circ \pi$ cuando las expresiones sean escritas en Z . Usaremos coordenadas locales y denotaremos

$$\xi_Y = \xi_Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \xi_Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

y

$$G_\mu = \frac{dF}{dx^\mu} = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} + z_\mu^i \frac{\partial F}{\partial y^i}.$$

Por hipótesis,

$$\xi_Y^\nu \frac{\partial F}{\partial x^\nu} + \xi_Y^i \frac{\partial F}{\partial y^i} = 0.$$

Podemos calcular la derivada total de la expresión anterior, y evaluarla en la variedad definida por $F = 0$ y $G_\mu = 0$ en Z y obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\xi_Y^\nu}{dx^\mu} \frac{\partial F}{\partial x^\nu} + \xi_Y^\nu \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial F}{\partial x^\nu} + \frac{d\xi_Y^i}{dx^\mu} \frac{\partial F}{\partial y^i} + \xi_Y^i \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial F}{\partial y^i} \\ &= \frac{d\xi_Y^\nu}{dx^\mu} \frac{\partial F}{\partial x^\nu} + \xi_Y^\nu \frac{\partial G_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{d\xi_Y^i}{dx^\mu} \frac{\partial F}{\partial y^i} + \xi_Y^i \frac{\partial G_\mu}{\partial y^i} \\ &= -\frac{d\xi_Y^\nu}{dx^\mu} z_\nu^i \frac{\partial F}{\partial y^i} + \xi_Y^\nu \frac{\partial G_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{d\xi_Y^i}{dx^\mu} \frac{\partial F}{\partial y^i} + \xi_Y^i \frac{\partial G_\mu}{\partial y^i} \end{aligned}$$

donde la última igualdad la hemos evaluado en $G_\mu = 0$. Ahora bien obsérvese que $\frac{\partial F}{\partial y^i} = \frac{\partial G_\mu}{\partial z_\gamma^i}$, por tanto, la última expresión se convierte precisamente en $\xi_Y^{(1)}(G_\mu) = 0$. ■

Corolario 2.3.7. *Si ξ_Y es un campo de vectores en Y tangente a la imagen de cierta $\phi \in \Gamma(\pi)$ entonces $\xi_Y^{(1)}$ es tangente a la imagen de $j^1\phi$.*

Es una consecuencia directa de la proposición anterior, utilizando la función F descrita localmente por $F = \phi^i(x) - y^i$.

La prolongación 1-jet de campos de vectores es un homomorfismo de álgebras de Lie, como podemos ver en

Proposición 2.3.8. *Para cada $\xi, \zeta \in \mathfrak{X}(Y)$,*

$$[\xi, \zeta]^{(1)} = [\xi^{(1)}, \zeta^{(1)}]$$

Demostración. $[\xi^{(1)}, \zeta^{(1)}]$ proyecta obviamente sobre $[\xi, \zeta]$, y si α es una forma de contacto, entonces

$$\mathcal{L}_{[\xi^{(1)}, \zeta^{(1)}]}\alpha = \mathcal{L}_{\xi^{(1)}}\mathcal{L}_{\zeta^{(1)}}\alpha - \mathcal{L}_{\zeta^{(1)}}\mathcal{L}_{\xi^{(1)}}\alpha$$

lo cual es obviamente un elemento de \mathcal{C} . ■

Si ξ_Y es proyectable sobre un campo de vectores $\xi_X \in \mathfrak{X}(X)$, hay una forma natural y alternativa de definir su prolongación 1-jet, que se usará más adelante. Si ξ_Y proyecta sobre ξ_X , con flujos Φ_t^Y y Φ_t^X respectivamente, entonces $\Phi_t^Z : Z \rightarrow Z$ definida por $\Phi_t^Z(j_x^1(\phi)) = j_{\Phi_t^X(x)}^1(\Phi_t^Y \circ \phi \circ (\Phi_t^X)^{-1})$ es el flujo de la prolongación 1-jet de ξ_Y (ver [149] para más detalles).

Lema 2.3.9. *Para cada campo de vectores $\xi_Y \in \mathfrak{X}(Y)$ que sea π_{XY} -proyectable, y cualquier forma $\alpha \in \wedge Z$, y cualquier sección $\phi : X \rightarrow Y$ de π , tenemos*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (j^1(\Phi_t^Y \circ \phi \circ (\Phi_t^X)^{-1}))^*\alpha = (j^1\phi)^*\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\alpha$$

donde Φ_t^Y y Φ_t^X son los flujos inducidos por ξ_Y y su proyección a X , respectivamente.

Para una prueba de este lema, ver [149], p. 129; la prueba del lema 4.4.5 de la referencia puede generalizarse para demostrar este lema.

2.3.3. Conexiones de Ehresmann y multivectores

Recordemos que, para una fibración $\pi : E \rightarrow M$ dada, una **conexión en el sentido de Ehresmann** es una distribución complementaria al fibrado vertical. En otras palabras, es una distribución \mathcal{H} en E tal que tenemos la siguiente suma de Whitney de fibrados vectoriales:

$$TE = \mathcal{H} \oplus V\pi$$

La conexión se dice **llana** cuando la distribución horizontal es integrable, y en tal caso, el teorema de Frobenius garantiza la existencia de secciones locales horizontales en cada punto de E .

Recordemos también que dada una sección $\phi : M \longrightarrow E$, para cada punto $x \in M$ tenemos que $T_x\phi(T_xM)$ es un subespacio horizontal de $T_{\phi(x)}E$, por lo que los subespacios horizontales pueden ser considerados como las aproximaciones infinitesimales a las secciones, de la misma forma que los vectores tangentes son aproximaciones lineales a trayectorias. Si tenemos que $T_x\phi(T_xM) = \mathcal{H}_{\phi(x)}$ entonces decimos que σ es una **sección integral local** de la conexión en $\phi(x)$.

Relacionamos ahora los espacios horizontales con multicampos. Un multicampo $Y \in \mathfrak{X}^k(E)$ se dice que es **localmente descomponible** si para cada $p \in E$, existe un entorno abierto U_p de p , e $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(U_p)$ tal que $Y = Y_1 \wedge \dots \wedge Y_k$ en U_p .

Decimos que una distribución D de rango k en E está localmente asociada a un k -multicampo de vectores Y que no se anula en E si existe un subconjunto abierto conexo U de E tal que $Y|_U$ es una sección de $\Lambda^k D|_U$. Dos de tales multicampos Y e Y' se dirán equivalentes si existe una función $f \in C^\infty(U)$ tal que $Y' = fY$. En [39, 40, 41], se prueba que hay una correspondencia biunívoca entre clases de equivalencia de k -multicampos localmente descomponibles que no se anulan, y distribuciones k -dimensionales y orientables en TE .

En secciones posteriores, examinaremos la relación entre multivectores, conexiones de Ehresmann de la fibración $\pi_{XZ} : Z \longrightarrow X$, y soluciones a las ecuaciones de campos.

Consideremos una conexión de Ehresmann en $\pi_{XZ} : Z \longrightarrow X$ con proyector horizontal \mathbf{h} , que en coordenadas locales adaptadas se escribe

$$\begin{cases} \mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{\partial}{\partial z_\nu^i} \\ \mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) &= 0 \\ \mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial z_\mu^i}\right) &= 0 \end{cases}$$

Una sección horizontal local $\sigma \in \Gamma(\pi_{XZ})$ verifica

$$\mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = T\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \quad (2.5)$$

que es lo mismo que decir $\Gamma_\mu^i = \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^\mu}$ y $\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{\partial \sigma_\nu^i}{\partial x^\mu}$.

Podemos ahora introducir el concepto de **campo de jets de primer orden**, que es una sección $\gamma : Z \longrightarrow J^1\pi_{XZ}$ de la proyección $J^1\pi_{XZ} \longrightarrow Z$. Una sección $\sigma \in \Gamma(\pi_{XZ})$ se dice que es una **sección integral local** de γ cuando $j^1\sigma = \gamma \circ \sigma$, que se expresa localmente como sigue, si $\gamma(x^\mu, y^i, z_\mu^i) = (x^\mu, y^i, z_\mu^i, \Gamma_\nu^i(x^\mu, y^i, z_\mu^i), \Gamma_{\nu\zeta}^i(x^\mu, y^i, z_\mu^i))$, entonces obtenemos $\Gamma_\mu^i = \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^\mu}$ y $\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{\partial \sigma_\nu^i}{\partial x^\mu}$.

No está garantizada la existencia de secciones integrales locales para un campo de jets dado, ni siquiera localmente. Si hay secciones integrales, el campo de jets se dice que es **integrable**. Dos secciones π_{XZ} son secciones integrales de la misma conexión en $\sigma(z)$ si y sólo si ambas son tangentes entre sí en tal punto. De forma no sorprendente pues, existe una biyección entre conexiones de $X \longrightarrow Z$ y campos de jets de primer orden, y si σ es una sección integral local de un campo de jets, la relación entre ellos viene dada por

$$\mathcal{H}_z = T\sigma_x(T_xX)$$

Una conexión se dice que es **llana** cuando tiene una sección horizontal global. Así, de las expresiones anteriores obtenemos que una conexión es llana si y sólo si su campo de jets asociado es integrable.

Distinguimos las conexiones cuyas secciones integrales son prolongaciones jet de secciones de π , las llamadas conexiones semiholónicas.

Para empezar, notar que hay dos subvariedades muy especiales de $J^1\pi_{XZ}$ que describimos debajo.

En primer lugar, $J^2\pi$ puede embeberse canónicamente en $J^1\pi_{XZ}$. Si elegimos coordenadas $(x^\mu, y^i, z_\mu^i, y_{;\nu}^i, z_{\mu;\nu}^i)$ en $J^1\pi_{XZ}$, entonces el embebimiento viene dado localmente por $\iota(x^\mu, y^i, z_\mu^i, y_{;\nu}^i, z_{\mu;\nu}^i) = (x^\mu, y^i, z_\mu^i, y_{;\nu}^i, y_{;\nu}^i, z_{\mu;\nu}^i)$. De hecho,

$$\iota(J^2\pi) = \{j_x^1\sigma \in J^1\pi_{XZ} \mid \sigma = j^1(\pi_{YZ} \circ \sigma)\} = \{j_x^1(j^1\phi) \mid \phi \in \Gamma(\pi)\}$$

En la práctica, identificaremos $J^2\pi$ con su imagen, y la consideraremos una subvariedad de $J^1\pi_{XZ}$.

En segundo lugar, definimos

$$\hat{J}^2(\pi) = \{j_x^1\sigma \in J^1\pi_{XZ} \mid \sigma(x) = j_x^1(\pi_{YZ} \circ \sigma)\}$$

Definición 2.3.10. Decimos que una conexión es **semiholónoma** (resp. **holónoma**) cuando su campo de jet asociado toma valores en $\hat{J}^2\pi$ (resp. $J^2\pi$).

Tenemos la siguiente caracterización:

Proposición 2.3.11. Una conexión en $\pi_{XZ} : Z \rightarrow X$, con proyector horizontal \mathbf{h} es semiholónoma si y sólo si

$$S_\eta(\mathbf{h}, \dots, \mathbf{h}) = 0$$

lo que significa en coordenadas que $\Gamma_\mu^i = z_\mu^i$ (ver [100] para más detalles).

Finalmente, unas palabras sobre conexiones definidas en subvariedades. En el caso general, supongamos que $\pi : E \rightarrow M$ es una fibración, y $P \subseteq E$ es una subvariedad, embebida vía $i : P \rightarrow E$.

Definición 2.3.12. Una sección \mathbf{h} de la fibración $\bigcup_{z \in P} \text{Lin}(T_z E, T_z P) \rightarrow P$ que verifica

$$\mathbf{h}_z^2 = \mathbf{h}_z, \quad \ker \mathbf{h}_z = (\mathcal{V}\pi)_z$$

para todo $z \in P$ será llamada una **conexión** en P . La conexión se dirá **llana** cuando la distribución $\text{Im} \mathbf{h}$ en P sea completamente integrable.

Tenemos los siguientes resultados (ver por ejemplo [35])

Proposición 2.3.13. Sea \mathbf{h} una conexión en P . Entonces:

1. $\pi(P)$ es un abierto de M , y $\pi|_P : P \rightarrow \pi(P)$ es una fibración.
2. $J^1(\pi \circ i)$ es una subvariedad de $J^1\pi$.
3. La conexión \mathbf{h} define un campo de jets de primer orden ξ en la fibración $\pi \circ i : P \rightarrow \pi(P)$.
4. La conexión \mathbf{h} es llana si y sólo si ξ es integrable.

2.3.4. Espacio de jets dual, forma de Liouville y forma multisimpléctica

Cuando introdujimos el fibrado de jets de primer orden, listamos brevemente los distintos enfoques al concepto de fibrado de jets, siendo uno de ellos una cierta estructura afín sobre Y .

El fibrado dual afín del fibrado de jets se llama el **fibrado de jets dual**, y habitualmente se denota por $J^1\pi^*$, aunque nosotros lo denotaremos simplemente por Z^* . Se propone aquí una definición alternativa de este fibrado.

Definición 2.3.14. *Consideremos las familias de espacios de formas*

$$\Lambda_r^{n+1}Y := \{\sigma \in \Lambda^{n+1}Y \mid \iota_{V_1} \dots \iota_{V_r} \sigma = 0, \forall V_i \pi\text{-vertical } 1 \leq i \leq r\}$$

que definen la siguiente filtración

$$\Lambda^{n+1}Y \subseteq \Lambda_1^{n+1}Y \subseteq \Lambda_2^{n+1}Y \subseteq \dots \subseteq \Lambda_{n+1}^{n+1}Y.$$

En particular, los elementos de $\Lambda_1^{n+1}Y$ se llaman **$(n+1)$ -formas semibásicas**. Es un fibrado sobre Y de rango $(n+1+m+1)$, cuyos elementos pueden expresarse localmente como $p(x,y)d^{n+1}x$.

De forma similar, $\Lambda_2^{n+1}Y$ es un fibrado vectorial sobre Y de rango $(n+1+m+(n+1)m+1)$, teniendo a $\Lambda_1^{n+1}Y$ como subfibrado, y cuyos elementos se expresan localmente como $p(x,y)d^{n+1}x + p_i^\mu(x,y)dy^i \wedge d^n x_\mu$. La proyección natural se denotará:

$$\nu_r : \Lambda_r^{n+1}Y \longrightarrow Y$$

El fibrado cociente

$$Z^* := \Lambda_2^{n+1}Y / \Lambda_1^{n+1}Y$$

es un fibrado vectorial sobre Y de rango $n+1+m+(n+1)m$ cuyos elementos pueden ser localmente expresados por $p_i^\mu(x,y)dy^i \wedge d^n x_\mu$, y que se llama el **fibrado de jets dual de primer orden**. La proyección canónica se denotará por $\mu : \Lambda_2^{n+1}Y \longrightarrow Z^*$.

Localmente, podemos elegir coordenadas fibradas (x^μ, y^i, p_i^μ, p) para $\Lambda_2^{n+1}Y$ y (x^μ, y^i, p) para $\Lambda_1^{n+1}Y$, de forma que tenemos coordenadas (x^μ, y^i, p_i^μ) en Z^* .

Definimos una proyección $\pi_{XZ^*} : Z^* \longrightarrow X$, inducida por ν_2 en el cociente Z^* .

Recordemos que $\Lambda_2^{n+1}Y$ está equipado con la $(n+1)$ -forma de Liouville, y con la $(n+2)$ -forma multisimpléctica canónica, las cuales denotaremos simplemente por Θ y Ω , respectivamente.

2.3.5. Elevación de campos de vectores al fibrado de jets dual

Un campo de vectores ξ_Y en Y , con flujo ϕ_t , admite una elevación natural a $\Lambda^k Y$ para cada k con flujo $(\phi_t^{-1})^*$.

Si el campo de vectores ξ_Y es proyectable, entonces el flujo preserva $\Lambda_2^{n+1}Y$ y $\Lambda_1^{n+1}Y$, y por tanto podemos definir en $\Lambda_2^{n+1}Y$ un campo de vectores que proyecta en un campo en Z^* , que denotaremos por $\xi_Y^{(1*)}$.

En general, si α es el pull-back a $\Lambda_2^{n+1}Y$ de cierta n -forma semibásica en Y , expresada localmente por

$$\alpha = \alpha^\nu(x^\mu, y^i) d^n x_\nu,$$

la condición adicional $\mathcal{L}_{\xi_Y^\alpha} \Theta = d\alpha$ impuesta a campos de vectores en $\Lambda^{n+1}Y$ que proyectan en ξ_Y , determina un campo de vectores en $\Lambda^{n+1}Y$ que puede definirse en $\Lambda_2^{n+1}Y$.

En otras palabras, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.15. *Si α es el pull-back a $\Lambda_2^{n+1}Y$ de una forma π_{XY} -semibásica, entonces el α -levantamiento de un campo de vectores ξ_Y en Y a $\Lambda_2^{n+1}Y$ se define como el único campo de vectores ξ_Y^α que satisface:*

$$(1) \xi_Y^\alpha \text{ proyecta sobre } \xi_Y$$

$$(2) \mathcal{L}_{\xi_Y^\alpha} \Theta = d\alpha$$

Si $\xi_Y = \xi_Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \xi_Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$, entonces $\xi_Y^\alpha = \xi_Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \xi_Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \xi_Y^p \frac{\partial}{\partial p} + \xi_Y^{p_i^\mu} \frac{\partial}{\partial p_i^\mu}$, donde las componentes ξ_Y^p y $\xi_Y^{p_i^\mu}$ están determinadas por las ecuaciones (ver también [64, 140]):

$$\begin{aligned} \xi_Y^p &= -p \frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial x^\mu} - p_i^\mu \frac{\partial \xi_Y^i}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \alpha^\mu}{\partial x^\mu} \\ \xi_Y^{p_i^\mu} &= p_i^\nu \frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial x^\nu} - p_j^\mu \frac{\partial \xi_Y^j}{\partial y^i} - p_i^\mu \frac{\partial \xi_Y^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \alpha^\mu}{\partial y^i} \end{aligned}$$

Cuando ξ_Y es π_{XY} -proyectable, con flujo ϕ_t , entonces el flujo del 0-levantamiento es precisamente $(\phi_t^{-1})^*$.

Teorías clásicas de campos

Entre los posibles formalismos geométricos para describir las teorías clásicas de campos, elegimos el marco multisimpléctico. En este marco, una teoría de primer orden se modeliza por una fibración adecuada $\pi : Y \longrightarrow X$ (X tiene borde posiblemente), donde X es la variedad espacio-temporal, y las secciones de π representan los campos. X se supone orientada y con una forma de volumen fija η .

Por ejemplo, la mecánica dependiente del tiempo puede ser considerada como una de estas teorías, donde $X = \mathbb{R}$ e Y se escoge como $Q \times \mathbb{R}$, donde Q es la variedad de configuraciones.

Históricamente, la descripción multisimpléctica de las teorías clásicas de campos se remonta a finales de los sesenta, cuando fue desarrollada por la escuela polaca dirigida por W. Tulczyjew (ver [9, 83, 84, 85, 152]), y también independientemente por P.L. García y A. Pérez-Rendón [52, 53, 54], y por otro lado, H. Goldschmidt y S. Sternberg [58]. Desde entonces, este tema ha merecido mucha atención de forma continuada, especialmente desde el trabajo [21], y más recientemente, [8, 49, 50, 51, 72, 73, 74, 88, 92, 104, 140, 141]. Un intento serio de obtener un desarrollo pleno de la teoría ha sido realizado en las monografías [64, 65] (ver también [117] para teorías de orden superior). Además, el enfoque multisimpléctico está demostrando ser útil respecto a consideraciones numéricas [126]. Notemos que hay también enfoques alternativos, utilizando las llamadas estructuras polisimplécticas (ver [55, 56, 82, 145, 146, 147]) o también estructuras n -simplécticas (ver [98] para un reciente estado del arte).

Finalmente, la teoría para orden superior ha sido estudiada en [157]. Además, las ideas que subyacen en el estudio de las ecuaciones de Euler-Poincaré, que aparecen como ecuaciones reducidas de otras ecuaciones sobre fibrados principales, se han intentado extender a la teoría clásica de campos utilizando variedades de jets en [22, 23].

En este capítulo utilizaremos el formalismo de variedades jet introducido en los capítulos anteriores. Si X tiene borde ∂X , también lo tiene Z , definiendo $\partial Z := \pi_{XZ}^{-1}(\partial X)$, y de forma similar Y , $\partial Y := \pi_{XY}^{-1}(\partial X)$.

Las condiciones de frontera se introducen como un subfibrado $B \subseteq \partial Z$ del fibrado $\partial Z \rightarrow \partial X$ (y de $\partial Z \rightarrow \partial Y$).

En este contexto geométrico, se pueden presentar las ecuaciones de campos en dos visiones alternativas: en términos de multivectores (ver [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 45, 50]), o en términos de conexiones de Ehresmann [96, 99, 100, 116]. En lo que sigue, nos centraremos en el estudio de las ecuaciones en términos de conexiones de Ehresmann.

3.1. Descripción lagrangiana

3.1.1. Formalismo lagrangiano

Elegimos una **forma lagrangiana** \mathcal{L} , que es una $(n+1)$ -forma π_{XZ} -semibásica en Z . Por lo tanto, $\mathcal{L} = L\eta$ para cierta función $L \in C^\infty(Z)$, que se llama la **función lagrangiana** o simplemente, **lagrangiano**. En el caso de la mecánica, corresponde a un lagrangiano dependiente del tiempo.

Introduzcamos la siguiente notación local, que usaremos a menudo.

Definición 3.1.1. Denotamos por

$$\hat{p}_i^\mu := \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i}$$

y por

$$\hat{p} := L - z_\mu^i \hat{p}_i^\mu$$

Definición 3.1.2. Para una forma lagrangiana \mathcal{L} y una forma de volumen fija η se define la $(n+1)$ -**forma de Poincaré-Cartan** como

$$\Theta_L := \mathcal{L} + (S_\eta)^*(dL) \quad (3.1)$$

En coordenadas inducidas, tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Theta_L &= \left(L - z_\mu^i \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \right) d^{n+1}x + \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} dy^i \wedge d^n x_\mu \\ &= \mathcal{L} + \hat{p}_i^\mu \theta^i \wedge d^n x_\mu \\ &= (\hat{p} dx^\mu + \hat{p}_i^\mu dy^i) \wedge d^n x_\mu \end{aligned}$$

A partir de esta forma, definimos también su diferencial:

Definición 3.1.3. La $(n+2)$ -**forma de Poincaré-Cartan** se define como

$$\Omega_L := -d\Theta_L.$$

En coordenadas inducidas, tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Omega_L &= -(dy^i - z_\mu^i dx^\mu) \wedge \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} d^{n+1}x - d \left(\frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \right) \wedge d^n x_\mu \right) \\ &= -\theta^i \wedge \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} d^{n+1}x - d\hat{p}_i^\mu \wedge d^n x_\mu \right) \\ &= (d\hat{p} \wedge dx^\mu + d\hat{p}_i^\mu \wedge dy^i) \wedge d^n x_\mu \end{aligned}$$

Nota 3.1.4. Una elección diferente para la forma de volumen η no cambia las formas de Poincaré-Cartan. Si reemplazamos η por una nueva forma de volumen $F\eta$ ($F > 0$), y denotamos por $\tilde{L} = L/F$, tendríamos que $\mathcal{L} = L\eta = \tilde{L}F\eta$ y usando los cálculos anteriores obtendríamos que $\Theta_L = \Theta_{\tilde{L}}$. Por tanto, podríamos usar la notación $\Theta_{\mathcal{L}}$ and $\Omega_{\mathcal{L}}$ (ver [37]).

En este punto introducimos también una hipótesis extra, que es la existencia de una n -forma Π en B tal que

$$i_B^* \Theta_L = d\Pi$$

donde $i_B : B \rightarrow Z$ es la inclusión canónica (ver [9]).

De la expresión en coordenadas deducimos las siguientes propiedades:

Proposición 3.1.5. *Se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $(j^1\phi)^* \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}(\mathcal{L}) = (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}(\Theta_L)$

(ii) Para cada $z \in Z$ y cada dos vectores tangentes π_{XZ} -verticales $v, w \in \mathcal{V}_z\pi_{XZ}$,

$$\iota_v \iota_w (\Theta_L)_z = 0$$

(iii) Para cada $z \in Z$ y cada tres vectores tangentes π_{XZ} -verticales $u, v, w \in \mathcal{V}_z\pi_{XZ}$,

$$\iota_u \iota_v \iota_w (\Omega_L)_z = 0$$

La siguiente proposición será usada más adelante.

Proposición 3.1.6. *Si σ es una sección de π_{XZ} y ξ es un campo de vectores en Z tangente a σ , entonces*

$$\sigma^*(\iota_\xi \Omega_L) = 0$$

Demostración. $\xi = T\sigma(\lambda)$ a lo largo de σ para cierto $\lambda \in \mathfrak{X}(X)$. Por tanto,

$$\sigma^*(\iota_\xi \Omega_L) = \sigma^*(\iota_{T\sigma(\lambda)} \Omega_L) = \iota_\lambda(\sigma^* \Omega_L) = 0$$

porque $\sigma^* \Omega_L$ sería una $(n+2)$ -forma en una variedad $(n+1)$ -dimensional. ■

La dinámica del sistema viene dada por secciones ϕ de π_{XY} que verifican las condiciones de frontera $(j^1\phi)(\partial X) \subseteq B$ y que extremizan la **integral de acción**

$$S(\phi) = \int_{(j^1\phi)(C)} \mathcal{L}$$

para cada subvariedad $(n+1)$ -dimensional compacta C de X .

Las variaciones a tales secciones se introducen por pequeñas perturbaciones de una cierta sección ϕ a lo largo de trayectorias de un campo de vectores proyectable ξ_Y ; en otras palabras, si Φ_t^Y es el flujo de ξ_Y , se definen las **variaciones** como las secciones $\phi_t := \Phi_t^Y \circ \phi \circ \Phi_{-t}^X$.

Definición 3.1.7. *Una sección $\phi \in \Gamma(\pi)$ es un **extremal** de S si*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{(j^1\phi_t)(C)} \mathcal{L} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_C (j^1\phi_t)^* \mathcal{L} = 0$$

para toda subvariedad $(n+1)$ -dimensional compacta C de X , y para cada campo de vectores proyectable $\xi_Y \in \mathfrak{X}(Y)$

Como C se elige compacto, la derivada respecto de t conmuta con la integral, y el lema 2.3.9 nos permite reescribir la condición de extremalidad como

$$\int_C (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}(\mathcal{L}) = 0 \quad (3.2)$$

Teorema 3.1.8. *Si ϕ es un extremal de L , entonces para cada subvariedad compacta C de X , tal que $\phi(C)$ está contenido en un entorno coordinado (x^μ, y^i) , y para cada campo de vectores proyectable ξ_Y en Y tenemos que*

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C (j^2\phi)^* \left[\frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \right] (\xi_Y^i - z_\nu^i \xi_Y^\nu) \eta \\ &\quad + \int_{\partial C} (j^1\phi)^* (\iota_{\xi_Y^{(1)}} \Theta_L) \end{aligned}$$

Si ϕ es un extremal para el problema variacional con valores fijos en el borde de C , entonces ϕ satisface las **ecuaciones de Euler-Lagrange**

$$(j^2\phi)^* \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \right) = 0, 1 \leq i \leq m$$

Demostración. Un cálculo en la fórmula anterior nos da

$$\begin{aligned} \int_C (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}(\mathcal{L}) &= \int_C (j^1\phi)^* \xi_Y^{(1)}(L) \eta + \int_C (j^1\phi)^* L(\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}(\eta)) \\ &= \int_C (j^1\phi)^* \xi_Y^\mu \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \eta + \int_C (j^1\phi)^* \xi_Y^i \frac{\partial L}{\partial y^i} \eta \\ &\quad + \int_C (j^1\phi)^* \left[\frac{d}{dx^\mu} \xi_Y^i - z_\nu^i \frac{d}{dx^\mu} \xi_Y^\nu \right] \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \eta + \int_C (j^1\phi)^* L(\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}(\eta)) \\ &= \int_C (j^1\phi)^* \xi_Y^\mu \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \eta + \int_C (j^1\phi)^* \xi_Y^i \frac{\partial L}{\partial y^i} \eta \\ &\quad + \int_C (j^2\phi)^* \frac{d}{dx^\mu} [\xi_Y^i - z_\nu^i \xi_Y^\nu] \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \eta + \int_C (j^2\phi)^* \xi_Y^\nu \frac{dz_\nu^i}{dx^\mu} \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \eta \\ &\quad + \int_C (j^1\phi)^* L \frac{d\xi_Y^\mu}{dx^\mu} \eta \\ &= \int_C (j^1\phi)^* \xi_Y^\mu \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \eta + \int_C (j^1\phi)^* \xi_Y^i \frac{\partial L}{\partial y^i} \eta \\ &\quad + \int_C (j^2\phi)^* \frac{d}{dx^\mu} [\xi_Y^i - z_\nu^i \xi_Y^\nu] \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \eta + \int_C (j^2\phi)^* \xi_Y^\nu \frac{dz_\nu^i}{dx^\mu} \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \eta \\ &\quad + \int_{\partial C} (j^1\phi)^* L \xi_Y^\mu d^n x_\mu - \int_C (j^1\phi)^* \xi_Y^\mu \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \eta - \int_C (j^1\phi)^* z_\mu^i \frac{\partial L}{\partial y^i} \xi_Y^\mu \eta \\ &\quad - \int_C (j^2\phi)^* \xi_Y^\mu \frac{dz_\nu^i}{dx^\mu} \frac{\partial L}{\partial z_\nu^i} \eta \\ &= \int_C (j^1\phi)^* \frac{\partial L}{\partial y^i} (\xi_Y^i - z_\mu^i \xi_Y^\mu) \eta + \int_C (j^2\phi)^* \frac{d}{dx^\mu} [\xi_Y^i - z_\nu^i \xi_Y^\nu] \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \eta \\ &\quad + \int_{\partial C} (j^1\phi)^* L \xi_Y^\mu d^n x_\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_C (j^2\phi)^* \left[\frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \right] (\xi_Y^i - z_\nu^i \xi_Y^\nu) \eta \\
&+ \int_{\partial C} (j^1\phi)^* \left[(\xi_Y^i - z_\nu^i \xi_Y^\nu) \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} + L \xi_Y^\mu \right] d^n x_\mu
\end{aligned}$$

La condición de valores fijos en el borde de C significa que $\xi_Y^\mu|_{\partial C} = \xi_Y^i|_{\partial C} = 0$, por tanto tenemos que

$$0 = \int_C (j^2\phi)^* \left[\frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \right] (\xi_Y^i - z_\nu^i \xi_Y^\nu) \eta$$

para todos ξ_Y^μ y ξ_Y^i , de donde obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange. \blacksquare

Lema 3.1.9. *Si ϕ es una sección de π_{XY} y ξ es un campo de vectores π_{YZ} -vertical en Z , entonces*

$$(j^1\phi)^*(\iota_\xi \Omega_L) = 0$$

Demostración. ξ tiene componentes $(0, 0, w_\mu^i)$, y un cálculo fácil muestra que

$$\iota_\xi \Omega_L = -w_\nu^j \frac{\partial^2 L}{\partial z_\mu^i \partial z_\nu^j} (\theta^i \wedge d^n x_\mu) \in \mathcal{I}(C)$$

que se anula al ser traído por una prolongación 1-jet de una sección de π_{XY} . \blacksquare

Proposición 3.1.10. (*Versión intrínseca de las ecuaciones de Euler-Lagrange*) *Una sección $\phi \in \Gamma(\pi)$ es un extremal de la acción S si y sólo si*

$$(j^1\phi)^*(\iota_\xi \Omega_L) = 0$$

para cada campo de vectores ξ en Z .

Demostración. Tenemos que

$$\int_C (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}(\mathcal{L}) = \int_C (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}} \Theta_L = - \int_C (j^1\phi)^* \iota_{\xi_Y^{(1)}} \Omega_L + \int_{\partial C} (j^1\phi)^* \iota_{\xi_Y^{(1)}} \Theta_L.$$

Por tanto,

$$- \int_C (j^1\phi)^* \iota_{\xi_Y^{(1)}} \Omega_L = \int_C (j^2\phi)^* \left[\frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \right] (\xi_Y^i - z_\nu^i \xi_Y^\nu) \eta$$

para cada campo de vectores proyectable ξ_Y en Y . Entonces, las ecuaciones de Euler-Lagrange se satisfacen en cada C si y sólo si

$$(j^1\phi)^* \iota_{\xi_Y^{(1)}} \Omega_L = 0$$

para cada campo de vectores proyectable ξ_Y en Y , en cada compacto C de X . Diferentes soluciones pueden pegarse usando particiones de la unidad, y así obtenemos que

$$(j^1\phi)^* \iota_{\xi_Y^{(1)}} \Omega_L = 0$$

es la expresión para secciones globales ϕ .

Finalmente, cualquier campo de vectores ξ_Z puede descomponerse en un campo de vectores tangente a $j^1\phi$, la elevación de un campo de vectores π_{XY} -vertical en Y y un campo de vectores π_{YZ} -vertical. Usando el lema precedente, y la proposición 3.1.6, obtenemos el resultado. \blacksquare

3.1.2. Lagrangianos regulares. Ecuaciones de De Donder

En algunas casos, deberemos asumir ciertas condiciones de regularidad en el lagrangiano:

Definición 3.1.11. Dada una función lagrangiana $L : Z \rightarrow \mathbb{R}$, se define su **matriz hesiana**

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial z_i^\mu \partial z_j^\nu} \right)_{\mu, \nu, i, j}$$

El lagrangiano se dice **regular en un punto** cuando dicha matriz es regular en dicho punto, y **regular** cuando es regular en todo punto.

Cuando el lagrangiano es regular, el teorema de la función implícita nos permite introducir nuevas coordenadas en Z , llamadas **coordenadas de Darboux** ([116]), más precisamente $(x^\mu, y^i, \hat{p}_i^\mu)$, que serán también muy convenientes para relacionar los formalismos lagrangiano y hamiltoniano. En este caso, la forma Ω_L es una forma multisimpléctica si $n > 0$, ya que teniendo en cuenta que

$$\iota_{\partial/\partial x^\nu} \Omega_L = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x^\nu} d^{n+1}x + d\hat{p} \wedge d^n x_\nu + d\hat{p}_i^\mu \wedge dy^i \wedge d^{n-1} x_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

$$= \frac{\partial \hat{p}}{\partial y^i} dy^i \wedge d^n x_\nu + \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{p}_i^\mu} d\hat{p}_i^\mu \wedge d^n x_\nu + d\hat{p}_i^\mu \wedge dy^i \wedge d^{n-1} x_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

$$\iota_{\partial/\partial y^j} \Omega_L = \frac{\partial \hat{p}}{\partial y^j} d^{n+1}x - d\hat{p}_j^\mu \wedge d^n x_\mu \quad (3.5)$$

$$\iota_{\partial/\partial \hat{p}_j^\nu} \Omega_L = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{p}_j^\nu} d^{n+1}x + dy^j \wedge d^n x_\nu \quad (3.6)$$

si tenemos que $\xi = A^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} + B^j \frac{\partial}{\partial y^j} + C_j^\nu \frac{\partial}{\partial \hat{p}_j^\nu}$ entonces

$$\begin{aligned} \iota_\xi \Omega_L &= \left(B^j \frac{\partial \hat{p}}{\partial y^j} - C_j^\nu \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{p}_j^\nu} \right) d^{n+1}x + \left(A^\nu \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{p}_j^\mu} - \delta_\mu^\nu B^j \right) d\hat{p}_j^\mu \wedge d^n x_\nu \\ &\quad + \left(A^\nu \frac{\partial \hat{p}}{\partial y^j} - C_j^\nu \right) dy^j \wedge d^n x_\nu + A^\nu d\hat{p}_i^\mu \wedge dy^i \wedge d^{n-1} x_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\iota_\xi \Omega_L = 0$ y $n > 0$, del último término de la expresión anterior deducimos que $A^\nu = 0$, y fácilmente obtenemos también que los otros términos B^j y C_j^ν se anulan también.

Introducimos ahora las ecuaciones de De Donder, íntimamente relacionadas con las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Definición 3.1.12. La siguiente ecuación en secciones σ de π_{XZ} se llaman las **ecuaciones de De Donder**:

$$\sigma^*(\iota_\xi \Omega_L) = 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{X}(Z) \quad (3.7)$$

Las secciones que satisfacen las ecuaciones de De Donder, y además las condiciones de frontera $\sigma(\partial X) \subseteq B$ se llaman **soluciones de la ecuación de De Donder**.

Por la proposición (3.1.6), deducimos que las ecuaciones de De Donder se pueden reescribir de forma equivalente en términos de campos de vectores π_{XZ} -verticales. En coordenadas locales, si $\sigma(x^\mu) = (x^\mu, \sigma^i(x^\mu), \sigma_\nu^i(x^\mu))$ para cada $\xi = v^i \frac{\partial}{\partial y^i} + w_\mu^i \frac{\partial}{\partial z_\mu^i}$ las ecuaciones se escriben

$$0 = -v^i \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^\nu \partial z_\nu^i} - \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial z_\mu^i} - \frac{\partial \sigma_\mu^j}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 L}{\partial z_\mu^j \partial z_\nu^i} + \left(\frac{\partial \sigma^j}{\partial x^\mu} - \sigma_\mu^j \right) \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial z_\mu^j} \right) \\ + w_\mu^i \left(\left(\frac{\partial \sigma^j}{\partial x^\nu} - \sigma_\nu^j \right) \frac{\partial^2 L}{\partial z_\mu^i \partial z_\nu^j} \right),$$

o equivalentemente

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^\nu \partial z_\nu^i} - \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial z_\mu^i} - \frac{\partial \sigma_\mu^j}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 L}{\partial z_\mu^j \partial z_\nu^i} + \left(\frac{\partial \sigma^j}{\partial x^\mu} - \sigma_\mu^j \right) \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial z_\mu^j} = 0 \\ \left(\frac{\partial \sigma^j}{\partial x^\nu} - \sigma_\nu^j \right) \frac{\partial^2 L}{\partial z_\mu^i \partial z_\nu^j} = 0 \end{aligned} \right\}$$

De la expresión anterior, deducimos inmediatamente que

Proposición 3.1.13. *Si el lagrangiano es regular, y si una sección $\sigma : X \mapsto Z$ de π_{XZ} es solución de las ecuaciones de De Donder, entonces existe una sección local $\phi : X \rightarrow Y$ de π_{XY} tal que, localmente, $\sigma = j^1 \phi$. Es decir, ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange.*

Por lo tanto, para lagrangianos regulares, las soluciones de las ecuaciones de De Donder nos dan la dinámica del sistema.

Las ecuaciones de De Donder en términos de conexiones de Ehresmann

Supongamos que tenemos una conexión Γ en $\pi : Z \rightarrow X$, con proyector horizontal \mathbf{h} que tiene la siguiente expresión local:

$$\begin{cases} \mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{\partial}{\partial z_\nu^i} \\ \mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = 0 \\ \mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial z_\mu^i}\right) = 0 \end{cases}$$

Un cálculo directo nos da

$${}_{\mathbf{h}}\Omega_L = n\Omega_L - \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial y^i} - \sum_\nu \frac{\partial^2 L}{\partial x^\nu \partial z_\nu^i} - \sum_{\nu,j} \Gamma_\nu^j \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial z_\nu^i} \right. \\ \left. - \sum_{\nu,\mu,j} \Gamma_{\mu\nu}^j \frac{\partial^2 L}{\partial z_\mu^j \partial z_\nu^i} + \sum_{\nu,j} (\Gamma_\nu^j - z_\nu^j) \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial z_\nu^j} \right] dy^i \wedge d^{n+1}x \\ - \sum_{\mu,i} \left(\sum_{\nu,j} (\Gamma_\nu^j - z_\nu^j) \frac{\partial^2 L}{\partial z_\mu^i \partial z_\nu^j} \right) dz_\mu^i \wedge d^{n+1}x$$

desde donde podemos establecer la siguiente

Proposición 3.1.14. *Sea Γ una conexión con proyector horizontal \mathbf{h} que verifica*

$$\iota_{\mathbf{h}}\Omega_L = n\Omega_L \quad (3.8)$$

Si σ es una sección horizontal integral local de Γ , entonces σ es una solución de las ecuaciones de De Donder.

Por tanto, podemos pensar las ecuaciones (3.8) como un enfoque alternativo a las ecuaciones de De Donder.

Demostración. \mathbf{h} satisface (3.8) si y sólo si

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^\nu \partial z_\nu^i} - \Gamma_\nu^j \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial z_\nu^i} - \Gamma_{\mu\nu}^j \frac{\partial^2 L}{\partial z_\mu^j \partial z_\nu^i} + (\Gamma_\nu^j - z_\nu^j) \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial z_\nu^j} = 0 \\ (\Gamma_\nu^j - z_\nu^j) \frac{\partial^2 L}{\partial z_\mu^i \partial z_\nu^j} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Si $\sigma(x^\mu) = (x^\mu, \sigma^i(x^\mu), \sigma_\nu^i(x^\mu))$ es una sección horizontal local integral de Γ , entonces tenemos que

$$\mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = T\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \quad (3.9)$$

lo que significa que $\Gamma_\mu^i = \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^\mu}$ y $\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{\partial \sigma_\nu^i}{\partial x^\mu}$, y por tanto (3.8) son las ecuaciones de De Donder en coordenadas.

Soluciones locales pueden ser pegadas usando particiones de la unidad. ■

Respecto a las condiciones de frontera, la conexión \mathbf{h} induce una conexión $\partial\mathbf{h}$ en la fibración $\pi_{\partial XB} : B \rightarrow \partial X$, puesto que estamos considerando secciones $\sigma \in \Gamma(\pi_{XZ})$ tales que $\sigma(\partial X) \subseteq B$.

De esta forma, las ecuaciones (3.8) se convierten en $\iota_{\mathbf{h}}\Omega_L = n\Omega_L$ con la condición adicional de frontera que \mathbf{h} induce $\partial\mathbf{h}$ (o, equivalentemente, $\mathbf{h}_z(T_z B) \subseteq T_z B$ para todo $z \in B$).

En el caso regular (o para conexiones semiholónomas, es decir, $\Gamma_\mu^i = z_\mu^i$), dos de estas soluciones difieren en un campo $(1, 1)$ -tensorial T , localmente dado por

$$T = T_{\mu\nu}^i dx^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial z_\mu^i}$$

y que verifica

$$T_{\mu\nu}^i \frac{\partial^2 L}{\partial z_\mu^i \partial z_\nu^j} = 0$$

Nota 3.1.15. Puede considerarse un enfoque alternativo expresando (3.8) las distribuciones horizontales integrables en términos de campos de multivectores que generan dichas distribuciones. Para más detalles ver [36, 38, 39, 40, 41, 42] y [50, 140, 141].

Finalmente, debe destacarse que el caso $n = 0$ tiene muchas diferencias con el caso $n > 0$. En este caso, Ω_L no es multisimpléctica, y corresponde al caso de la mecánica lagrangiana dependiente

del tiempo (ver [118]). La regularidad de L implica que (Y, Ω_L, dt) (donde $dt = \eta$ es la forma de volumen) es una variedad cosimpléctica. La ecuación de la conexión se reduce a

$$\iota_{\mathbf{h}}\Omega_L = 0$$

donde si denotamos $\tau = \frac{\partial}{\partial t}$ (de forma que $\langle \eta | \tau \rangle = 1$), entonces el proyector horizontal \mathbf{h} se puede escribir en coordenadas como sigue

$$\mathbf{h}(\tau) = \tau + h^i \frac{\partial}{\partial q^i} + h'^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

(para $q^i = y^i, v^i = z_0^i$). Las secciones de π_{XY} son curvas en Y , y Z está embebido en TY .

De las ecuaciones de De Donder se obtiene que $h'^i = \frac{\partial h^i}{\partial t}$, y que $h(\tau)$ verifica las ecuaciones de Euler-Lagrange dependientes del tiempo en $J^1\pi$. Aún más para un campo $(1, 1)$ -tensorial \mathbf{h} en $J^1\pi$, ser el proyector horizontal de una distribución solución de

$$\iota_{\mathbf{h}}\Omega_L = 0$$

es equivalente a tener $\xi = \mathbf{h}(\tau)$ que verifique

$$\begin{aligned} \iota_{\xi}\Omega_L &= 0 \\ \iota_{\xi}\eta &= 1 \end{aligned}$$

3.1.3. El caso singular

Para un lagrangiano singular L , uno no puede esperar encontrar soluciones globalmente definidas; en general, si tal conexión existe, lo hace sólo en una subvariedad Z_f de Z .

En [99, 100] los autores han desarrollado un algoritmo de ligaduras que extiende al algoritmo de Dirac-Bergmann-Gotay-Nester-Hinds para la mecánica (ver [63, 66, 67, 68]). Lo hemos adaptado para introducir condiciones de frontera (ver también [102]).

Pongamos $Z_1 = Z$. Entonces, consideremos el subconjunto

$$\begin{aligned} Z_2 &= \{z \in Z \mid \exists \mathbf{h}_z : T_z Z \longrightarrow T_z Z \text{ lineal tal que } \mathbf{h}_z^2 = \mathbf{h}_z, \\ &\quad \ker \mathbf{h}_z = (\mathcal{V}\pi_{XZ})_z, i_{\mathbf{h}_z}\Omega_L(z) = n\Omega_L(z), \text{ y para } z \in B, \mathbf{h}_z(T_z B) \subseteq T_z B\}. \end{aligned}$$

Si Z_2 es una subvariedad, entonces hay soluciones puntuales, pero debemos pedir también la condición de tangencia, para lo que consideramos un nuevo paso (denotando por $B_2 = B \cap Z_2$, y en general, $B_r = B \cap Z_r$):

$$\begin{aligned} Z_3 &= \{z \in Z_2 \mid \exists \mathbf{h}_z : T_z Z \longrightarrow T_z Z_2 \text{ lineal tal que } \mathbf{h}_z^2 = \mathbf{h}_z, \\ &\quad \ker \mathbf{h}_z = (\mathcal{V}\pi_{XZ})_z, i_{\mathbf{h}_z}\Omega_L(z) = n\Omega_L(z), \text{ y para } z \in B_2, \mathbf{h}_z(T_z B_2) \subseteq T_z B_2\}. \end{aligned}$$

Si Z_3 es una subvariedad de Z_2 , pero $\mathbf{h}_z(T_z Z)$ no está contenido en $T_z Z_3$, vamos a un tercer paso, y así sucesivamente. En el caso favorable, obtendríamos una subvariedad final de ligaduras Z_f de dimensión no nula, y una conexión en la fibración $\pi_{XZ} : Z \longrightarrow X$ a lo largo de la subvariedad Z_f

(de hecho, una familia de conexiones) con proyector horizontal \mathbf{h} que es una solución de la ecuación (3.8), y que verifica además las condiciones de frontera.

Hay un problema adicional, puesto que la conexión sería solución de las ecuaciones de De Donder, pero no de las ecuaciones de Euler-Lagrange, lo cual requiere que la conexión solución fuera de segundo orden. El problema se resuelve construyendo una subvariedad de Z_f donde tal solución existe (ver [99, 100] para más detalles).

3.2. Descripción hamiltoniana y teorema de la equivalencia

3.2.1. Formalismo hamiltoniano

Definición 3.2.1. Un *hamiltoniano* es una sección $h : Z^* \longrightarrow \Lambda_2^{n+1}Y$ de la proyección natural $\mu : \Lambda_2^{n+1}Y \longrightarrow Z^*$.

En coordenadas locales, h viene dada por

$$h(x^\mu, y^i, p_i^\mu) = (x^\mu, y^i, p = -H(x^\mu, y^i, p_i^\mu), p_i^\mu)$$

donde H se llama una *función hamiltoniana*.

Definición 3.2.2. Dado un hamiltoniano, definimos las siguientes formas en Z^*

$$\Theta_h := h^*\Theta$$

con expresión local

$$\begin{aligned} \Theta_h &= -H d^{n+1}x + p_i^\mu dy^i \wedge d^n x_\mu \\ &= (-H dx^\mu + p_i^\mu dy^i) \wedge d^n x_\mu \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Omega_h &:= h^*\Omega = -d\Theta_h \\ &= (-dH \wedge dx^\mu + dp_i^\mu \wedge dy^i) \wedge d^n x_\mu \end{aligned}$$

Definición 3.2.3. Para un hamiltoniano dado h , una sección $\sigma : X \longrightarrow Z^*$ de π_{XZ^*} se dice que satisface las *ecuaciones de Hamilton* si

$$\sigma^*(\iota_\xi \Omega_h) = 0$$

para todos los campos de vectores ξ en Z^* .

Si σ tiene expresión local $\sigma(x^\mu) = (x^\mu, \sigma^i(x^\mu), \sigma_i^\nu(x^\mu))$, entonces las ecuaciones de Hamilton se escriben en coordenadas como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} \\ \sum_\mu \frac{\partial \sigma_i^\mu}{\partial x^\mu} &= -\frac{\partial H}{\partial y^i} \end{aligned}$$

Podemos considerar también el caso en que tenemos condiciones de frontera dadas por un subfibrado $B^* \subseteq \partial Z^*$ of $\tilde{\pi}_{\partial X \partial Z}$, que impone restricciones en las posibles soluciones de las ecuaciones de Hamilton. El requisito adicional es naturalmente que las soluciones deben satisfacer $\sigma(\partial X) \subseteq B^*$; también necesitamos suponer que

$$i_{B^*}^* \Theta_h = d\Pi^*$$

para cierta n -forma Π^* en B^* (donde $i_{B^*} : B^* \rightarrow \partial Z^*$ denota la inclusión canónica).

Finalmente, hay otra formulación de las ecuaciones de Hamilton en términos de conexiones de Ehresmann. Supongamos que tenemos una conexión Γ en el sentido de Ehresmann en $\pi^* : Z^* \rightarrow X$, con proyector horizontal \mathbf{h} , y con la siguiente expresión en coordenadas.

$$\begin{cases} \mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \Gamma_{i\mu}^\nu \frac{\partial}{\partial p_i^\nu} \\ \mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = 0 \\ \mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial p_i^\mu}\right) = 0 \end{cases}$$

Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbf{h}} \Omega_h &= n\Omega_h - \left(\frac{\partial H}{\partial y^i} + \sum_\mu \Gamma_{i\mu}^\mu \right) dy^i \wedge d^{n+1}x \\ &\quad + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} - \Gamma_\mu^i \right) dp_i^\mu \wedge d^{n+1}x \end{aligned}$$

de donde podemos afirmar que

Proposición 3.2.4. *Sea Γ una conexión con proyector horizontal \mathbf{h} que verifica*

$$\iota_{\mathbf{h}} \Omega_h = n\Omega_h \tag{3.10}$$

y también la condición de compatibilidad en la frontera $\mathbf{h}_\alpha(T_\alpha B^) \subseteq T_\alpha B^*$ para $\alpha \in Z^*$ (esto es, \mathbf{h} induce una conexión $\partial\mathbf{h}$ en la fibración $\pi_{\partial X B^*} : B^* \rightarrow \partial X$).*

Si σ es una sección integral horizontal local de Γ , entonces σ es una solución de las ecuaciones de Hamilton.

Por tanto, uno puede pensar en las ecuaciones anteriores como un enfoque alternativo a las ecuaciones de Hamilton.

3.2.2. Transformación de Legendre

La transformación de Legendre relaciona las descripciones lagrangiana y hamiltoniana (ver [99] y [100]). La definición depende de la $(n+1)$ -forma de Poincaré-Cartan, que a su vez depende, como hemos visto, del lagrangiano elegido para modelar la teoría.

Definición 3.2.5. Definimos la **transformación de Legendre** $Leg_L : Z \longrightarrow \Lambda_2^{n+1}Y$ como sigue: dado $\xi_1, \dots, \xi_{n+1} \in (T_{\pi_Y Z(z)})Y$,

$$(Leg_L(z))(\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) = (\Theta_L)_z(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{n+1})$$

donde $\tilde{\xi}_a$ es un vector tangente en $z \in Z$ que proyecta sobre ξ_a (ver la proposición 3.1.5).

Está bien definida, pues $\iota_\xi \Theta_L = 0$ para campos de vectores π_{YZ} -verticales, y $\iota_\xi \iota_\zeta Leg_L(z) = 0$ para $\xi, \zeta \in \mathcal{V}\pi$, por tanto, $Leg_L(z) \in \Lambda_2^{n+1}Y$.

En coordenadas locales,

$$Leg_L(x^\mu, y^i, z_\mu^i) = \left(x^\mu, y^i, p = L - z_\mu^i \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i}, p_i^\mu = \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \right)$$

lo que muestra que Leg_L es fibrada sobre Y .

Para una expresión de la transformación de Legendre en términos de afines duales, ver [64].

Definición 3.2.6. También definimos la **aplicación de Legendre** $leg_L := \mu \circ Leg_L : Z \longrightarrow Z^*$, que, en coordenadas, tiene la forma:

$$leg_L(x^\mu, y^i, z_\mu^i) = \left(x^\mu, y^i, p_i^\mu = \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} = \hat{p}_i^\mu \right)$$

Tenemos la siguiente proposición trivial:

Proposición 3.2.7. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) L es un lagrangiano regular
- (ii) $leg_L : Z \longrightarrow Z^*$ es un difeomorfismo local
- (iii) $Leg_L : Z \longrightarrow \Lambda_2^{n+1}Y$ es una inmersión

Definición 3.2.8. El lagrangiano L se dice que es **hiperregular** cuando leg_L es un difeomorfismo global.

En tal caso, tenemos que Z, Z^* y $Im(Leg_L) \subseteq \Lambda_2^{n+1}Y$ son difeomorfos, y $h := Leg_L \circ leg_L^{-1}$ es una sección hamiltoniana.

Si también ponemos $\Pi = leg_L^* \Pi^*$, tras un breve cálculo deducimos la

Proposición 3.2.9. Para la sección hamiltoniana $h := Leg_L \circ leg_L^{-1}$, tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} (Leg_L)^* \Theta &= \Theta_L, & (Leg_L)^* \Omega &= \Omega_L \\ (leg_L)^* \Theta_h &= \Theta_L, & (leg_L)^* \Omega_h &= \Omega_L \end{aligned}$$

3.2.3. El teorema de equivalencia

En esta sección supondremos que L es hiperregular, y que $\Pi = \text{leg}_L^* \Pi^*$.

Una condición de frontera $B \subseteq \partial Z$ en el lado lagrangiano nos lleva a considerar una condición de frontera $B^* := \text{leg}_L(B) \subseteq \partial Z^*$. En particular, las construcciones precedentes nos han llevado a un hamiltoniano, y a las soluciones de las ecuaciones de Hamilton correspondientes se les requerirá que satisfagan también una condición de frontera $\sigma(\partial X) \subseteq B^*$. Tenemos:

Teorema 3.2.10. (Teorema de Equivalencia). *Si una sección σ_1 de π_{XZ} satisface las ecuaciones de De Donder,*

$$\sigma_1^*(\iota_\xi \Omega_L) = 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{X}(Z)$$

entonces $\sigma_2 := \text{leg}_L \circ \sigma_1$ verifica las ecuaciones de Hamilton.

$$\sigma_2^*(\iota_\xi \Omega_h) = 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{X}(Z^*)$$

Recíprocamente, si σ_2 verifica las ecuaciones de Hamilton, entonces la sección (localmente definida) $\sigma_1 := \text{leg}_L^{-1} \circ \sigma_2$ verifica las ecuaciones de De Donder. Por lo tanto, las ecuaciones de De Donder son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton.

Nota 3.2.11. Una comprobación rutinaria muestra también que, para un lagrangiano hiperregular, si Γ es una conexión solución de (3.8) con proyector horizontal \mathbf{h} entonces $T\text{leg}_L(\Gamma)$ (con proyector horizontal $T\text{leg}_L \circ \mathbf{h} \circ T\text{leg}_L^{-1}$) es una solución de las ecuaciones en términos de conexiones en el lado hamiltoniano.

Aún más, $T\text{leg}_L(T_z B) \subseteq T_{\text{leg}_L(z)} B^*$, y además se prueba también que los proyectores de conexiones compatibles se relacionan mediante la transformación de Legendre.

3.2.4. Lagrangianos casi regulares

Cuando el lagrangiano no es regular, para desarrollar la correspondiente descripción hamiltoniana debemos al menos imponer algunas condiciones de regularidad sobre el lagrangiano L : la condición de casi regularidad.

Definición 3.2.12. *Un lagrangiano $L : Z \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es **casi regular** si $\text{Leg}_L(Z) = \tilde{M}_1$ es una subvariedad de $\Lambda_2^{n+1} Y$, y $\text{Leg}_L : Z \rightarrow \tilde{M}_1$ es una submersión de fibras conexas.*

Si L es casi regular, deducimos que:

- $M_1 = \text{leg}_L(Z)$ es una subvariedad de Z^* , y además, una fibración sobre X y sobre Y .
- La restricción $\mu_1 : \tilde{M}_1 \rightarrow M_1$ de μ es un difeomorfismo.
- La aplicación $\text{leg}_L : Z \rightarrow M_1$ es una submersión de fibras conexas.

Bajo la hipótesis de casi regularidad, se puede definir una aplicación $h_1 = (\mu_1)^{-1} : M_1 \rightarrow \tilde{M}_1$, y una $(n+2)$ -forma Ω_{M_1} en M_1 por $\Omega_{M_1} = h_1^*(j^* \Omega)$ considerando la aplicación inclusión $j : \tilde{M}_1 \hookrightarrow \Lambda_2^{n+1} Y$. Obviamente, tenemos que $\text{leg}_1^* \Omega_{M_1} = \Omega_L$, donde $j \circ \text{leg}_1 = \text{leg}_L$ (ver figura 3.1).

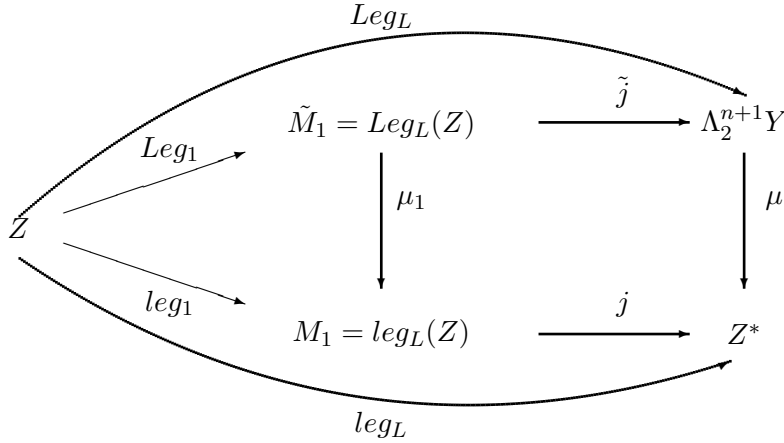


Figura 3.1: Lagrangianos casi regulares y transformación de Legendre

La descripción hamiltoniana se basa ahora en la ecuación

$$i_{\tilde{\mathbf{h}}} \Omega_{M_1} = n\Omega_{M_1} \quad (3.11)$$

donde $\tilde{\mathbf{h}}$ es una conexión en la fibración $\pi_{XM_1} : M_1 \rightarrow X$ con la condición adicional en la frontera.

Procediendo como antes, construimos un algoritmo de ligaduras como sigue. Denotemos primero $B_1^* = B^* \cap M_1$, y supongamos que es una subvariedad de B^* (en general, denotaremos $B_r^* = B^* \cap M_r$, que supondremos que será una subvariedad de B_{r-1}^*), entonces definimos

$$M_2 = \{ \tilde{z} \in M_1 \mid \exists \tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}} : T_{\tilde{z}} M_1 \rightarrow T_{\tilde{z}} M_1 \text{ lineal tal que } \tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}}^2 = \tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}}, \\ \ker \tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}} = (\mathcal{V}\pi_{XM_1})_{\tilde{z}}, i_{\tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}}} \Omega_{M_1}(\tilde{z}) = n\Omega_{M_1}(\tilde{z}), \text{ y para } \tilde{z} \in B_1^*, \tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}}(T_{\tilde{z}} B_1^*) \subseteq T_{\tilde{z}} B_1^* \}.$$

Si M_2 es una subvariedad (posiblemente con borde) entonces hay soluciones puntuales, pero tenemos que incluir la condición de tangencia y considerar un nuevo paso:

$$M_3 = \{ \tilde{z} \in M_2 \mid \exists \tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}} : T_{\tilde{z}} M_1 \rightarrow T_{\tilde{z}} M_2 \text{ lineal tal que } \tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}}^2 = \tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}}, \\ \ker \tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}} = (\mathcal{V}\pi_{XM_1})_{\tilde{z}}, i_{\tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}}} \Omega_{M_1}(\tilde{z}) = n\Omega_{M_1}(\tilde{z}), \text{ y para } \tilde{z} \in B_2^*, \tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}}(T_{\tilde{z}} B_2^*) \subseteq T_{\tilde{z}} B_2^* \}.$$

Si M_3 es una subvariedad de M_2 , pero $\tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}}(T_{\tilde{z}} M_1)$ no está contenido en $T_{\tilde{z}} M_3$ o $\tilde{\mathbf{h}}_{\tilde{z}}(T_{\tilde{z}} B_1^*)$ no está contenido en $T_{\tilde{z}} B_2^*$ para $\tilde{z} \in B_2^*$, entonces consideramos un tercer paso, y así sucesivamente. De esta forma obtenemos una secuencia de subvariedades embebidas

$$\dots \hookrightarrow M_3 \hookrightarrow M_2 \hookrightarrow M_1 \hookrightarrow Z^*$$

con bordes

$$\dots \hookrightarrow B_3^* \hookrightarrow B_2^* \hookrightarrow B_1^* \hookrightarrow B^*$$

Si el algoritmo de ligaduras se estabiliza, obtendremos una subvariedad final de ligaduras M_f de dimensión no nula, y una conexión en la fibración $\pi_{XM_1} : M_1 \rightarrow X$ a lo largo de la subvariedad M_f (de hecho, una familia de conexiones) con proyector horizontal $\tilde{\mathbf{h}}$ que verifica la condición de compatibilidad con la frontera, y que es solución de la ecuación (3.11). M_f proyecta en una subvariedad abierta de X (y B_f^* proyecta también en una subvariedad abierta de ∂X).

Si M_f es la variedad final de ligaduras, y $j_{f1} : M_f \rightarrow M_1$ es la inmersión canónica, podemos considerar la $(n+2)$ -forma $\Omega_{M_f} = j_{f1}^* \Omega_{M_1}$, y la $(n+1)$ -forma $\Theta_{M_f} = i_{f1}^* \Theta_{M_1}$, donde $\Omega_{M_f} = -d\Theta_{M_f}$.

Denotando $leg_a := leg_L|_{Z_a}$, un cálculo directo muestra que $leg_1(Z_a) = M_a$ para cada entero (ver 3.2).

$$\begin{array}{ccccc}
 Z_1 = Z & \xrightarrow{leg_1} & leg_L(Z) = M_1 & \searrow j & Z^* \\
 \uparrow i_1 & & \uparrow j_1 & & \\
 Z_2 & \xrightarrow{leg_2} & M_2 & & \\
 \uparrow i_2 & & \uparrow j_2 & & \\
 Z_3 & \xrightarrow{leg_3} & M_3 & & \\
 \uparrow i_3 & & \uparrow j_3 & & \\
 \vdots & & \vdots & & \\
 \uparrow i_{k-2} & & \uparrow j_{k-2} & & \\
 Z_{k-1} & \xrightarrow{leg_{k-1}} & M_{k-1} & & \\
 \uparrow i_{k-1} & & \uparrow j_{k-1} & & \\
 Z_k & \xrightarrow{leg_k} & M_k & &
 \end{array}$$

Figura 3.2: Relacionando los algoritmos de ligaduras

En consecuencia, ambos algoritmos muestran el mismo comportamiento; en particular, si uno de ellos se estabiliza, también lo hace el otro, y en el mismo paso. En particular, tenemos que $leg_1(Z_f) = M_f$. En tal caso, la restricción $leg_f : Z_f \rightarrow M_f$ es una submersión suprayectiva (esto es, una fibración) y $leg_f^{-1}(leg_f(z)) = leg_1^{-1}(leg_1(z))$, para cada $z \in Z_f$ (esto es, sus fibras son las de leg_1).

Por lo tanto, las descripciones lagrangiana y hamiltoniana pueden compararse a través de la fibración $leg_f : Z_f \rightarrow M_f$. En efecto, si tenemos una conexión en la fibración $\pi_{XZ} : Z \rightarrow X$ a lo largo de la subvariedad Z_f con proyector horizontal \mathbf{h} que es solución de las ecuaciones (3.8) y además la conexión es proyectable vía Leg_f a una conexión en la fibración $\pi_{X\tilde{Z}} : \tilde{Z} \rightarrow X$ a lo largo de la subvariedad M_f , entonces el proyector horizontal de la conexión proyectada $Tleg_f \circ \Gamma \circ Tleg_f^{-1}$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton (3.10), y en particular verifica las condiciones de frontera. Recíprocamente, dada una conexión en la fibración $\pi_{X\tilde{Z}} : \tilde{Z} \rightarrow X$ a lo largo de la subvariedad M_f , con proyector horizontal $\tilde{\mathbf{h}}$ que es solución de las ecuaciones de Hamilton (3.10), entonces toda conexión de la fibración $\pi_{XZ} : Z \rightarrow X$ a lo largo de la subvariedad Z_f que proyecte en $\tilde{\mathbf{h}}$ es solución de las ecuaciones de De Donder (3.8).

3.3. Formalismo de Cartan en los espacios de datos de Cauchy

En muchas de las teorías de campos, la variedad X se caracteriza por tener una coordenada diferenciada. Por ejemplo, X puede representar una variedad espacio-temporal, en la que el tiempo juega un papel diferente a las coordenadas espaciales.

En esta sección, introducimos el análisis de tales situaciones particulares, comenzando por el estudio del embebimiento de subvariedades de codimensión 1.

El análisis de tales subvariedades, las superficies de Cauchy, han sido estudiados en el formalismo multisimpléctico por otros autores también, como por ejemplo [9, 61, 65, 85].

3.3.1. Superficies de Cauchy. Problema del valor inicial

Definición 3.3.1. Una *superficie de Cauchy* es un par (M, τ) formado por una n -variedad compacta y orientada embebida en el espacio base X por $\tau : M \rightarrow X$, tal que $\tau(\partial M) \subseteq \partial X$, y el interior de M está incluido en el interior de X . Dos de tales superficies se consideran la misma salvo difeomorfismos de M que preserven la orientación y el volumen.

En lo que sigue, fijaremos M y consideraremos cierto espacio \tilde{X} de tales embebimientos. Llamaremos *superficies de Cauchy* a tales embebimientos.

La elección de M y de \tilde{X} depende de la teoría física a describir con el modelo.

Definición 3.3.2. Un *espacio de datos de Cauchy* es la variedad de embebimientos $\gamma : M \rightarrow Z$ tales que existe una sección ϕ de π_{XY} que verifica

$$\gamma = (j^1\phi) \circ \tau$$

donde $\tau := \pi_{XZ} \circ \gamma \in \tilde{X}$, y $\gamma(\partial M) \subseteq B$.

El espacio de dichos embebimientos se denotará por \tilde{Z} , y denotaremos por $\pi_{\tilde{X}\tilde{Z}}$ a la proyección $\pi_{\tilde{X}\tilde{Z}}(\gamma) = \pi_{XZ} \circ \gamma$. También exigiremos que esta proyección sea una fibración localmente trivial.

Definición 3.3.3. El *espacio de datos de Dirichlet* es la variedad \tilde{Y} de todos los embebimientos $\delta : M \rightarrow Y$ de la forma $\delta = \pi_{YZ} \circ \gamma$ para $\gamma \in \tilde{Z}$. también definimos $\pi_{\tilde{Y}\tilde{Z}} : \tilde{Z} \rightarrow \tilde{Y}$ como $\pi_{\tilde{Y}\tilde{Z}}(\gamma) = \pi_{YZ} \circ \gamma$.

Denotamos por $\pi_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ la única aplicación de \tilde{Y} a \tilde{X} tal que $\pi_{\tilde{X}\tilde{Z}} = \pi_{\tilde{X}\tilde{Y}} \circ \pi_{\tilde{Y}\tilde{Z}}$ (ver figura 3.3)

Un vector tangente v a $\gamma \in \tilde{Z}$ puede verse como un campo de vectores a lo largo de la curva γ , esto es, $v : M \rightarrow TZ$ tal que $\tau_Z \circ v = \gamma$, donde $\tau_Z : TZ \rightarrow Z$ es la proyección canónica. Por tanto, identificamos vectores en $T_\gamma\tilde{Z}$ con campos de vectores en $\gamma(M)$. Así, un campo de vectores ξ_Z on Z induce también un campo de vectores $\xi_{\tilde{Z}}$ en \tilde{Z} , donde para cada $\gamma \in \tilde{Z}$, su vector tangente representante en $\gamma \in \tilde{Z}$ viene dado por

$$\xi_{\tilde{Z}}(\gamma) = \xi_Z \circ \gamma$$

Y recíprocamente, las formas en Z pueden considerarse que actúan también en vectores tangentes en \tilde{Z} , pues si $z = \gamma(u)$, α es una r -forma en Z y $v \in T_\gamma\tilde{Z}$, entonces $\iota_v\alpha$ es una $(r-1)$ -forma en Z definida por

$$(\iota_v\alpha)_z := \iota_{v(u)}\alpha_z$$

En la práctica, no se hará distinción entre ellas.

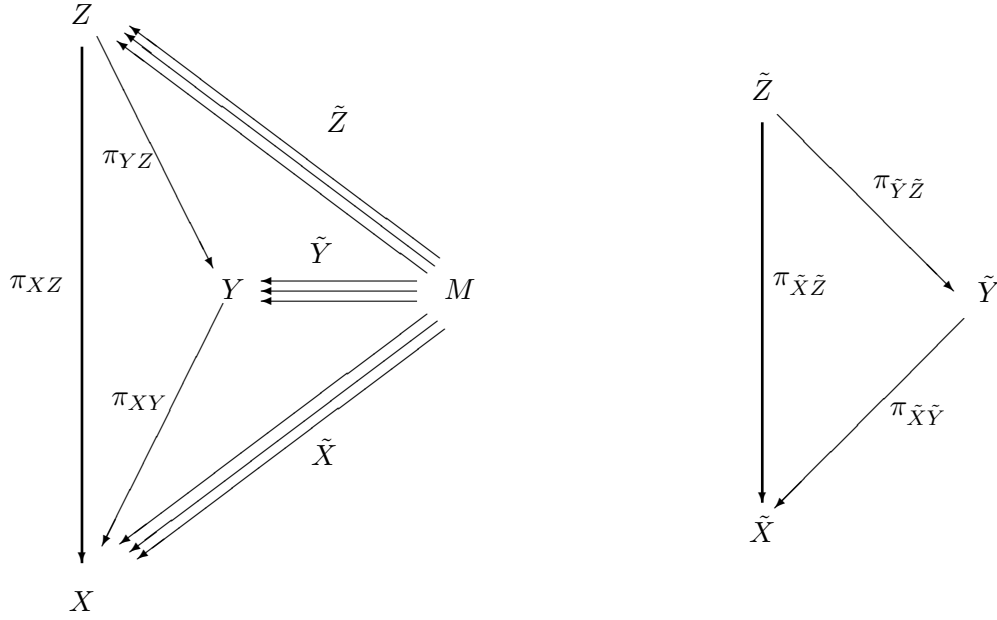


Figura 3.3: Espacios de datos de Cauchy

3.3.2. Integración de formas

La integración da una forma estándar de obtener k -formas en \tilde{Z} a partir de $(k+n)$ -formas en Z como sigue.

Definición 3.3.4. Si α es una $(k+n)$ -forma en Z tal que $i_B^* \alpha = d\beta$, definimos la k -forma $\tilde{\alpha}$ en \tilde{Z} por

$$\iota_{\tilde{\zeta}_1} \dots \iota_{\tilde{\zeta}_k} \tilde{\alpha}_\gamma = \int_M \gamma^* \iota_{\zeta_1} \dots \iota_{\zeta_k} \alpha - (-1)^k \int_{\partial M} \gamma^* \iota_{\zeta_1} \dots \iota_{\zeta_k} \beta \quad (3.12)$$

para $\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_k \in T_\gamma \tilde{Z}, \gamma \in \tilde{Z}$.

En particular las $(n+1)$ -forma Θ_L y $(n+2)$ -forma Ω_L de Poincaré-Cartan inducen una 1-forma $\tilde{\Theta}_L$ y una 2-forma $\tilde{\Omega}_L$ en \tilde{Z} , dadas por:

$$(\tilde{\Theta}_L)_\gamma(\tilde{\xi}) = \int_M \gamma^*(\iota_\xi \Theta_L) + \int_{\partial M} \gamma^*(\iota_\xi \Pi)$$

y

$$\tilde{\Omega}_L(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) = \int_M \gamma^*(\iota_{\xi_2} \iota_{\xi_1} \Omega_L).$$

Lema 3.3.5. Si $\tilde{\xi}$ es un campo de vectores en \tilde{Z} definido desde un campo de vectores ξ en Z , y α es una n -forma en Z tal que $i_B^* \alpha = d\beta$ entonces

$$d\tilde{\alpha}(\tilde{\xi})_\gamma = (\mathcal{L}_{\tilde{\xi}} \tilde{\alpha})_\gamma = \int_M \gamma^*(\mathcal{L}_\xi \alpha) - \int_{\partial M} \gamma^*(\mathcal{L}_\xi \beta)$$

Demostración. Primero obsérvese que $\tilde{\alpha}$ es una función. En este caso, si $c_{\tilde{Z}}(t)$ es una curva tal que $c_{\tilde{Z}}(0) = \gamma$ y $\dot{c}_{\tilde{Z}}(0) = \xi(\gamma)$, entonces

$$\begin{aligned} d\tilde{\alpha}(\tilde{\xi})_{\gamma} &= \tilde{\xi}_{\gamma}(\tilde{\alpha}) = \frac{d}{dt}(\tilde{\alpha} \circ c_{\tilde{Z}}(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\int_M (c_{\tilde{Z}}(t)^* \alpha) - \int_{\partial M} (c_{\tilde{Z}}(t)^* \beta) \right]_{t=0} \\ &= \int_M \frac{d}{dt} (c_{\tilde{Z}}(t)^* \alpha)|_{t=0} - \int_{\partial M} \frac{d}{dt} (c_{\tilde{Z}}(t)^* \beta)|_{t=0} = \int_M \gamma^*(\mathcal{L}_{\xi} \alpha) - \int_{\partial M} \gamma^*(\mathcal{L}_{\xi} \beta). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El resultado previo se puede extender también para formas de orden superior, y para fibraciones arbitrarias sobre X .

Sea ξ un campo de vectores completo en una fibración W sobre X , y denotemos por \tilde{W} cierto espacio de embebimientos en W , y por $\tilde{\xi}$ el campo de vectores definido en \tilde{W} a partir de ξ (esto es, $\tilde{\xi}(\gamma) = \xi \circ \gamma$).

Fijemos $\gamma \in \tilde{W}$. Para cada $u \in M$, consideremos una curva integral c^u de ξ que pase por $\gamma(u)$, esto es

$$\begin{aligned} c^u(0) &= \gamma(u) \\ \dot{c}^u(0) &= \xi(\gamma(u)) \end{aligned}$$

Definamos una curva \tilde{c} en \tilde{W} por

$$\tilde{c}(t)(u) = c^u(t).$$

Entonces tenemos

Proposición 3.3.6. \tilde{c} es una curva integral de $\tilde{\xi}$ que pasa por γ .

Demostración. Para probarlo, sólo tenemos que calcular

$$\tilde{c}(0)(u) = c^u(0) = \gamma(u)$$

y

$$\dot{\tilde{c}}(0)(u) = \frac{d}{dt}(\tilde{c}(t))|_{t=0}(u) = \frac{d}{dt}(\tilde{c}(t)(u))|_{t=0} = \frac{d}{dt}c^u(t)|_{t=0} = \dot{c}^u(0) = \xi(\gamma(u)) = \tilde{\xi}(\gamma)(u).$$

como queríamos probar. \blacksquare

\tilde{c} se dirá que es la curva asociada al flujo dado por los c^u .

En particular, si también tenemos difeomorfismo $F : W \rightarrow W$, es fácil de ver que la curva (denotada por $\widetilde{F \circ c}$) asociada a la familia $F \circ c^u$ (esto es, $\widetilde{F \circ c}(t)(u) = (F \circ c)^u(t)$) es precisamente $\tilde{F} \circ \tilde{c}$.

Para ver esto, usando la notación anterior, observemos primero que

$$\widetilde{F \circ c}(t)(u) = (F \circ c)^u(t) = (F \circ c^u)(t) = F(c^u(t)) = F(\tilde{c}(t)(u)) = (\tilde{F} \circ \tilde{c})(t)(u),$$

de lo cual deducimos

Corolario 3.3.7. Si $F : W \longrightarrow W$ es un difeomorfismo, entonces $T\widetilde{F}(\widetilde{\xi}) = \widetilde{TF(\xi)}$.

El siguiente paso es estudiar el *pullback* de formas.

Proposición 3.3.8. Si $F : W \longrightarrow W$ es un difeomorfismo, y α es una $(n+k)$ -forma en W , tal que $i_B^* \alpha = d\beta$, entonces

$$\widetilde{F}^* \widetilde{\alpha} = \widetilde{F^* \alpha}$$

Demostración. Sea $\widetilde{V}_1, \dots, \widetilde{V}_k \in T_{\widetilde{F}^{-1}(\gamma)} \widetilde{W}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \iota_{\widetilde{V}_1} \dots \iota_{\widetilde{V}_k} \widetilde{F}^* \widetilde{\alpha} &= \widetilde{\alpha}(T\widetilde{F}(\widetilde{V}_1), \dots, T\widetilde{F}(\widetilde{V}_k)) = \widetilde{\alpha}(\widetilde{TF(V_1)}, \dots, \widetilde{TF(V_k)}) \\ &= \int_M \gamma^* \iota_{TF(V_1)} \dots \iota_{TF(V_k)} \alpha - (-1)^k \int_{\partial M} \gamma^* \iota_{TF(V_1)} \dots \iota_{TF(V_k)} \beta \\ &= \int_M (F^{-1} \circ \gamma)^* F^* \iota_{TF(V_1)} \dots \iota_{TF(V_k)} \alpha - (-1)^k \int_{\partial M} (F^{-1} \circ \gamma)^* F^* \iota_{TF(V_1)} \dots \iota_{TF(V_k)} \beta \\ &= \int_M (F^{-1} \circ \gamma)^* \iota_{V_1} \dots \iota_{V_k} F^* \alpha - (-1)^k \int_{\partial M} (F^{-1} \circ \gamma)^* \iota_{V_1} \dots \iota_{V_k} F^* \beta \\ &= \iota_{\widetilde{V}_1} \dots \iota_{\widetilde{V}_k} \widetilde{F^* \alpha}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Finalmente,

Proposición 3.3.9. Si ξ es un campo de vectores en \widetilde{W} , entonces

$$\mathcal{L}_{\widetilde{\xi}} \widetilde{\alpha} = \widetilde{\mathcal{L}_{\xi} \alpha}$$

Demostración. Sea $\widetilde{V}_1, \dots, \widetilde{V}_k \in T_{\gamma} \widetilde{W}$, y denotemos por ϕ_t el flujo de ξ . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \iota_{\widetilde{V}_1} \dots \iota_{\widetilde{V}_k} \mathcal{L}_{\widetilde{\xi}} \widetilde{\alpha} &= \iota_{\widetilde{V}_1} \dots \iota_{\widetilde{V}_k} \frac{d}{dt} \widetilde{\phi}_t^* \widetilde{\alpha} |_{t=0} = \iota_{\widetilde{V}_1} \dots \iota_{\widetilde{V}_k} \frac{d}{dt} \widetilde{\phi}_t^* \alpha |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\iota_{\widetilde{V}_1} \dots \iota_{\widetilde{V}_k} \widetilde{\phi}_t^* \alpha \right) |_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\int_M \iota_{V_1} \dots \iota_{V_k} \phi_t^* \alpha - (-1)^k \int_{\partial M} \iota_{V_1} \dots \iota_{V_k} \phi_t^* \beta \right) |_{t=0} \\ &= \int_M \iota_{V_1} \dots \iota_{V_k} \frac{d}{dt} (\phi_t^* \alpha) |_{t=0} - (-1)^k \int_{\partial M} \iota_{V_1} \dots \iota_{V_k} \frac{d}{dt} (\phi_t^* \beta) |_{t=0} \\ &= \int_M \iota_{V_1} \dots \iota_{V_k} \mathcal{L}_{\xi} \alpha - (-1)^k \int_{\partial M} \iota_{V_1} \dots \iota_{V_k} \mathcal{L}_{\xi} \beta \\ &= \iota_{\widetilde{V}_1} \dots \iota_{\widetilde{V}_k} \widetilde{\mathcal{L}_{\xi} \alpha}. \end{aligned}$$

donde para el último paso usamos que $i_B^* \mathcal{L}_{\xi} \alpha = \mathcal{L}_{\xi} i_B^* \alpha = \mathcal{L}_{\xi} d\beta = d\mathcal{L}_{\xi} \beta$. \blacksquare

De vuelta a la fibración $Z \longrightarrow X$, la consistencia de nuestra definición de formas con respecto a la derivada exterior viene asegurada por la siguiente proposición.

Proposición 3.3.10. Si α es una n -forma o una $(n+1)$ -forma, entonces

$$\widetilde{d}\alpha = d\widetilde{\alpha}$$

En particular,

$$\widetilde{\Omega}_L := -d\widetilde{\Theta}_L$$

Demostración. Para n -formas, usamos el lema anterior

$$\begin{aligned}
(d\tilde{\alpha})_\gamma(\tilde{\xi}) &= \int_M \gamma^* \mathcal{L}_\xi \alpha - \int_{\partial M} \gamma^* \mathcal{L}_\xi \beta \\
&= \int_M \gamma^* \iota_\xi d\alpha + \int_M \gamma^* d\iota_\xi \alpha - \int_{\partial M} \gamma^* (i_\xi d\beta + di_\xi \beta) \\
&= \int_M \gamma^* \iota_\xi d\alpha = (\tilde{d}\alpha)_\gamma(\xi)
\end{aligned}$$

Para $(n+1)$ -formas:

$$\begin{aligned}
d\tilde{\alpha}(\xi, \zeta)_\gamma &= \{\xi(\tilde{\alpha}(\zeta)) - \zeta(\tilde{\alpha}(\xi)) - \tilde{\alpha}([\zeta, \xi])\}_\gamma \\
&= \int_M \gamma^* \{\mathcal{L}_\xi(\iota_\zeta \alpha) - \mathcal{L}_\zeta(\iota_\xi \alpha) - \iota_{[\xi, \zeta]} \alpha\} \\
&\quad + \int_{\partial M} \gamma^* \{\mathcal{L}_\xi(\iota_\zeta \beta) - \mathcal{L}_\zeta(\iota_\xi \beta) - \iota_{[\xi, \zeta]} \beta\} \\
&= \int_M \gamma^* \{\iota_\zeta \iota_\xi d\alpha - d\iota_\zeta \iota_\xi \alpha\} \\
&\quad + \int_{\partial M} \gamma^* \{\iota_\zeta \iota_\xi d\beta - d\iota_\zeta \iota_\xi \beta\} \\
&= \int_M \gamma^* (\iota_\zeta \iota_\xi d\alpha) - \int_{\partial M} \gamma^* (\iota_\zeta \iota_\xi (d\beta - \alpha)) \\
&= \int_M \gamma^* (\iota_\zeta \iota_\xi d\alpha) \\
&= \tilde{d}\alpha(\xi, \zeta)_\gamma.
\end{aligned}$$

■

3.3.3. Las ecuaciones de De Donder en los espacios de datos de Cauchy

Las ecuaciones de De Donder de las teorías de campos tienen un análogo presimpléctico en los espacios de datos de Cauchy. La relación entre ambas ecuaciones se encuentra en [9] (ver también [64]), y pasa por definir una descomposición de la variedad base X .

Definición 3.3.11. Decimos que una curva $c_{\tilde{X}}$ en \tilde{X} definida en un dominio $I \subseteq \mathbb{R}$ **descompone** X si la aplicación $\Phi : I \times M \rightarrow X$, dada por $\Phi(t, u) = c_{\tilde{X}}(t)(u)$, es un difeomorfismo. En particular, las aplicaciones parciales $\Phi(t, \cdot)$ (definidas por $\Phi(t, \cdot)(u) = \Phi(t, u)$) son elementos de \tilde{X} para todo $t \in I$. En este caso, $c_{\tilde{X}}$ se dice que es una **descomposición**.

En esta situación, podemos introducir coordenadas en X de forma que si $\frac{\partial}{\partial t}$ genera el espacio tangente a I , entonces $T\Phi(\frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial x^0}$, y consideramos $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ como campos de vectores locales en M o X .

Definición 3.3.12. Podemos también definir el concepto de **descomposición infinitesimal** en $\tau \in \tilde{X}$ como un vector tangente $v \in T_\tau \tilde{X}$ tal que para cada $u \in M$, $v(u)$ es transverso a $\text{Im } \tau$.

Si $c_{\tilde{Z}}$ es una curva en \tilde{Z} tal que su proyección $c_{\tilde{X}}$ a \tilde{X} descompone X , entonces define una sección local σ de π_{XZ} por

$$\sigma(c_{\tilde{X}}(t)(u)) = c_{\tilde{Z}}(t)(u) \quad (3.13)$$

Recíprocamente, si σ es una sección de π_{XZ} , y $c_{\tilde{X}}$ es una curva en \tilde{X} (no necesariamente una descomposición), definimos una curva $c_{\tilde{Z}}$ en Z usando (3.13). El siguiente resultado, que relaciona ecuaciones en Z con ecuaciones en \tilde{Z} puede encontrarse en [9].

Teorema 3.3.13. *Si σ satisface las ecuaciones de De Donder, entonces $c_{\tilde{Z}}$ definida como anteriormente satisface*

$$\iota_{\dot{c}_{\tilde{Z}}} \widetilde{\Omega}_L = 0 \quad (3.14)$$

Recíprocamente, si $c_{\tilde{Z}}$ es una curva en Z que satisface (3.14), y su proyección $c_{\tilde{X}}$ a \tilde{X} descompone X , entonces la sección σ de π_{XZ} definida por (3.13) verifica las ecuaciones de De Donder.

Demostración. Supongamos que σ verifica las ecuaciones de De Donder. De (3.13) obtenemos que $\dot{c}_{\tilde{Z}} = \sigma_* \dot{c}_{\tilde{X}}$, de donde

$$c_{\tilde{Z}}(t)^*(\iota_{\dot{c}_{\tilde{Z}}} \iota_{\xi} \Omega_L) = c_{\tilde{X}}(t)^* \sigma^*(\iota_{\dot{c}_{\tilde{Z}}} \iota_{\xi} \Omega_L) = c_{\tilde{X}}(t)^*(\iota_{\dot{c}_{\tilde{X}}} \sigma^* \iota_{\xi} \Omega_L) = 0$$

para todo ξ . Integramos sobre M para obtener el resultado deseado. Para el recíproco, considerar la integral

$$0 = \int_M c_{\tilde{X}}(t)^*(\iota_{\dot{c}_{\tilde{X}}} \sigma^* \iota_{\xi} \Omega_L) = 0.$$

Puesto que esto es cierto para cada ξ , del teorema fundamental del cálculo de variaciones deducimos

$$c_{\tilde{X}}(t)^*(\iota_{\dot{c}_{\tilde{X}}} \sigma^* \iota_{\xi} \Omega_L) = 0$$

Ahora bien, si $c_{\tilde{X}}$ descompone X , entonces $\dot{c}_{\tilde{X}}(t)$ es transversal a $c_{\tilde{X}}(t)(M)$, lo que implica que σ satisface las ecuaciones de De Donder. ■

Nótese que, en particular, si \mathbf{h} es el proyector horizontal de una conexión que es solución de las ecuaciones de De Donder para conexiones

$$\iota_{\mathbf{h}} \Omega_L = n \Omega_L \quad (3.15)$$

y si σ es una sección horizontal integral local de \mathbf{h} , los resultados anteriores muestran que una solución de (3.14) viene dada por la elevación horizontal de $\dot{c}_{\tilde{X}}$ a través de \mathbf{h} . Más generalmente, las soluciones se obtienen como elevaciones horizontales de descomposiciones infinitesimales a través de conexiones solución de (3.15).

3.3.4. El caso singular

Para un lagrangiano singular, no podemos garantizar la existencia de curvas $c_{\tilde{Z}}$ en \tilde{Z} soluciones de las ecuaciones de De Donder en \tilde{Z} .

Por tanto, proponemos un algoritmo similar al de variedades presimplécticas generales (desarrollado en [63, 66, 67]; ver también [25, 101, 103] para el caso dependiente del tiempo), donde a

las condiciones que definen las variedades a cada paso (esto es existencia de un vector tangente que verifique las ecuaciones de De Donder), añadimos el hecho de que tal vector debe proyectar en una descomposición infinitesimal.

Renombrando $\tilde{Z}_1 := \tilde{Z}$, definimos \tilde{Z}_2 y los subconjuntos subsecuentes (a los que se pide ser subvariedades) como sigue

$$\tilde{Z}_2 := \{\gamma \in \tilde{Z}_1 | \exists v \in T_\gamma \tilde{Z}_1 \text{ tal que } T\pi_{\tilde{X}\tilde{Z}}(v) \text{ es una descomposición infinitesimal e } \iota_v \tilde{\Omega}_L|_\gamma = 0\}$$

$$\tilde{Z}_3 := \{\gamma \in \tilde{Z}_2 | \exists v \in T_\gamma \tilde{Z}_2 \text{ tal que } T\pi_{\tilde{X}\tilde{Z}}(v) \text{ es una descomposición infinitesimal e } \iota_v \tilde{\Omega}_L|_\gamma = 0\}$$

...

En el caso favorable, el algoritmo se detendrá en una cierta subvariedad final de ligaduras de dimensión no nula \tilde{Z}_f .

El algoritmo está íntimamente relacionado con el algoritmo en las variedades finito dimensionales. Aclaremos ahora esa conexión.

Proposición 3.3.14. *Supongamos que tenemos $v \in T_\gamma \tilde{Z}_1$ tal que $T\pi_{\tilde{X}\tilde{Z}}(v)$ es una descomposición horizontal y $\iota_v \tilde{\Omega}_L|_\gamma = 0$. Entonces, para cada $u \in M$*

$$H_{\gamma(u)} := T_u \gamma(T_u M) \oplus \langle v(u) \rangle$$

es un subespacio horizontal de $T_{\gamma(u)}Z$ cuyo proyector horizontal \mathbf{h} verifica las ecuaciones de De Donder para conexiones que satisfacen (3.15) en $\gamma(u)$:

$$\iota_{\mathbf{h}} \Omega_L|_{\gamma(u)} = n \Omega_L|_{\gamma(u)}$$

Demostración. El hecho de que v proyecta sobre una descomposición infinitesimal garantiza que $H_{\gamma(u)}$ es ciertamente horizontal.

La otra hipótesis establece que

$$\gamma^*(\iota_{\xi} \iota_{v_{\gamma(u)}} \Omega_L) = 0$$

para cada $\xi \in T_{\gamma(u)}Z$, esto es, si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para $T_u M$, entonces

$$\iota_{\xi} \iota_{v_{\gamma(u)}} \Omega_L(T_u \gamma(v_1), T_u \gamma(v_2), \dots, T_u \gamma(v_n)) = 0$$

o equivalentemente,

$$\Omega_L(\xi, H_1, H_2, \dots, H_{n+1}) = 0$$

para cada $\xi \in T_{\gamma(u)}Z$ y cada colección H_1, H_2, \dots, H_{n+1} de vectores tangentes horizontales.

Deseamos probar que $\iota_{\mathbf{h}} \Omega_L|_{\gamma(u)} = n \Omega_L|_{\gamma(u)}$, o equivalentemente, $\iota_{\xi} \iota_{\mathbf{h}} \Omega_L|_{\gamma(u)} = n \iota_{\xi} \Omega_L|_{\gamma(u)}$, para cada $\xi \in T_{\gamma(u)}Z$.

De las notas previas, vemos que la condición es verdadera cuando se evalúa sobre $n+1$ vectores tangentes horizontales.

Supongamos que V_1 es un vector tangente vertical en $\gamma(u)$. Entonces (como $\mathbf{h}(V_1) = 0$),

$$\iota_{\mathbf{h}} \Omega_L(\xi, V_1, H_1, \dots, H_n) = \Omega_L(\mathbf{h}(\xi), V_1, H_1, \dots, H_n) + n \Omega_L(\xi, V_1, H_1, \dots, H_n)$$

donde el primer término se anula por los argumentos anteriores. Así, la expresión es cierta cuando se aplica a dos vectores tangentes cualesquiera, y n vectores horizontales cualesquiera.

Para el siguiente paso con dos vectores verticales, recordar que por el lema 3.1.5, Ω_L es anulada por tres vectores tangentes verticales, así que

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbf{h}}\Omega_L(\xi, V_1, V_2, H_1, \dots, H_{n-1}) &= \Omega_L(\mathbf{h}(\xi), V_1, V_2, H_1, \dots, H_{n-1}) \\ &\quad + (n-1)\Omega_L(\xi, V_1, V_2, H_1, \dots, H_{n-1}) \\ &= \Omega_L(\xi, V_1, V_2, H_1, \dots, H_{n-1}) + (n-1)\Omega_L(\xi, V_1, V_2, H_1, \dots, H_{n-1}) \\ &= n\Omega_L(\xi, V_1, V_2, H_1, \dots, H_{n-1}) \end{aligned}$$

Finalmente, por las propiedades mencionadas de Ω_L , la expresión también se cumple para un número mayor de vectores tangentes verticales, y así la expresión es cierta en general. ■

Como resultado inmediato, tenemos

Corolario 3.3.15. *Si $\gamma \in \tilde{Z}_2$, entonces $Im\gamma \subseteq Z_2$.*

y en general,

Proposición 3.3.16. *Si $\gamma \in \tilde{Z}_a$, entonces $Im\gamma \subseteq Z_a$.*

Demostración. Si $\gamma \in \tilde{Z}_a$ (lo que implica que existe $v \in T\tilde{Z}_a$ tal que $\iota_v\tilde{\Omega}_L|_\gamma = 0$), entonces para cada $u \in M$ definimos $H_{\gamma(u)} := T\gamma_u(T_uM) \oplus \langle v(u) \rangle$.

Tenemos que justificar en cada paso que $H_{\gamma(u)} \subseteq T_{\gamma(u)}Z_a$, lo que significa probar que $T\gamma_u(T_uM) \subseteq T_{\gamma(u)}Z_a$ y $v(u) \in T_{\gamma(u)}Z_a$. La primera afirmación es cierta, por la construcción de los subconjuntos.

Para ver que $v(u) \in T_{\gamma(u)}Z_a$, procedemos de forma inductiva comenzando en $a = 2$, para el cual el resultado es cierto por el corolario anterior.

Asumimos que es cierto hasta el paso a -ésimo, y probamos que $v(u) \in T_{\gamma(u)}Z_{a+1}$.

Como $\gamma \in \tilde{Z}_{a+1}$, existe $v \in T\tilde{Z}_a$ tal que $\iota_v\tilde{\Omega}_L = 0$. Por lo tanto, existe una curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \tilde{Z}_a$ (y por tanto $Im(c)(t) \subseteq Z_a$) tal que $c(0) = \gamma$ y $\dot{c}(0) = v$. Deducimos que $v(u) \in T_{\gamma(u)}Z_a$. ■

Nota 3.3.17. Supongamos ahora que \tilde{X} admite una descomposición. En el caso en que $z \in Z_a$ es tal que $\pi_{XZ}(z)$ pertenece a la imagen de la descomposición, y \mathbf{h}_z es integrable, entonces existe $\gamma \in \tilde{Z}_a$, y $u \in M$ tal que $\gamma(u) = z$.

Como antes, probamos primero el caso $a = 2$. Si σ es una sección horizontal local de \mathbf{h} en z , entonces usamos la descomposición para definir la curva $c_{\tilde{Z}}(t)$ que verifica las ecuaciones de De Donder en \tilde{Z} , y proyecta en la descomposición, por lo que podemos tomar $\gamma = c_{\tilde{Z}}(t)$ para algún t .

Para el caso $a > 2$, simplemente obsérvese que si $H_{\gamma(u)} \subseteq T_{\gamma(u)}Z_a$, entonces $\dot{c}_{\tilde{Z}}(t)(u')$ debe ser tangente a Z_a para todo $u' \in M$, y un argumento similar al de la sección precedente prueba que $\gamma = c_{\tilde{Z}}(t) \in \tilde{Z}_a$.

3.3.5. Corchetes

Nótese que, en general, la única propiedad de $\widetilde{\Omega}_L$ que podemos garantizar es que es presimpléctica, pues no podemos garantizar la unicidad de campos de vectores hamiltonianos asociados a funciones definidas en \widetilde{Z} . Para más detalles, ver [107] y [111] (y para orden superior [110]).

Definición 3.3.18. Dada una función f en \widetilde{Z} y un campo de vectores $\widetilde{\xi}$ en \widetilde{Z} , diremos que f es una **función hamiltoniana**, y que $\widetilde{\xi}$ es un **campo de vectores hamiltoniano** para f si

$$\iota_{\widetilde{\xi}}\widetilde{\Omega}_L = df$$

Proposición 3.3.19. Si α es una n -forma Hamiltoniana en Z para Ω_L que es exacta en ∂Z , digamos $\alpha|_{\partial Z} = d\beta$, entonces $\widetilde{\alpha}$ es una función hamiltoniana en \widetilde{Z} para $\widetilde{\Omega}_L$. Más precisamente, si X_α es un campo de vectores hamiltoniano para α , entonces $X_{\widetilde{\alpha}}$ definida en \widetilde{Z} por

$$[X_{\widetilde{\alpha}}(\gamma)](u) = X_\alpha(\gamma(u))$$

es un campo de vectores hamiltoniano para $\widetilde{\alpha}$

Demostración. Tomemos un vector tangente $\widetilde{\xi}$ a \widetilde{Z} , entonces por el lema (3.3.5)

$$\begin{aligned} (d\widetilde{\alpha})(\widetilde{\xi})|_\gamma &= \int_M \gamma^*(\mathcal{L}_\xi \alpha) - \int_{\partial M} \gamma^*(\mathcal{L}_\xi \beta) \\ &= \int_M \gamma^* \iota_\xi d\alpha + \int_M \gamma^* d\iota_\xi \alpha - \int_{\partial M} \gamma^* \iota_\xi d\beta \\ &= \int_M \gamma^* \iota_\xi d\alpha = \int_M \gamma^* \iota_\xi \iota_{X_\alpha} \Omega_L = \iota_{\widetilde{X}_\alpha} \widetilde{\Omega}_L(\widetilde{\xi})|_\gamma. \end{aligned}$$

lo que prueba que $d\widetilde{\alpha} = \iota_{X_{\widetilde{\alpha}}} \widetilde{\Omega}_L$. ■

Si f es una función hamiltoniana en \widetilde{Z} , entonces su campo de vectores hamiltoniano asociado está definido salvo un elemento del núcleo de $\widetilde{\Omega}_L$, por lo tanto, podemos definir la operación corchete para estas funciones como sigue.

Definición 3.3.20. Si f y g son funciones hamiltonianas en \widetilde{Z} , con campos de vectores hamiltonianos asociados X_f y X_g , entonces definimos :

$$\{f, g\} := \widetilde{\Omega}_L(X_f, X_g)$$

Nótese que $i_B^* \Omega_L = 0$, por tanto, si α_1 y α_2 son formas hamiltonianas exactas en el borde, entonces $i_B^* \{\alpha_1, \alpha_2\} = 0$.

Proposición 3.3.21. Si α_1 y α_2 son n -formas hamiltonianas exactas en ∂Z , entonces

$$\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\} = \widetilde{\{\alpha_1, \alpha_2\}}$$

Demostración.

$$\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2\} = \widetilde{\Omega}_L(X_{\tilde{\alpha}_1}, X_{\tilde{\alpha}_2}) = \int_M \gamma^* \iota_{X_{\alpha_2}} \iota_{X_{\alpha_1}} \Omega_L = \int_M \gamma^* \{\alpha_1, \alpha_2\} = \{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}.$$

■

En [17, 50, 51] y [58] los autores exploran las propiedades de una generalización del corchete, que satisface la versión graduada de ciertas propiedades, tales como la antisimetría y la identidad de Jacobi.

Nota 3.3.22. Alternativamente podríamos usar el espacio de datos de Cauchy \tilde{Z}^* , definido de la forma obvia, aunque no ganaríamos nada. De hecho, si suponemos por simplicidad que L es hiperregular, tendríamos un difeomorfismo $\widetilde{leg}_L : \tilde{Z} \rightarrow \tilde{Z}^*$ definido por composición:

$$\widetilde{leg}_L(\gamma) = leg_L \circ \gamma$$

para cada $\gamma \in \tilde{Z}$.

Si el lagrangiano no es regular, pero es al menos casi regular, es posible desarrollar el esquema correspondiente. El único punto delicado es que debemos considerar el problema de segundo orden correspondiente en el lado lagrangiano.

3.4. Triples de Tulczyjew en teorías clásicas de campos

A la vista de la identificación de TT^*M con T^*TM introducida por Tulczyjew en [153, 154], en nuestro trabajo de investigación hemos desarrollado las mismas ideas para extender el resultado a variedades de jets. Los resultados que siguen a continuación están contenidos en [116].

3.4.1. El multisimplectomorfismo $\tilde{\alpha}$

Consideremos el fibrado vectorial $\Lambda_2^{n+2}Z$ con elementos genéricos de la forma

$$a_i dy^i \wedge d^{n+1}x + b_i^\mu dz_\mu^i \wedge d^{n+1}x$$

Esto nos permite introducir coordenadas locales $(x^\mu, y^i, z_\mu^i, a_i, b_i^\mu)$ en la variedad $\Lambda_2^{n+2}Z$.

Por otro lado, denotaremos por J^1Z^* la variedad de 1-jets de secciones locales de la fibración $\pi_{XZ^*} : Z^* \rightarrow X$. Tenemos una proyección canónica

$$j^1\pi_{YZ^*} : J^1Z^* \rightarrow Z$$

Denotemos por $(x^\mu, y^i, p_i^\mu, y_\nu^i, p_{i\nu}^\mu)$ las coordenadas inducidas en J^1Z^* con respecto a $\pi_{XZ^*} : Z^* \rightarrow X$, tales que

$$j^1\pi_{YZ^*}(x^\mu, y^i, p_i^\mu, y_\nu^i, p_{i\nu}^\mu) = (x^\mu, y^i, y_\nu^i).$$

Definamos una aplicación

$$\alpha : J^1Z^* \rightarrow \Lambda_2^{n+2}Z$$

por

$$\alpha(x^\mu, y^i, p_i^\mu, y_\nu^i, p_{i\nu}^\mu) = (x^\mu, y^i, y_\mu^i, \sum_{\mu} p_{i\mu}^\mu, p_i^\mu).$$

La aplicación α es una submersión suprayectiva, o equivalentemente, $\alpha : J^1 Z^* \longrightarrow \Lambda_2^{n+2} Z$ es una fibración. Para obtener un difeomorfismo, debemos “reducir” la variedad $J^1 Z^*$. Para hacer esto, introducimos la siguiente relación de equivalencia:

$$j_x^1 \sigma_1 \equiv j_x^1 \sigma_2 \text{ si y sólo si tienen la misma divergencia,}$$

que en coordenadas locales $(x^\mu, y^i, p_i^\mu, y_\nu^i, p_{i\nu}^\mu)$ and $(x^\mu, \bar{y}^i, \bar{p}_i^\mu, \bar{y}_\nu^i, \bar{p}_{i\nu}^\mu)$ significa

$$\bar{y}^i = y^i, \quad \bar{p}_i^\mu = p_i^\mu, \quad \bar{y}_\nu^i = y_\nu^i, \quad \sum_{\mu} \bar{p}_{i\mu}^\mu = \sum_{\mu} p_{i\mu}^\mu.$$

La variedad cociente correspondiente se denotará por $\widetilde{J^1 Z^*}$, y tenemos una fibración $\tilde{p}r : J^1 Z^* \longrightarrow \widetilde{J^1 Z^*}$. La aplicación inducida

$$\tilde{\alpha} : \widetilde{J^1 Z^*} \longrightarrow \Lambda_2^{n+2} Z$$

es un difeomorfismo, y tenemos una proyección inducida

$$j^1 \pi_{YZ^*} : \widetilde{J^1 Z^*} \longrightarrow Z$$

Por tanto, podemos transportar la $(n+2)$ -forma multisimpléctica canónica $(\Omega_Z)_2^{n+2} = -d(\Theta_Z)_2^{n+2}$ en $\Lambda_2^{n+2} Z$ a $\widetilde{J^1 Z^*}$ tal que $(\widetilde{J^1 Z^*}, \Omega_\alpha)$ es una variedad multisimpléctica, donde $\Omega_\alpha = \tilde{\alpha}^*((\Omega_Z)_2^{n+2})$.

Nota 3.4.1. Siguiendo la terminología introducida por W.M. Tulczyjew en el contexto simpléctico, y de acuerdo con la definición 2.2.4, podríamos llamar $(\widetilde{J^1 Z^*}, \Omega_\alpha)$ una variedad multisimpléctica especial, pues es multisimplectomorfa a un fibrado de formas, y la $(n+2)$ -forma multisimpléctica es $\Omega_\alpha = -d\Theta_\alpha$ (donde $\Theta_\alpha = \tilde{\alpha}^*(\Theta_Z)_2^{n+2}$). Además, el diagrama 3.4 es commutativo.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{J^1 Z^*} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \Lambda_2^{n+2} Z \\ & \searrow j^1 \pi_{YZ^*} & \swarrow \pi_{Z \Lambda_2^{n+2} Z} \\ & & Z \end{array}$$

Figura 3.4: El morfismo $\tilde{\alpha}$

Sea $\mathbb{L} : Z \longrightarrow \Lambda^{n+1} X$ una forma lagrangiana, esto es, \mathbb{L} es una $(n+1)$ -forma en Z a lo largo de la proyección $\pi_{XZ} : Z \longrightarrow X$.

Definimos

$$\mathcal{N}_{\mathbb{L}} = \{u \in \widetilde{J^1 Z^*} \mid (j^1 \pi_{XZ^*})^*(d\mathbb{L})_u = (\Theta_\alpha)_u\}$$

Teorema 3.4.2. $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}$ es una subvariedad $(n + 2)$ -lagrangiana de la variedad multisimpléctica $(\widetilde{J^1 Z^*}, \Omega_\alpha)$. Además, las ecuaciones locales que definen $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}$ son las ecuaciones de Euler-Lagrange para L , donde $\mathbb{L} = L\eta$.

Demostración. De la definición se sigue que

$$\tilde{\alpha}(\mathcal{N}_{\mathbb{L}}) = \text{im } d\mathbb{L},$$

Además, se verifica

$$\begin{aligned} (\Theta_Z)_2^{n+2} &= a_i dy^i \wedge d^{n+1}x + b_i^\mu dz_\mu^i \wedge d^{n+1}x \\ \alpha^*((\Theta_Z)_2^{n+2}) &= p_{i\mu}^\mu dy^i \wedge d^{n+1}x + p_i^\mu dy_\mu^i \wedge d^{n+1}x \\ d\mathbb{L} &= \frac{\partial L}{\partial y^i} dy^i \wedge d^{n+1}x + \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} dy_\mu^i \wedge d^{n+1}x. \end{aligned}$$

Puesto que

$$(\widetilde{j^1 \pi_{XZ^*}})^*(d\mathbb{L}) = \Theta_\alpha$$

si y sólo si

$$\tilde{p}\tilde{r}^*(\widetilde{j^1 \pi_{XZ^*}})^*(d\mathbb{L}) - \Theta_\alpha = 0$$

lo cual es equivalente a

$$(j^1 \pi_{XZ^*})^*(d\mathbb{L}) = \alpha^*(\Theta_Z)_2^{n+2},$$

deducimos que $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}$ está localmente definido por

$$\sum_{\mu} p_{i\mu}^\mu = \frac{\partial L}{\partial y^i} \quad (3.16)$$

$$p_i^\mu = \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \quad (3.17)$$

Las ecuaciones (3.16) implican que $\tilde{\alpha}(\mathcal{N}_{\mathbb{L}}) = \text{Im } d\mathbb{L}$, y por tanto $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}$ es una subvariedad $(n + 2)$ -lagrangiana de $(\widetilde{J^1 Z^*}, \Omega_\alpha)$.

Aún más, tenemos que

$$\sum_{\mu} p_{i\mu}^\mu = \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial y^i}$$

que son justamente las ecuaciones de Euler-Lagrange para L . ■

3.4.2. El multisimplectomorfismo $\tilde{\beta}$

Recordemos que existe una correspondencia biunívoca entre conexiones en la fibración $\pi_{XZ^*} : Z^* \rightarrow X$ y secciones de la prolongación 1-jet $\pi_{Z^*, J^1 Z^*} : J^1 Z^* \rightarrow Z^*$ (puntualmente tenemos correspondencia biunívoca entre subespacios horizontales de la fibración $\pi_{XZ^*} : Z^* \rightarrow X$ y 1-jets en $J^1 Z^*$.)

Definamos la aplicación

$$\beta : J^1 Z^* \rightarrow \Lambda_2^{n+1} Z^*$$

como sigue: dada una conexión \mathbf{h}^* en la fibración $\pi_{XZ^*} : Z^* \longrightarrow X$, tomamos la $(n+2)$ -forma

$$\beta(\mathbf{h}^*) = i_{\mathbf{h}^*} \Omega_h - n\Omega_h.$$

Una $(n+2)$ -forma arbitraria en $\Lambda_2^{n+2}Z^*$ se escribe como

$$A_i dy^i \wedge d^{n+1}x + B_\mu^i dp_i^\mu \wedge d^{n+1}x$$

de forma que podemos introducir coordenadas locales $(x^\mu, y^i, p_i^\mu, A_i, B_\mu^i)$ en $\Lambda_2^{n+2}Z^*$.

Si llamamos

$$\mathbf{h}^*\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + y_\mu^i \frac{\partial}{\partial y^i} + p_{j\mu}^\nu \frac{\partial}{\partial p_j^\nu}$$

o equivalentemente,

$$\mathbf{h}^*(x^\mu, y^i, p_i^\mu) = (x^\mu, y^i, p_i^\mu, y_\mu^i, p_{j\mu}^\nu)$$

(cuando \mathbf{h}^* se considera como sección de $J^1Z^* \longrightarrow Z^*$), entonces un cálculo directo muestra que

$$\beta(x^\mu, y^i, p_i^\mu, y_\mu^i, p_{j\mu}^\nu) = (x^\mu, y^i, p_i^\mu, \sum_\mu p_{i\mu}^\mu + \frac{\partial H}{\partial y^i}, -y_\mu^i + \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu}).$$

La aplicación β es una submersión suprayectiva. Por tanto, para tener un difeomorfismo consideramos la aplicación inducida $\tilde{\beta} : \widetilde{J^1Z^*} \longrightarrow \Lambda_2^{n+2}Z^*$. Por tanto, obtenemos un diagrama conmutativo 3.5, donde $\tilde{\rho} : \widetilde{J^1Z^*} \longrightarrow Z^*$ es la proyección inducida desde la canónica $\rho : J^1Z^* \longrightarrow Z^*$.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{J^1Z^*} & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \Lambda_2^{n+2}Z^* \\ & \searrow \tilde{\rho} & \swarrow \pi_{Z^* \Lambda_2^{n+2}Z^*} \\ & & Z^* \end{array}$$

Figura 3.5: La aplicación $\tilde{\beta}$

Definamos una $(n+2)$ -forma Θ_β en $\widetilde{J^1Z^*}$ como $\Theta_\beta = \tilde{\beta}^*((\Theta_{Z^*})_2^{n+2})$. Por tanto, el par $(\widetilde{J^1Z^*}, \Omega_\beta)$, $\Omega_\beta = -d\Theta_\beta$, es una variedad multisimpléctica del tipo $(n+2, 2)$.

Nota 3.4.3. Debe notarse que el par $(\widetilde{J^1Z^*}, \Omega_\beta)$ es una variedad multisimpléctica especial.

Teorema 3.4.4. Sea \mathbf{h}^* una solución de las ecuaciones de De Donder. Entonces, la proyección \mathcal{N}_h de la imagen de \mathbf{h}^* por $\tilde{\rho}$ es una subvariedad $(n+2)$ -lagrangiana de la variedad multisimpléctica $(\widetilde{J^1Z^*}, \Omega_\beta)$. Además, las ecuaciones locales que definen \mathcal{N}_h son las ecuaciones de Hamilton para h .

Demostración.

Puesto que

$$(\Theta_{Z^*})_2^{n+2} = A_i dy^i \wedge d^{n+1}x + B_\mu^i dp_i^\mu \wedge d^{n+1}x$$

tenemos que

$$\beta^*((\Theta_{Z^*})_2^{n+2}) = (p_{i\mu}^\mu + \frac{\partial H}{\partial y^i})dy^i \wedge d^{n+1}x + (-y_\mu^i + \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu})dp_i^\mu \wedge d^{n+1}x.$$

Por lo tanto, la proyección \mathcal{N}_h de la imagen de \mathbf{h}^* por $\tilde{p}r$ es la imagen inversa de la sección cero de $\Lambda_2^{n+2}Z^*$, y así, es una subvariedad $(n+2)$ -lagrangiana de $(\widetilde{J^1Z^*}, \Omega_\beta)$.

La segunda parte del teorema es una consecuencia directa de las observaciones anteriores. ■

3.4.3. Relacionando $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$

Las construcciones anteriores se recogen en el diagrama 3.6.

$$\begin{array}{ccccc}
 \Lambda_2^{n+2}Z & \xleftarrow{\tilde{\alpha}} & \widetilde{J^1Z^*} & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \Lambda_2^{n+2}Z^* \\
 \searrow \pi_{Z\Lambda_2^{n+2}Z} & & \swarrow j^1\pi_{YZ^*} & & \swarrow \pi_{Z^*\Lambda_2^{n+2}Z^*} \\
 & & Z & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & Z^*
 \end{array}$$

Figura 3.6: Relacionando $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$

Puesto que

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}r^*(\Theta_\alpha) &= p_{i\mu}^\mu dy^i \wedge d^{n+1}x + p_i^\mu dy_\mu^i \wedge d^{n+1}x \\
 \tilde{p}r^*(\Theta_\beta) &= (p_{i\mu}^\mu + \frac{\partial H}{\partial y^i})dy^i \wedge d^{n+1}x + (-y_\mu^i + \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu})dp_i^\mu \wedge d^{n+1}x
 \end{aligned}$$

deducimos que

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}r^*(\Theta_\alpha - \Theta_\beta) &= dh - (y_\mu^i dp_i^\mu + p_i^\mu dy_\mu^i) \wedge d^{n+1}x \\
 &= dh - d(p_i^\mu y_\mu^i) \wedge d^{n+1}x \\
 &= d(h - (p_i^\mu y_\mu^i) \wedge d^{n+1}x)
 \end{aligned}$$

lo que implica que $\Omega_\alpha = \Omega_\beta$.

Teorema 3.4.5. *Sea L un lagrangiano regular, y supongamos que $h = \text{leg}_L \circ (\text{Leg}_L)^{-1}$. Entonces, $N_{\mathbb{L}} = N_h$.*

Simetrías y cantidades conservadas

Uno de los conceptos más interesantes en el estudio de los sistemas dinámicos de todo tipo son las simetrías. Este bien conocido concepto tiene en el famoso teorema de **Noether** uno de sus resultados más importantes, que para sistemas dinámicos de tipo mecánico (las ecuaciones de evolución se obtienen por minimización de la acción definida por un lagrangiano), descubre la presencia de **cantidades conservadas** (esto es, funciones constantes a lo largo de soluciones) para cada simetría del lagrangiano. Las cantidades conservadas producen una valiosa información sobre un sistema (ver [97, 122, 133, 138, 142, 143]).

Aún más, en mecánica clásica, el concepto de simetría puede ser también utilizado para reducir la complejidad del sistema, por ejemplo mediante el proceso de reducción simpléctica (definido por Marsden y Weinstein), que conduce a ecuaciones simplificadas definidas en una variedad de dimensión inferior, y el subsiguiente proceso de reconstrucción de las soluciones originales desde las soluciones en el espacio reducido.

El concepto de simetría del lagrangiano se ha generalizado a transformaciones del espacio de fases que preserva otros objetos geométricos tales como la 1-forma de Poincaré-Cartan (ver [111, 117, 142, 143]).

En este capítulo, estudiaremos la clasificación de las simetrías para las ecuaciones de campos. A lo largo de todo el capítulo, supondremos que tenemos una fibración $\pi : Y \rightarrow X$, donde $\dim X = n + 1$, $\dim Y = n + 1 + m$, X es orientada con forma de volumen η , y tenemos una función lagrangiana $L : Z = J^1\pi \rightarrow \mathbb{R}$.

Si X tiene borde ∂X , también lo tiene Z , definiendo $\partial Z := \pi_X^{-1}(\partial X)$. Una condición de frontera se introduce como un subfibrado $B \subseteq \partial Z$ de la fibración $\partial Z \rightarrow \partial X$.

Usaremos los conceptos y notaciones de capítulos precedentes. Los resultados descritos en este capítulo han sido publicados en [115].

4.1. Simetrías de las ecuaciones de Euler-Lagrange

En nuestro marco para teorías de campos, definimos una cantidad conservada como sigue.

Definición 4.1.1. *Una cantidad conservada para las ecuaciones de Euler-Lagrange es una n -forma α en Z tal que $(j^1\phi)^*d\alpha = 0$ para cada solución ϕ de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Si α es una cantidad conservada, entonces $\tilde{\alpha}$ se llama su **momento** asociado.*

Nótese que si α es una cantidad conservada, y Λ es una forma cerrada, entonces $\alpha + \Lambda$ es también una cantidad conservada. Igualmente, si γ es una n -forma que pertenece al ideal diferencial $\mathcal{I}(\mathcal{C})$, entonces $\alpha + \gamma$ es también una cantidad conservada (ver [138] para una discusión más extensa).

Pasamos ahora a obtener cantidades conservadas a partir de las simetrías.

4.1.1. Simetrías del lagrangiano

Definimos la noción de simetría basada en variaciones de la $(n + 1)$ -forma de Poincaré-Cartan a lo largo de campos de vectores. Supongamos que ξ_Y es un campo de vectores definido en Y , y designemos por F la función tal que

$$\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\mathcal{L} - F\eta \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$$

con expresión local

$$F = \xi_Y^{(1)}(L) + \left(\frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial x^\mu} + z_\nu^i \frac{\partial \xi_Y^\nu}{\partial y^i} \right) L. \quad (4.1)$$

Tras un cómputo laborioso, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\Theta_L &= F\eta + \frac{\partial F}{\partial z_\mu^i} \theta^i \wedge d^n x_\mu \\ &+ z_\nu^j \left(\frac{\partial \xi_Y^\nu}{\partial y^j} \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} - \frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial y^j} \frac{\partial L}{\partial z_\nu^i} \right) \theta^i \wedge d^n x_\mu \\ &- \frac{\partial \xi_Y^\nu}{\partial y^j} \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \theta^i \wedge dy^j \wedge d^{n-1} x_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Definición 4.1.2. *Un campo de vectores ξ_Y en Y se dice que es una **simetría infinitesimal del lagrangiano** o una **simetría variacional** si $\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\Theta_L \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$ (el ideal diferencial generado por las formas de contacto), $\xi_Y^{(1)}$ es tangente a B y además verifica $\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}|_B}\Pi = 0$*

Sólo vamos a trabajar con simetrías infinitesimales, que llamaremos por brevedad simplemente simetrías.

De la definición y la expresión (4.2), es obvio ver que

Proposición 4.1.3. *Si un campo de vectores ξ_Y en Y es una simetría del lagrangiano, entonces $F = 0$ (donde F fue definida en (4.1)).*

Nota 4.1.4. En nuestra construcción, elegimos como definición de la $(n + 1)$ -forma de Poincaré-Cartan:

$$\Theta_L = \mathcal{L} + (S_\eta)^*(dL)$$

o, en coordenadas fibradas,

$$\Theta_L = L d^{n+1}x + \frac{\partial L}{\partial z^i} \theta^i \wedge d^n x_\mu$$

Si $n > 0$ es posible generalizar la construcción de la $(n + 1)$ -forma de Poincaré-Cartan de varias maneras. El único requisito es que la $(n + 1)$ -forma π_{YZ} -semibásica resultante sea *Lepage*-equivalente a \mathcal{L} , esto es,

$$\Theta - \mathcal{L} \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$$

e $i_V d\Theta \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$ donde V es un campo de vectores π_{YZ} -vertical arbitrario. Localmente,

$$\Theta = \Theta_L + \dots \quad (4.3)$$

donde los puntos significan términos que son al menos 2-contacto (ver [7, 31, 62, 71, 86, 89, 90, 91]). Obviamente, todas ellas resultan en las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange.

Por lo tanto, podemos sustituir en las definiciones 4.1.2, 4.1.8 y 4.1.13 la $(n + 1)$ -forma de Poincaré-Cartan por cualquier $(n + 1)$ -forma que sea *Lepage*-equivalente a Θ_L . Obviamente, las simetrías de las ecuaciones de Euler-Lagrange son independientes de la clase de $(n + 1)$ -forma *Lepageana* que aparece en la definición.

Tenemos también los dos siguientes casos especiales, que se deducen fácilmente de la expresión de F .

Proposición 4.1.5. *Si ξ_Y es una simetría del Lagrangiano proyectable ($T\pi_{XY}(\xi_Y)$ es un campo de vectores bien definido, o localmente $\frac{\partial \xi_Y^\mu}{\partial y^i} = 0$), o bien si $\dim X = 1$ ($n = 0$), entonces*

$$\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}} \Theta_L = 0$$

o, equivalentemente,

$$\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}} \mathcal{L} = 0$$

Por lo tanto,

$$\xi_Y^{(1)}(L) = - \sum_{\mu} \frac{d\xi_Y^\mu}{dx^\mu} L$$

Demostración. Mirando atentamente las dos últimas líneas de la expresión de (4.2), vemos que si ξ_Y es proyectable, entonces esos dos términos se anulan, puesto que $\frac{\partial \xi_Y^\nu}{\partial y^i} = 0$, y el resto debido a la proposición 4.1.3.

Cuando $n = 1$, la última fila no existe, y la segunda fila se anula por repetición de coordenadas. El resto se sigue trivialmente de las definiciones y expresiones precedentes. ■

Como una consecuencia directa de la proposición 2.3.8, tenemos

Proposición 4.1.6. *Las simetrías del lagrangiano forman un subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(Y)$.*

Teorema 4.1.7. (Teorema de Noether). Si ξ_Y es una simetría del lagrangiano, entonces $\iota_{\xi_Y}^{(1)}\Theta_L$ es una cantidad conservada que es exacta en el borde B .

Demostración. Tenemos que

$$\mathcal{L}_{\xi_Y}^{(1)}\Theta_L = -\iota_{\xi_Y}^{(1)}\Omega_L + d\iota_{\xi_Y}^{(1)}\Theta_L$$

Si ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces

$$0 = (j^1\phi)^*\mathcal{L}_{\xi_Y}^{(1)}\Theta_L = -(j^1\phi)^*\iota_{\xi_Y}^{(1)}\Omega_L + (j^1\phi)^*d\iota_{\xi_Y}^{(1)}\Theta_L,$$

donde el primer término se anula por las ecuaciones de Euler-Lagrange en su forma intrínseca (ver proposición 3.1.10).

Finalmente, para ver que es exacta en el borde, nótese que de las propiedades de las simetrías del lagrangiano en el borde inferimos que $\iota_{\xi_Y|_B}^{(1)}d\Pi = -d\iota_{\xi_Y|_B}^{(1)}\Pi$, y de ahí obtenemos que

$$i_B^*(\iota_{\xi_Y}^{(1)}\Theta_L) = \iota_{\xi_Y|_B}^{(1)}d\Pi = -d\iota_{\xi_Y|_B}^{(1)}\Pi$$

como queríamos probar. ■

Observar que sin la condición de frontera obtendríamos que $(j^1\phi)^*d\iota_{\xi_Y}^{(1)}\Theta_L = 0$, pero no podemos asegurar que sea exacta en el borde.

La cantidad conservada puede ser escrita en coordenadas como

$$\left(\left[L - z_\mu^i \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \right] \xi_X^\nu + \frac{\partial L}{\partial z_\nu^i} \xi_Y^i \right) d^n x_\nu - \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \xi_X^\nu dy^i \wedge d^{n-1} x_{\mu\nu}$$

4.1.2. Simetrías de Noether

Definición 4.1.8. Un campo de vectores ξ_Y en Y se dice que es una **simetría de Noether** o una **simetría de divergencia** si hay una n -forma en Y cuyo pullback α a Z (el cual debe ser exacto $\alpha = d\beta$ en B) verifica $\mathcal{L}_{\xi_Y}^{(1)}\Theta_L - d\alpha \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$, y $\xi_Y^{(1)}$ es tangente a B y verifica $\mathcal{L}_{\xi_Y|_B}^{(1)}\Pi = 0$

La relación $dy^i = \theta^i + z_\mu^i dx^\mu$ nos permite escribir α localmente como

$$\alpha = \alpha_\mu dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\mu} \wedge \dots \wedge dx^n + \theta$$

para $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$ y

$$d\alpha - \sum_\mu \left(\frac{\partial \alpha^\mu}{\partial x^\mu} + z_\mu^i \frac{\partial \alpha^\mu}{\partial y^i} \right) \eta \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$$

Por tanto, si definimos:

$$\tilde{F} = F + \sum_\mu \left(\frac{\partial \alpha^\mu}{\partial x^\mu} + z_\mu^i \frac{\partial \alpha^\mu}{\partial y^i} \right)$$

deducimos que

Proposición 4.1.9. *Si un campo de vectores ξ_Y en Y es una simetría de Noether, entonces $\tilde{F} = 0$.*

De forma similar,

Proposición 4.1.10. (1) *Si ξ_Y es una simetría de Noether π_{XY} -proyectable, entonces*

$$\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\Theta_L = d\alpha$$

Además,

$$\xi_Y^{(1)}(L) = - \sum_{\mu} \left(\frac{d\xi_Y^{\mu}}{dx^{\mu}} L + \frac{d\alpha^{\mu}}{dx^{\mu}} \right)$$

(2) *Si $\dim X = 1$ y ξ_Y es una simetría de Noether, entonces*

$$\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\Theta_L = d\alpha$$

Proposición 4.1.11. *Las simetrías de Noether forman una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(Y)$, que contiene al álgebra de Lie de las simetrías del Lagrangiano.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[\xi_Y^{(1)}, \zeta_Y^{(1)}]}\Theta_L &= \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\mathcal{L}_{\zeta_Y^{(1)}}\Theta_L - \mathcal{L}_{\zeta_Y^{(1)}}\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\Theta_L = \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}(d\alpha_2 + \theta_2) - \mathcal{L}_{\zeta_Y^{(1)}}(d\alpha_1 + \theta_1) \\ &= d(\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\alpha_2 - \mathcal{L}_{\zeta_Y^{(1)}}\alpha_1) + \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\theta_2 - \mathcal{L}_{\zeta_Y^{(1)}}\theta_1 \end{aligned}$$

y $\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\theta_2 - \mathcal{L}_{\zeta_Y^{(1)}}\theta_1 \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$.

Finalmente, puesto que $\xi_Y^{(1)}$ y $\zeta_Y^{(1)}$ son tangentes a B , entonces $[\xi_Y^{(1)}, \zeta_Y^{(1)}]$ es también tangente a B . Tenemos también que $\mathcal{L}_{[\xi_Y^{(1)}, \zeta_Y^{(1)}]_B}\Pi = \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}|_B}\mathcal{L}_{\zeta_Y^{(1)}|_B}\Pi - \mathcal{L}_{\zeta_Y^{(1)}|_B}\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}|_B}\Pi = 0$ en B , y que si α_1 y α_2 son exactas en B , también lo es $\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}|_B}\alpha_2 - \mathcal{L}_{\zeta_Y^{(1)}|_B}\alpha_1$. ■

Teorema 4.1.12. (Teorema de Noether). *Si ξ_Y es una simetría de Noether, entonces $\iota_{\xi_Y^{(1)}}\Theta_L - \alpha$ es una cantidad conservada que es exacta en el borde.*

El teorema se prueba de forma análoga a como lo hicimos para las simetrías del lagrangiano. Sólomente hacemos una pequeña modificación para ver que es exacta en el borde:

$$i_B^*(\iota_{\xi_Y^{(1)}}\Theta_L - \alpha) = \iota_{\xi_Y^{(1)}|_B}d\Pi - d\beta = d(-\iota_{\xi_Y^{(1)}|_B}\Pi - \beta)$$

4.1.3. Simetrías de Cartan

Definición 4.1.13. *Un campo de vectores ξ_Z en Z se dice que es una **simetría de Cartan** si su flujo preserva el ideal diferencial $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ (en otras palabras, $\psi_{Z,t}^*\theta^i \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$, o localmente, $\mathcal{L}_{\xi_Z}\mathcal{I}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{C})$), y existe una n -forma α en Z (que debe ser exacta $\alpha = d\beta$ en B) tal que $\mathcal{L}_{\xi_Z}\Theta_L - d\alpha \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$, ξ_Z es tangente a B y verifica $\mathcal{L}_{\xi_Z|_B}\Pi = 0$.*

Proposición 4.1.14. *Las simetrías de Cartan forman un subálgebra de $\mathfrak{X}(Z)$.*

También tenemos que, con el mismo tipo de pruebas que anteriormente,

Teorema 4.1.15. (Teorema de Noether). *Si ξ_Z es una simetría de Cartan, entonces $\iota_{\xi_Z} \Theta_L - \alpha$ es una cantidad conservada exacta en el borde.*

Tenemos también las relaciones obvias entre los diferentes tipos de simetrías expuestos arriba. Cada simetría del lagrangiano es una simetría de Noether. Y la prolongación 1-jet de una simetría de Noether es una simetría de Cartan. Recíprocamente, es obvio que una simetría de Cartan es la prolongación 1-jet de su proyección, que es, por tanto, una simetría de Noether.

Y finalmente,

Proposición 4.1.16. *El flujo de simetrías de Cartan lleva soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange en soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange.*

Demostración. Sea ψ_Z^t el flujo de una simetría de Cartan ξ_Z .

Para cada sección $\phi \in \Gamma(\pi)$, podemos definir localmente

$$\psi_{\phi, X}^t := \pi_{XZ} \circ \psi_Z^t \circ j^1 \phi$$

$\psi_{\phi, X}^0 = Id_X$, de donde, para t pequeño, $\psi_{\phi, X}^t$ es un difeomorfismo. Análogamente, definimos

$$\psi_{\phi, Y}^t := \pi_{YZ} \circ \psi_Z^t \circ j^1 \phi \circ \pi_{XY}$$

Con los mismos argumentos vemos que para t pequeño, $\psi_{\phi, Y}^t$ es también un difeomorfismo.

Si ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces el flujo transforma ϕ en

$$\psi_{\phi, Y}^t \circ \phi \circ (\psi_{\phi, X}^t)^{-1}$$

Ahora bien, para $\theta \in \mathcal{C}$,

$$(\psi_Z^t \circ j^1 \phi \circ (\psi_{\phi, X}^t)^{-1})^* \theta = ((\psi_{\phi, X}^t)^{-1})^* (j^1 \phi)^* (\psi_Z^t)^* \theta = 0$$

porque ξ_Z es una simetría de Cartan. Esto significa que $\psi_Z^t \circ j^1 \phi \circ (\psi_{\phi, X}^t)^{-1}$ es la prolongación 1-jet de su proyección a Y ,

$$\pi_{YZ} \circ \psi_Z^t \circ j^1 \phi \circ (\psi_{\phi, X}^t)^{-1} = \psi_{\phi, Y}^t \circ \phi \circ (\psi_{\phi, X}^t)^{-1}$$

En otras palabras,

$$j^1(\psi_{\phi, Y}^t \circ \phi \circ (\psi_{\phi, X}^t)^{-1}) = \psi_Z^t \circ j^1 \phi \circ (\psi_{\phi, X}^t)^{-1}$$

Ahora tenemos que ver que las soluciones transformadas verifican las ecuaciones de Euler-Lagrange. Las ecuaciones anteriores muestran que, siendo la simetría tangente a B , las condiciones de frontera serán satisfechas.

Además, para cada subvariedad $(n+1)$ -dimensional compacta C , y cada campo de vectores $\xi \in \mathcal{V}(\pi)$ vertical, que se anula en ∂C (y por lo tanto, también lo hace $\xi^{(1)}$),

$$\begin{aligned} & \int_{(\psi_{\phi, X}^t)(C)} (j^1(\psi_{\phi, Y}^t \circ \phi \circ (\psi_{\phi, X}^t)^{-1}))^* \mathcal{L}_{\xi^{(1)}} \Theta_L \\ &= \int_{(\psi_{\phi, X}^t)(C)} (\psi_Z^t \circ j^1 \phi \circ (\psi_{\phi, X}^t)^{-1})^* \mathcal{L}_{\xi^{(1)}} \Theta_L \\ &= \int_C (\psi_Z^t \circ j^1 \phi)^* \mathcal{L}_{\xi^{(1)}} \Theta_L = \int_C (j^1 \phi)^* (\psi_Z^t)^* \mathcal{L}_{\xi^{(1)}} \Theta_L \end{aligned}$$

por medio de un cambio de variable. La anulación de la expresión anterior es infinitesimalmente equivalente a la anulación de

$$\int_C (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{\xi_Z} \mathcal{L}_{\xi^{(1)}} \Theta_L = \int_C (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{[\xi_Z, \xi^{(1)}]} \Theta_L - \int_C (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{\xi^{(1)}} \mathcal{L}_{\xi_Z} \Theta_L$$

y finalizamos viendo que

$$\int_C (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{[\xi_Z, \xi^{(1)}]} \Theta_L = - \int_C (j^1\phi)^* \iota_{[\xi_Z, \xi^{(1)}]} \Omega_L + \int_C (j^1\phi)^* du_{[\xi_Z, \xi^{(1)}]} \Theta_L = 0$$

donde el primer término se anula porque ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, y el segundo por la condición de borde en ξ ; además

$$\begin{aligned} \int_C (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{\xi^{(1)}} \mathcal{L}_{\xi_Z} \Theta_L &= \int_C (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{\xi^{(1)}} (d\alpha + \theta) \\ &= \int_{\partial C} (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{\xi^{(1)}} \alpha + \int_C (j^1\phi)^* \mathcal{L}_{\xi^{(1)}} \theta = 0 \end{aligned}$$

donde el primer término se anula de nuevo por la condición de frontera de ξ . ■

4.2. Simetrías de las ecuaciones de De Donder

En la discusión de la sección precedente, hemos usado en el teorema de Noether el hecho de que, para una solución ϕ de las ecuaciones de Euler-Lagrange, tenemos que

$$(j^1\phi)^* \theta = 0$$

para elementos θ del ideal diferencial generado por las formas de contacto. Sin embargo, este resultado ya no es cierto para las soluciones de las ecuaciones de De Donder (específicamente cuando el lagrangiano no es regular). En otras palabras, si σ es una solución de las ecuaciones de De Donder, entonces **no necesariamente**

$$\sigma^* \theta = 0$$

para $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$.

Por lo tanto, nuestra definición de simetría debe ser más restrictiva cuando tratamos con las soluciones de las ecuaciones de De Donder.

Definición 4.2.1. *Una **cantidad conservada para las ecuaciones de De Donder** es una n -forma α en Z tal que $\sigma^* d\alpha = 0$ para cada solución σ de las ecuaciones de De Donder. Si α es una cantidad conservada, entonces $\tilde{\alpha}$ se llama su **momento asociado**.*

También notar que si α es una cantidad conservada, y β es una n -forma cerrada, entonces $\alpha + \beta$ es también una cantidad conservada.

De la ecuación (3.9) deducimos fácilmente la siguiente

Proposición 4.2.2. Sea \mathbf{h} una solución de la ecuación en términos de conexiones (3.8). Entonces α es una cantidad conservada para las ecuaciones de De Donder si y sólo si $d\alpha$ es anulada por n vectores tangentes horizontales en cada punto.

Definición 4.2.3. Tenemos las siguientes definiciones de simetrías de las ecuaciones de De Donder:

(1) Un campo de vectores ξ_Y en Y se dice que es una **simetría del lagrangiano**, o una **simetría variacional** si

$$\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\Theta_L = 0$$

y $\xi_Y^{(1)}$ es tangente a B y verifica $\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}|_B}\Pi = 0$.

(2) Un campo de vectores ξ_Y en Y se dice que es una **simetría de Noether**, o una **simetría de divergencia** si

$$\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}|_B}\Theta_L = d\alpha$$

donde α es el pullback a Z de una n -forma en Y (que debe ser exacta $\alpha = d\beta$ en B), $\xi_Y^{(1)}$ es tangente a B y verifica $\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}|_B}\Pi = 0$.

(3) Un campo de vectores ξ_Z en Z es una **simetría de Cartan** si

$$\mathcal{L}_{\xi_Z}\Theta_L = d\alpha$$

donde α es una n -forma en Z (que es exacta $\alpha = d\beta$ en B) (o, equivalentemente, si existe una n -forma α' tal que

$$\iota_{\xi_Z}\Omega_L = d\alpha'$$

podemos poner $\alpha' = \alpha + \iota_{\xi_Z}\Theta_L$), en otras palabras, si ξ_Z es un campo de vectores hamiltoniano, ξ_Z es tangente a B y verifica $\mathcal{L}_{\xi_Z|_B}\Pi = 0$.

Hay relaciones obvias entre estos tipos de simetrías, de forma completamente análoga a las simetrías para las ecuaciones de Euler-Lagrange. De forma adicional, toda simetría del lagrangiano (resp. de Noether, de Cartan) para las ecuaciones de De Donder es una simetría del lagrangiano (resp. de Noether, de Cartan) para las ecuaciones de Euler-Lagrange.

También notar que un cálculo breve nos muestra que, en el caso de las simetrías de Noether, α debe ser necesariamente el pullback de una n -forma semibásica en Y , localmente expresada como

$$\alpha(x, y, z) = \alpha^\mu(x, y)d^n x_\mu$$

Nótese que de la definición de simetría de Cartan, y usando la fórmula de Cartan, obtenemos

$$\iota_{\xi_Z}\Omega_L = d(\iota_{\xi_Z}\Theta_L + \alpha)$$

y por lo tanto $d\iota_{\xi_Z}\Omega_L = 0$, de donde

$$\mathcal{L}_{\xi_Z}\Omega_L = 0$$

Teorema 4.2.4. (Teorema de Noether) Si ξ_Z es una simetría de Cartan, tal que $\mathcal{L}_{\xi_Z}\Theta_L = d\alpha$, entonces $\iota_{\xi_Z}\Theta_L - \alpha$ es una cantidad conservada que es además exacta en el borde.

Como prueba se repiten los pasos dados para el teorema de Noether para las ecuaciones de Euler-Lagrange, donde ahora

$$\mathcal{L}_{\xi_Z} \Theta_L - d\alpha$$

se anula por definición.

En el caso de lagrangianos regulares y $n > 0$, un cálculo similar al de la Proposición 3.3 para la expresión $\mathcal{L}_{\xi_Z} \Omega_L = 0$ produce dos términos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z_\mu^i \partial z_\nu^j} \frac{\partial \xi_X^\kappa}{\partial y^k} dz_\nu^j \wedge dy^i \wedge dy^k \wedge d^{n-1} x_{\mu\kappa} = 0$$

y

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z_\mu^i \partial z_\nu^j} \frac{\partial \xi_X^\kappa}{\partial z_\lambda^k} dz_\nu^j \wedge dy^i \wedge dz_\lambda^k \wedge d^{n-1} x_{\mu\kappa} = 0,$$

que muestran que las simetrías de Cartan son automáticamente proyectables. Por este motivo, y puesto que las simetrías proyectables son típicas en ejemplos provenientes de la física, enfatizamos el papel de los campos de vectores proyectables a X .

También notar que las simetrías de Cartan preservan los subespacios horizontales en el formalismo de las conexiones.

Proposición 4.2.5. *Supongamos que L es regular. Si ξ_Z es una simetría de Cartan para las ecuaciones de De Donder, entonces ξ_Z preserva la distribución horizontal de cualquier solución Γ de (3.8).*

Demostración. Puesto que ξ_Z es una simetría de Cartan, entonces $\mathcal{L}_{\xi_Z} \Omega_L = 0$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_{\xi_Z} i_{\mathbf{h}} \Omega_L = 0$$

para toda solución Γ de (3.8) con proyector horizontal \mathbf{h} .

De aquí,

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}_{\xi_Z} i_{\mathbf{h}} \Omega_L) (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \\ &= \xi_Z (i_{\mathbf{h}} \Omega_L (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)) - \sum_{a=0}^n i_{\mathbf{h}} \Omega_L (\xi_0, \dots, [\xi_Z, \xi_a], \dots, \xi_n) \\ &= \sum_{b=0}^n \xi_Z (i_{\mathbf{h}(\xi_b)} \Omega_L (\xi_0, \dots, \widehat{\xi}_b, \dots, \xi_n)) \\ &\quad - \sum_{\substack{a, b=0 \\ a \neq b}}^n (-1)^b i_{\mathbf{h}(\xi_b)} \Omega_L (\xi_0, \dots, [\xi_Z, \xi_a], \dots, \widehat{\xi}_b, \dots, \xi_n) \\ &\quad - \sum_{b=0}^n (-1)^{b+1} i_{\mathbf{h}[\xi_Z, \xi_b]} \Omega_L (\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_b, \dots, \xi_n) \\ &= \sum_{b=0}^n (\mathcal{L}_{\xi_Z} i_{\mathbf{h}(\xi_b)} \Omega_L) (\xi_0, \dots, \widehat{\xi}_b, \dots, \xi_n) - \sum_{b=0}^n i_{\mathbf{h}[\xi_Z, \xi_b]} \Omega_L (\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_b, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

Primer caso: ($n > 1$). Puesto que Ω_L es multisimpléctica y $\mathcal{L}_{\xi_Z}\Omega_L = 0$ deducimos que

$$[\xi_Z, \mathbf{h}(\xi)] = \mathbf{h}[\xi_Z, \xi] \quad \forall \xi \in \mathfrak{X}(Z),$$

lo que implica que la distribución horizontal asociada a Γ es \mathbf{h} -invariante.

Segundo caso: ($n = 1$). Tomando $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ entonces $\mathbf{h}(\xi) = \xi_L$ es el campo de vectores de Reeb de la estructura cosimpléctica (Ω_L, dt) (siendo L regular). Aún más, usando la notación $d_t = \frac{d}{dt}$, tenemos que

$$\mathbf{h}\left[\xi_Z, \frac{\partial}{\partial t}\right] = -d_t\tau\xi_L, \quad dt([\xi_Z, \xi_L]) = d_t\tau$$

donde $dt(\xi_Z) = \tau$. Por lo tanto,

$$dt\left([\xi_Z, \xi_L] - \mathbf{h}\left[\xi_Z, \frac{\partial}{\partial t}\right]\right) = 0$$

Puesto que (Ω_L, dt) es una estructura cosimpléctica, deducimos que

$$[\xi_Z, \xi_L] = \mathbf{h}\left[\xi_Z, \frac{\partial}{\partial t}\right] = -(d_t\tau)\xi_L, \quad (4.4)$$

lo que implica el carácter invariante de la distribución $\langle \xi_L \rangle$. Obsérvese que la ecuación (4.4) es la definición clásica de una simetría dinámica para un sistema mecánico dependiente del tiempo.

Aún más, las condiciones de borde se satisfacen porque ξ_Z preserva B . ■

Finalmente, justificaremos que se trata de verdaderas simetrías que transforman soluciones de las ecuaciones de De Donder en soluciones de las ecuaciones de De Donder.

Teorema 4.2.6. *El flujo de las simetrías de Cartan lleva soluciones de las ecuaciones de De Donder en soluciones de las ecuaciones de De Donder.*

Demostración. Si σ es una solución de las ecuaciones de Donder, y $\xi \in \mathfrak{X}(Z)$ es una simetría de Cartan con flujo ϕ_t , y definimos para cada t

$$\psi_t := \pi_{XZ} \circ \phi_t \circ \sigma$$

entonces afirmamos que $\phi_t \circ \sigma \circ \psi_t^{-1}$ es una solución de las ecuaciones de De Donder. Siendo la simetría tangente a B , las condiciones de frontera se satisfarán automáticamente.

Puesto que $\psi_0 = Id$, ψ_t es un difeomorfismo local para t pequeño. Por lo tanto, $\phi_t \circ \sigma \circ \psi_t^{-1}$ tiene sentido para t pequeño. Para probar que

$$(\phi_t \circ \sigma \circ \psi_t^{-1})^*(\iota_X\Omega_L) = (\psi_t^{-1})^*\sigma^*\phi_t^*(\iota_X\Omega_L) = 0$$

es suficiente con ver que

$$\sigma^*\phi_t^*(\iota_X\Omega_L) = 0$$

para t en un entorno de 0. Ahora bien, para $t = 0$, esta ecuación se reduce a las ecuaciones de De Donder, por lo tanto, basta ver que

$$\sigma^*(\mathcal{L}_\xi\iota_X\Omega_L) = 0$$

Usando de nuevo las ecuaciones de De Donder,

$$0 = \sigma^*(\iota_{[\xi, X]}\Omega_L) = \sigma^*(\mathcal{L}_\xi \iota_X \Omega_L) - \sigma^*(\iota_X \mathcal{L}_\xi \Omega_L)$$

Pero

$$\mathcal{L}_\xi \Omega_L = -d\mathcal{L}_\xi \Theta_L = -dd\alpha = 0$$

lo que completa la prueba. ■

4.3. Simetrías de sistemas lagrangianos singulares

Para el caso de lagrangianos singulares (descrito en la sección 1.4.2), consideramos difeomorfismos $\Psi : Z \rightarrow Z$ que preservan la $(n+2)$ -forma de Poincaré-Cartan Ω_L (esto es, $\Psi^*\Omega_L = \Omega_L$) y son π_{XZ} -proyectables.

Proposición 4.3.1. *Si un difeomorfismo $\Psi : Z \rightarrow Z$ que verifica $\Psi(B) \subseteq B$, preserva la $(n+2)$ -forma Ω_L y es π_{XZ} -proyectable, entonces se restringe a un difeomorfismo $\Psi_a : Z_a \rightarrow Z_a$, donde Z_a es la subvariedad a -ria de ligaduras. En particular, Ψ se restringe a un difeomorfismo $\Psi_f : Z_f \rightarrow Z_f$.*

Demostración. Si $z \in Z_1$ entonces existe una aplicación lineal $\mathbf{h}_z : T_z Z \rightarrow T_z Z$ tal que $\mathbf{h}_z^2 = \mathbf{h}_z$, $\ker \mathbf{h}_z = (\mathcal{V}\pi_{XZ})_z$ y

$$i_{\mathbf{h}_z} \Omega_L(z) = n\Omega_L(z)$$

Consideremos la ecuación

$$\mathbf{h}_{\Psi(z)} = T_z \Psi \circ \mathbf{h}_z \circ T_{\Psi(z)} \Psi^{-1}$$

Es claro que $\mathbf{h}_{\Psi(z)}$ es lineal y $\mathbf{h}_{\Psi(z)}^2 = \mathbf{h}_{\Psi(z)}$. Aún más, puesto que Ψ es π_{XZ} proyectable entonces $\ker \mathbf{h}_{\Psi(z)} = (\mathcal{V}\pi_{XZ})_{\Psi(z)}$. Finalmente, puesto que $\Psi^*\Omega_L = \Omega_L$ entonces

$$i_{\mathbf{h}_{\Psi(z)}} \Omega_L(\Psi(z)) = n\Omega_L(\Psi(z))$$

Por lo tanto, si $z \in Z_1$ se deduce $\Psi(z) \in Z_1$. Así, la proposición es cierta para $a = 1$. Supongámosla ahora cierta para $a = l$, y la probaremos para $a = l + 1$.

Sea z un punto en Z_{l+1} . Entonces, existe $\mathbf{h}_z : T_z Z \rightarrow T_z Z_l$ lineal tal que $\mathbf{h}_z^2 = \mathbf{h}_z$, $\ker \mathbf{h}_z = (\mathcal{V}\pi_{XZ})_z$ E $i_{\mathbf{h}_z} \Omega_L(z) = n\Omega_L(z)$. Puesto que $\Psi(Z_l) \subseteq Z_l$ y Ψ es un difeomorfismo, entonces $T_z \Psi(T_z Z_l) \subseteq T_{\Psi(z)} Z_l$. Por lo tanto, $\mathbf{h}_{\Psi(z)} : T_{\Psi(z)} Z \rightarrow T_{\Psi(z)} Z_l$ y $\Psi(z) \in Z_{l+1}$. También tenemos que $\mathbf{h}(TB_f) \subseteq TB_f$. ■

Corolario 4.3.2. *Sea ξ_Z un campo de vectores π_{XZ} -proyectable en X tal que $\mathcal{L}_{\xi_Z} \Omega_L = 0$, entonces ξ_Z es tangente a Z_f*

Corolario 4.3.3. *Una simetría de Cartan que es π_{XZ} -proyectable es tangente a Z_f*

La proposición 4.3.1 motiva la introducción de una clase más general de simetrías. Si Z_f es la subvariedad final de ligaduras, y $i_{f1} : Z_f \rightarrow Z$ es la inmersión canónica, podemos entonces considerar la $(n+2)$ -forma $\Omega_{Z_f} = i_{f1}^* \Omega_L$, y la $(n+1)$ -forma $\Theta_{Z_f} = i_{f1}^* \Theta_L$, y analizar ahora un nuevo tipo de simetrías.

Definición 4.3.4. Una simetría de Cartan para el sistema (Z_f, Ω_{Z_f}) es un campo de vectores Z_f tangente a $Z_f \cap B$ tal que $\mathcal{L}_{\xi_{Z_f}} \Theta_{Z_f} = d\alpha_{Z_f}$, para cierta $\alpha_{Z_f} \in \Lambda^n Z_f$.

Es claro que si ξ_Z es una simetría de Cartan para las ecuaciones de De Donder, entonces utilizando la proposición 4.3.1 deducimos que $X|_{Z_f}$ es una simetría de Cartan para el sistema (Z_f, Ω_{Z_f}) .

4.4. Simetrías en el formalismo hamiltoniano

Podemos también definir simetrías para el formalismo hamiltoniano como hicimos para las ecuaciones de De Donder, con las que están íntimamente relacionadas por el teorema de equivalencia en el caso regular.

Definición 4.4.1. Dado un hamiltoniano h , tenemos las siguientes definiciones de simetrías para las ecuaciones de Hamilton:

(1) Un campo de vectores ξ_Y en Y se dice que es una **simetría de Noether**, o bien una **simetría de divergencia** si hay una n -forma semibásica en Y cuyo pullback α a $\Lambda_2^{n+1}Y$ (que es exacta $\alpha = d\beta$ en B^* , donde usaremos la misma notación α para denotar su pullback a Z^*) verifica

(a) El α -levantamiento de ξ_Y a $\Lambda_2^{n+1}Y$ es proyectable a un campo de vectores $\xi_Y^{(1*)}$ en Z^*

(b) $\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1*)}} \Theta_h = d\alpha$, $\xi_Y^{(1*)}$ es también tangente a B^* y verifica $\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1*)}|_{B^*}} \Pi^* = 0$.

(2) Un campo de vectores ξ_Z en Z^* es una **simetría de Cartan** si

$$\mathcal{L}_{\xi_Z} \Theta_h = d\alpha$$

donde α es una n -forma en Z^* (que es exacta en B^* , es decir $\alpha = d\beta$), ξ_Z es también tangente a B^* y verifica $\mathcal{L}_{\xi_Z|_{B^*}} \Pi^* = 0$

Como es usual, las simetrías de Noether inducen simetrías de Cartan en Z^* .

Supongamos que ξ es un campo de vectores en Y , y α es el pullback a $\Lambda_2^{n+1}Y$ de una forma π_{XY} -semibásica en Y . Si el α -levantamiento de ξ a $\Lambda_2^{n+1}Y$ proyecta en un campo de vectores en Z^* entonces ξ_Y es una simetría de Noether.

Teorema 4.4.2. (Teorema de Noether) Si ξ_{Z^*} es una simetría de Cartan, tal que $\mathcal{L}_{\xi_{Z^*}} \Theta_h = d\alpha$, entonces $\sigma^* d(\iota_{\xi_{Z^*}} \Theta_h - \alpha) = 0$ para cada solución σ de las ecuaciones de Hamilton. Aún más, $\iota_{\xi_{Z^*}} \Theta_h - \alpha$ es exacta en ∂Z^* .

La demostración de este teorema es completamente análoga al del teorema de Noether para las ecuaciones de De Donder.

Finalmente, justificamos que son verdaderas simetrías, que llevan soluciones de las ecuaciones de Hamilton en soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

Teorema 4.4.3. El flujo de las simetrías de Cartan lleva soluciones de las ecuaciones de Hamilton en soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

La prueba es idéntica a la realizada para las ecuaciones de De Donder en el teorema 4.2.6.

4.5. La transformación de Legendre y las simetrías

En esta sección relacionamos finalmente las simetrías de las ecuaciones de De Donder y de Hamilton, bajo la suposición de hiperregularidad. En esta sección suponemos por tanto que L es un lagrangiano hiperregular.

Proposición 4.5.1. *Si ξ_Z es una simetría de Cartan para las ecuaciones de De Donder, entonces $Tleg_L(\xi_Z)$ es una simetría de Cartan para las ecuaciones de Hamilton. El recíproco también es cierto.*

Demostración. Si aplicamos $(leg_L^{-1})^*$ a la condición de simetría de Cartan para las ecuaciones de De Donder obtenemos la condición de simetría de Cartan para las ecuaciones de Hamilton:

$$0 = (leg_L^{-1})^*(\mathcal{L}_{\xi_Z}\Theta_L - d\alpha) = \mathcal{L}_{Tleg_L(\xi_Z)}(leg_L^{-1})^*\Theta_L - d\tilde{\alpha} = \mathcal{L}_{Tleg_L(\xi_Z)}\Theta_h - d\tilde{\alpha}.$$

donde $leg_L^*\tilde{\alpha} = \alpha$. La conervación del borde es trivial, por la forma en que B^* ha sido definido, y la compatibilidad vía la transformación de Legendre. ■

De forma similar probamos el siguiente resultado:

Lema 4.5.2. *Si ξ_Y es una simetría de Noether para las ecuaciones de De Donder, tal que $\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\Theta_L - d\alpha$, entonces $Tleg_L(\xi_Y^{(1)})$ es el α -levantamiento de ξ_Y .*

Desde donde obtenemos que

Proposición 4.5.3. *Toda simetría de Noether para las ecuaciones de De Donder es una simetría de De Donder para las ecuaciones de Hamilton. El recíproco es también cierto.*

Demostración. Tenemos que

$$Tleg_L(\xi_Y^{(1)}) = (T\mu \circ Tleg_L)(\xi_Y^{(1)})$$

por lo tanto, la α -elevación de ξ_Y proyecta sobre $Tleg_L(\xi_Y^{(1)})$ en Z^* , y como $\xi_Y^{(1)}$ es una simetría de Cartan, su imagen $Tleg_L(\xi_Y^{(1)})$ también verifica la condición de Cartan (puesto que $\mathcal{L}_{Tleg_L(\xi_Y^{(1)})}\Theta_h - d\tilde{\alpha} = \mathcal{L}_{Tleg_L(\xi_Y^{(1)})}(leg_L^{-1})^*\Theta_L - d(leg_L^{-1})^*\alpha = (leg_L^{-1})^*(\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}}\Theta_L - d\alpha) = 0$). Como es habitual, uno puede ver que las condiciones sobre el borde se satisfacen trivialmente. ■

4.6. Simetrías en el formalismo hamiltoniano para lagrangianos casi regulares

En la subvariedad final de ligaduras M_f tenemos la siguiente definición (ver [110]):

Definición 4.6.1. *Una **simetría de Cartan** para el sistema (M_f, Ω_{M_f}) es un campo de vectores en M_f tangente a $M_f \cap B^*$ tal que $\mathcal{L}_{\xi_{M_f}}\Theta_{M_f} = d\alpha_{M_f}$, para cierto $\alpha_{M_f} \in \Lambda^n M_f$.*

De la cual podemos deducir la siguiente proposición trivial:

Proposición 4.6.2. *Si ξ_{M_f} es una simetría de Cartan para (M_f, Ω_{M_f}) entonces todo campo de vectores ξ_{Z_f} , tal que $Tleg_f(\xi_{Z_f}) = \xi_{M_f}$ es una simetría de Cartan para (Z_f, Ω_{Z_f}) .*

4.7. Simetrías en los espacios de datos de Cauchy

Las simetrías de sistemas presimplécticos han sido exhaustivamente estudiadas en [107, 111] (ver también [43, 69]). En [111] (proposición 4.1 y corolario 4.1) se probó que para un sistema presimpléctico general dado por (M, ω, Λ) , donde M es una variedad diferenciable, ω una 2-forma cerrada y Λ una 1-forma cerrada, un campo de vectores ξ tal que

$$\iota_{\xi}\omega = dG, \quad \iota_{\xi}\Lambda = 0$$

donde $G : M \rightarrow \mathbb{R}$, es una simetría de Cartan del sistema presimpléctico. Si $\Lambda = 0$ (como es nuestro caso), la condición se reduce a $\iota_{\xi}\omega = dG$.

La siguiente proposición explica la relación entre simetrías de Cartan de las ecuaciones de De Donder y simetrías de Cartan para el sistema presimpléctico $(\tilde{Z}, \tilde{\Omega})$.

Proposición 4.7.1. *Sea ξ_Z una simetría de Cartan para las ecuaciones de De Donder, esto es, $\mathcal{L}_{\xi_Z}\Theta_L = d\alpha$. Entonces, el campo de vectores inducido $\xi_{\tilde{Z}}$ en \tilde{Z} , definido por $\xi_{\tilde{Z}}(\gamma) = \xi_Z \circ \gamma$, es una simetría de Cartan para el sistema presimpléctico $(\tilde{Z}, \tilde{\Omega}_L)$.*

Demostración. Si $\mathcal{L}_{\xi_Z}\Theta_L = d\alpha$, entonces

$$i_{\xi_Z}\Omega_L = d(\alpha - i_{\xi_Z}\Theta_L)$$

esto es, ξ_Z es un campo de vectores hamiltoniano para la n -forma $\beta = \alpha - i_{\xi_Z}\Theta_L$. Entonces, por la proposición 3.3.19 tenemos

$$i_{\xi_Z}\tilde{\Omega}_L = d\tilde{\beta}$$

lo que muestra que $\xi_{\tilde{Z}}$ es una simetría de Cartan para el sistema presimpléctico $(\tilde{Z}, \tilde{\Omega}_L)$. ■

4.8. Preservación de cantidades conservadas a lo largo de soluciones

Proposición 4.8.1. *Si α es una cantidad conservada, y $c_{\tilde{Z}}$ es una solución de las ecuaciones de De Donder (3.14) tal que su proyección $c_{\tilde{X}}$ a \tilde{X} descompone X y α es exacta en $B \subseteq \partial Z$ ($\alpha|_B = d\beta$), entonces $\tilde{\alpha} \circ c_{\tilde{Z}}$ es constante; en otras palabras, la siguiente función*

$$\int_M c_{\tilde{Z}}(t)^*\alpha - \int_{\partial M} c_{\tilde{Z}}(t)^*\beta$$

es constante con respecto a t .

Demostración. Tomemos dos números reales $t_1 < t_2$ en el dominio de definición de la curva solución, y denotemos por $M_1 = c_{\tilde{X}}(t_1)$ y $M_2 = c_{\tilde{X}}(t_2)$. Como $c_{\tilde{X}}$ descompone X , entonces podemos considerar el subespacio $U \subseteq X$ identificado con $M \times [t_1, t_2]$, M_1 se identifica con $M \times t_1$, M_2 se identifica con $M \times t_2$, y denotemos por V el subespacio borde que corresponde a $\partial M \times [t_1, t_2]$. A la vista de (3.13), entonces

$$c_{\bar{Z}}(t)^* d\alpha = 0 \quad \text{para todo } t$$

de donde si integramos y aplicamos el teorema de Stokes, obtenemos

$$0 = \int_{M_2} c_{\bar{Z}}(t)^* \alpha + \int_V c_{\bar{Z}}(t)^* \alpha - \int_{M_1} c_{\bar{Z}}(t)^* \alpha$$

Si ponemos $\alpha = d\beta$ en B , entonces $0 = \partial\partial U = \partial M_2 + \partial V - \partial M_1$, de donde al aplicar de nuevo el teorema de Stokes, obtenemos

$$\int_V c_{\bar{Z}}(t)^* \alpha = \int_{\partial V} c_{\bar{Z}}(t)^* \beta = \int_{\partial M_1} c_{\bar{Z}}(t)^* \beta - \int_{\partial M_2} c_{\bar{Z}}(t)^* \beta.$$

■

Corolario 4.8.2. *En particular, si ξ_Y es una simetría del lagrangiano para las ecuaciones de De Donder, la fórmula precedente puede ser aplicada a la cantidad conservada $\iota_{\xi_Y^{(1)}} \Theta_L$ y obtenemos que la siguiente integral se preserva a lo largo de soluciones de las ecuaciones de De Donder (3.14) cuya proyección $c_{\tilde{X}}$ a \tilde{X} descompone X :*

$$\int_M c_{\bar{Z}}(t)^* \iota_{\xi_Y^{(1)}} \Theta_L + \int_{\partial M} c_{\bar{Z}}(t)^* \iota_{\xi_Y^{(1)}} \Pi$$

La fórmula anterior puede encontrarse también en [9].

4.9. Simetrías localizables. Segundo teorema de Noether

Definición 4.9.1. *Una simetría del lagrangiano ξ_Y se dice que es **localizable** cuando $\xi_Y^{(1)}$ se anula en ∂Z y entonces para cada par de abiertos U y U' en X con clausuras disjuntas, existe otra simetría del lagrangiano ζ_Y tal que*

$$\xi_Y^{(1)} = \zeta_Y^{(1)} \quad \text{en } \pi_{XZ}^{-1}(U)$$

y

$$\zeta_Y^{(1)} = 0 \quad \text{en } \pi_{XZ}^{-1}(U') \cup \partial Z$$

Teorema 4.9.2. Segundo teorema de Noether. *Si ξ_Y es una simetría localizable, y $c_{\bar{Z}}$ es una solución de las ecuaciones de De Donder (3.14), entonces*

$$\widetilde{(\iota_{\xi_Y} \Theta_L)}(c_{\bar{Z}}(t)) = 0$$

para todo t . Por lo tanto, si $\alpha = \iota_{\xi} \Theta_L$ es la cantidad conservada, entonces $\tilde{\alpha}$ es una constante del movimiento para las ecuaciones de De Donder.

Demostración. El primer teorema de Noether garantiza que la aplicación precedente es constante. Si tomamos t_0 en el dominio de definición de $c_{\bar{Z}}$, la descomposición espacio-temporal de X

garantiza que, para $t \neq t_0$, podemos encontrar, usando entornos tubulares, dos abiertos disjuntos U y U' de clausura disjunta que contienen a $Im(c_{\bar{z}}(t_0))$ e $Im(c_{\bar{z}}(t))$, respectivamente.

Si ζ_Y es la simetría de Cartan garantizada por definición de simetría localizable respecto a U y U' , entonces

$$(\widetilde{\iota_{\zeta_Y} \Theta_L})(c_{\bar{z}}(t_0)) = (\widetilde{\iota_{\zeta_Y} \Theta_L})(c_{\bar{z}}(t)) = (\widetilde{\iota_{\zeta_Y} \Theta_L})(c_{\bar{z}}(t)) = 0.$$

lo cual finaliza la prueba. ■

4.10. Aplicación momento

En esta sección estamos interesados en considerar grupos de simetrías que actúan en el espacio de configuraciones Y que inducen una acción levantada en Z que preserva la forma lagrangiana.

4.10.1. Acción de un grupo

Si G es un grupo de Lie que actúa en Y , entonces la acción de G en Y puede levantarse a una acción de G en Z , y el generador infinitesimal de la acción levantada corresponde al levantamiento del generador infinitesimal de la acción, en otras palabras,

$$\xi_Z = \xi_Y^{(1)}$$

Definición 4.10.1. *Diremos que un grupo de Lie G actúa como un **grupo de simetrías del lagrangiano** si define una acción en Y que proyecta en una acción compatible en X , cuya proлонgación 1-jet preserva B , y si el flujo ϕ_Z de ξ_Z verifica*

$$\phi_Z^* \mathcal{L} = \mathcal{L}, \quad \phi_Z^* \Pi = \Pi$$

El hecho de que la acción es fibrada implica que ξ_Y es un campo de vectores proyectable. Por lo tanto, la condición $\phi_Z^* \mathcal{L} = \mathcal{L}$, expresada infinitesimalmente como

$$\mathcal{L}_{\xi_Z} \mathcal{L} = 0,$$

junto con las dos siguientes consecuencias directas de la definición:

(i) ξ_Z es tangente a B

(ii) $\mathcal{L}_{(\xi_Z)|_B} \Pi = 0$,

establece el hecho de que ξ_Y es una simetría del lagrangiano.

4.10.2. Aplicación momento

Si tenemos un grupo G de simetrías del lagrangiano que actúan en Y , podemos usar la $(n+1)$ -forma de Poincaré-Cartan en Z para construir el análogo a la aplicación momento en mecánica clásica.

Definición 4.10.2. La *aplicación momento* es una aplicación

$$J : Z \longrightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^n Z$$

o alternativamente,

$$J : Z \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \Lambda^n Z$$

definida por $J(z, \xi) := (\iota_{\xi_Z} \Theta_L)_z$.

Por lo tanto, $J(\cdot, \xi)$ es una n -forma, que denotaremos por J^ξ .

Nota 4.10.3. En B , puesto que $\mathcal{L}_{(\xi_Z)|_B} \Pi = 0$ tenemos que $\iota_{(\xi_Z)|_B} d\Pi = -d\iota_{(\xi_Z)|_B} \Pi$, y por lo tanto,

$$J(z, \xi) = (\iota_{\xi_Z} \Theta_L|_B)(z) = (\iota_{\xi_Z} d\Pi)(z) = -(d\iota_{\xi_Z} \Pi)(z)$$

Nótese que J^ξ es una cantidad conservada. Llamamos a \widetilde{J}^ξ su momento asociado.

Proposición 4.10.4.

$$dJ^\xi = \iota_{\xi_Z} \Omega_L$$

Demostración. Como ξ es proyectable, $\mathcal{L}_{\xi_Z} \Theta_L = 0$ (por 4.1.5), de donde

$$0 = \mathcal{L}_{\xi_Z} \Theta_L = \iota_{\xi_Z} d\Theta_L + d\iota_{\xi_Z} \Theta_L = -\iota_{\xi_Z} \Omega_L + dJ^\xi.$$

■

En el siguiente capítulo, estudiaremos el caso en que tenemos una descomposición de la variedad X fijada.

4.10.3. Aplicación momento en los espacios de datos de Cauchy

Si G es un grupo de Lie que actúa en Y como simetrías del Lagrangiano, entonces induce una acción en \widetilde{Z} definida puntualmente en la imagen de cada curva de \widetilde{Z} .

Para $\xi \in \mathfrak{g}$, el campo de vectores $\xi_{\widetilde{Z}}$ es precisamente el vector en \widetilde{Z} inducido por el campo ξ_Z en Z . Y puesto que ξ_Z es una simetría de Cartan, también lo es $\xi_{\widetilde{Z}}$.

De forma similar, la forma presimpléctica $\widetilde{\Theta}_L$ induce una aplicación momento

$$\widetilde{J} : \widetilde{Z} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

definida usando su paridad (para $\xi \in \mathfrak{g}$)

$$\widetilde{J}^\xi = \langle \widetilde{J}, \xi \rangle : \widetilde{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\widetilde{J}^\xi := \iota_{\xi_{\widetilde{Z}}} \widetilde{\Theta}_L$$

Se tiene inmediatamente que $\widetilde{J}^\xi = \widetilde{J}^\xi$. Como sabemos que ξ es una simetría de Cartan para las ecuaciones de De Donder en Z , entonces $\widetilde{\xi}$ es una simetría de Cartan para las ecuaciones de De Donder en \widetilde{Z} , y por lo tanto, \widetilde{J}^ξ es una cantidad conservada en el sistema presimpléctico.

Siguiendo los argumentos dados en la proposición 4.10.4, se tiene que:

Proposición 4.10.5.

$$d\widetilde{J}^\xi = \iota_{\xi_{\widetilde{Z}}} \widetilde{\Omega}_L$$

4.11. Ejemplos

4.11.1. La cuerda bosónica

Sea X una variedad 2-dimensional, y (B, g) una variedad espacio temporal $(d+1)$ -dimensional equipada con una métrica lorentziana g de signatura $(-, +, \dots, +)$. Una *cuerda bosónica* es una aplicación $\phi : X \longrightarrow B$ (ver [6, 64]).

En lo que sigue, utilizaremos el enfoque de Polyakov para la teoría clásica de cuerdas bosónicas. Sea $S_2^{1,1}(X)$ el fibrado sobre X de 2-tensores simétricos covariantes de signatura lorentziana $(-, +)$ o $(1, 1)$. Tomamos el fibrado vectorial $\pi : Y = X \times B \times S_2^{1,1}(X) \longrightarrow X$. En esta formulación, un campo ψ es una sección (ϕ, s) del fibrado vectorial $Y = X \times B \times S_2^{1,1}(X) \longrightarrow X$, donde $\phi : X \longrightarrow X \times B$ es la cuerda bosónica y s es una métrica lorentziana en X .

Descripción lagrangiana

Tenemos que $Z = J^1(X \times B) \times_X J^1(S_2^{1,1}(X))$. Tomando coordenadas (x^μ) , (y^i) y $(x^\mu, s_{\mu\zeta})$ en X , B y $S_2^{1,1}(X)$, entonces las coordenadas locales fibradas de Z son $(x^\mu, y^i, s_{\zeta\xi}, y_\mu^i, s_{\zeta\xi\mu})$. En este sistema local de coordenadas, la densidad lagrangiana viene dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sqrt{-\det(s)} s^{\zeta\xi} g_{ij} y_\zeta^i y_\xi^j d^2 x.$$

La 2-forma de Cartan es

$$\Theta_L = \sqrt{-\det(s)} \left(-s^{\mu\nu} g_{ij} y_\nu^j dy^i \wedge d^1 x_\mu + \frac{1}{2} s^{\mu\nu} g_{ij} y_\mu^i y_\nu^j d^2 x \right)$$

y la 3-forma de Cartan es

$$\begin{aligned} \Omega_L &= dy^i \wedge d \left(-\sqrt{-\det(s)} s^{\zeta\xi} g_{ij} y_\xi^j \right) \wedge d^1 x_\zeta \\ &\quad - d \left(\frac{1}{2} \sqrt{-\det(s)} s^{\zeta\xi} g_{ij} y_\zeta^i y_\xi^j \right) \wedge d^2 x \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sqrt{-\det(s)}}{\partial s_{\rho\sigma}} s^{\zeta\xi} g_{ij} y_\zeta^i y_\xi^j - \sqrt{-\det(s)} s^{\zeta\rho} s^{\xi\sigma} g_{ij} y_\rho^i y_\xi^j \right) ds_{\rho\sigma} \wedge d^2 x \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{-\det(s)} s^{\zeta\xi} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} y_\zeta^i y_\xi^j dy^k \wedge d^2 x - \sqrt{-\det(s)} s^{\zeta\xi} g_{ij} y_\zeta^i dy_\xi^j \wedge d^2 x \\ &\quad + \left(\frac{\partial \sqrt{-\det(s)}}{\partial h_{\rho\sigma}} s^{\zeta\xi} g_{ij} y_\xi^j - \sqrt{-\det(s)} s^{\zeta\rho} s^{\xi\sigma} g_{ij} y_\xi^j \right) ds_{\rho\sigma} \wedge dy^i \wedge d^1 x_\zeta \\ &\quad + \sqrt{-\det(s)} s^{\zeta\xi} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} y_\xi^j dy^k \wedge dy^i \wedge d^1 x_\zeta \\ &\quad + \sqrt{-\det(s)} s^{\zeta\xi} g_{ij} dy_\xi^j \wedge dy^i \wedge d^1 x_\zeta. \end{aligned}$$

Si resolvemos la ecuación $i_{\mathbf{h}} \Omega_L = \Omega_L$, donde

$$\mathbf{h} = dx^\mu \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \gamma_{\zeta\xi\mu} \frac{\partial}{\partial s_{\zeta\xi}} + \Gamma_{\zeta\mu}^i \frac{\partial}{\partial y_\zeta^i} + \gamma_{\zeta\xi\rho\mu} \frac{\partial}{\partial s_{\zeta\xi\rho}} \right),$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu}^i &= y_{\mu}^i \\ 0 &= \frac{1}{2}\sqrt{-\det(s)}s^{\zeta\xi}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}y_{\zeta}^iy_{\xi}^j - \sqrt{-\det(s)}s^{\zeta\xi}\frac{\partial g_{kj}}{\partial y^i}y_{\zeta}^iy_{\xi}^j - \sqrt{-\det(s)}s^{\zeta\xi}g_{kj}\Gamma_{\xi\zeta}^j \\ &\quad - \left(\frac{\partial\sqrt{-\det(s)}}{\partial s_{\rho\sigma}}s^{\zeta\xi}g_{kj}y_{\xi}^j - \sqrt{-\det(s)}s^{\zeta\rho}s^{\xi\sigma}g_{kj}y_{\xi}^j\right)\gamma_{\rho\sigma\zeta},\end{aligned}$$

y las ligaduras vienen dadas por las ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial s_{\rho\theta}}\left(\sqrt{-\det(s)}s^{\zeta\xi}\right)g_{ij}y_{\zeta}^iy_{\xi}^j = 0.$$

La ecuación anterior se corresponde con las tres siguientes ligaduras

$$\begin{aligned}\left[s^{\zeta 0}s^{\xi 0}(s_{01}^2 - s_{00}s_{11}) + \frac{1}{2}s^{\zeta\xi}s_{11}\right]g_{ij}y_{\zeta}^iy_{\xi}^j &= 0 \\ \left[s^{\zeta 1}s^{\xi 1}(s_{01}^2 - s_{00}s_{11}) + \frac{1}{2}s^{\zeta\xi}s_{00}\right]g_{ij}y_{\zeta}^iy_{\xi}^j &= 0 \\ \left[s^{\zeta 0}s^{\xi 1}(s_{01}^2 - s_{00}s_{11}) - s^{\zeta\xi}s_{01}\right]g_{ij}y_{\zeta}^iy_{\xi}^j &= 0\end{aligned}$$

que determinan Z_2 .

Descripción hamiltoniana

La transformación de Legendre viene dada por

$$\text{Leg}_L(x^{\mu}, y^i, s_{\zeta\xi}, y_{\mu}^i, s_{\zeta\xi\mu}) = (x^{\mu}, y^i, s_{\zeta\xi}, -\sqrt{-\det(s)}s^{\mu\zeta}g_{ij}y_{\zeta}^j, 0)$$

Por lo tanto, el lagrangiano L es casi regular, y aún más, $\tilde{M}_1 = \text{Im } \text{Leg}_L \cong M_1 = \text{leg}_L(Z) \cong J^1(X \times B) \times_X S_2^{1,1}(X)$. Tomemos ahora coordenadas $(x^{\mu}, y^i, s_{\zeta\xi}, p_i^{\mu})$ en M_1 y consideremos la aplicación $s_1 : M_1 \rightarrow \tilde{M}_1$ dada por

$$s_1(x^{\mu}, y^i, s_{\zeta\xi}, p_i^{\mu}) = (x^{\mu}, y^i, s_{\zeta\xi}, p = \frac{1}{2\sqrt{-\det(s)}}s_{\zeta\xi}g^{ij}p_{\zeta}^ip_{\xi}^j, p_i^{\mu})$$

Entonces tenemos

$$\Omega_{M_1} = -d\left(\frac{1}{2\sqrt{-\det(s)}}s_{\zeta\xi}g^{ij}p_{\zeta}^ip_{\xi}^j\right) \wedge d^2x + dy^i \wedge dp_i^{\mu} \wedge d^1x_{\mu}$$

y las ecuaciones de Hamilton son $i_{\tilde{\mathbf{h}}}\Omega_{M_1} = \Omega_{M_1}$. Si

$$\tilde{\mathbf{h}} = dx^{\mu} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \tilde{\gamma}_{\zeta\xi\mu} \frac{\partial}{\partial s_{\zeta\xi}} + \tilde{\Gamma}_{i\mu}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial p_i^{\zeta}}\right)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_\mu^i &= -\frac{1}{\sqrt{-\det(s)}} s_{\zeta\mu} g^{ij} p_j^\zeta \\ \tilde{\Gamma}_{i\mu}^\mu &= \frac{1}{2\sqrt{-\det(s)}} s_{\zeta\xi} \frac{\partial g^{ij}}{\partial y^k} p_\zeta^i p_\xi^j,\end{aligned}$$

y ligaduras secundarias

$$\frac{g^{ij}}{\sqrt{-\det(s)}} \left(\frac{1}{2\det(s)} \frac{\partial \det(s)}{\partial s_{\rho\sigma}} s_{\zeta\xi} p_\zeta^i p_\xi^j - p_i^\rho p_j^\sigma \right) = 0$$

que determinan M_2 .

Simetrías

Sea λ una función arbitraria en X , y denotemos también por λ su *pullback* a Y y Z .

Consideremos el siguiente campo de vectores π_{XY} -proyectable en Y :

$$\xi_Y := \lambda s_{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial s_{\sigma\rho}}$$

Su prolongación 1-jet está dada por

$$\xi_Z := \xi_Y^{(1)} = \lambda s_{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial s_{\sigma\rho}} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu} s_{\sigma\rho} + \lambda s_{\sigma\rho,\mu} \right) \frac{\partial}{\partial s_{\sigma\rho,\mu}}$$

Probaremos que ξ_Y es una simetría del lagrangiano. Nótese que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi_Z} \Theta_L &= \mathcal{L}_{\xi_Y}(\sqrt{-\det(s)}) \left(-s^{\mu\nu} g_{ij} y_\nu^j dy^i \wedge d^1 x_\mu + \frac{1}{2} s^{\mu\nu} g_{ij} y_\mu^i y_\nu^j d^2 x \right) \\ &\quad + \sqrt{-\det(s)} \left(-\mathcal{L}_{\xi_Y}(s^{\mu\nu}) g_{ij} y_\nu^j dy^i \wedge d^1 x_\mu + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\xi_Y}(s^{\mu\nu}) g_{ij} y_\mu^i y_\nu^j d^2 x \right)\end{aligned}$$

Un cálculo directo muestra que

$$\xi_Y(\sqrt{-\det(s)}) = \lambda \sqrt{-\det(s)}$$

y

$$\mathcal{L}_{\xi_Y}(s^{\mu\nu}) = -\lambda s^{\mu\nu}$$

Por lo tanto, ξ_Y es una simetría del lagrangiano, y puesto que la simetría de Cartan correspondiente ξ_Z es π_{XZ} -proyectable, entonces la simetría proyecta en la variedad final de ligaduras.

La cantidad conservada dada por el teorema de Noether es

$$J^{\xi_Y} = \sum_{\sigma,\rho,\mu} \lambda s_{\sigma\rho,\mu} s_{\sigma\rho} d^1 x_\mu$$

Nótese que el campo de vectores

$$\xi_Y = 2\lambda s_{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial s_{\sigma\rho}}$$

es el generador infinitesimal de la acción del grupo $N = \mathcal{C}S_2^{1,1}(X) \equiv \mathcal{F}(X, \mathbb{R}^+)$ de transformaciones conformes de una métrica de signatura $(1, 1)$ dada por

$$\lambda(\phi, s) := (\phi, \lambda^2 s)$$

Tenemos que

$$\det(\lambda^2 s) = \lambda^4 \det(s)$$

y

$$(\lambda^2 s)^{\mu\nu} = \lambda^{-2} s^{\mu\nu};$$

por lo tanto, la acción preserva las ecuaciones de ligadura.

De forma similar, podemos considerar la acción de $H = \text{Diff}(X)$ por

$$\eta(\phi, s) := (\phi \circ \eta^{-1}, (\eta^{-1})^* s)$$

o más generalmente, el producto semidirecto $G = H[N]$, donde la acción de elementos $\eta \in H$ sobre elementos $\lambda \in N$ viene dada por

$$\eta \cdot \lambda := \lambda \circ \eta^{-1}$$

El grupo G es un grupo de simetrías para Y , y la acción es

$$(\eta, \lambda) \cdot (\phi, s) := (\phi \circ \eta^{-1}, \lambda^2 (\eta^{-1})^* s)$$

Simetrías en el lado hamiltoniano

No siendo L regular, no podemos garantizar que ξ_Y es una simetría de Noether para el lado hamiltoniano. Sin embargo, un cálculo sencillo nos revela que

$$\xi_Y^{(1)} = \lambda s_{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial s_{\sigma\rho}} - \lambda p_{\sigma\rho}^\mu \frac{\partial}{\partial p_{\sigma\rho}^\mu}$$

y por tanto,

$$\mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}} \Theta_L = \mathcal{L}_{\xi_Y^{(1)}} (p_{\sigma\rho}^\mu ds_{\sigma\rho} \wedge d^1 x_\mu) = p_{\sigma\rho}^\mu s_{\sigma\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu} d^2 x$$

Sin embargo, nótese que en M_1 tenemos que $p_{\sigma\rho}^\mu = 0$, y entonces ξ_Y restringe a una simetría de la forma

$$\lambda s_{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial s_{\sigma\rho}}$$

Aún más, éste es el generador infinitesimal de la restricción de la acción levantada a Z^* , y se deduce fácilmente, a la vista de la forma de la segunda ecuación de ligaduras, que la acción se restringe a la segunda variedad de ligaduras.

Más simetrías

En general, uno puede considerar la invariancia de las ecuaciones y el lagrangiano con respecto a un difeomorfismo de X . Si η es un difeomorfismo tal, entonces $\eta(\phi, s) = (\phi \circ \eta^{-1}, (\eta^{-1})^*s)$, con generador infinitesimal

$$-(s_{\sigma\mu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} + s_{\rho\mu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\sigma}) \frac{\partial}{\partial s_{\sigma\rho}} + \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

donde $\xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ es el generador infinitesimal de η .

La situación más general proviene de considerar el producto semidirecto $H[N]$ del grupo $H = Diff(X)$ y el grupo N de funciones reales positivas en X definido más arriba, dado por

$$\eta \cdot \lambda := \lambda \circ \eta^{-1}$$

La acción se define como sigue

$$(\eta, \lambda)(\phi, s) = (\phi \circ \eta^{-1}, \lambda^2(\eta^{-1})^*s),$$

y el generador infinitesimal es

$$2\lambda s_{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial s_{\sigma\rho}} - (s_{\sigma\mu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} + s_{\rho\mu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\sigma}) \frac{\partial}{\partial s_{\sigma\rho}} + \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Se prueba que se trata de una simetría del lagrangiano (ver [64]), y la cantidad conservada correspondiente es

$$\frac{\partial L}{\partial y^i} (y_\mu^i \xi^\nu) + \frac{\partial L}{\partial s_{\sigma\rho}} (s_{\sigma\rho, \nu} \xi^\nu - 2\lambda s_{\sigma\rho} + s_{\sigma\nu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\rho} + s_{\rho\nu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma}) = 0$$

para λ, ξ^ν and $\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\rho}$ arbitrarios, lo que da en particular la ecuación $\partial L / \partial s_{\sigma\rho} = 0$, que se expande a

$$\frac{1}{2} s^{\mu\nu} g_{ij} y_\mu^i y_\nu^j s_{\sigma\rho} = g_{ij} y_\sigma^i y_\rho^j$$

lo que significa que h es una métrica conformemente equivalente a ϕ^*g y el factor de conformidad es precisamente $\frac{1}{2} s^{\mu\nu} g_{ij} y_\mu^i y_\nu^j$.

4.11.2. La ecuación de Klein-Gordon

Para la ecuación de Klein-Gordon, tomamos (X, g) un espacio de Minkovski, e $Y := X \times \mathbb{R}$, donde $\pi : Y \rightarrow X$ es la primera proyección canónica. Una sección ϕ de π se puede identificar con una función diferenciable en X , digamos $\varphi \in C^\infty(X)$, donde $y(j^1\phi(x)) = \varphi(x)$ y $z_\mu(j^1\phi(x)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}(x)$.

La fórmula de volumen escogida será $\eta := \sqrt{-\det g}$.

Formulación lagrangiana

La función lagrangiana es

$$L(x^\mu, y, z_\mu) := \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} z_\mu z_\nu + m^2 y^2)$$

que es regular, puesto que

$$\hat{p}^\mu = \frac{\partial L}{\partial z_\mu} = g^{\mu\nu} z_\nu$$

y por lo tanto, la matriz hessiana es precisamente $(g^{\mu\nu})$.

La 4-forma de Poincaré-Cartan es

$$\Theta_L = \sqrt{-\det g} \left(g^{\mu\nu} z_\mu dy \wedge d^3 x_\nu - \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} z_\mu z_\nu - m^2 y^2) d^4 x \right)$$

La condición de frontera es $B = 0$, esto es, $\sigma(\partial X) = 0$.

En términos de φ las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$m^2 \varphi = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

es decir, la ecuación de Klein-Gordon.

Transformación de Legendre y formalismo hamiltoniano

Calculamos

$$\hat{p} = \frac{1}{2} (-g^{\mu\nu} z_\mu z_\nu + m^2 y^2) \sqrt{-\det g}$$

Si escribimos el hamiltoniano

$$H(x^\mu, y, p^\mu) = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + m^2 y^2),$$

y las ecuaciones de Hamilton para φ correspondientes a a sección $\phi(x^\mu) = (x^\mu, \varphi(x^\mu), \varphi^\mu(x^\mu))$ son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} &= g_{\mu\nu} p^\nu \\ \sum_\mu \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^\mu} &= (\sqrt{-\det g}) m^2 \varphi \end{aligned}$$

Simetrías

Sea ξ_X un campo de Killing en X , en coordenadas

$$\xi_X = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Sea ξ_Y un campo de vectores ξ_X visto en Y , esto es, localmente,

$$\xi_Y(x, t) := \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Su prolongación 1-jet ξ_Z viene dada por

$$\xi_Z = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - z_\nu \frac{d\xi^\nu}{dx^\mu} \frac{\partial}{\partial z_\mu}$$

Estos campos de vectores son simetrías del lagrangiano, y las cantidades conservadas correspondientes se escriben:

$$\left[-g^{\mu\nu} z_\mu \xi^\nu dy \wedge d^2 x_{\nu\gamma} - \frac{\xi^\gamma}{2} (g^{\mu\nu} z_\mu z_\nu - m^2 y^2) d^3 x_\gamma \right] \sqrt{-\det g}$$

Superficies de Cauchy

La expresión general integral para la cantidad conservada para una superficie de Cauchy arbitraria M y para secciones $\phi(x^\mu) = (x^\mu, \varphi(x^\mu), \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}(x^\mu))$ solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, y que verifiquen la condición del borde, viene dada por

$$\int_M \sqrt{-\det g} \left[g^{\mu\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \xi^\nu \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} + g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \xi^\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - \frac{\xi^\gamma}{2} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - m^2 \varphi^2 \right) \right] d^3 x_\gamma$$

En el caso particular en que M es una superficie de Cauchy de tipo “espacial puro”, g induce una métrica definida positiva g_M en M , y la cantidad conservada se puede expresar como

$$\int_M \sqrt{-\det g} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \xi^\nu \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} + g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \xi^0 \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - \frac{\xi^0}{2} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - m^2 \varphi^2 \right) \right] d^3 x_0$$

Cuando ξ_X es de tipo espacial (esto es, paralela a M), obtenemos que la cantidad conservada es

$$\int_M \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \xi^\nu \right] d^3 x_0$$

que es el momento angular cuando ξ_X es una rotación infinitesimal, y el momento lineal cuando se trata de una translación infinitesimal.

Por el contrario, si $\xi_X = \frac{\partial}{\partial x^0}$ obtenemos

$$\frac{1}{2} \int_M \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} + g^{AB} \frac{\partial \varphi}{\partial x^A} \frac{\partial \varphi}{\partial x^B} + m^2 \varphi^2 \right] d^3 x_0$$

que es la energía del campo φ en la superficie de Cauchy M .

La teoría de superficies de Cauchy

En esta sección continuamos el desarrollo de la teoría en el caso en que tenemos una descomposición fija del espacio X , esto es, supondremos que hay un difeomorfismo $\Phi : I \times M \longrightarrow X$ que descompone X en una coordenada temporal $I \subseteq \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de la recta real, y una componente espacial dada por una variedad compacta M . En lo que sigue, X se identificará con $I \times M$ en nuestra notación.

Restringimos también los embebimientos admisibles a $\tilde{X} = \{\Phi(t, \cdot) | t \in I\}$ (donde $\Phi(t, \cdot) : M \longrightarrow X$ se define por $\Phi(t, \cdot)(u) = \Phi(t, u)$). Como consecuencia, tenemos la siguiente identificación: $\tilde{X} \equiv I$, en la que t se identifica con $\Phi(t, \cdot)$, que denotaremos por $c_{\tilde{X}}(t)$. En la práctica, no se hará distinción entre ambas variedades. Por tanto, \tilde{X} tiene un campo de vectores definido canónicamente, $\frac{\partial}{\partial t}$, y su correspondiente 1-forma dual dt .

Llamaremos ξ al campo de vectores $\dot{c}_{\tilde{X}}(t)$ en \tilde{X} , visto como campo en X . En otras palabras,

$$\xi(t, u) = \dot{c}_{\tilde{X}}(t)(u) = \frac{d}{ds} \Phi(s, u)|_{s=t}$$

Elegimos coordenadas adaptadas en cada punto $(t, u) \in X$ como (t, x_1, \dots, x_n) , donde $t \in I$ y (x_1, \dots, x_n) son coordenadas locales de $u \in M$. En estas coordenadas adaptadas,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t_0} (u) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t_0, u)} = \xi(t, u).$$

(recuérdese de nuevo que un vector tangente en un punto de \tilde{X} es un campo de vectores a lo largo de dicho embebimiento). Supondremos que M es compacta y orientable, con forma de volumen η_M para la cual el volumen de M es 1, en otras palabras

$$\int_M \eta_M = 1$$

En estas circunstancias, se puede definir una forma de volumen en X de la siguiente forma

$$\eta = dt \wedge \eta_M$$

y será ésta la forma de volumen que usaremos como ingrediente para nuestro enfoque de la teoría de campos (de esta manera, localmente, $\eta_M = d^n x_0$).

Proposición 5.0.1. *Tenemos que*

$$\tilde{\eta} = \pi_{\tilde{X}\tilde{Y}}^* dt \equiv dt$$

Demostración. dt está caracterizada por la propiedad

$$\langle dt | \frac{\partial}{\partial t} \rangle = 1$$

puesto que $\dim \tilde{X} = 1$.

Obsérvese primero que $i_B^* \pi_{XZ}^* \eta = 0$, puesto que $i_{\partial X}^* \eta = 0$ (η es una $(n+1)$ -forma), donde $i_{\partial X} : \partial X \hookrightarrow X$ es la inclusión canónica.

Supongamos que $\gamma = (j^1 \phi) \circ t \in \tilde{Z}$, entonces tenemos que

$$\langle \tilde{\eta} | \frac{\partial}{\partial t} \rangle = \int_M \gamma^* \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} \eta = \int_M \gamma^* d^n x_0 = \int_M t^* d^n x_0 = \int_M \eta_M = 1,$$

ya que $\eta = dt \wedge \eta_M$. Además, es evidente que $\langle \tilde{\eta} | V \rangle = 0$ para todo V tal que $T_\gamma \pi_{\tilde{X}\tilde{Z}}(V) = 0$. ■

Esta forma $\tilde{\eta} = dt$ se usará como la forma de volumen natural en \tilde{X} .

Con este nuevo ingrediente ξ y estas identificaciones, revisaremos varios de los conceptos relacionados con las superficies de Cauchy que hemos introducido, y trataremos de identificar las estructuras de las variedades involucradas y las propiedades de los objetos geométricos para este caso particular.

5.1. Revisión de las ecuaciones de campo

El primer concepto a ser revisado son las ecuaciones de campos en los espacios de datos de Cauchy, comenzando por una propiedad fundamental de los campos de vectores tangentes a las superficies de Cauchy.

Proposición 5.1.1. *Los espacios tangentes $T_\delta \tilde{Y}$ and $T_\gamma \tilde{Z}$ verifican*

$$\begin{aligned} T_\delta \tilde{Y} &\subseteq \{W : M \longrightarrow TY \mid W \text{ cubre a } \delta \\ &\quad \text{y para todo } u \in M, T_{\delta(u)} \pi_{XY} W(u) = k\xi(\pi_{XY}(\delta(u))) \text{ con } k \text{ constante}\} \\ T_\gamma \tilde{Z} &\subseteq \{V : M \longrightarrow TZ \mid V \text{ cubre a } \gamma \\ &\quad \text{y para todo } u \in M, T_{\gamma(u)} \pi_{XZ} V(u) = k\xi(\pi_{XZ}(\gamma(u))) \text{ con } k \text{ constante}\} \end{aligned}$$

Demostración. Sea $W \in T_\delta \tilde{Y}$, y sea $c : I \rightarrow \tilde{Y}$ una curva diferenciable definida en un intervalo alrededor del 0 tal que $c(0) = \delta$ y $\dot{c}(0) = W$. Además, $\pi_{\tilde{X}\tilde{Y}} \circ c(t) \in \tilde{X}$, es decir, $\pi_{\tilde{X}\tilde{Y}} \circ c(t)$ se identifica con una curva $s : I \rightarrow \mathbb{R}$, donde $t \mapsto s(t)$ es un difeomorfismo local. Derivando es fácil ver que

$$T_{\delta(u)}\pi_{XY}W(u) = s'(0)\xi(s(0), u) = s'(0)\xi(\pi_{XY}(\delta(u)))$$

Una prueba similar vale para \tilde{Z} . ■

Por lo tanto, si $c_{\tilde{Z}}(t)$ es una curva en \tilde{Z} , tenemos que

$$T_{c_{\tilde{Z}}(t)(u)}\pi_{XZ}(\dot{c}_{\tilde{Z}}(t)(u)) = k(t)\xi_{\pi_{XZ}(c_{\tilde{Z}}(t)(u))} \cdot$$

Proposición 5.1.2. *Si $c_{\tilde{Z}}$ es una curva en \tilde{Z} que verifica*

$$\iota_{\dot{c}_{\tilde{Z}}(t)}\tilde{\eta} = 1$$

entonces $\dot{c}_{\tilde{Z}}$ proyecta en \tilde{X} sobre $\xi_{\pi_{XZ}(c_{\tilde{Z}}(t)(u))}$.

Demostración. Supongamos que $\gamma = (j^1\phi) \circ t$. También sabemos que

$$T_{c_{\tilde{Z}}(t)(u)}\pi_{XZ}(\dot{c}_{\tilde{Z}}(t)(u)) = k(t)\xi_{\pi_{XZ}(c_{\tilde{Z}}(t)(u))}$$

Ahora bien, observemos que

$$(j^1\phi)^*\iota_{\dot{c}_{\tilde{Z}}(t)(u)}(\pi_{XZ}^*\eta) = \iota_{T\pi\dot{c}_{\tilde{Z}}(t)(u)}\eta \cdot$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \iota_{\dot{c}_{\tilde{Z}}(t)}\tilde{\eta}|_\gamma = \int_M \gamma^*\iota_{\dot{c}_{\tilde{Z}}(t)(u)}\eta = \int_M t^*(j^1\phi)^*\iota_{\dot{c}_{\tilde{Z}}(t)(u)}\eta = \int_M t^*\iota_{T\pi\dot{c}_{\tilde{Z}}(t)(u)}\eta \\ &= \int_M t^*\iota_{k(t)\xi(t,u)}\eta = \int_M t^*k(t)d^n x_0 = k(t) \int_M \eta_M = k(t) \end{aligned}$$

y consecuentemente, deducimos que $k(t) = 1$ para todo t , como queríamos probar. ■

Definición 5.1.3. *Las ecuaciones del movimiento para \tilde{Z} se definen como*

$$\iota_R\tilde{\Omega}_L = 0, \quad \iota_R\tilde{\eta} = 1 \tag{5.1}$$

Las curvas integrales de tales campos de vectores definen soluciones para las ecuaciones de De Donder en el formalismo infinito dimensional, que son compatibles con nuestra elección de coordenada temporal.

Notar que tal curva integral $c(t)$ proyecta necesariamente sobre la curva identidad $I(t) = t$ en \tilde{X} , cuya derivada es precisamente la descomposición, y por tanto, estas curvas satisfacen (3.14).

5.2. Estructura de \tilde{Z}

5.2.1. Secciones de $\tilde{\pi}$

Sea $\phi \in \Gamma(\pi)$, entonces podemos definir $\varphi_\phi \in \Gamma(\tilde{\pi})$ como sigue: $\varphi_\phi(t) = \phi \circ t$. Además, toda $\varphi \in \Gamma(\tilde{\pi})$ es de la forma φ_ϕ para cierta $\phi \in \Gamma(\pi)$ dada por $\phi(t, u) = \varphi(t)(u)$, y se tiene que, $\varphi_\phi = \varphi_{\phi'}$ implica $\phi = \phi'$.

Sin embargo, una sección φ_ϕ de $\tilde{\pi}$ también puede ser vista como una curva en \tilde{Y} (porque $\tilde{X} \equiv I \subseteq \mathbb{R}$). Usando curvas integrales vemos fácilmente que

$$\dot{\varphi}_\phi(t)(u) = T_{(t,u)}\phi(\xi),$$

de donde deducimos

$$j^1\phi = j^1\phi' \Rightarrow j^1\varphi_\phi = j^1\varphi_{\phi'}$$

5.2.2. Estructura de \tilde{Z}

En esta subsección identificaremos \tilde{Z} con el fibrado de jets de primer orden de la fibración $\tilde{\pi} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$. Para hacer esto, definimos primero una aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \tilde{Z} &\longrightarrow J^1\tilde{\pi} \\ (j^1\phi) \circ t &\longmapsto j_t^1\varphi_\phi \end{aligned}$$

Esta función está bien definida, pues si $(j^1\phi) \circ t = (j^1\phi') \circ t'$ entonces $t = t'$, y usando los resultados de la sección previa obtenemos $j_t^1\varphi_\phi = j_t^1\varphi_{\phi'}$

Definimos una inversa

$$\begin{aligned} \Psi : J^1\tilde{\pi} &\longrightarrow \tilde{Z} \\ j_t^1\varphi_\phi &\longmapsto (j^1\phi) \circ t \end{aligned}$$

Ambas aplicaciones son claramente inversas una de otra, de donde obtenemos la identificación deseada.

Finalmente, recordar que si un campo de vectores ξ_Y en Y es tangente a la imagen de una sección ϕ , entonces su prolongación 1-jet se caracteriza como el campo de vectores ξ_Z en Z tal que proyecta en ξ_Y y es tangente a la imagen de $j^1\phi$. Por la identificación de arriba, si un campo de vectores ξ_Y induce un campo de vectores $\xi_{\tilde{Y}}$ en \tilde{Y} entonces el campo inducido $\xi_{\tilde{Z}}$ por su prolongación 1-jet ξ_Z es la prolongación 1-jet de $\xi_{\tilde{Y}}$.

5.2.3. Endomorfismo vertical

Recordemos la definición de elevación vertical para variedades de jets (ver también [149]):

$$v : \pi^*T^*X \otimes_Y \mathcal{V}\pi \longrightarrow \mathcal{V}\pi_{YZ}$$

Dado $f \in (\pi^*T^*X \otimes_Y \mathcal{V}\pi)|_{j^1\varphi}$ consideramos la curva $\gamma_f : \mathbb{R} \longrightarrow \pi_{YZ}^{-1}(\pi_{YZ}(j_x^1\varphi))$ definida por

$$\gamma_f(t) = j_x^1\varphi + t f ,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Ahora bien, sea

$$f^v = \frac{d}{dt}|_{t=0} \gamma_f(t)$$

En nuestro caso, podemos calcular el endomorfismo vertical para la prolongación 1-jet de $\tilde{\pi}$ por

$$S_{\tilde{\eta}}(V)_\gamma = [T_{j_t^1\varphi_\phi} \pi_{\tilde{Y}\tilde{Z}}(V) - T_t\varphi_\phi \circ T_{j_t^1\varphi_\phi} \pi_{\tilde{X}\tilde{Z}}(V)]^v$$

donde $\gamma = j_t^1\varphi_\phi$.

5.3. Formalismo lagrangiano

En lo que sigue, y por simplicidad en la exposición, supondremos que $\partial X = \emptyset$

Una forma lagrangiana en Z puede ser usada para obtener una forma lagrangiana en \tilde{Z} . Pasamos a describirla, y ver la relación entre las estructuras en ambos formalismos.

5.3.1. Forma lagrangiana

Por la proposición 5.1.1, sabemos que $V \in T_\gamma\tilde{Z}$ es de la forma

$$V(u) = \left(V^0 \frac{\partial}{\partial t} + V^i(u) \frac{\partial}{\partial y^i} + V_\mu^i(u) \frac{\partial}{\partial z_\mu^i} \right) \Big|_{\gamma(u)} .$$

La $(n+1)$ -forma \mathcal{L} produce por integración una 1-forma $\tilde{\mathcal{L}}$ en \tilde{Z} , usando la fórmula (3.12)

$$\tilde{\mathcal{L}}(V)_\gamma = \int_M \gamma^* \iota_V L \eta = \int_M \gamma^* L V^0 d^n x_0 = V^0 \int_M L(\gamma(u)) \eta_M$$

Definiendo

$$\tilde{L}(\gamma) = \int_M L(\gamma(u)) \eta_M = \iota_\xi \tilde{\mathcal{L}},$$

para cada ξ que proyecte en $\frac{\partial}{\partial t}$, tenemos que

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{L}\tilde{\eta} = \tilde{L}dt$$

5.3.2. Forma de Poincaré-Cartan

Lema 5.3.1. *Sea V un vector tangente en γ a \tilde{Z} . En coordenadas locales, tenemos que*

$$(i) \iota_{V(u)} S_\eta^* dL = \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} (V^i(u) - z_0^i(\gamma(u)) V^0) d^n x_\mu + \mathcal{C}$$

$$(ii) \iota_{S_\eta(V)} d\tilde{L} = \int_M \frac{\partial L}{\partial z_0^i} (\gamma(u)) (V^i(u) - z_0^i|_{\gamma(u)} V^0(u)) \eta_M$$

para cualquier ξ que proyecte sobre $\frac{\partial}{\partial t}$, y donde por \mathcal{C} denotamos el ideal algebraico de las formas de contacto (ver sección 2.3.2).

Demostración. En primer lugar nótese que

$$S_\eta = \theta^i \wedge d^n x_\nu \otimes \frac{\partial}{\partial z_\nu^i}$$

En particular, $\iota_{V(u)}\theta^i = V^i(u) - z_0^i(\gamma(u))V^0$. Por lo tanto,

$$\iota_{V(u)}(S_\eta^*(dL)) = \iota_V \left(\frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} \theta^i \wedge d^n x_\mu \right) = \frac{\partial L}{\partial z_\mu^i} (V^i(u) - z_0^i(\gamma(u))V^0) d^n x_\mu + \text{términos de contacto}$$

lo que prueba (i).

Para ver (ii), recordar la construcción del endomorfismo vertical de la subsección 5.2.3. Entonces, para un campo de vectores V como el de arriba,

$$\begin{aligned} T_{(j^1\phi\circ t)}\pi_{\tilde{Y}\tilde{Z}}(V)(u) &= T_{j^1_{(t,u)}\phi}\pi_{YZ}(V(u)) = V^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + V^i(u) \frac{\partial}{\partial y^i} \\ T_{(j^1\phi\circ t)}\pi_{\tilde{X}\tilde{Z}}(V)(u) &= T_{j^1_{(t,u)}\phi}\pi_{XZ}(V(u)) = V^0 \frac{\partial}{\partial x^0} \\ T_t\varphi_\phi(T_{(j^1\phi\circ t)}\pi_{\tilde{X}\tilde{Z}}(V)(u)) &= T_{(t,u)}\phi(V^0 \frac{\partial}{\partial x^0}) = V^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + V^0(u)z_0^i \frac{\partial}{\partial y^i} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S_{\tilde{\eta}}(V)(u)_{\gamma(u)} = (V^i(u) - V^0 z_0^i) \frac{\partial}{\partial z_0^i} \Big|_{\gamma(u)}$$

donde $\gamma = j_t^1\varphi_\phi \equiv j^1\phi \circ t$. De esta forma probamos (ii). ■

Así concluimos que

Proposición 5.3.2. *Para cualquier vector tangente $V \in T_\gamma\tilde{Z}$, tenemos que*

$$S_{\tilde{\eta}}^*d\tilde{L}(V)_\gamma = \int_M \gamma^* \iota_V(S_{\tilde{\eta}}^*dL)$$

Demostración. Primero, recordar que

$$S_{\tilde{\eta}}^*d\tilde{L}(V)_\gamma = \iota_{S_{\tilde{\eta}}(V)}d\tilde{L} = \int_M \gamma^* \iota_{S_{\tilde{\eta}}(V)}dL$$

Ahora bien, puesto que para cada forma de contacto θ^i tenemos que $\gamma^*\theta^i = t^*((j^1\phi)^*\theta^i) = 0$, integrando $\iota_V(S_{\tilde{\eta}}^*dL)$ y de acuerdo con el lema anterior, el único término resultante es

$$\int_M \gamma^* \frac{\partial L}{\partial z_0^i} (V^i - z_0^i V^0) \eta_M$$

Por lo tanto, obtenemos el resultado. ■

Finalmente, deducimos que

Proposición 5.3.3.

$$\tilde{\Theta}_L = \Theta_{\tilde{L}}$$

Demostración.

$$\langle \tilde{\Theta}_L | V \rangle_\gamma = \int_M \gamma^* \iota_V \Theta_L = \int_M \gamma^* \iota_V \mathcal{L} + \int_M \gamma^* \iota_V (S_{\tilde{\eta}}^*dL) = [\iota_V \tilde{\mathcal{L}} + \iota_V S_{\tilde{\eta}}^*d\tilde{L}]_\gamma = \langle \Theta_{\tilde{L}} | V \rangle_\gamma$$

como queríamos comprobar. ■

5.4. Descomposición compatible

Definición 5.4.1. Una *descomposición compatible* de Y es un campo de vectores completo en Y que proyecta sobre ξ en X .

En presencia de una descomposición compatible, dos fibras arbitrarias $\tilde{\pi}^{-1}(t)$ y $\tilde{\pi}^{-1}(t')$ pueden ser identificadas, donde una sección en una fibra es transportada por los flujos de ξ y la descomposición compatible de Y para producir una sección en otra fibra. Más precisamente, la aplicación que las identifica es $\Upsilon_{t,t'} : \tilde{\pi}^{-1}(t) \rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(t')$, definida por $\Upsilon_{t,t'}(\phi \circ t) = \Phi_{t-t'}^Y \circ \phi \circ t'$ (donde Φ_t^Y denota el flujo de una descomposición compatible).

Siendo dos fibras cualesquiera difeomorfas, usaremos Q para denotar una fibra típica (que puede ser una fibra fijada). Supongamos por ejemplo que la fibra fijada es la dada por $t = t_0$.

En tal caso, identificaremos \tilde{Z} con $I \times TQ$, por un difeomorfismo que llamaremos $\beta : \tilde{Z} \rightarrow I \times TQ$, y \tilde{Z}^* con $I \times T^*Q$.

Fijado $t \in I$, si denotamos por $X_t := \text{Im}(t) \equiv \{(t, u) | u \in M\}$, $Y_t := \pi^{-1}(X_t)$, $Z_t := \pi_{XZ}^{-1}(X_t)$, $p_2 : X \equiv I \times M \rightarrow M$ la segunda proyección canónica, $\pi_t := (\pi \circ p_2)|_{Y_t} : Y_t \rightarrow U$, y por $(\mathcal{V}\pi)_t := \mathcal{V}\pi|_{Y_t}$ la restricción del fibrado vertical a Y_t , entonces en [65] los autores dan la siguiente versión a tiempo fijado del difeomorfismo mencionado,

$$\beta_t : Z_t \rightarrow J^1(\pi_t) \times (\mathcal{V}\pi)_t$$

dada por $\beta_t(j^1\phi \circ t) = (j^1(\phi|_{X_t}), T\phi \circ \xi - \xi \circ \phi)$. En coordenadas, tenemos que $\beta_t(j^1\phi \circ t)(u^A) = (t(u^A), \phi^i \circ t(u^A), \frac{\partial \phi^i}{\partial x^A}(t(u^A)), V = T\phi \circ \xi - \xi \circ \phi)$, de donde vemos que la identificación de $j^1\phi \circ t$ con $(t, \phi^i, V^i) \in I \times TQ$.

Así, el espacio $T_{\delta_0}Q$ de vectores tangentes a Q en $\delta_0 = \phi \circ t_0$, donde ϕ es una sección de π_{XY} , consiste en secciones de la forma $V : M \rightarrow \mathcal{V}Y$ donde V cubre δ_0 . Por consiguiente, $V = V^i(u) \frac{\partial}{\partial y^i}$ a lo largo de δ_0 .

De forma similar, el espacio $T_{\delta_0}^*Q$ se identifica con secciones de la forma $\alpha : M \rightarrow L(\mathcal{V}Y, \Lambda^n M)$ donde α cubre δ_0 . En este contexto $L(\mathcal{V}Y, \Lambda^n M)$ denota el campo de vectores sobre Y cuya fibra es $\delta_0(u) \in Y$ es el conjunto de las aplicaciones lineales de $\mathcal{V}_{\delta_0(u)}Y$ a $\Lambda_u^n M$ (ver por ejemplo [150]). Por lo tanto,

$$\alpha = p_i^0(u) dy^i \otimes \eta_M$$

La paridad de dichos elementos $V \in T_{\delta_0}Q$, $\alpha \in T_{\delta_0}^*Q$ se define como

$$\langle \alpha | V \rangle = \int_M \delta_0^* \iota_V(u) \alpha(u) = \int_M V^i(u) p_i^0(u) \eta_M$$

es obviamente una paridad no degenerada.

La paridad natural induce una forma canónica θ_Q en T^*Q , por

$$\langle \theta_Q | W \rangle_\alpha = \langle \alpha | T\pi_Q(W) \rangle$$

y su correspondiente forma simpléctica débil:

$$\omega_Q := -d\theta_Q$$

Nota 5.4.2. En lo que sigue, supondremos la existencia de una descomposición compatible en Y , y la descomposición de \tilde{Y} como $I \times Q$. La descomposición compatible se corresponde con un campo de vectores en $I \times Q$ que proyecta en ξ , y que se denotará también por ξ cuando no haya confusión. En coordenadas locales, se corresponde con $\partial/\partial t$.

5.4.1. La integral de acción

Consideremos la subvariedad compacta $C = [t_0, t_1] \times M$ de X , para $[t_0, t_1] \subseteq I$. Podemos definir, para una sección dada ϕ , los elementos $\phi_0 := \phi \circ t_0$ y $\phi_1 := \phi \circ t_1$ de $\tilde{Y} \equiv I \times Q$, que se corresponden con puntos (t_0, q_0) y (t_1, q_1) en $I \times Q$, respectivamente.

La curva $\hat{c}(t) = \phi \circ t$ on \tilde{Y} se identifica con una curva $t \longrightarrow (t, c(t))$ en $I \times Q$ que une (t_0, q_0) a (t_1, q_1) , y que se prolonga a una curva $\tilde{c}(t)$ en \tilde{Z} .

De la identificación $\tilde{Z} \equiv I \times TQ$ se define un lagrangiano no autónomo $\bar{L} : I \times TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ y el funcional de acción se reescribe (utilizando el teorema de Fubini) como:

$$\begin{aligned} S(\phi) &= \int_{[t_0, t_1] \times M} j^1 \phi^* \mathcal{L} = \int_{[t_0, t_1] \times M} \tilde{c}(t)(u)^* \mathcal{L} = \int_{[t_0, t_1] \times M} \tilde{c}(t)(u)^*(L)\eta \\ &= \int_{[t_0, t_1] \times M} L(\tilde{c}(t)(u))\eta_M \wedge dt = \int_{[t_0, t_1]} \left[\int_M L(\tilde{c}(t)(u))\eta_M \right] dt \\ &= \int_{[t_0, t_1]} \tilde{L}(\tilde{c}(t))dt = \int_{[t_0, t_1]} \tilde{c}^* \tilde{L} dt \end{aligned}$$

Puesto que el flujo de la prolongación 1-jet de un campo de vectores en Y es la prolongación 1-jet de su flujo, teniendo un lagrangiano regular L y usando el teorema de equivalencia entre las ecuaciones de De Donder en los lados finito e infinito dimensional, tenemos que ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange si y sólo si la curva en TQ

$$\tilde{c}(t)(u) \equiv j^1 \phi(t, u)$$

es una curva integral del flujo de un campo de vectores de Euler-Lagrange en TQ asociado a \tilde{L} .

5.4.2. Forma de Poincaré-Cartan instantánea

Para un $t \in I$ fijo, denotamos por

$$i_t : TQ \equiv \{t\} \times TQ \longrightarrow I \times TQ$$

la inclusión canónica, y definimos la **forma de Poincaré-Cartan instantánea** a tiempo t como

$$\theta_{L,t} := i_t^* \Theta_{\bar{L}}$$

De la expresión de Θ_L en coordenadas locales tenemos que

$$\iota_V \theta_{L,t}(\gamma) = \int_M \gamma^* \hat{p}_i^0 V^i(u) \eta_M$$

5.5. Formalismo hamiltoniano

Dada una sección hamiltoniana $h : Z^* \longrightarrow \Lambda_2^{n+1}Y$, la forma $\Theta_h = h^*\Theta$ en Z^* (donde Θ es la forma multisimpléctica canónica en Λ_2^n), con expresión en coordenadas

$$\Theta_h = -Hd^{n+1}x + p_i^\mu dy^i \wedge d^n x_\mu$$

induce una 1-forma en $\tilde{Z}^* \equiv I \times T^*Q$, que a su vez puede utilizarse para definir una **función hamiltoniana** en $I \times T^*Q$ de la siguiente manera:

$$\tilde{H}(\gamma) = -\iota_\xi(\tilde{\Theta}_h)\gamma.$$

En coordenadas locales, la expresión de H es

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\gamma) &= - \int_M \gamma^* \iota_\xi \Theta_h = - \int_M \gamma^* \iota_\xi (-Hd^{n+1}x + p_i^\mu dy^i \wedge d^n x_\mu) \\ &= - \int_M \gamma^* (-H\eta_M - p_i^\mu dy^i \wedge d^{n-1}x_{\mu 0}) \end{aligned}$$

por lo tanto, si $V \in TQ$, un cálculo sencillo muestra que

$$\begin{aligned} \iota_V \tilde{\Theta}_h \gamma &= \int_M \gamma^* \iota_V \Theta_h = \int_M \gamma^* \iota_V (-Hd^{n+1}x + p_i^\mu dy^i \wedge d^n x_\mu) \\ &= \int_M \gamma^* (-HV^0 d^n x_0 + p_i^\mu V^i d^n x_\mu - p_i^\mu V^0 dy^i \wedge d^{n-1}x_{\mu 0}) \\ &= -V^0 \tilde{H}(\gamma) + \int_M \gamma^* p_i^0 V^i d^n x_0, \end{aligned}$$

en otras palabras,

$$\tilde{\Theta}_h = -\tilde{H}dt + \theta_Q$$

Las curvas integrales de tales campos de vectores definen soluciones de las ecuaciones de Hamilton en el formalismo infinito dimensional, que es compatible con nuestra elección de la coordenada temporal.

Con los mismos argumentos que al principio del capítulo, el campo de vectores evolución R para el sistema $(\tilde{Z}^*, \tilde{\Omega}_h, \tilde{H})$

$$\iota_{R'} \tilde{\Omega}_h = 0, \quad \iota_{R'} \tilde{\eta} = 1 \tag{5.2}$$

coincide precisamente con las soluciones de las ecuaciones de Hamilton en términos de conexiones de Ehresmann en Z^* vistas en \tilde{Z}^* (con una demostración similar a la dada en 3.3.13).

5.6. La transformación de Legendre

La transformación de Legendre $leg_L : Z \longrightarrow Z^*$ induce por composición una aplicación $\widetilde{leg}_L : \tilde{Z} \longrightarrow \tilde{Z}^*$ mediante $\widetilde{leg}_L(\gamma) = leg_L \circ \gamma$.

Si tenemos un vector tangente $V \in T_q Q$, y $t \in I$ fijo, entonces para calcular $\widetilde{leg}_{L_t} = \widetilde{leg}_L|_t$ lo aplicamos a $U \in T_q Q$. Si (t, q) se corresponde mediante la identificación con $\delta \in \tilde{Y}$, y (t, q, V)

con γ , entonces una forma de dar un vector tangente a $\delta(u)$ que proyecta sobre $U(u)$ es dar un vector tangente W a V tal que $W(u)$ proyecta sobre $U(u)$ para todo $u \in M$. Por lo tanto, podemos calcular

$$\langle \widetilde{leg}_L(\gamma)|U \rangle = \int_M \gamma^* \iota_W(u) \Theta_L = \iota_W \Theta_{\tilde{L}}$$

de donde deducimos que $\widetilde{leg}_L = leg_{\tilde{L}}$.

Del hecho de que leg_L es fibrada sobre Y deducimos que es fibrada sobre X , y por lo tanto, \widetilde{leg}_L es fibrada sobre I , y así tiene sentido definir una **transformación de Legendre instantánea** $\widetilde{leg}_{L,t}$, que de la expresión de la forma de Poincaré-Cartan, puede identificarse con la derivada fibrada en cada fibra.

Por lo tanto, $\widetilde{leg}_L^* \Theta_{\tilde{H}} = \Theta_{\tilde{L}}$ y si $\theta_{Q,t}$ es el *pullback* de la forma canónica en $TQ \equiv \{t\} \times TQ$ a $I \times TQ$ a través de la inclusión de la fibra sobre t , también tenemos que $\widetilde{leg}_L^* \theta_{Q,t} = \theta_{L,t}$.

Métodos numéricos geométricos

Los métodos estándar para simular el movimiento de un sistema dinámico, llamados de forma genérica integradores numéricos, toman usualmente una condición inicial, haciéndola evolucionar en la dirección especificada por la ecuación del movimiento, o una discretización apropiada. Pero estos métodos estándar ignoran las propiedades geométricas de muchos sistemas dinámicos, como por ejemplo, para sistemas hamiltonianos, la preservación de la forma simpléctica, la energía (en el caso autónomo) y las simetrías. Sin embargo, se han desarrollado recientemente métodos nuevos que tienen en cuenta algunas de estas características extra de los sistemas dinámicos. Habitualmente, estos integradores son capaces de funcionar en las simulaciones durante un tiempo mayor sin efectos perniciosos (como por ejemplo, la disipación de la energía para sistemas conservativos) que los tradicionales (el ejemplo típico de comprobación suelen ser los modelos del sistema solar). Por lo tanto, hay actualmente un enorme interés en la integración geométrica de las ecuaciones diferenciales, como por ejemplo, los integradores simplécticos de sistemas Hamiltonianos [14, 70, 144].

En este último capítulo exploramos sistemas numéricos para el cálculo de soluciones de problemas en mecánica y control óptimo basados en las estructuras geométricas discutidas en capítulos anteriores. En particular, nos concentramos en métodos basados en funciones generatrices, en comparación con los métodos variacionales.

El capítulo comienza con una descripción geométrica de la mecánica no holónoma (es decir, mecánica sujeta a ligaduras no holónomas), y la teoría del control óptimo. Sigue una sección dedicada a las funciones generatrices, y una comparación con los integradores variacionales discretos y los nuevos métodos desarrollados basados en funciones generatrices. Estos métodos se extienden y adaptan a dos nuevos casos, la mecánica no holónoma y la teoría de control óptimo. El capítulo finaliza con algunas ideas sobre cómo extender los métodos a la teoría clásica de campos.

6.1. Formulación geométrica de sistemas no holónomos

La teoría de sistemas con ligaduras no holónomas se remonta al siglo XIX. El principio de D'Alembert (o Lagrange-D'Alembert) del trabajo virtual, y el principio de la mínima ligadura de Gauss se pueden considerar como las primeras soluciones al análisis de sistemas con ligaduras, holónomas o no. Tras un período de decadencia, muchos autores han mostrado recientemente un interés en tal teoría, y su relación con los nuevos avances en la teoría de control, geometría subriemanniana, robótica, etc (ver, por ejemplo, [135]). La principal característica de este período es que la geometría se usa de forma sistemática (ver por ejemplo L.D. Fadeev y A.M. Vershik [155] como una referencia fundamental avanzada, y también [5, 10, 19, 20, 26, 32, 80, 81, 105, 109, 108, 121])

Como es bien conocido, en la mayoría de los problemas de mecánica de partículas, el movimiento de las partículas está limitado o ligado de alguna manera. Ésta es una manera de decir que algunos movimientos o configuraciones no están permitidos. Nuestro punto de partida es un espacio de configuración Q , que es una variedad diferenciable n -dimensional con coordenadas locales q^i . Las ligaduras expresadas como una igualdad de términos son funciones de la forma $\phi^a(q^i, \dot{q}^i) = 0, 1 \leq a \leq m$, que dependen, en general, de las coordenadas de la configuración y sus velocidades. Los distintos tipos de ligaduras que nos interesan se reducen a dos tipos: holónomas y no holónomas, dependiendo de si la ligadura se deriva de una ligadura en el espacio de configuración o no. Por tanto, la dimensión del espacio de configuraciones se reduce por ligaduras holónomas, pero no por ligaduras no holónomas. Por lo tanto, las ligaduras holónomas permiten una reducción del número de coordenadas en el espacio que se requieren para formular un problema dado (ver [135]).

Nos restringiremos al caso de ligaduras no holónomas, pues el caso de ligaduras holónomas, y en particular, la construcción de integradores holónomos está bien establecida en la literatura matemática. Geométricamente, las ligaduras no holónomas están globalmente descritas por una subvariedad \tilde{M} del espacio de fases de las velocidades TQ , el fibrado tangente al espacio de configuraciones Q . Si \tilde{M} es un subfibrado vectorial de TQ , estamos tratando con ligaduras lineales. Nos referiremos entonces a \tilde{M} como D y, en tal caso, las ligaduras se definen alternativamente como una distribución D en el espacio de configuración Q . Si la distribución es integrable, entonces estamos en el caso de ligaduras holónomas. Si \tilde{M} es un fibrado afín modelado en un fibrado vectorial D , estamos en el caso de ligaduras afines. En lo que sigue, denotaremos por D la subvariedad de ligaduras del espacio de fases de las velocidades, sea éste determinado por ligaduras lineales o no lineales.

Dadas las ligaduras, necesitamos especificar la evolución dinámica del sistema. Los conceptos centrales que nos permiten extender la mecánica newtoniana a la lagrangiana son las nociones de desplazamiento virtual y trabajo virtual; esos conceptos se formularon en el desarrollo de la mecánica en su aplicación a la estática. En dinámica no holónoma, el procedimiento viene dado por el principio de Lagrange-D'Alembert. Normalmente consideramos ligaduras no holónomas de tipo lineal, que son las ligaduras que consideraremos naturales en el sentido mecánico (aunque la extensión a ligaduras no holónomas generales es inmediata).

Pasamos ahora a describir las fuerzas de ligadura; para ligaduras de ese tipo, el principio de Lagrange-D'Alembert nos permite determinar el conjunto de los posibles valores de la fuerzas de ligadura únicamente a partir del conjunto de estados cinemáticos admisibles, es decir, a partir de

la subvariedad de ligaduras D determinada por la anulaci3n de las ligaduras no hol3nomas. Por lo tanto, las propiedades dinámicas del sistema se describen matemáticamente por una variedad de configuraci3n Q , por una funci3n lagrangiana L y por una distribuci3n D en TQ que determine las ligaduras lineales.

Consideremos un sistema Lagrangiano independiente del tiempo, con lagrangiano $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, sujeto a ligaduras no hol3nomas, definidas por una subvariedad D del espacio de fases de las velocidades TQ . Supondremos que $\dim D = 2n - m$ y que D se describe localmente por la anulaci3n de m funciones independientes ϕ^a (las “funciones de ligadura”).

En t3rminos geom3tricos, el principio de D’Alembert (o principio de Chetaev para ligaduras no lineales) implica que las fuerzas de ligadura, consideradas como 1-formas en TQ a lo largo de D , toman sus valores en la subvariedad $S^*(TD^o)$ de T^*TQ , donde TD^o denota el anulador de TD en T^*TQ . De una forma intrínseca, las ecuaciones del movimiento se pueden escribir como (ver [105, 108])

$$\begin{aligned} (i_X \omega_L - dE_L)|_D &\in S^*(TD^o), \\ X|_D &\in TD, \end{aligned}$$

donde ω_L es la 2-forma de Poincaré-Cartan definida por L y $E_L = \Delta(L) - L$ es la funci3n energía.

En lo que sigue tambi3n supondremos la siguiente *condici3n de admisibilidad* :

$$\dim TD^o = \dim S^*(TD^o).$$

Esto significa esencialmente que la matriz $(\partial\phi^a/\partial\dot{q}^i)$ tiene rango m en todo punto.

Pasamos a la descripci3n hamiltoniana del sistema no hol3nomo en el fibrado cotangente T^*Q de Q [5, 81, 121]. Las funciones de ligadura en T^*Q se convierten en $\Psi^a = \phi^a \circ Leg^{-1}$, es decir,

$$\Psi^a(q^i, p_i) = \phi^a(q^i, \frac{\partial H}{\partial p_i}),$$

donde el hamiltoniano $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ se define por $H = E_L \circ Leg^{-1}$.

Las ecuaciones del movimiento para el sistema no hol3nomo en T^*Q se pueden escribir ahora como sigue

$$\begin{cases} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda_a \frac{\partial \Psi^a}{\partial p_j} \mathcal{H}_{ji}, \end{cases} \quad (6.1)$$

junto con las ecuaciones de ligadura $\Psi^a(q, p) = 0$, donde \mathcal{H}_{ij} son las componentes de la inversa de la matriz $(\mathcal{H}^{ij}) = (\partial^2 H / \partial p_i \partial p_j)$. Notar que

$$\left(\frac{\partial \Psi^a}{\partial p_j} \mathcal{H}_{ji}\right)(q, p) = \left(\frac{\partial \phi^a}{\partial \dot{q}^i} \circ Leg^{-1}\right)(q, p).$$

La 2-forma simpléctica ω_L est3 relacionada, por medio de la transformaci3n de Legendre, con la forma simpléctica can3nica ω_Q en T^*Q . Denotemos por M la imagen de la subvariedad de ligaduras D por la transformaci3n de Legendre, y sea F la distribuci3n en T^*Q a lo largo de M , cuyo anulador viene dado por

$$F^o = TLeg(S^*(TD^o)).$$

Observar que F° está localmente generado por las m 1-formas independientes

$$\mu^a = \frac{\partial \Psi^a}{\partial p_i} \mathcal{H}_{ij} dq^j, \quad 1 \leq a \leq m.$$

Por lo tanto, las “ecuaciones de Hamilton” para el sistema no holónomo se pueden reescribir de forma intrínseca como

$$\begin{aligned} (i_X \omega_Q - dH)|_M &\in F^\circ \\ X|_M &\in TM. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Supongamos además que se verifica la siguiente *condición de compatibilidad* $F^\perp \cap TM = \{0\}$, donde “ \perp ” denota el ortogonal simpléctico respecto a ω_Q . Observar que, localmente, esta condición significa que la matriz

$$(C^{ab}) = \left(\frac{\partial \Psi^a}{\partial p_i} \mathcal{H}_{ij} \frac{\partial \Psi^b}{\partial p_j} \right) \quad (6.3)$$

es regular. En el lado lagrangiano, la condición de compatibilidad se escribe localmente como

$$\det(\tilde{C}^{ab}) = \det \left(\frac{\partial \phi^a}{\partial \dot{q}^i} W^{ij} \frac{\partial \phi^b}{\partial \dot{q}^j} \right) \neq 0, \quad (6.4)$$

donde W^{ij} son las entradas en la matriz hessiana $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$. La condición de compatibilidad no es muy restrictiva, pues teniendo en cuenta la condición de admisibilidad, se verifica de forma trivial para sistemas de tipo mecánico (es decir, con un lagrangiano de la forma energía cinética menos potencial), donde \mathcal{H}_{ij} representa las componentes de una métrica riemanniana. La condición de compatibilidad garantiza en particular la existencia de una solución única de las ecuaciones de movimiento con ligadura (6.2) que, en adelante se denotarán por $X_{H,M}$ en el lado hamiltoniano, y por $\xi_{L,D}$ en el lado lagrangiano.

Aún más, si denotamos por X_H el campo de vectores hamiltoniano para H , es decir, $i_{X_H} \omega_Q = dH$ entonces, usando las funciones de ligadura, podemos determinar explícitamente los multiplicadores de Lagrange λ_a por

$$\lambda_a = -C_{ab} X_H(\Psi^b).$$

Escribiendo la 1-forma

$$\Lambda = -C_{ab} X_H(\Psi^b) \frac{\partial \Psi^a}{\partial p_j} \mathcal{H}_{ji} dq^i,$$

las ecuaciones no holónomas se reescriben equivalentemente como

$$\begin{cases} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \Lambda_i, \end{cases} \quad (6.5)$$

para condiciones iniciales $(q_0, p_0) \in M$ y $\Lambda = \Lambda_i dq^i$. También denotamos por $\tilde{\Lambda} = Leg^*(\Lambda)$ la 1-forma en TQ que representa la fuerza de ligadura una vez que los multiplicadores de Lagrange se han determinado.

Consideremos ahora el flujo $F_t : M \rightarrow M$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ del campo de vectores $X_{H,M}$, solución del problema no holónomo.

Puesto que (6.5) se reescribe geoméricamente como

$$i_{X_{H,M}}\omega_Q = dH + \Lambda ,$$

($i_{\xi_{L,D}}\omega_L = dE_L + \tilde{\Lambda}$, con $\tilde{\Lambda} = Leg^*\Lambda$, en el lado lagrangiano) entonces

$$\mathcal{L}_{X_{H,M}}\theta_Q = d(i_{X_{H,M}}\theta_Q - H) - \Lambda ,$$

o, equivalentemente,

$$\mathcal{L}_{X_{H,M}}\theta_Q = d(L \circ Leg^{-1}) - \Lambda .$$

Ahora bien, de la definición dinámica de la derivada de Lie, tenemos

$$F_t^* (\mathcal{L}_{X_{H,M}}\theta_Q) = \frac{d}{dt} (F_t^*\theta_Q) ,$$

e integrando, obtenemos la expresión siguiente, con cierto abuso de notación,

$$F_h^*\theta_Q - \theta_Q = d \left(\int_0^h L \circ \tilde{F}_t dt \right) - \int_0^h F_t^*\Lambda , \quad (6.6)$$

donde \tilde{F}_t es el flujo del campo de vectores $\xi_{L,D}$.

6.2. Teoría de control óptimo

Es bien conocido que la dinámica de muchos sistemas económicos y de ingeniería se pueden expresar como un conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\dot{q}^i = \Gamma^i(t, q(t), u(t)) , \quad 1 \leq A \leq n , \quad (6.7)$$

donde t es el tiempo, q^i denota ciertas variables de estado, y u^a , $1 \leq a \leq m$, las entradas de control en el sistema que deben especificarse. Dada una condición inicial de las variables de estado y dadas ciertas entradas de control determinamos completamente la trayectoria de las variables de estado $q(t)$ (todas las funciones se suponen al menos C^2).

Dada una condición inicial, habitualmente $q_0 = q(t_0)$, nuestro objetivo es encontrar una curva C^2 a trozos $\gamma(t) = (q(t), u(t))$, que satisfaga las ecuaciones de control (6.7) y que minimice el funcional

$$\mathcal{J}(\gamma) = \int_{t_0}^T L(t, q(t), u(t)) dt + S(T, q(T)) , \quad (6.8)$$

para un tiempo inicial fijo dado $T \in \mathbb{R}^+$. La integral $\int_{t_0}^T L(t, q(t), u(t)) dt$ depende del tiempo (de t_0 a T), de las variables de estado, y de las entradas de control, y $S(\cdot, q(\cdot))$ es una función de coste basada en el tiempo y estado final del sistema.

En una descripción global, se supone una estructura de fibrado $\pi : \mathbb{R} \times C \longrightarrow Q$, donde Q es la variedad de configuraciones con coordenadas locales (q^i) y C es el fibrado de controles, con coordenadas (q^i, u^a) , $1 \leq A \leq n$, $1 \leq a \leq m$.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes del tiempo (6.7) en Q , que dependen de los parámetros u , se pueden ver como un campo de vectores Γ a lo largo de la proyección π , esto es,

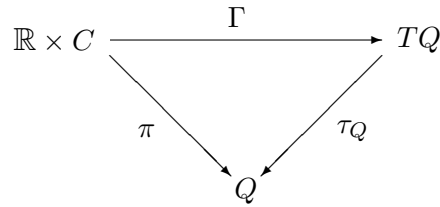


Figura 6.1: Las ecuaciones de control óptimo

Γ es una aplicación diferenciable $\Gamma : \mathbb{R} \times C \longrightarrow TQ$ tal que el diagrama 6.1 es conmutativo. Este campo de vectores se escribe localmente como $\Gamma = \Gamma^i(t, q, u) \frac{\partial}{\partial q^i}$.

Una condición necesaria para la existencia de soluciones a dicho problema viene dada por el principio del máximo de Pontryaguin. Si construimos la función pseudo-hamiltoniana:

$$H(t, q, p, u) = p_i \Gamma^i(t, q, u) - L(t, q, u) = p \Gamma(t, q, u) - L(t, q, u) \quad (6.9)$$

donde p_i , $1 \leq A \leq n$, se consideran ahora multiplicadores de Lagrange, entonces una curva $\gamma : [t_0, T] \rightarrow C$, $\gamma(t) = (q(t), u(t))$ es una trayectoria óptima si existen funciones $p_i(t)$, $1 \leq A \leq n$, tales que son soluciones de las pseudo-ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, q(t), p(t), u(t)) \\ \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(t, q(t), p(t), u(t)) \end{cases} \quad (6.10)$$

y tenemos que

$$H(t, q(t), p(t), u(t)) = \max_v H(t, q(t), p(t), v), \quad t \in [t_0, T] \quad (6.11)$$

con condiciones de transversalidad

$$q(0) = q_0 \quad \text{y} \quad p_i(T) = -\frac{\partial S}{\partial q^i}(T, q(T))$$

La condición (6.11) se reemplaza usualmente por

$$\frac{\partial H}{\partial u^a} = 0, \quad 1 \leq a \leq m, \quad (6.12)$$

cuando estamos buscando trayectorias extremales.

Es bien conocido que la condición necesaria de Pontryaguin para la extremalidad tiene una interpretación geométrica en términos de sistemas presimpléticos (o precosimpléticos) hamiltonianos. El espacio total del sistema será $\mathbb{R} \times (T^*Q \times_Q C)$, con coordenadas inducidas (t, q^i, p_i, u^a) .

Definamos el hamiltoniano de Pontryaguin $H : \mathbb{R} \times (T^*Q \times_Q C) \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$H(t, \alpha_q, u_q) = \langle \alpha_q, \Gamma(t, u_q) \rangle - L(t, u_q)$$

donde $\alpha_q \in T_q^*Q$ y $(t, u_q) \in \pi^{-1}(q)$. Por lo tanto, la expresión en coordenadas de H es (6.9).

Sea $\omega_Q = -d\theta_Q$ la forma simpléctica canónica en T^*Q , donde θ_Q es la forma de Liouville, y consideremos la proyección canónica $\pi_1 : \mathbb{R} \times (T^*Q \times_Q C) \rightarrow T^*Q$. Definamos la 2-forma Ω_H en $\mathbb{R} \times (T^*Q \times_Q C)$ por $\Omega_H = \pi_1^*\omega_Q + dH \wedge dt$. Entonces, (Ω_H, dt) es una estructura precosimpléctica en $\mathbb{R} \times (T^*Q \times_Q C)$ (ver [106]).

Las ecuaciones (6.10) y (6.12) se pueden reescribir intrínsecamente como

$$i_X \Omega_H = 0, \quad i_X dt = 1 \quad (6.13)$$

Puesto que (Ω_H, dt) es una estructura precosimpléctica, en general, las ecuaciones (6.13) no tienen por qué tener solución.

Aplicando el algoritmo de Dirac-Bergmann-Gotay-Nester [34, 63] al sistema precosimpléctico

$$(\mathbb{R} \times (T^*Q \times_Q C), dt, \Omega_H)$$

(ver [25]) obtenemos que las ecuaciones (6.12) se corresponden con las ligaduras primarias para el sistema precosimpléctico:

$$\phi^a = \frac{\partial H}{\partial u^a} = 0$$

Las ecuaciones (6.13) tienen solución algebraica a lo largo de la primera subvariedad de ligaduras P_0 determinada por la anulación de las ligaduras primarias. En los puntos de P_0 hay al menos una solución puntual a las ecuaciones (6.13), pero dichas soluciones no son, en general, tangentes a P_0 . Estos puntos deben ser eliminados, dejando un subconjunto $P_1 \subset P_0$ (se asume también que P_1 es una subvariedad). Por lo tanto, nos tenemos que restringir a una subvariedad P_2 en la que las soluciones de (6.13) son tangentes a P_1 . Procediendo de esta manera, obtenemos una secuencia de subvariedades

$$\dots \hookrightarrow P_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow P_2 \hookrightarrow P_1 \hookrightarrow P_0 \hookrightarrow \mathbb{R} \times (T^*Q \times_Q C)$$

Si el algoritmo se estabiliza, esto es, existe un entero positivo $k \in \mathbb{N}$ tal que $P_k = P_{k+1}$ y $\dim P_k \neq 0$, entonces obtendremos una subvariedad final $P_f = P_k$ en la cual existe un campo de vectores X tal que

$$(i_X \Omega_H)|_{P_f} = 0, \quad (i_X dt = 1)|_{P_f} \quad (6.14)$$

Las ligaduras que determinan P_f se conocen, en la literatura de control, como las **condiciones de orden superior para la optimalidad**.

Si X es una solución de (6.14) entonces cada solución arbitraria de P_f es de la forma $X' = X + \xi$, donde $\xi \in (\ker \Omega_H \cap \ker dt) \cap TP_f$.

Por lo tanto, una condición necesaria para la optimalidad de la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times C$, $\gamma(t) = (t, q(t), u(t))$ es la existencia de una elevación $\tilde{\gamma}$ de γ a P_f tal que $\tilde{\gamma}$ es una curva integral de una solución de las ecuaciones (6.14).

En el caso regular, la variedad final de ligaduras será P_0 (esto es, $P_0 = P_f$) y todas las ligaduras son del segundo tipo, siguiendo la clasificación de Dirac (ver [106]). En tal caso, (P_0, η, Ω) es una variedad cosimpléctica, donde Ω y η denotan las restricciones de Ω_H y dt , respectivamente, a la subvariedad P_0 . Denotemos también por ω y θ las restricciones de $\pi_1^*\omega_Q$ y $\pi_1^*\theta_Q$ a P_0 .

Para el caso singular, ver por ejemplo [33].

La cosimplecticidad de (P_0, Ω, η) es localmente equivalente a la regularidad de la matriz

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^a \partial u^b} \right)_{1 \leq a, b \leq m}$$

a lo largo de P_0 . Las ecuaciones dinámicas para el problema de control óptimo se convierten en

$$i_X \Omega = 0, \quad i_X \eta = 1 \quad (6.15)$$

Tomando coordenadas (t, q^i, p_i) en P_0 , entonces (6.15) son equivalentes a:

$$\begin{cases} \dot{q}^i(t) = \frac{\partial H|_{P_0}}{\partial p_i}(t, q(t), p(t)) \\ \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H|_{P_0}}{\partial q^i}(t, q(t), p(t)) \end{cases} \quad (6.16)$$

donde hemos sustituido en (6.10) las variables de control u^a por su valor $\bar{u}^a = f^a(t, q, p)$, aplicando el Teorema de la Función Implícita a las ligaduras primarias $\phi^a = 0$. Esto implica también que tenemos proyecciones canónicas desde P_0 a \mathbb{R} , pongamos $\pi_0 : P_0 \rightarrow \mathbb{R}$.

En tal caso, hay una solución única X_{P_0} a las ecuaciones (6.15):

$$i_{X_{P_0}} \Omega = 0, \quad i_{X_{P_0}} \eta = 1$$

y su flujo preserva la estructura cosimpléctica dada por Ω y η . Esto es, si denotamos por F_h el flujo de X_{P_0} entonces $F_h^* \Omega = \Omega$ y $F_h^* \eta = \eta$. En coordenadas locales, $F_h(t_0, q_0, p_0) = (t_0 + h, q_1, p_1)$. Denotemos por $F_h^{(2)}$ la aplicación $F_h^{(2)}(t_0, q_0, p_0) = (q_1, p_1)$, y por $F_{t_1, t_0} : P_0^{t_0} \rightarrow P_0^{t_1}$ la aplicación definida por

$$F_{t_1, t_0}(q_0, p_0) = F_{t_1 - t_0}^{(2)}(t_0, q_0, p_0),$$

donde escribimos $P_0^t = (\pi_0)^{-1}(t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Obviamente, $F_{t_2, t_1} \circ F_{t_1, t_0} = F_{t_2, t_0}$ en su dominio común.

Las subvariedades P_0^t heredan naturalmente una estructura simpléctica ω_t tomando la restricción de ω a P_0^t . Análogamente, denotemos por θ_t la restricción de θ a P_0^t , y entonces $\omega_t = -d\theta_t$.

Es fácil deducir que, en tal caso, F_{t_1, t_0} es un simplectomorfismo; esto es, $F_{t_1, t_0}^* \omega_{t_1} = \omega_{t_0}$, notando que

$$\Omega = \omega + dH|_{P_0} \wedge \eta$$

Este último comentario será interesante para la construcción de integradores geométricos para sistemas de control óptimo que dependen explícitamente del tiempo.

6.3. Funciones generatrices

Sean (M_i, ω_i) , $i = 0, 1$ dos variedades simplécticas exactas (es decir, ω_i es simpléctica y exacta, $\omega_i = -d\theta_i$, $i = 0, 1$) y supongamos que $g : M_0 \rightarrow M_1$ es un difeomorfismo. Denotemos por $\text{Graph}(g)$

el grafo de g , $\text{Graph}(g) = \{(x_0, g(x_0)) \mid x_0 \in M_0\} \subseteq M_0 \times M_1$ y por $\pi_i : M_0 \times M_1 \rightarrow M_i$, $i = 0, 1$ las proyecciones canónicas. Consideremos la 1-forma y la 2-forma en $M_0 \times M_1$ definidas por

$$\begin{aligned}\Theta_{(1,0)} &= \pi_1^* \theta_1 - \pi_0^* \theta_0 \\ \Omega_{(1,0)} &= \pi_1^* \omega_1 - \pi_0^* \omega_0 = -d\Theta_{(1,0)}\end{aligned}$$

Como es bien conocido, $\Omega_{(1,0)}$ es una forma simpléctica.

Sea $i_g : \text{Graph}(g) \hookrightarrow M_0 \times M_1$ la inclusión canónica, entonces

$$i_g^* \Omega_{(1,0)} = (\pi_0|_{\text{Graph}(g)})^* (g^* \omega_1 - \omega_0)$$

Usando esta igualdad, es claro que g es un symplectomorfismo si y sólo si $i_g^* \Omega_{(1,0)} = 0$, esto es, si $\text{Graph}(g)$ es una subvariedad lagrangiana de $(M_0 \times M_1, \Omega_{(1,0)})$.

Ahora bien, si g es un symplectomorfismo, tenemos que

$$i_g^* \Omega_{(1,0)} = -di_g^* \Theta_{(1,0)} = 0$$

y, por lo tanto, al menos localmente, existe una función $S : \text{Graph}(g) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$i_g^* \Theta_{(1,0)} = dS \tag{6.17}$$

Sean (q_0, p_0) y (q_1, p_1) coordenadas de Darboux en M_0 y M_1 , respectivamente, tales que $\theta_0 = p_0 dq_0$ y $\theta_1 = p_1 dq_1$. Puesto que $\text{Graph}(g)$ es difeomorfa a M_0 , podemos tomar (q_0, p_0) como coordenadas naturales en $\text{Graph}(g)$. Como (q_0, p_0, q_1, p_1) son coordenadas en $M_0 \times M_1$, entonces, a lo largo de $\text{Graph}(g)$, tenemos que $q_1 = q_1(q_0, p_0)$, $p_1 = p_1(q_0, p_0)$ y

$$p_1 dq_1 - p_0 dq_0 = dS(q_0, p_0)$$

6.3.1. Funciones generatrices de primera especie

Asumamos que, en un entorno de cierto punto $x \in \text{Graph}(g)$, podemos cambiar este sistema de coordenadas por un nuevo sistema de coordenadas independientes (q_0, q_1) (la condición local es que $\det(\partial q_1 / \partial p_0) \neq 0$). En tal caso, la función S puede expresarse localmente como $S = S(q_0, p_0) = S_1(q_0, q_1)$.

Definición 6.3.1. *La función $S_1(q_0, q_1)$ se llamará una función de generatriz de primera especie del symplectomorfismo g .*

De (6.17) deducimos que

$$\begin{cases} p_0 = -\frac{\partial S_1}{\partial q_0} \\ p_1 = \frac{\partial S_1}{\partial q_1} \end{cases} \tag{6.18}$$

(ver Fig. 6.2).

Recíprocamente, si $S_1(q_0, q_1)$ es una función tal que $\det\left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial q_0 \partial q_1}\right) \neq 0$ entonces S_1 es una función generatriz para cierto symplectomorfismo g determinado implícitamente por las ecuaciones (6.18), $g(q_0, p_0) = (q_1, p_1)$ (ver [3]).

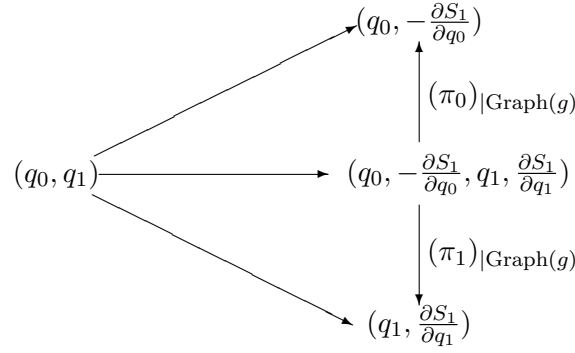


Figura 6.2: Una función generatriz de primera especie

Ahora supongamos que M es un fibrado sobre la recta real \mathbb{R} , $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}$, y $M_t = \pi^{-1}(t)$ son las fibras, donde cada fibra M_t está equipada con una forma simpléctica ω_t . Sea $g_{(s,t)} : M_t \rightarrow M_s$ una familia biparamétrica de simplectomorfismos que satisfacen

$$g_{(t_2,t_1)} \circ g_{(t_1,t_0)} = g_{(t_2,t_0)}$$

Mostraremos que esta composición puede ser traducida en términos de sus funciones generatrices. Aún más, los siguientes resultados darán una interpretación geométrica a las Ecuaciones de Euler-Lagrange Discretas [128, 130]. En lo que sigue, se supondrá que, para cada intervalo $[s, t]$ la subvariedad lagrangiana $\text{Graph } g_{(s,t)}$ tiene una función generatriz de primera especie $S_1^{(t,s)}$. El siguiente teorema muestra la relación entre funciones generatrices para distintos intervalos de tiempo.

Teorema 6.3.2. *Sea $S_1^{(t_N,t_0)}$ una función definida por*

$$S_1^{(t_N,t_0)}(q_0, q_N) = \sum_{k=0}^{N-1} S_1^{(t_{k+1},t_k)}(q_k, q_{k+1})$$

donde $q_k \in M_{t_k}$, $1 \leq k \leq N-1$, son puntos estacionarios del miembro de la derecha, es decir,

$$0 = D_2 S_1^{(t_k,t_{k-1})}(q_{k-1}, q_k) + D_1 S_1^{(t_{k+1},t_k)}(q_k, q_{k+1}), \quad 1 \leq k \leq N-1.$$

Si $S_1^{(t_k,t_{k-1})}$ son funciones generatrices de primera especie para $g_{(t_k,t_{k-1})}$, entonces $S_1^{(t_N,t_0)}$ es una función generatriz de primera especie para $g_{(t_N,t_0)} : M_{t_0} \rightarrow M_{t_N}$.

Demostración. De forma recursiva, basta verlo para $N = 2$. Consideremos la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S_1^{(t_1,t_0)}(q_0, x) + S_1^{(t_2,t_1)}(x, q_2) \right) = 0 \quad (6.19)$$

Para (q_0, q_2) fijos, hay coordenadas únicas p_0, p_2 tales que

$$(q_0, p_0, q_2, p_2) \in \text{Graph } g_{(t_2,t_0)}.$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (6.18) sabemos que la ecuación (6.19) tiene al menos una solución q_1 determinada por $g_{(t_1,t_0)}(q_0, p_0) = (q_1, p_1)$ o, alternativamente, por $g_{(t_2,t_1)}^{-1}(q_2, p_2) = (q_1, p_1)$. Aún

más, para t_1 fijo, la solución a la ecuación (6.19) es única, puesto que $g_{(s,t)} : M_t \rightarrow M_s$ es una familia biparamétrica de simplectomorfismos.

Por tanto, definamos

$$S_1^{(t_2,t_0)}(q_0, q_2) = S_1^{(t_1,t_0)}(q_0, q_1) + S_1^{(t_2,t_1)}(q_1, q_2)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} d(S_1^{(t_2,t_0)}(q_0, q_2)) &= d(S_1^{(t_1,t_0)}(q_0, q_1) + S_1^{(t_2,t_1)}(q_1, q_2)) \\ &= \left(\frac{\partial S_1^{(t_1,t_0)}}{\partial q_0}(q_0, q_1) + \frac{\partial S_1^{(t_1,t_0)}}{\partial q_1}(q_0, q_1) \frac{\partial q_1}{\partial q_0} + \frac{\partial S_1^{(t_2,t_1)}}{\partial q_0}(q_1, q_2) \frac{\partial q_1}{\partial q_0} \right) dq_0 \\ &\quad + \left(\frac{\partial S_1^{(t_2,t_1)}}{\partial q_2}(q_1, q_2) + \frac{\partial S_1^{(t_1,t_0)}}{\partial q_1}(q_0, q_1) \frac{\partial q_1}{\partial q_2} + \frac{\partial S_1^{(t_2,t_1)}}{\partial q_0}(q_1, q_2) \frac{\partial q_1}{\partial q_2} \right) dq_2 \end{aligned}$$

y aplicando la condición de estacionariedad y las ecuaciones (6.18) deducimos que

$$\begin{aligned} d(S_1^{(t_2,t_0)}(q_0, q_2)) &= \frac{\partial S_1^{(t_1,t_0)}}{\partial q_0}(q_0, q_1) dq_0 + \frac{\partial S_1^{(t_2,t_1)}}{\partial q_2}(q_1, q_2) dq_2 \\ &= p_2 dq_2 - p_0 dq_0 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

6.3.2. La acción como función generatriz

En este momento estamos en condiciones de llevar este procedimiento al límite cuando el número de subintervalos crece hasta infinito. Consideremos como su contrapartida continua una variedad cosimpléctica (M, ω, η) , donde M fibra sobre \mathbb{R} ($\pi_{\mathbb{R}} : M \rightarrow \mathbb{R}$) y $\eta = \pi_{\mathbb{R}}^*(dt)$. Denotemos por $M_t = \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Tomemos una función hamiltoniana $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, su campo de vectores de Reeb Y_H viene dado por

$$i_{Y_H}(\omega + dH \wedge dt) = 0 \quad \text{y} \quad i_{Y_H}\eta = 1$$

Sea $F_{(t,s)} : M_s \rightarrow M_t$ la familia 2-paramétrica de simplectomorfismos generada por Y_H (ver la sección 6.2) y consideremos como forma simpléctica en cada fibra M_t la restricción de ω a dicha fibra.

Daremos una caracterización de las funciones generatrices de primera especie asociadas a $F_{(t,s)}$ para t suficientemente cercano a s . Para realizar esto, tomemos coordenadas de Darboux (t, q^i, p_i) en M y supongamos la condición de regularidad $\det \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right) \neq 0$. Obsérvese que esta última condición implica que si q_1 está próximo a q_0 y $t_1 - t_0$ es suficientemente pequeño, entonces existe una solución única $t \rightarrow (t, q(t), p(t))$ de las ecuaciones de Hamilton tal que $q(t_0) = q_0$ y $q(t_1) = q_1$. De esta forma,

Proposición 6.3.3. *Una función generatriz de primera especie para $F_{(t_1,t_0)}$ viene dada por*

$$S_1^{(t_1,t_0)}(q_0, q_1) = \int_{t_0}^{t_1} (p(t)\dot{q}(t) - H(t, q(t), p(t))) dt$$

donde $t \rightarrow (t, q(t), p(t))$ es una curva integral de las ecuaciones de Hamilton tal que $q(t_0) = q_0$ y $q(t_1) = q_1$.

Demostración. Únicamente usamos las ecuaciones de Hamilton e integramos por partes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1^{(t_1, t_0)}}{\partial q_0}(q_0, q_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial p}{\partial q_0} \dot{q} + p \frac{\partial \dot{q}}{\partial q_0} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial q_0} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q_0} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(p \frac{\partial \dot{q}}{\partial q_0} + \dot{p} \frac{\partial q}{\partial q_0} \right) dt \\ &= -p_0 + p_1 \frac{\partial q_1}{\partial q_0} = -p_0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1^{(t_1, t_0)}}{\partial q_1}(q_0, q_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial p}{\partial q_1} \dot{q} + p \frac{\partial \dot{q}}{\partial q_1} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial q_1} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q_1} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(p \frac{\partial q}{\partial q_1} + \dot{p} \frac{\partial q}{\partial q_1} \right) dt \\ &= p_1 - p_0 \frac{\partial q_0}{\partial q_1} = p_1 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

6.4. Comparación de integradores variacionales con métodos basados en funciones generatrices

6.4.1. Integradores variacionales discretos

Los integradores variacionales discretos aparecen como un tipo especial de integradores geométricos. Estos integradores tienen sus raíces en la literatura sobre control óptimo de los años sesenta y setenta (Jordan y Polack [77], Cadzow [15], Maeda [119, 120]) y en los ochenta, por Lee [93, 94], Veselov [134, 156]. En estos trabajos, se introducen los siguientes conceptos: la acción discreta, las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas, el teorema de Noether discreto, etc. Aunque este tipo de integradores simplécticos se han considerado para sistemas conservativos [75, 78, 124, 130, 158, 159], se ha mostrado recientemente cómo la mecánica variacional discreta puede incluir sistemas forzados o disipativos [79, 130], ligaduras holónomas [59, 130], sistemas dependientes del tiempo [112, 130], contacto con fricción [139] y ligaduras no holónomas (ver [26, 28]). Aún más, se ha discutido también la teoría de reducción [11, 12, 95, 125, 127], extensiones a teorías de campos [76, 126] y mecánica cuántica [137]. Todos estos integradores han mostrado un comportamiento a largo plazo excepcional, y la investigación en este campo interesa por consideraciones tanto numéricas como geométricas.

En este punto, describiremos el cálculo variacional discreto siguiendo el enfoque de [158] (ver también [4, 57]). Un lagrangiano discreto es una aplicación $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ (este lagrangiano discreto puede considerarse una aproximación del lagrangiano continuo $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$). Definamos la acción $S_d : Q^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ correspondiente al lagrangiano L_d por

$$S_d = \sum_{k=1}^N L_d(q_{k-1}, q_k),$$

donde $q_k \in Q$ for $0 \leq k \leq N$. Para cualquier covector $\alpha \in T_{(x_1, x_2)}^*(Q \times Q)$, tenemos una descomposición $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ donde $\alpha_i \in T_{x_i}^*Q$. Por lo tanto,

$$dL_d(q_0, q_1) = D_1L_d(q_0, q_1) + D_2L_d(q_0, q_1) .$$

El principio variacional discreto, o principio de Cadzow, afirma que las soluciones al sistema discreto determinadas por L_d deben extremizar la acción para extremos fijos dados q_0 y q_N . Al extremizar S_d sobre q_k , $1 \leq k \leq N - 1$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$D_1L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2L_d(q_{k-1}, q_k) = 0 .$$

Estas ecuaciones se denominan habitualmente las **ecuaciones de Euler-Lagrange discretas**. Bajo ciertas hipótesis de regularidad (por ejemplo, que la matriz $(D_{12}L_d(q_k, q_{k+1}))$ sea regular), este sistema implícito de ecuaciones en diferencias define un flujo discreto $\Upsilon : Q \times Q \longrightarrow Q \times Q$, por $\Upsilon(q_{k-1}, q_k) = (q_k, q_{k+1})$.

Las propiedades geométricas correspondientes a este método numérico se obtienen definiendo la transformación de Legendre discreta asociada a L_d por

$$FL_d : \begin{array}{ccc} Q \times Q & \longrightarrow & T^*Q \\ (q_0, q_1) & \longmapsto & (q_0, -D_1L_d(q_0, q_1)) , \end{array}$$

y la 2-forma $\omega_d = FL_d^*\omega_Q$, donde ω_Q es la forma simpléctica canónica en T^*Q . El algoritmo discreto determinado por Υ preserva la forma simpléctica ω_d , es decir, $\Upsilon^*\omega_d = \omega_d$. Aún más, si el lagrangiano discreto es invariante bajo la acción diagonal de un grupo de Lie G , entonces la aplicación momento discreta $J_d : Q \times Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definida por $\langle J_d(q_k, q_{k+1}), \xi \rangle = \langle D_2L_d(q_k, q_{k+1}), \xi_Q(q_{k+1}) \rangle$ es preservada por el flujo discreto. Por lo tanto, estos integradores son simplécticos y preservan el momento.

6.4.2. Mecánica variacional discreta y funciones generatrices

Siguiendo la notación de la sección 6.3.1, para este enfoque, consideramos en cambio una aproximación adecuada $S_d^{(t,s)}$ de la acción $S_1^{(t,s)}$, por ejemplo

$$S_d^{(t,s)}(q_0, q_1) = (t - s)\mathcal{L}(\alpha q_0 + (1 - \alpha)q_1, \frac{q_1 - q_0}{t - s}), \quad \alpha \in [0, 1]$$

(con la suposición de que Q puede ser considerado como un espacio vectorial). En la aproximación anterior vemos que el lagrangiano discreto puede verse como una aproximación a la acción (que es una función generatriz de primera especie para el flujo exacto solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange para dicho lagrangiano discreto).

Las ecuaciones de extremalidad son

$$0 = D_2S_d^{(t,s)}(q_{k-1}, q_k) + D_1S_d^{(t,s)}(q_k, q_{k+1}), \quad 1 \leq k \leq N - 1.$$

que son precisamente las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas (ver [130] y sus referencias).

Las transformaciones de Legendre se pueden ver ahora como proyecciones sobre T^*Q , como se ve en 6.2, y la symplecticidad es una consecuencia directa de la construcción.

Nótese que, alternativamente, podríamos haber considerado aproximaciones mejores. Estamos además suponiendo que $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lagrangiana relacionada con el hamiltoniano H vía la transformación de Legendre (ver [3]), lo cual es localmente posible por la regularidad de H .

Denotemos por $S_1(q_0, q_1, t_0, t_1) = S_1^{(t_1, t_0)}(q_0, q_1)$. De la proposición (6.3.3), se puede ver fácilmente que

$$\begin{aligned} D_3 S_1(q_0, q_1, t_0, t_1) &= D_3 S_1^{(t_1, t_0)}(q_0, q_1) = H(t_0, q_0, p_0) \\ D_4 S_1(q_0, q_1, t_0, t_1) &= D_4 S_1^{(t_1, t_0)}(q_0, q_1) = -H(t_1, q_1, p_1) \end{aligned}$$

(ver también [130]). En consecuencia,

$$D_4 S_1^{(t_k, t_{k-1})}(q_{k-1}, q_k) + D_3 S_1^{(t_{k+1}, t_k)}(q_k, q_{k+1}) = 0 \quad (6.20)$$

Debería notarse que si tomamos una nueva función $S_d^{(t_{k+1}, t_k)}$ una aproximación adecuada a $S_1^{(t_{k+1}, t_k)}$, entonces las soluciones $\{q_0, q_1, \dots, q_N\}$ a las ecuaciones

$$D_2 S_d^{(t_k, t_{k-1})}(q_{k-1}, q_k) + D_1 S_d^{(t_{k+1}, t_k)}(q_k, q_{k+1}) = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1.$$

no satisfacen (6.20) para valores arbitrarios de t_{k-1}, t_k, t_{k+1} . Por lo tanto, podemos escribir el sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{cases} D_2 S_d^{(t_k, t_{k-1})}(q_{k-1}, q_k) + D_1 S_d^{(t_{k+1}, t_k)}(q_k, q_{k+1}) = 0, \\ D_4 S_d^{(t_k, t_{k-1})}(q_{k-1}, q_k) + D_3 S_d^{(t_{k+1}, t_k)}(q_k, q_{k+1}) = 0, \end{cases} \quad (6.21)$$

que, bajo suposiciones de regularidad, determinarán un flujo discreto dependiente del tiempo

$$\Phi(q_{k-1}, q_k, t_{k-1}, t_k) = (q_k, q_{k+1}, t_k, t_{k+1})$$

con paso variable $h_k = t_{k+1} - t_k$ (ver [78, 93, 94, 112, 130]).

Las secciones subsiguientes consisten en nuestros trabajos de investigación basados en las ideas expuestas en esta sección. Parte de este trabajo ha sido publicado en [113] y [114].

Adaptando estas ideas a diferentes situaciones, el análisis de las diversas especies de funciones generaciones y generalizaciones nos permitirá construir métodos numéricos diversos con propiedades geométricas interesantes para varios ejemplos, de los cuales exploraremos dos: la mecánica no holónoma y la teoría de control óptimo, dejando la teoría de campos como parte de un trabajo futuro.

6.5. Aplicaciones a la mecánica no holónoma

En un trabajo reciente, J. Cortés y S. Martínez [28] han propuesto la construcción de integradores no holónomos, que son útiles para aplicaciones numéricas. Su construcción se basa en el *principio de Lagrange-D'Alembert discreto*. Suponiendo que las ligaduras vienen dadas por una distribución D , este principio afirma que

$$(D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k))_i \delta q_k^i = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

donde $\delta q_k \in D_{q_k}$ y además, $(q_k, q_{k+1}) \in D_d$. Aquí D_d denota un espacio de ligaduras discreto $D_d \subset Q \times Q$. Este integrador tiene un buen comportamiento y hereda naturalmente muchas propiedades geométricas del problema continuo. Obsérvese que el método está basado en una discretización del lagrangiano y una discretización coherente de las ligaduras, y ambos determinan las fuerzas de ligadura.

De forma alternativa, proponemos un integrador no holónomo basado en la discretización del lagrangiano (de forma más precisa, discretizamos la acción), pero tomamos una discretización coherente de las fuerzas de ligadura, y ambas determinan la subvariedad de ligaduras. Este método nos da, en general, integradores distintos de los de [28]. La última consideración de la sección previa será nuestro punto de partida para estudiar integradores no holónomos, y nuestras ecuaciones serán conceptualmente equivalentes a las propuestas para sistemas con fuerzas externas (ver [130]). En el caso particular de sistemas mecánicos con ligaduras lineales en las velocidades, estudiaremos un caso particular de integradores no holónomos que preservan la ligadura no holónoma original.

6.5.1. Funciones generatrices y mecánica no holónoma

Seguiremos argumentos similares a los dados para la construcción de funciones generatrices para transformaciones canónicas [3]. Sin embargo, debido a la ecuación (6.6), tenemos que el flujo no holónomo no es una transformación canónica, es decir,

$$F_h^* \omega_Q - \omega_Q = d \left(\int_0^h F_t^* \Lambda \right). \quad (6.22)$$

Sin embargo, esta descripción nos permitirá construir una nueva familia de integradores no holónomos para las ecuaciones (6.15). Denotemos por $\pi_i : T^*Q \times T^*Q \rightarrow T^*Q$, $i = 1, 2$, las proyecciones canónicas. Consideremos las siguientes formas

$$\begin{aligned} \Theta &= \pi_1^* \theta_Q - \pi_0^* \theta_Q, \\ \Omega &= \pi_1^* \omega_Q - \pi_0^* \omega_Q = -d\Theta. \end{aligned}$$

Denotemos por $i_{F_h} : \text{Graph}(F_h) \hookrightarrow T^*Q \times T^*Q$ la aplicación inclusión, y observemos que $\text{Graph}(F_h) \subset M \times M$. Entonces, de (6.22) se deduce

$$\begin{aligned} i_{F_h}^* \Omega &= (\pi_1|_{\text{Graph}(F_h)})^* (F_h^* \omega_Q - \omega_Q) \\ &= (\pi_1|_{\text{Graph}(F_h)})^* \left[d \left(\int_0^h F_t^* \Lambda \right) \right], \end{aligned}$$

o, de (6.6), se tiene

$$i_{F_h}^* \Theta = (\pi_1|_{\text{Graph}(F_h)})^* \left[d \left(\int_0^h L \circ \tilde{F}_t dt \right) - \int_0^h F_t^* \Lambda \right].$$

Sean (q_0, p_0, q_1, p_1) coordenadas en $T^*Q \times T^*Q$ en un entorno de cierto punto de $\text{Graph}(F_h)$. Si $(q_0, p_0, q_1, p_1) \in \text{Graph}(F_h)$ entonces $\Psi^a(q_0, p_0) = 0$ y $\Psi^a(q_1, p_1) = 0$. Aún más, a lo largo de $\text{Graph}(F_h)$, $q_1 = q_1(q_0, p_0)$ y $p_1 = p_1(q_0, p_0)$, tenemos que

$$p_1 dq_1 - p_0 dq_0 = d \left(\int_0^h L(q(t), \dot{q}(t)) dt \right) - \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)), \quad (6.23)$$

donde $(q(t), \dot{q}(t)) = \tilde{F}_t(q_0, \dot{q}_0)$ con $Leg(q_0, \dot{q}_0) = (q_0, p_0)$. Aquí \tilde{F}_t denota el flujo de $\xi_{L,D}$. La ecuación (6.23) se satisface a lo largo de $\text{Graph}(F_h)$.

Supongamos que, en un entorno de cierto punto $x \in \text{Graph}(F_h)$, podemos cambiar este sistema de coordenadas a un sistema nuevo de coordenadas (q_0, q_1) . Denotemos por

$$S^h(q_0, q_1) = \int_0^h L(q(t), \dot{q}(t)) dt,$$

donde $q(t)$ es una curva solución del problema no holónomo con $q(0) = q$ y $q(h) = q_1$. Esta solución siempre existe para valores adecuados de q_0 y q_1 . Observemos además que

$$q_1 = q_0 + h \frac{\partial H}{\partial p}(q_0, p_0) + O(h^2),$$

de donde, puesto que $\det \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right) \neq 0$, deducimos localmente que $p_0 = p_0(q_0, q_1, h)$. Pero además $(q_0, p_0) \in M$; en consecuencia, $\varphi^a(q_0, q_1, h) = \Psi^a(q_0, p_0(q_0, q_1, h)) = 0$. Así, la curva

$$(q(t), \dot{q}(t)) = Leg^{-1}(F_t(q_0, p_0(q_0, q_1, h))),$$

verifica las hipótesis necesarias si $\varphi^a(q_0, q_1, h) = 0$.

Por lo tanto, deducimos que

$$\begin{cases} p_0 = -\frac{\partial S^h}{\partial q_0} + \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_0}, \\ p_1 = \frac{\partial S^h}{\partial q_1} - \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_1}, \end{cases} \quad (6.24)$$

y donde (q_0, q_1) verifica la función de ligaduras $\varphi^a(q_0, q_1, h) = 0$, definidas explícitamente por

$$\varphi^a(q_0, q_1, h) = \Psi^a(q_0, -\frac{\partial S^h}{\partial q_0}(q_0, q_1) + \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_0}), \quad 1 \leq a \leq m, \quad (6.25)$$

siendo $q(t)$ una solución del problema no holónomo para $q(0) = q_0$ y $q(h) = q_1$.

El siguiente paso es mostrar cómo se expresa la ley de composición del flujo F_h

$$F_{Nh} = \underbrace{F_h \circ \dots \circ F_h}_N$$

en términos de las correspondientes “funciones generatrices” S^h . Nótese que aunque no son funciones generatrices propiamente dichas, las llamaremos así cometiendo un pequeño abuso del lenguaje. Además, el siguiente teorema permitirá la construcción de integradores numéricos nuevos para la mecánica no holónoma cuando cambiamos la función generatriz y las fuerzas de ligadura por aproximaciones adecuadas. Como generalización del teorema 6.3.2 tenemos el siguiente

Teorema 6.5.1. *La función S^{Nh} , función generatriz para F_{Nh} , viene dada por*

$$S^{Nh}(q_0, q_N) = \sum_{k=0}^{N-1} S^h(q_k, q_{k+1}),$$

donde q_k , $1 \leq k \leq N - 1$, son puntos que verifican

$$D_2 S^h(q_{k-1}, q_k) + D_1 S^h(q_k, q_{k+1}) = \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_1} + \int_h^{2h} \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_0}, \quad (6.26)$$

y $q(t)$ es una curva solución del problema no holónomo con $q(0) = q_{k-1}$ y $q(h) = q_k$ (respectivamente, $q(h) = q_k$ y $q(2h) = q_{k+1}$) para la primera integral (resp., la segunda integral) de la parte derecha de (6.26).

Demostración. Por un argumento recursivo, basta ver el resultado para $N = 2$, es decir,

$$S^{2h}(q_0, q_2) = S^h(q_0, q_1) + S^h(q_1, q_2),$$

donde q_1 verifica (6.26).

Puesto que

$$\begin{aligned} p_1 dq_1 - p_0 dq_0 &= dS^h(q_0, q_1) - \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)), \\ p_2 dq_2 - p_1 dq_1 &= dS^h(q_1, q_2) - \int_h^{2h} \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)), \end{aligned}$$

entonces

$$p_2 dq_2 - p_0 dq_0 = d\left(S^h(q_0, q_1) + S^h(q_1, q_2)\right) - \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) - \int_h^{2h} \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)).$$

Como las variables q_1 no aparecen en el lado izquierdo, se sigue que

$$0 = D_2 S_1^h(q_0, q_1) + D_1 S_2^h(q_1, q_2) - \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_1} - \int_h^{2h} \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_0}, \quad (6.27)$$

y para una elección de q_1 que verifique (6.27) entonces

$$S^{2h}(q_0, q_2) = S^h(q_0, q_1) + S^h(q_1, q_2)$$

es una función generatriz de primera especie de F_{2h} porque

$$p_2 dq_2 - p_0 dq_0 = dS^{2h}(q_0, q_2) - \int_0^{2h} \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)).$$

como queríamos probar. ■

Las ecuaciones (6.26) determinan un sistema implícito de ecuaciones en diferencias que nos permiten obtener q_2 desde los datos iniciales q_0 y q_1 . Una consecuencia interesante de esto es que estas ecuaciones preservan la subvariedad de ligaduras determinada por las ligaduras $\varphi^a = 0$, $1 \leq a \leq m$. De hecho, si $\varphi^a(q_0, q_1, h) = 0$ (es decir, $\Psi^a(q_0, p_0) = 0$) entonces

$$\varphi^a(q_1, q_2, h) = \Psi^a(q_1, \frac{\partial S^h}{\partial q_1}(q_0, q_1) - \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_1}),$$

y ahora, aplicando (6.24), obtenemos que

$$\varphi^a(q_1, q_2, h) = \Psi^a(q_1, p_1) = 0,$$

porque $F_h(q_0, p_0) = (q_1, p_1)$ y el flujo preserva las ligaduras.

La siguiente nota es clave para la construcción de integradores no holónomos.

Nota 6.5.2. Si en lugar de (6.24) tomamos la ecuación

$$\begin{cases} p_0 = -\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial q_0} + \alpha_0^h(q_0, q_1), \\ p_1 = \frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial q_1} - \alpha_1^h(q_0, q_1), \end{cases} \quad (6.28)$$

donde \tilde{S}^h es una función de las coordenadas (q_0, q_1) y $\alpha^h = \alpha_0^h dq_0 + \alpha_1^h dq_1$, y reemplazando las funciones de ligadura por

$$\tilde{\varphi}^a(q_0, q_1, h) = \Psi^a(q_0, -\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial q_0} + \alpha_0^h(q_0, q_1)), \quad (6.29)$$

obtenemos

$$p_1 dq_1 - p_0 dq_0 = d\tilde{S}^h - \alpha^h,$$

a lo largo de $\tilde{\varphi}^a = 0$.

Supongamos que

$$\det \left(\frac{\partial^2 \tilde{S}^h}{\partial q_0 \partial q_1} - \frac{\partial \alpha_0^h}{\partial q_1} \right) \neq 0, \quad (6.30)$$

entonces, aplicando el teorema de la función implícita, tenemos localmente que $q_1 = q_1(q_0, p_0)$, y por lo tanto, la aplicación

$$G_h(q_0, p_0) = (q_1, p_1)$$

está bien definida.

Consideremos la aplicación G_{Nh} definida por

$$G_{Nh} = \underbrace{G_h \circ \dots \circ G_h}_N.$$

Siguiendo un argumento similar al teorema 6.5.1, $\text{Graph}(G_{Nh})$ se describe por

$$\begin{cases} p_0 = -\frac{\partial \tilde{S}^{Nh}}{\partial q_0}(q_0, q_N) + \alpha_0^{Nh}(q_0, q_N), \\ p_N = \frac{\partial \tilde{S}^{Nh}}{\partial q_N}(q_0, q_N) - \alpha_1^{Nh}(q_0, q_N), \end{cases} \quad (6.31)$$

donde $\tilde{S}^{Nh}(q_0, q_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{S}^h(q_k, q_{k+1})$ y $\alpha^{Nh}(q_0, q_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^h(q_k, q_{k+1})$. Los q_k , $1 \leq k \leq N-1$, verifican

$$D_2 \tilde{S}^h(q_{k-1}, q_k) + D_1 \tilde{S}^h(q_k, q_{k+1}) = \alpha_1^h(q_{k-1}, q_k) + \alpha_0^h(q_k, q_{k+1}), \quad 1 \leq k \leq N-1. \quad (6.32)$$

Análisis del error en la ligadura

Como hemos visto, si nuestra “función generatriz” es S^h , entonces tenemos conservación exacta de las ligaduras φ^a . Investigamos lo que sucede cuando la “función generatriz” es una aproximación. Siguiamos argumentos similares a los de la subsección 2.3 de [130].

Supongamos que Q , y por tanto TQ y T^*Q , son espacios vectoriales finito dimensionales con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y la correspondiente norma $\| \cdot \|$.

Consideremos una función generatriz aproximada \tilde{S}^h y una fuerza de ligadura discreta aproximada $\alpha^h = \alpha_i^h dq^i$ para el problema no holónomo, ambas de orden r (se supone que todas las funciones son al menos C^2); por lo tanto, existe un abierto $U \subset D$ de clausura compacta y unas constantes $c, d_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, y $H > 0$ tal que

$$\tilde{S}^h(q_0, q_1) = S^h(q_0, q_1) + C(q_0, q_1, h)h^{r+1} \quad (6.33)$$

$$\alpha_i^h = \int_0^h \tilde{\Lambda}_i(q(t), \dot{q}(t)) dt + D_i(q_0, q_1, h)h^{r+1} \quad (6.34)$$

para todas las soluciones $q(t)$ del problema no holónomo con $q(0) = q_0$, $q(h) = q_1$ y condiciones iniciales que pertenecen a U y $h \leq H$. Aquí C y D_i , $1 \leq i \leq n$, son funciones diferenciables tales que $\|C(q_0, q_1, h)\| \leq c$ y $\|D_i(q_0, q_1, h)\| \leq d_i$ en U .

Tomando derivadas tenemos que

$$\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial q_0}(q_0, q_1) = \frac{\partial S^h}{\partial q_0}(q_0, q_1) + \frac{\partial C}{\partial q_0}(q_0, q_1, h)h^{r+1}$$

y también

$$\alpha_0^h(q_0, q_1) = (\alpha_0^h)_i \frac{\partial q^i}{\partial q_0} = \int_0^h \tilde{\Lambda}_i(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q^i}{\partial q_0} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial D_i}{\partial q_0}(q_0, q_1, h)h^{r+1}$$

donde ahora $\alpha^h = \alpha_0^h dq_0 + \alpha_1^h dq_1$

Por lo tanto, deducimos que

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^a(q_0, q_1, h) &= \Psi^a(q_0, -\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^0} + \alpha_0(q_0, q_1)) \\ &= \Psi^a(q_0, -\frac{\partial S^h}{\partial q_0} + \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_0} + E^a(q_0, q_1, h)h^{r+1}) \\ &= \Psi^a(q_0, p_0) + E^a(q_0, q_1, h)h^{r+1} = E^a(q_0, q_1, h)h^{r+1} \end{aligned}$$

donde E^a son funciones acotadas. Por lo tanto, el algoritmo discreto preserva la ligadura hasta orden r .

Análisis del error local

Suponiendo que

$$\det \left(\frac{\partial^2 \tilde{S}^h}{\partial q_0 \partial q_1} - \frac{\partial \alpha_0^h}{\partial q_1} \right) \neq 0, \quad (6.35)$$

obtenemos un flujo discreto $G^h : V \subseteq T^*Q \rightarrow T^*Q$. Utilizando las ecuaciones (6.24), (6.33) y (6.34) deducimos que

$$\begin{cases} p_0 = -\frac{\partial S^h}{\partial q_0} + \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_0} = \frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial q_0}(q_0, q_1) + \alpha_0^h(q_0, q_1) + E_0(q_0, q_1, h)h^{r+1}, \\ p_1 = \frac{\partial S^h}{\partial q_1} - \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_1} = \frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial q_1}(q_0, q_1) - \alpha_1^h(q_0, q_1) + E_1(q_0, q_1, h)h^{r+1}, \end{cases} \quad (6.36)$$

donde E_0 y E_1 son funciones diferenciables y acotadas.

Aplicando el teorema de la función implícita a (6.36), es fácil mostrar que, de las condiciones (6.33) y (6.34), G^h es un integrador de $X_{H,M}$ de orden r (para más detalles, ver el teorema 2.3.1 de [130]).

6.5.2. Construcción de integradores no holónomos

En lo que sigue, y por simplicidad, supongamos que Q es un espacio vectorial. Puesto que tenemos que $S^h(q_0, q_1) = \int_0^h L(q(t), \dot{q}(t)) dt$, donde $q(t)$ es una solución no holónoma para $q(0) = q_0$ y $q(h) = q_1$, usando la nota 6.5.2, podemos obtener integradores no holónomos tomando aproximaciones adecuadas de la “función generatriz” S^h y el término extra $\int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t))$.

Consideremos, por ejemplo, la aproximación

$$S_\alpha^h(q_0, q_1) = hL((1-\alpha)q_0 + \alpha q_1, \frac{q_1 - q_0}{h}), \quad (6.37)$$

para algún parámetro $\alpha \in [0, 1]$. (En general, escribiremos $S_\alpha^h(q_0, q_1) \approx S^h(q_0, q_1)$.)

Unas aproximaciones naturales de las fuerzas de ligadura adaptadas a nuestra aproximación a S^h son

$$\begin{aligned} \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_0} &\approx (1-\alpha)h\tilde{\Lambda}((1-\alpha)q_0 + \alpha q_1, \frac{q_1 - q_0}{h}), \\ \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_1} &\approx \alpha h\tilde{\Lambda}((1-\alpha)q_0 + \alpha q_1, \frac{q_1 - q_0}{h}). \end{aligned}$$

Consecuentemente, las ecuaciones (6.32) nos dan el siguiente método numérico para sistemas no holónomos

$$\begin{aligned} D_2 S_\alpha^h(q_{k-1}, q_k) + D_1 S_\alpha^h(q_k, q_{k+1}) &= \alpha h\tilde{\Lambda}((1-\alpha)q_{k-1} + \alpha q_k, \frac{q_k - q_{k-1}}{h}) \\ &+ (1-\alpha)h\tilde{\Lambda}((1-\alpha)q_k + \alpha q_{k+1}, \frac{q_{k+1} - q_k}{h}), \quad 1 \leq k \leq N-1, \end{aligned}$$

con una condición inicial que satisfaga

$$\tilde{\varphi}^\alpha(q_0, q_1, h) = \Psi^\alpha(q_0, -\frac{\partial S_\alpha^h}{\partial q_0}(q_0, q_1) + (1-\alpha)h\tilde{\Lambda}((1-\alpha)q_0 + \alpha q_1, \frac{q_1 - q_0}{h})) = 0.$$

Nota 6.5.3. Obviamente, se puede producir una mayor variedad de métodos discretos. Por ejemplo,

$$S_{\text{sym},\alpha}^h = \frac{1}{2}S_{\alpha}^h + \frac{1}{2}S_{1-\alpha}^h,$$

da un método de segundo orden para cualquier $\alpha \in [0, 1]$. Además se pueden considerar aproximaciones de orden superior a la función S^h .

Ejemplo 6.5.4. La partícula no holónoma.

Consideremos el lagrangiano $L : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (x^2 + y^2),$$

sujeto a ligaduras

$$\phi = \dot{z} - y\dot{x} = 0.$$

Es fácil de calcular las ecuaciones diferenciales no holónomas

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{2x + y\dot{x}\dot{y}}{1 + y^2} \\ \ddot{y} &= -2y \\ \ddot{z} &= \frac{-2xy + \dot{x}\dot{y}}{1 + y^2},\end{aligned}$$

donde la 1-forma de ligadura es

$$\tilde{\Lambda} = \frac{2xy - \dot{x}\dot{y}}{1 + y^2}(dz - ydx).$$

El sistema considerado es puramente conservativo, y no debiera por tanto haber pérdida de energía en el tiempo.

Tomando

$$\begin{aligned}S_{1/2}^h(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) &= \frac{h}{2} \left[\left(\frac{x_1 - x_0}{h} \right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_0}{h} \right)^2 + \left(\frac{z_1 - z_0}{h} \right)^2 \right] \\ &\quad - \left(\frac{x_0 + x_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{y_0 + y_1}{2} \right)^2,\end{aligned}$$

obtenemos el integrador no holónomo

$$\begin{aligned}&\frac{x_1 - x_0}{h} - h \frac{x_1 + x_0}{2} - \frac{x_2 - x_1}{h} - h \frac{x_2 + x_1}{2} \\ &= -\frac{h}{2} \left[\frac{\frac{(x_1+x_0)(y_1+y_0)}{2} - \frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2} \cdot \frac{y_1 + y_0}{2} + \frac{\frac{(x_2+x_1)(y_2+y_1)}{2} - \frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_2+y_1}{2}\right)^2} \cdot \frac{y_2 + y_1}{2} \right] \\ &\frac{y_1 - y_0}{h} - h \frac{y_1 + y_0}{2} - \frac{y_2 - y_1}{h} - h \frac{y_2 + y_1}{2} = 0, \\ &\frac{z_1 - z_0}{h} - \frac{z_2 - z_1}{h} \\ &= \frac{h}{2} \left[\frac{\frac{(x_1+x_0)(y_1+y_0)}{2} - \frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2} + \frac{\frac{(x_2+x_1)(y_2+y_1)}{2} - \frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_2+y_1}{2}\right)^2} \right].\end{aligned}$$

La función de ligadura $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ es

$$\tilde{\varphi}^a(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, h) = -\frac{z_1 - z_0}{h} - \frac{h}{2} \frac{\frac{(x_1+x_0)(y_1+y_0)}{2} - \frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2} + y_0 \left[\frac{x_1 - x_0}{h} + h \frac{x_1 + x_0}{2} - \frac{h}{2} \frac{\frac{(x_1+x_0)(y_1+y_0)}{2} - \frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2} \cdot \frac{y_1 + y_0}{2} \right].$$

Las siguientes figuras muestran la preservación de energía como punto de comparación de las implementaciones numéricas del método expuesto arriba con otros métodos.

La figura 6.3 compara el método expuesto con el método de Runge-Kutta de cuarto orden, mostrando una mejora en varios órdenes de magnitud. Obsérvese que, en esta escala, el valor de la energía a cada paso del algoritmo es prácticamente indistinguible del valor inicial de la energía. Por lo tanto, nuestro método no disipa la energía artificialmente

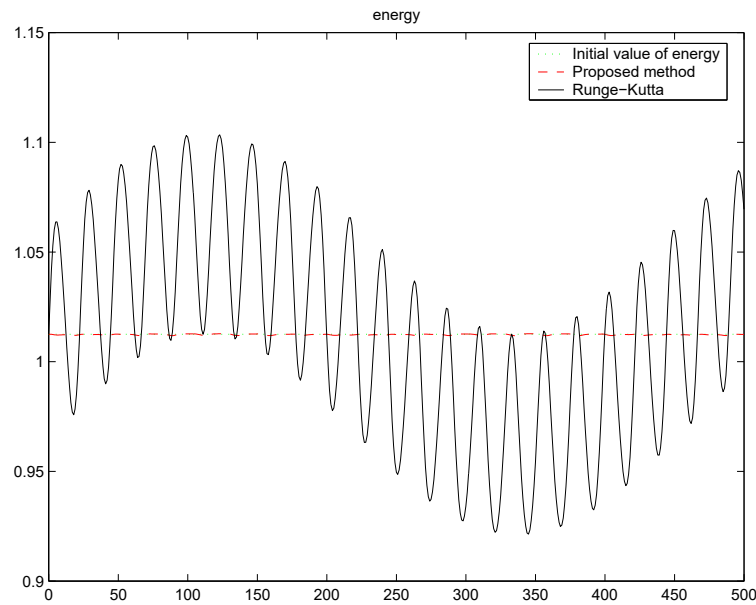


Figura 6.3: Nuestro método frente a Runge-Kutta

La figura 6.4 es una comparación de nuestro método con el que apareció en [26, 28]. Se observa un comportamiento similar, aunque se puede notar un comportamiento ligeramente mejor, donde nuestro algoritmo muestra una mejor preservación media de la energía.

Para las mismas condiciones iniciales, la figura 6.5 muestra un muy buen comportamiento de la función de ligadura con respecto al tiempo (obsérvese la pequeña escala).

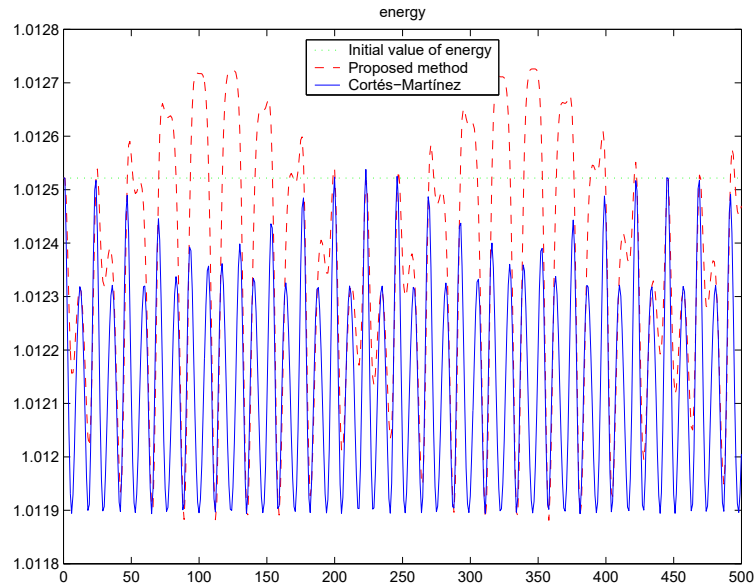


Figura 6.4: Nuestro método frente al de Cortés-Martínez

Nota 6.5.5. Una discusión sobre el enfoque de la función generatriz y el principio discreto de Lagrange-D'Alembert

Como es bien conocido, una característica notable de las transformaciones simplécticas es que pueden ser expresadas en términos de una única función real S , la función generatriz de dicha transformación canónica. Por lo tanto, cualquier integrador simpléctico tiene asociada una función generatriz. Tomando aproximaciones adecuadas de la función generatriz asociada al flujo exacto del sistema hamiltoniano, obtendremos integradores simplécticos (ver por ejemplo, los métodos de Runge-Kutta simplécticamente particionados en [70]) usando funciones generatrices de primera especie, segunda especie, etc. Es también posible construir métodos numéricos simplécticos de orden superior considerando mejores aproximaciones a las funciones generatrices en las ecuaciones de Hamilton-Jacobi (ver [24] y la sección 6.7.5).

Como hemos visto en secciones anteriores, el enfoque variacional discreto y el enfoque de la función generatriz son de hecho el mismo para funciones generatrices de primer orden. Es decir, considerando la integral de acción como función de (q_0, q_1) , para la solución $q(t)$ de las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos que

$$S^h(q_0, q_1) = \int_0^h L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

(éste es precisamente el lagrangiano discreto exacto, usando la notación de Marsden y West [130]). Por lo tanto, un lagrangiano discreto L_d es una aproximación discreta a la acción integral anterior, o, en otras palabras, una función generatriz aproximada para S^h .

En la sección 3.2 de [130], los autores discuten mecánica variacional discreta con fuerzas, y usan el así llamado *principio discreto de Lagrange-d'Alembert*, simulan un sistema lagrangiano o hamiltoniano forzado dado eligiendo lagrangianos discretos y fuerzas discretas para aproximar la evolución exacta.

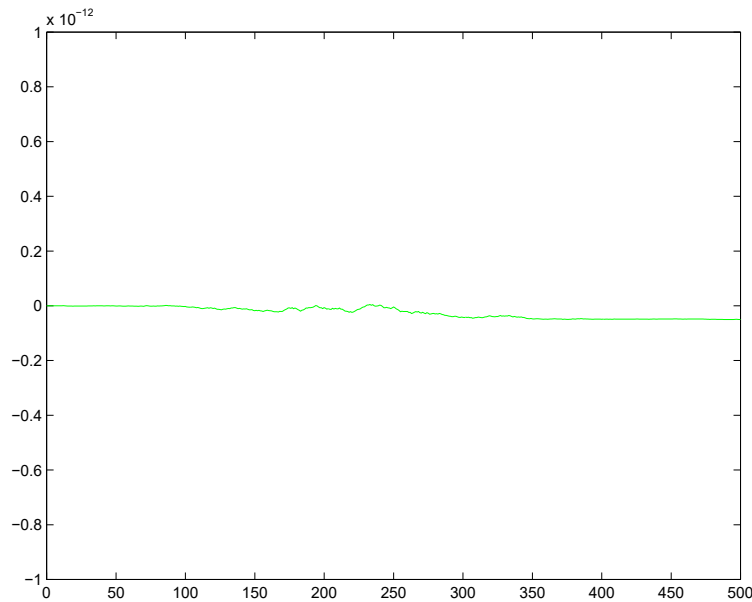


Figura 6.5: Preservación de la ligadura

Formalmente, el enfoque seguido en las secciones previas es equivalente al seguido en [130] considerando un sistema no holónomo como un sistema lagrangiano con fuerzas determinadas por las ecuaciones de ligaduras. Sin embargo, se gana perspectiva desde el enfoque de las funciones generatrices. En primer lugar, porque nuestra teoría está lista para la construcción de nuevos integradores numéricos para sistemas no holónomos usando la teoría de Hamilton-Jacobi para sistemas no holónomos (ver [47]) o incluso “funciones generatrices” para sistemas no holónomos de diversos tipos. Obsérvese que, por ejemplo, los métodos de Runge-Kutta simplécticos se generaron usando funciones generatrices de tercera especie (ver [144]). En segundo lugar, puesto que los integradores simplécticos basados en funciones generatrices están fuertemente establecidos en la investigación en análisis numérico, creemos que nuestra presentación será más clara que la usual basada en lagrangianos discretos, usada frecuentemente por investigadores en mecánica geométrica.

6.6. Sistemas mecánicos con ligaduras lineales. Métodos numéricos geométricos que preservan las ligaduras

En la sección anterior hemos construido una familia de integradores numéricos para la mecánica no holónoma; estos integradores no preservan la ligadura, aunque observamos que el error cometido es muy pequeño. Esta respuesta no es totalmente satisfactoria para un método numérico de un sistema no holónomo (como por ejemplo, las ligaduras de rodadura en vehículos con ruedas), por lo que imponemos la preservación de las ligaduras no holónomas, obteniendo una subfamilia de los métodos numéricos expuestos en esta sección. Como veremos, se gana mayor precisión al restringirnos al caso (por otro lado general, en un sentido mecánico) de lagrangianos de tipo mecánico ($L = T - V$) y ligaduras lineales en las velocidades.

Por lo tanto, supongamos que el sistema mecánico, dado por el lagrangiano $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(v_q) = \frac{1}{2}g(v_q, v_q) - V(q)$$

está sujeto a ligaduras no holónomas $\phi^a : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq a \leq m$. Puesto que las ligaduras no holónomas que aparecen con frecuencia en la mecánica son lineales en las velocidades, supondremos también que

$$\phi^a(q, \dot{q}) = \mu_i^a(q)\dot{q}^i, \quad 1 \leq a \leq m.$$

Desde un punto de vista geométrico, estas ligaduras lineales se determinan dando una distribución \mathcal{D} en Q de dimensión $n - m$ tal que el anulador de \mathcal{D} viene dado localmente por

$$\mathcal{D}^\circ = \langle \mu^a = \mu_i^a dq^i ; 1 \leq a \leq m \rangle.$$

De esta forma, las soluciones del sistema lagrangiano no holónimo satisfacen

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = -\text{grad } V(c(t)) + \lambda(\dot{c}(t)), \quad \dot{c}(t) \in \mathcal{D}_{c(t)}, \quad (6.38)$$

donde λ es una sección de \mathcal{D}^\perp a lo largo de c , y \mathcal{D}^\perp es el complemento ortogonal de \mathcal{D} con respecto a la métrica g .

Como g es una métrica riemanniana, la matriz $m \times m$ $(C^{ab}) = (\mu_i^a g^{ij} \mu_j^b)$ es simétrica y regular. Por tanto, podemos determinar explícitamente

$$\lambda(\dot{q}^i(t), \dot{q}^i(t)) = C_{ab} \left((-\Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k - g^{ij} \frac{\partial V}{\partial q^j}) \mu_i^a + \dot{q}^i \dot{q}^j \frac{\partial \mu_i^a}{\partial q^j} \right) Z^b \quad (6.39)$$

donde (C_{ab}) es la matriz inversa a (C^{ab}) , Γ_{jk}^i son los símbolos de Christoffel, y el campo de vectores Z^a se define por

$$g(Z^a, Y) = \mu^a(Y), \quad \text{for all vector field } Y, \quad 1 \leq a \leq m,$$

es decir, Z^a es el gradiente de la 1-forma μ^a . Por lo tanto, $\mathcal{D}^\perp = \langle Z^a \rangle$, $1 \leq a \leq m$. En coordenadas locales, tenemos que

$$Z^a = g^{ij} \mu_i^a \frac{\partial}{\partial q^j}.$$

Usando la métrica g y la distribución \mathcal{D} podemos obtener dos proyectores complementarios

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : TQ &\rightarrow \mathcal{D}, \\ \mathcal{Q} : TQ &\rightarrow \mathcal{D}^\perp, \end{aligned}$$

con respecto a g . El proyector \mathcal{Q} viene descrito localmente por

$$\mathcal{Q} = C_{ab} Z^a \otimes \mu^b.$$

Usando estos proyectores, podemos obtener las ecuaciones del movimiento como sigue. Una curva $c(t)$ representa el movimiento para el sistema no holónimo si satisface las ligaduras, digamos $\phi^a(\dot{c}(t)) = 0$, para todo a , y además satisface las “ecuaciones del movimiento proyectadas”

$$\mathcal{P}(\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t)) = -\mathcal{P}(\text{grad } V(c(t))) \quad (6.40)$$

Pero estas condiciones son equivalentes a

$$\dot{c}(t) \in \mathcal{D}_{c(t)}, \quad \bar{\nabla}_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = -\mathcal{P}(\text{grad } V(c(t))),$$

donde $\bar{\nabla}$ es la conexión lineal modificada, definida por

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (\nabla_X \mathcal{Q})(Y)$$

para todos campos de vectores X e Y en Q .

Como las ligaduras son lineales, de (6.25) se deduce

$$-\mu_i^a(q_0) g^{ij}(q_0) \frac{\partial S^h}{\partial q_0^j}(q_0, q_1) + \mu_i^a(q_0) g^{ij}(q_0) \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_0^j} = 0, \quad 1 \leq a \leq m, \quad (6.41)$$

o, en términos de proyectores,

$$\mathcal{Q}_{|q_0} \left(D_1 S^h(q_0, q_1) \right) = \mathcal{Q}_{|q_0} \left(D_1 \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \right) \quad (6.42)$$

Aún más, la dinámica preserva las ligaduras Ψ^a , lo que implica que

$$\Psi^a(q_1, \frac{\partial S^h}{\partial q_1}(q_0, q_1) - \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_1}) = 0,$$

o, en otras palabras,

$$\mathcal{Q}_{|q_1} \left(D_2 S^h(q_0, q_1) \right) = \mathcal{Q}_{|q_1} \left(D_2 \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \right) \quad (6.43)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (6.42) y (6.43) muestran que la conservación de las ligaduras de forma exacta es equivalente a dar una relación entre la función generatriz y las fuerzas de ligadura.

Así, las ecuaciones (6.26)

$$D_2 S^h(q_{k-1}, q_k) + D_1 S^h(q_k, q_{k+1}) = \int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_1} + \int_h^{2h} \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_0},$$

se pueden reescribir usando la expresión (6.43) como sigue

$$\mathcal{P}_{|q_k} \left(D_2 S^h(q_{k-1}, q_k) \right) + D_1 S^h(q_k, q_{k+1}) = \mathcal{P}_{|q_k} \left(\int_0^h \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_1} \right) + \int_h^{2h} \tilde{\Lambda}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial q}{\partial q_0}, \quad (6.44)$$

Ahora bien, considerando una función generatriz aproximada \tilde{S}^h y una fuerza de ligadura aproximada $\alpha^h = \alpha_0^h(q_0, q_1) dq_0 + \alpha_1^h(q_0, q_1) dq_1$, como en la nota 6.5.2, de la discusión previa, sustituimos la fuerza de ligadura aproximada por:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^h &= \alpha_0^h(q_0, q_1) dq_0 \\ &\quad + \mathcal{P}_{|q_1}(\alpha_1^h(q_0, q_1) dq_1) + \mathcal{Q}_{|q_1} \left(D_2 \tilde{S}^h(q_0, q_1) \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto para \tilde{S}^h y $\tilde{\alpha}^h$ las ecuaciones (6.32) se reescriben como

$$\mathcal{P}_{|q_k} \left(D_2 \tilde{S}^h(q_{k-1}, q_k) \right) + D_1 \tilde{S}^h(q_k, q_{k+1}) = \mathcal{P}_{|q_k} \left(\alpha_1^h(q_{k-1}, q_k) \right) + \alpha_0^h(q_k, q_{k+1}), \quad (6.45)$$

para $1 \leq k \leq N - 1$. La importancia de las ecuaciones (6.45) es que generan un algoritmo que preserva automáticamente las funciones de ligadura exactas Φ^a . De hecho, si aplicamos el proyector \mathcal{Q} a las ecuaciones (6.45) obtenemos:

$$\mathcal{Q}|_{q_k} \left(D_1 \tilde{S}^h(q_k, q_{k+1}) \right) = \mathcal{Q}|_{q_k} \left(\alpha_0^h(q_k, q_{k+1}) \right) \quad (6.46)$$

o

$$\tilde{\varphi}^a(q_k, q_{k+1}, h) = \Psi^a(q_k, -\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial q_0}(q_k, q_{k+1}) + \alpha_0^h(q_k, q_{k+1})) = 0$$

es decir, las ligaduras se satisfacen.

Por lo tanto, el algoritmo geométrico que hemos obtenido funciona como sigue:

$$\mathcal{P}|_{q_k} \left(D_2 \tilde{S}^h(q_{k-1}, q_k) \right) + D_1 \tilde{S}^h(q_k, q_{k+1}) = \mathcal{P}|_{q_k} \left(\alpha_1^h(q_{k-1}, q_k) \right) + \alpha_0^h(q_k, q_{k+1}),$$

donde las condiciones iniciales satisfacen:

$$\tilde{\varphi}^a(q_0, q_1, h) = 0$$

Eligiendo α_0^h y α_1^h en \mathcal{D}^0 , obtenemos ecuaciones para los integradores no holónomos con un gusto más geométrico:

Integrador geométrico no holónimo

$$\mathcal{P}|_{q_k} \left(D_2 \tilde{S}^h(q_{k-1}, q_k) + D_1 \tilde{S}^h(q_k, q_{k+1}) \right) = 0 \quad (6.47)$$

que se interpreta como una discretización de las ecuaciones (6.40):

$$\bar{\nabla}_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = -\mathcal{P}(\text{grad}(V(c(t))))$$

6.6.1. Integradores no holónomos que preservan las ligaduras

Para la clase de integradores introducidos en la sección 6.5.2, encontramos la siguiente familia de integradores no holónomos que conservan las ligaduras:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}|_{q_k} \left(D_2 S_\alpha^h(q_{k-1}, q_k) \right) + D_1 S_\alpha^h(q_k, q_{k+1}) &= \alpha h \mathcal{P}|_{q_k} \left(\tilde{\Lambda} \left((1 - \alpha) q_{k-1} + \alpha q_k, \frac{q_k - q_{k-1}}{h} \right) \right) \\ &+ (1 - \alpha) h \tilde{\Lambda} \left((1 - \alpha) q_k + \alpha q_{k+1}, \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right), \quad 1 \leq k \leq N - 1, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales que satisfagan

$$-\mu_i^\alpha(q_0) g^{ij}(q_0) \frac{\partial S_\alpha^h}{\partial q_0^j}(q_0, q_1) + (1 - \alpha) h \mu_i^\alpha(q_0) g^{ij}(q_0) \tilde{\Lambda}_j \left((1 - \alpha) q_0 + \alpha q_1, \frac{q_1 - q_0}{h} \right) = 0.$$

Ejemplo 6.6.1 (De nuevo la partícula no holónoma). Construyendo el algoritmo previo para la partícula no holónoma, obtenemos el siguiente integrador no holónimo que preserva las ligaduras:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1+y_1^2} \left(\frac{x_1-x_0}{h} - h \frac{x_1+x_0}{2} \right) - \frac{x_2-x_1}{h} - h \frac{x_2+x_1}{2} + \frac{y_1}{1+y_1^2} \left(\frac{z_1-z_0}{h} \right) \\
&= -\frac{h}{2} \left[\frac{\frac{1}{1+y_1^2} \cdot \frac{(x_1+x_0)(y_1+y_0)}{2} - \frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2} \cdot \frac{y_1+y_0}{2} + \frac{\frac{(x_2+x_1)(y_2+y_1)}{2} - \frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_2+y_1}{2}\right)^2} \cdot \frac{y_2+y_1}{2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{y_1}{1+y_1^2} \frac{\frac{(x_1+x_0)(y_1+y_0)}{2} - \frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2} \right] \\
& \frac{y_1-y_0}{h} - h \frac{y_1+y_0}{2} - \frac{y_2-y_1}{h} - h \frac{y_2+y_1}{2} = 0, \\
& \frac{y_1^2}{1+y_1^2} \left(\frac{z_1-z_0}{h} \right) - \frac{z_2-z_1}{h} + \frac{y_1}{1+y_1^2} \left(\frac{x_1-x_0}{h} - h \frac{x_1+x_0}{2} \right) \\
&= \frac{h}{2} \left[\frac{y_1^2}{1+y_1^2} \frac{\frac{(x_1+x_0)(y_1+y_0)}{2} - \frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2} + \frac{\frac{(x_2+x_1)(y_2+y_1)}{2} - \frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_2+y_1}{2}\right)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{y_1}{1+y_1^2} \frac{\frac{(x_1+x_0)(y_1+y_0)}{2} - \frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2} \cdot \frac{y_1+y_0}{2} \right].
\end{aligned}$$

con una condición inicial que satisfaga

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}^a(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, h) &= -\frac{z_1-z_0}{h} - \frac{h}{2} \frac{\frac{(x_1+x_0)(y_1+y_0)}{2} - \frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2} \\
&+ y_0 \left[\frac{x_1-x_0}{h} + h \frac{x_1+x_0}{2} - \frac{h}{2} \frac{\frac{(x_1+x_0)(y_1+y_0)}{2} - \frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)}{h^2}}{1 + \left(\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2} \cdot \frac{y_1+y_0}{2} \right].
\end{aligned}$$

Para las mismas condiciones iniciales, la figura 6.6 muestra la conservación exacta de la función de ligadura con el tiempo de nuestro algoritmo.

Nota 6.6.2. En análisis numérico, un enfoque para la resolución numérica de ecuaciones en diferencias es la proyección en un conjunto de invariantes. Estas técnicas de proyección no deterioran el orden de convergencia del método, aunque pueden, en algunos casos, destruir el buen comportamiento a largo plazo de la solución. Sin embargo, se tiene un comportamiento diferente en las técnicas de proyección que hemos construido en esta sección.

Obsérvese que una característica notable de los sistemas no holónomos es la no preservación de la forma simpléctica, por lo cual, el flujo no es una transformación simpléctica; de forma geométrica

$$\mathcal{L}_{X_{H,M}} \omega_Q = d\Lambda \neq 0$$

En la sección 6.5.2 hemos diseñado integradores que verifican una versión discreta de las ecuaciones anteriores. El uso de técnicas de proyección es adecuado en este caso, puesto que *recuperamos* las propiedades geométricas del sistema no holónimo.

En el ambiente continuo es bien conocido (véase por ejemplo [108]) cómo obtener la solución a los sistemas no holónomos desde la dinámica libre usando técnicas de proyección. Las técnicas de

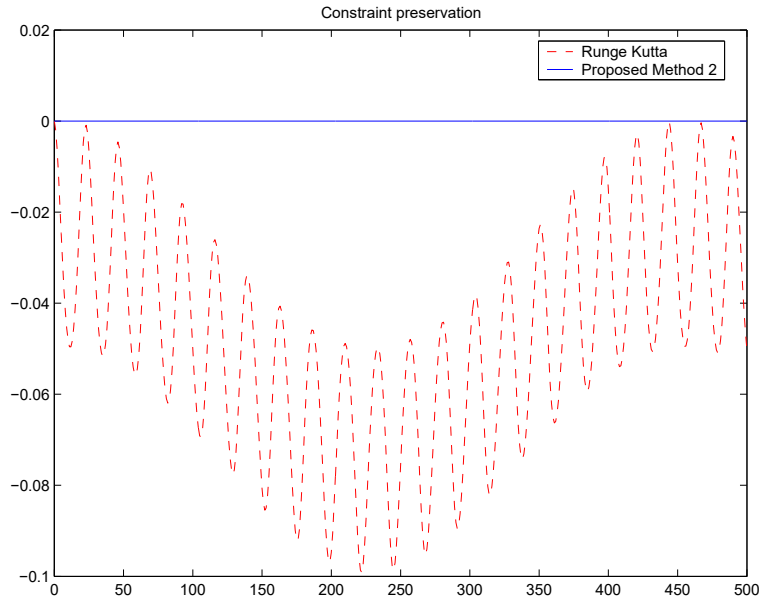


Figura 6.6: Conservación de la ligadura del método nuevo frente a Runge-Kutta

proyección se utilizan también en un ambiente riemanniano, modificando la conexión de Levi-Civita para obtener una conexión afín que proporcione la dinámica correcta (ver [27] y las referencias en dicho artículo). Ésta es la idea principal de la sección anterior, en la que mostramos que las técnicas de proyección son útiles para sistemas no holónomos. Obsérvese por ejemplo el integrador propuesto en (6.47). Tomamos un integrador variacional, y por tanto simpléctico (una propiedad negativa en un integrador no holónimo), y proyectando ortogonalmente la ecuación de Euler-Lagrange discreta, obtenemos un integrador no holónimo.

6.7. Aplicaciones a la teoría de control óptimo

El mismo tipo de argumentos se pueden aplicar a funciones generatrices de otras especies para resolver otros problemas, como el problema del control óptimo, que estudiaremos en esta sección.

En este caso, damos la solución general de un problema de optimización para sistemas discretos y analizamos su comportamiento geométrico, y en particular, su simplecticidad.

Supongamos que las ecuaciones de estado discretas están dadas por la ecuación dinámica

$$q_{k+1}^i = f^i(k, q_k, u_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad A = 1, \dots, n \quad (6.48)$$

o, en breve, $q_{k+1} = f(k, q_k, u_k)$, donde q_0 viene dado de partida.

El índice de rendimiento o función objetivo es:

$$J = \bar{S}(N, q(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} \bar{L}(k, q_k, u_k) \quad (6.49)$$

donde \bar{S} es una función del tiempo final, y del estado a tiempo final N , y \bar{L} es una función variable con el tiempo del estado y las entradas de control en cada paso intermedio k del tiempo discreto.

El problema de control óptimo se resuelve encontrando controles u_k^* , $k = 0, 1, \dots, N-1$, que llevan el sistema a lo largo de una trayectoria q_k^* , $k = 0, 1, \dots, N$, que verifique las ecuaciones de estado y minimiza el índice de rendimiento.

6.7.1. Solución al problema del control óptimo discreto

Resolvamos las ecuaciones de control óptimo para el problema de optimización discreto determinado por (6.48) y (6.49) usando el enfoque de los multiplicadores de Lagrange. Consideremos las ecuaciones de estado (6.48) y las ecuaciones de ligadura, entonces tenemos $N \cdot n$ ligaduras, y asociamos un multiplicador de Lagrange a cada ligadura. Construimos después la función de coste aumentada J' como

$$J' = \sum_{k=0}^{N-1} [p_{k+1}(f(k, q_k, u_k) - q_{k+1}) - \bar{L}(k, q_k, u_k)] - \bar{S}(N, q(N)) \quad (6.50)$$

donde $p_{k+1} = ((p_{k+1})_i)$ se consideran multiplicadores de Lagrange, con $A = 1, \dots, n$ y $k = 0, \dots, N-1$.

Tomando la función hamiltoniana

$$\bar{H}(k, q_k, p_{k+1}, u_k) = p_{k+1}f(k, q_k, u_k) - \bar{L}(k, q_k, u_k)$$

deducimos que las condiciones necesarias para un mínimo con ligaduras vienen dadas por:

$$q_{k+1} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p}(k, q_k, p_{k+1}, u_k) = f(k, q_k, u_k) \quad (6.51)$$

$$p_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial q}(k, q_k, p_{k+1}, u_k) = p_{k+1} \frac{\partial f}{\partial q}(k, q_k, u_k) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q}(k, q_k, u_k) \quad (6.52)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial u}(k, q_k, p_{k+1}, u_k) = p_{k+1} \frac{\partial f}{\partial u}(k, q_k, u_k) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial u}(k, q_k, u_k) \quad (6.53)$$

donde $0 \leq k \leq N-1$, y las condiciones de transversalidad

$$p_N = -\frac{\partial \bar{S}}{\partial q}(N, q_N) \quad \text{y} \quad q_0 \quad \text{fijos.}$$

Obsérvese que la condición de recursión para el estado q_k avanza con el tiempo, pero la variable de coestado p_k evoluciona hacia atrás en el tiempo. Por lo tanto, las condiciones de frontera que se requieren para hallar la solución son el estado inicial q_0 y el coestado final p_N .

Supongamos que

$$\det \left(\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial u^a \partial u^b} \right) \neq 0$$

entonces, localmente, $u_k^* = h(k, q_k, p_{k+1})$. Si denotamos por

$$\tilde{H}(k, q_k, p_{k+1}) = \bar{H}(k, q_k, p_{k+1}, u_k^*)$$

entonces, las ecuaciones (6.51), (6.52) se reescriben como

$$q_{k+1} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p}(k, q_k, p_{k+1}) \quad (6.54)$$

$$p_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q}(k, q_k, p_{k+1}) \quad (6.55)$$

con $0 \leq k \leq N - 1$.

Consideremos la función

$$G_k(q_k, q_{k+1}, p_{k+1}) = \tilde{H}(k, q_k, p_{k+1}) - p_{k+1}q_{k+1}, \quad 0 \leq k \leq N - 1.$$

Entonces, para un k fijo:

$$dG_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_k}(k, q_k, p_{k+1}) dq_k + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_{k+1}}(k, q_k, p_{k+1}) dp_{k+1} - p_{k+1} dq_{k+1} - q_{k+1} dp_{k+1}.$$

A lo largo de soluciones de las ecuaciones (6.51), (6.52) y (6.53), tenemos que:

$$dG_{k|\text{Sol}} = p_k dq_k - p_{k+1} dq_{k+1},$$

lo que implica que

$$dp_k \wedge dq_k = dp_{k+1} \wedge dq_{k+1}. \quad (6.56)$$

a lo largo de soluciones de (6.51)-(6.53).

En una sección posterior analizaremos el significado geométrico de (6.56), que se interpreta obviamente como la simplecticidad del problema de control óptimo discreto en términos de una forma simpléctica natural.

6.7.2. Funciones generatrices de segunda especie

La construcción de funciones generatrices más generales será útil en secciones posteriores. Por ejemplo, supongamos que (q_0, p_1) son coordenadas locales independientes de $\text{Graph}(g)$. Entonces, la función S se escribe como $S = S(q_0, p_1)$.

Tenemos que

$$p_1 dq_1 - p_0 dq_0 = -q_1 dp_1 + d(q_1 p_1) - p_0 dq_0 = dS.$$

Si definimos

$$S_2(q_0, p_1) = q_1 p_1 - S(q_0, p_1),$$

donde q_1 se expresa en términos de q_0 y p_1 , entonces deducimos que

$$q_1 dp_1 + p_0 dq_0 = dS_2(q_0, p_1)$$

Usando la misma definición que encontramos en [3] tenemos la siguiente

Definición 6.7.1. La función $S_2(q_0, p_1)$ se llamará una **función generatriz de segunda especie** para el simplectomorfismo g .

Tenemos que

$$\begin{cases} p_0 = \frac{\partial S_2}{\partial q_0} \\ q_1 = \frac{\partial S_2}{\partial p_1} \end{cases} \quad (6.57)$$

Recíprocamente, si $S_2(q_0, p_1)$ es una función generatriz tal que $\det\left(\frac{\partial^2 S_2}{\partial q_0 \partial p_1}\right) \neq 0$ entonces S_2 es una función generatriz para cierto simplectomorfismo determinado por las ecuaciones (6.57) (ver [3]).

Denotemos por $F_{(t,s)} : M_s \rightarrow M_t$ el grupo biparamétrico de transformaciones canónicas generadas por el campo de vectores hamiltoniano X_H , como en los pasos previos a la proposición 6.3.3. Supongamos también que para cada intervalo admisible $[s, t]$ la subvariedad lagrangiana $\text{Graph } F_{(t,s)}$ admite una función generatriz de segunda especie. Tenemos el siguiente

Teorema 6.7.2. Sean $S_2^{(t_{k+1}, t_k)}$, $k = 0, \dots, N-1$, funciones generatrices de segunda especie. La función definida por

$$S_2^{(t_N, t_0)}(q_0, p_N) = \sum_{k=0}^{N-1} S_2^{(t_{k+1}, t_k)}(q_k, p_{k+1}) - \sum_{k=1}^{N-1} q_k p_k \quad (6.58)$$

donde q_k, p_k , $1 \leq k \leq N-1$, son puntos estacionarios de la parte derecha de (6.58), es decir,

$$q_k = \frac{\partial S_2^{(t_k, t_{k-1})}}{\partial p}(q_{k-1}, p_k), \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad (6.59)$$

$$p_k = \frac{\partial S_2^{(t_{k+1}, t_k)}}{\partial q}(q_k, p_{k+1}), \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad (6.60)$$

es una función generatriz de segunda especie para $F_{(t_N, t_0)} : M_{t_0} \rightarrow M_{t_N}$.

Demostración. Se siguen los pasos del teorema 6.3.2. ■

En consecuencia,

$$S^{(t_N, t_0)}(q_0, p_N) = q_N p_N - S_2^{(t_N, t_0)}(q_0, p_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[q_{k+1} p_{k+1} - S_2^{(t_{k+1}, t_k)}(q_k, p_{k+1}) \right] \quad (6.61)$$

Proposición 6.7.3. Una función generatriz de segunda especie para $F_{(t_1, t_0)}$ viene dada por

$$S_2^{(t_1, t_0)}(q_0, p_1) = p_1 q_1 - \int_{t_0}^{t_1} (p(t) \dot{q}(t) - H(t, q(t), p(t))) dt$$

donde $t \rightarrow (q(t), p(t))$ es una curva integral de las ecuaciones de Hamilton tal que $q(t_0) = q_0$ y $p(t_1) = p_1$, para t_1 suficientemente próximo a t_0

Demostración. Se prueba de forma muy similar a 6.3.3. ■

Denotemos por $S_2(t, q_0, p_1) = S_2^{(t,0)}(q_0, p_1)$ entonces, es fácil de mostrar que (ver por ejemplo [70])

Teorema 6.7.4 (Ecuación de Hamilton-Jacobi para S_2). *Si $S_2(t, q_0, p_1)$ es una solución de la ecuación en derivadas parciales*

$$\frac{\partial S_2}{\partial t}(t, q_0, p_1) = H(t, \frac{\partial S_2}{\partial p_1}(t, q_0, p_1), p_1), \quad S_2(0, q_0, p_1) = q_0 p_1 \quad (6.62)$$

con $\det \left(\frac{\partial^2 S_2}{\partial q_0 \partial p_1} \right) \neq 0$, entonces la aplicación $(q_0, p_0) \rightarrow (q_1, p_1) = (q(t), p(t))$ definida por las ecuaciones (6.57) es el flujo exacto del sistema hamiltoniano determinado por H .

Demostración. Considérense las ecuaciones

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\partial S_2}{\partial q_0}(t, q_0, p_1) \\ q_1 &= \frac{\partial S_2}{\partial p_1}(t, q_0, p_1) \end{aligned}$$

Diferenciando la primera ecuación respecto de t , obtenemos que

$$0 = \frac{\partial^2 S_2}{\partial t \partial q_0} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial q_0 \partial p_1} \dot{p}(t)$$

y usando la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$0 = \frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{(t, q(t), p(t))} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial q_0 \partial p_1} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial q_0 \partial p_1} \dot{p}(t),$$

es decir, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$.

Diferenciando la segunda ecuación de (6.57) y usando la ecuación de Hamilton-Jacobi obtenemos:

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial^2 S_2}{\partial t \partial p_1} + p(t) \frac{\partial^2 S_2}{\partial p_1^2} = \frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{(t, q(t), p(t))} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial p_1^2} + \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_{(t, q(t), p(t))} + \dot{p}(t) \frac{\partial^2 S_2}{\partial p_1^2}.$$

Por lo tanto, $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$. ■

6.7.3. Funciones generatrices de segunda especie y el problema de control óptimo discreto

De la proposición 6.7.3 la siguiente función es una función generatriz de segunda especie para el sistema hamiltoniano cosimpléctico (P_0, η, Ω) , que determina la dinámica del problema de control óptimo dado por (6.7) y (6.8) (ver la sección 6.2):

$$S_2^{(t_1, t_0)}(q_0, p_1) = p_1 q_1 - \int_{t_0}^{t_1} (p(t) \dot{q}(t) - H_{|P_0}(t, q(t), p(t))) dt, \quad (6.63)$$

donde $t \rightarrow (t, q(t), p(t))$ es la curva integral en P_0 del campo de vectores X_{P_0} . X_{P_0} es la única solución de la ecuación

$$i_{X_{P_0}}\Omega = dH|_{P_0} \quad i_{X_{P_0}}\eta = 1$$

con $(q(t_0), p(t_0)) = (q_0, p_0)$ y $(q(t_1), p(t_1)) = (q_1, p_1)$.

Ahora nos centramos en la construcción de un integrador numérico para el sistema hamiltoniano (P_0, η, Ω) usando una aproximación de la función generatriz. Como veremos, el método obtenido realiza los pasos de integración por transformaciones simplécticas. Se tratará por tanto de un integrador simpléctico.

Tomemos primero un intervalo de tiempo fijo $h = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, \dots, N - 1$.

Supongamos que estamos trabajando con espacios vectoriales, y consideremos la siguiente aproximación natural:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2^h(k, q_k, p_{k+1}) &= p_{k+1}q_{k+1} - hp_{k+1} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) - h\tilde{L}(k, q_k, p_{k+1}) \\ &\quad + hp_{k+1}\tilde{\Gamma}(k, q_k, p_{k+1}) \end{aligned}$$

donde, por ejemplo, $\tilde{L}(k, q_k, p_{k+1}) = hL|_{P_0}(t_0 + kh, q_k, p_{k+1})$ y $\tilde{\Gamma}(k, q_k, p_{k+1}) = \Gamma|_{P_0}(t_0 + kh, q_k, p_{k+1})$.

Si denotamos por $\tilde{f}(k, q_k, p_{k+1})$ la función

$$\tilde{f}(k, q_k, p_{k+1}) = h\tilde{\Gamma}(k, q_k, p_{k+1}) + q_k \tag{6.64}$$

entonces,

$$\tilde{S}_2^h(k, q_k, p_{k+1}) = p_{k+1}\tilde{f}(k, q_k, p_{k+1}) - \tilde{L}(k, q_k, p_{k+1}) = \tilde{H}(k, q_k, p_{k+1}).$$

Por lo tanto, las ecuaciones

$$\begin{cases} p_k = \frac{\partial \tilde{S}_2^h}{\partial q^k}(k, q_k, p_{k+1}) = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^k}(k, q_k, p_{k+1}) \\ q_{k+1} = \frac{\partial \tilde{S}_2^h}{\partial p_{k+1}}(k, q_k, p_{k+1}) = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_{k+1}}(k, q_k, p_{k+1}) \end{cases} \tag{6.65}$$

son exactamente (6.54) y (6.55) y la condición de simplecticidad (6.56) para el problema de control óptimo discreto es ahora una consecuencia trivial de la construcción de la función generatriz.

Nota 6.7.5. También se pueden construir métodos numéricos simplécticos de orden superior; por ejemplo, considerando mejores aproximaciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi (6.62) (ver [24] y sus referencias). Supongamos por simplicidad que el hamiltoniano es autónomo, es decir, $H \equiv H(q, p)$. Expandamos primero la función generatriz $S_2(t, q_0, p_1)$ como:

$$S_2(t, q_0, p_1) = q_0p_1 + \sum_{i=1}^{\infty} t^i G_i(q_0, p_1),$$

aplicando esta expresión a la ecuación de Hamilton-Jacobi (6.62), y comparando potencias iguales de t , obtenemos

$$\begin{aligned} G_1(q_0, p_1) &= H(q_0, p_1) \\ G_2(q_0, p_1) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial q_0^i} \frac{\partial H}{\partial p_{1A}} \right) \\ G_3(q_0, p_1) &= \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_{1A} \partial p_{1B}} \frac{\partial H}{\partial q_0^i} \frac{\partial H}{\partial q_0^B} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_{1A} \partial q_0^B} \frac{\partial H}{\partial q_0^i} \frac{\partial H}{\partial p_{1B}} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_0^i \partial q_0^B} \frac{\partial H}{\partial p_{1A}} \frac{\partial H}{\partial p_{1B}} \right) \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Usando las series truncadas, obtenemos una función generatriz aproximada:

$$S_2^h(q_k, p_{k+1}) = q_k \cdot p_{k+1} + \sum_{i=1}^r h^i G_i(q_k, p_{k+1})$$

que define un método simpléctico de orden r .

Otros enfoques son también posibles sin usar derivadas de orden superior del hamiltoniano H , por ejemplo, métodos de Runge-Kutta simplécticos o métodos simplécticos particionados de Runge-Kutta (ver [70, 144]).

6.8. Sistemas hamiltonianos discretos

En [48] Erbe y Yan han considerado sistemas hamiltonianos lineales discretos de la forma:

$$\begin{aligned} \Delta y(t) &= B(t)y(t+1) + C(t)z(t) \\ \Delta z(t) &= -A(t)y(t+1) - B^T(t)z(t) \end{aligned}$$

donde A, C son simétricas e $I - B$ es inversible. Aquí $\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$, $\Delta z(t) = z(t+1) - z(t)$ e $y, z \in \mathbb{R}^d$.

Este problema es un caso particular de los sistemas hamiltonianos discretos de la forma

$$\Delta y(t) = H_z(t, y(t+1), z(t)) \quad (6.66)$$

$$\Delta z(t) = -H_y(t, y(t+1), z(t)) \quad (6.67)$$

donde $H(t, y, z) = \frac{1}{2}(y^T, z^T) \begin{pmatrix} A(t) & B^T(t) \\ B(t) & C(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$. La simplecticidad del sistema hamiltoniano lineal discreto ha sido exhaustivamente estudiada (ver por ejemplo [48] y sus referencias). La existencia de la correspondiente estructura simpléctica para sistemas hamiltonianos discretos no lineales dados por (6.66) y (6.67) fue propuesta por Ahlbrandt como problema abierto ([2] y [151]).

Desde el punto de vista de la sección 6.3, este problema se resuelve fácilmente considerando como función generatriz de segunda especie la siguiente:

$$S_2^{(t+1, t)}(y(t+1), z(t)) = z(t)y(t+1) - H(t, y(t+1), z(t)) .$$

Entonces, las ecuaciones (6.66) y (6.67) son precisamente

$$\begin{cases} y(t) &= \frac{\partial S^{(t+1,t)}}{\partial z}(y(t+1), z(t)) \\ z(t+1) &= \frac{\partial S^{(t+1,t)}}{\partial y}(y(t+1), z(t)), \end{cases}$$

lo cual garantiza la simplecticidad del sistema Hamiltoniano discreto. Para encontrar una transformación canónica asociada a esta función generatriz, sólo es necesario imponer la condición local (ver [3]):

$$\det \left(\frac{\partial^2 S_2^{(t+1,t)}}{\partial y \partial z}(y(t+1), z(t)) \right) \neq 0$$

Entonces, en un entorno de un punto que satisfaga la condición anterior, existe un simplectomorfismo definido por las ecuaciones (6.66) y (6.67).

Conclusiones. Trabajo futuro

Las ideas expuestas en esta tesis forman parte del ambicioso programa destinado a consagrar a la geometría multisimpléctica como el marco natural de estudio de las ecuaciones de las teorías clásicas de campos, de la misma forma que la geometría simpléctica lo es para la mecánica. Se han introducido y descrito los conceptos de coordenadas de Darboux para geometría multisimpléctica, así como de simetrías, cantidades conservadas y triples de Tulczyjew. Finalmente, se ha desarrollado un estudio preliminar de la geometría de los espacios de datos de Cauchy.

También se han descrito maneras de explotar las propiedades geométricas de estas ecuaciones para producir mejores métodos numéricos, y en particular, el concepto de función generatriz. Para ilustrar esto, se han propuesto dos casos (mecánica no holónoma y teoría de control óptimo), y se han analizado los métodos propuestos, y comparado con otros métodos clásicos.

Concluyo este trabajo mencionando otros problemas abiertos y áreas de estudio que se dejan para trabajo futuro en este campo. Algunos de estos problemas están siendo estudiados en la actualidad por nuestro grupo o por otros investigadores.

En un primer grupo me gustaría mencionar la extensión de varios conceptos y objetos geométricos bien conocidos de la geometría simpléctica a geometría multisimpléctica siempre que sea posible, como el teorema de Hamilton-Jacobi, las funciones generatrices, el formalismo de Skinner y Rusk, la teoría de control óptimo y la reducción y reconstrucción de la dinámica, y sus relaciones con sus contrapartidas infinito-dimensionales precosimplécticas en los espacios de datos de Cauchy.

En segundo lugar, el análisis detallado de variedades de jets y teorías de campos de orden superior, con el estudio de sus simetrías y cantidades conservadas, y la extensión de las superficies de Cauchy.

También sería interesante el estudio detallado de casos de las diversas teorías de campos, ampliando a sus particularidades, tales como las ecuaciones de fluidos y medios continuos, o la teoría de la relatividad general.

Finalmente, y en relación a los métodos numéricos, el desarrollo de una nueva serie de métodos numéricos para las teorías clásicas de campos basados en el concepto de funciones generatrices, inspirados en los que hemos presentado en el último capítulo, y comparados con los métodos clásicos. Este tema se visita brevemente de forma esquemática en la siguiente sección. También sería interesante un estudio detallado de las propiedades numéricas de los métodos expuestos.

7.1. Métodos numéricos en teorías clásicas de campos

El objeto de estudio consiste en aplicar los métodos basados en funciones generatrices descritos en el capítulo anterior a la noción de función generatriz para la forma presimpléctica $\widetilde{\Omega}_h$ en \tilde{Z}^* . Un primer paso es verificar que las ideas propuestas en la sección 6.3 se verifican para el caso infinito dimensional. Esto nos permitirá el diseño de integradores numéricos geométricos.

Supongamos que $C = [t_0, t_1] \times M$ es un compacto de X . Con la teoría de superficies de Cauchy desarrollada en el capítulo 5, se tiene la siguiente identificación $\tilde{X} \equiv I$. Por lo tanto, podemos definir, para una sección de π dada ϕ , las aplicaciones $\phi_0 := \phi \circ t_0$ y $\phi_1 := \phi \circ t_1$ de $\tilde{Y} \equiv I \times Q$, que proyectan en puntos q_0 y q_1 en Q , respectivamente.

La curva $\hat{c}(t) = \phi \circ t$ en \tilde{Y} proyecta en una curva $c(t)$ en Q que une q_0 con q_1 . En particular, tenemos que $\phi(t, u) = c(t)(u)$.

Pero también sabemos que el flujo de la prolongación 1-jet de un campo de vectores en Y es la prolongación 1-jet de su flujo, por lo que $c(t)$ se eleva a una curva $\tilde{c}(t)$ en TQ , teniendo un lagrangiano regular \tilde{L} , y usando el teorema de equivalencia de las ecuaciones de De Donder en los enfoques finito e infinito dimensional, tenemos que ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange si y sólo si la curva en TQ

$$\tilde{c}(t)(u) = j^1\phi(t, u)$$

es el flujo de una solución de la ecuación de evolución en $I \times TQ$ asociada a \tilde{L} .

Por lo tanto, la acción se puede reescribir como sigue, usando el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} S(\phi) &= \int_{[t_0, t_1] \times M} j^1\phi^* \mathcal{L} = \int_{[t_0, t_1] \times M} \tilde{c}(t)^* \mathcal{L} = \int_{[t_0, t_1] \times M} \tilde{c}(t)^*(L)\eta \\ &= \int_{[t_0, t_1] \times M} L(\tilde{c}(t)(u))\eta_M \wedge dt = \int_{[t_0, t_1]} \left[\int_M L(\tilde{c}(t)(u))\eta_M \right] dt \\ &= \int_{[t_0, t_1]} \tilde{L}(\tilde{c}(t))dt = S_1^{t_1-t_0}(q_0, q_1) \end{aligned}$$

7.1.1. Métodos numéricos geométricos basados en funciones generatrices

Para implementar métodos numéricos simplécticos para teorías de campos, tenemos que comenzar con una apropiada discretización (en cierto sentido) de la integral de acción.

Definimos entonces una aproximación adecuada de la integral de acción

$$S_1^{(t_1, t_0)}(q_0, q_1) = S(\phi) = \int_{[t_0, t_1] \times M} j^1\phi^* \mathcal{L}$$

por ejemplo (recordemos que $\text{vol}(M) = 1$, y denotemos $k = t_1 - t_0$),

$$S_d^{(t_1, t_0)}(q_0, q_1) = k\tilde{L}(t_0, q_0, \frac{q_1 - q_0}{k})$$

(donde suponemos que Q es un espacio vectorial). La condición de extremalidad en q_i del teorema 6.3.2, en la cual

$$0 = D_2 S_d^{(t_1, t_0)}(q_{k-1}, q_k) + D_1 S_d^{(t_1, t_0)}(q_k, q_{k+1}), \quad 1 \leq k \leq N - 1.$$

se puede entonces releer en términos de la extremalidad de sus puntos imagen (q_1^i, \dots, q_K^i) de la integral de acción. Las ecuaciones resultantes expuestas arriba las llamaremos las **ecuaciones de Euler-Lagrange discretas** para teorías de campos. En un futuro trabajo estudiaremos la construcción de métodos numéricos para teorías clásicas de campos a partir de estas ecuaciones, que relacionaremos con los resultados obtenidos en [128].

Bibliografía

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden: *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (USA), 1978.
- [2] C. D. Ahlbrandt: Equivalence of Discrete Euler Equations and Discrete Hamiltonian Systems *J. Math. Anal. Appl.* **180** (1993), 498–478
- [3] V. I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics* Graduate Text in Mathematics 60, Springer-Verlag New York, 1978.
- [4] J. C. Baez, J. W. Gilliam: An algebraic approach to discrete mechanics *Lett. Math. Phys.* **31** (1994), 205–212
- [5] L. Bates, J. Śniatycki: Nonholonomic reduction *Rep. Math. Phys.* **32** (1) (1992), 99–115
- [6] C. Batle, J. Gomis, J.M. Pons: Hamiltonian and Lagrangian constraints of the bosonic string *Physical Review D* **34** (8) (1986), 2430–2432.
- [7] D.E. Betounes: Extension of the Classical Cartan form *Phys. Rev. D*, **29** (4) (1984), 599–606.
- [8] E. Binz, M. de León, D. Martín de Diego, D. Socolescu: *Rep. Math. Phys.* **49** (2002) 151–166
- [9] E. Binz, J. Śniatycki, H. Fischer: Nonholonomic constraints in classical field theories *Geometry of classical fields*. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [10] A. M. Bloch, P. S. Krishnaprasad, J. E. Marsden, R. M. Murray: Nonholonomic mechanical systems with symmetry *Arch. Rational Mech. Anal.* **136** (1996), 21–99
- [11] A. I. Bobenko, Y. B. Suris: Discrete Lagrangian reduction, discrete Euler-Poincaré equations, and semidirect products *Lett. Math. Phys.* **49** (1999), 79–93
- [12] A. I. Bobenko, Y. B. Suris: Discrete time Lagrangian mechanics on Lie groups, with an application to the Lagrange top *Comm. Math. Phys.* **204** (1999), 147–188

- [13] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, P.A. Griffiths : *Exterior differential systems*. Mathematical Sciences Research Institute Publications, 18. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [14] C. J. Budd, M. D. Piggott: Geometric integration and its applications *Handb. Numer. Anal.* **XI** (2003), 35–139
- [15] J. A. Cadzow: Discrete calculus of variations *Intern. J. Control.* **11** (1970), 393–407
- [16] F. Cantrijn, A. Ibort, M. de León: On the geometry of multisymplectic manifolds *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **66** (1999), 303–330
- [17] F. Cantrijn, A. Ibort, M. de León: Hamiltonian structures on multisymplectic manifolds *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **54** (3) (1996), 225–236
- [18] F. Cantrijn, M. de León, E. A. Lacomba: Gradient vector fields on cosymplectic manifolds *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** (1992), 175–188
- [19] F. Cantrijn, M. de León, J. C. Marrero, D. Martín de Diego: Reduction of constrained systems with symmetries *J. Math. Phys.* **40**, N. 2 (1999), 795–820
- [20] F. Cantrijn, M. de León, J. C. Marrero, D. Martín de Diego: Reduction of nonholonomic mechanical systems with symmetries *Rep. Math. Phys.* **42**, N. 1/2 (1998), 25–45
- [21] J. F. Cariñena, M. Crampin, L.A. Ibort: On the multisymplectic formalism for first order field theories *J. Geom. Phys.* **3** (1986), 353–400.
- [22] M. Castrillón López, P. L. García Pérez, T. Ratiu: Euler-Poincaré reduction on principal bundles. *Lett. Math. Phys.* **58** (2001), no. 2, 167–180.
- [23] M. Castrillón López, T. Ratiu, S. Shkoller: Reduction in principal fiber bundles: covariant Euler-Poincaré equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* **247** (7) (2000), 2155–2164.
- [24] P. J. Channell, C. Scovel: Symplectic integration of Hamiltonian Systems *Nonlinearity* **3** (1990), 231–259
- [25] D. Chinea, M. de León, J.C. Marrero: The constraint algorithm for time-dependent Lagrangians *J. Math. Phys.* **35** (7) (1994), 3410–3447.
- [26] J. Cortés: *Geometric, control and numerical aspects of nonholonomic systems* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1793, Springer-Verlag, 2002.
- [27] J. Cortés: Energy conserving nonholonomic integrators, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, added volume (2003), 189–199
- [28] J. Cortés, S. Martínez: Nonholonomic integrators *Nonlinearity* **14** (2001), 1365–1392
- [29] M. Crampin: The second variation formula in Lagrange and Finsler geometry *Houston J. Math.* **26** (2) (2000), 255–275

- [30] M. Crampin, F. Cantrijn, W. Sarlet: Lifting geometric objects to a cotangent bundle, and the geometry of the cotangent bundle of a tangent bundle *J. Geom. Phys.* **4** (1987), **4**, 469–492
- [31] M. Crampin, D. Saunders: The Hilbert-Carathéodory form for parametric multiple integral problems in the calculus of variations *Acta Appl. Math.* **76** (1) (2003), 37–55.
- [32] R. Cushman, D. Kemppainen, J. Śniatycki, L. Bates: Geometry of nonholonomic constraints *Rep. Math. Phys.* **36** (2/3) (1995), 275–286
- [33] M. Delgado Téllez de Cepeda: *Métodos geométricos en problemas de control óptimo singulares: fundamentos y aplicaciones*. Tesis Doctoral, Universidad Carlos III (Madrid), 2004
- [34] P. A. M. Dirac *Lecture on Quantum Mechanics* Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.
- [35] M. Doupovec, A. Vondra: Some natural operations between connections on fibered manifolds *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **39** (1996) 73–84
- [36] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy: A geometrical analysis of the field equations in field theory *Int. J. Maths. and Math. Sciences*, **29** (12) (2002) 687–700
- [37] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy: Geometry of Lagrangian First-order Classical Field Theories *Fortschr. Phys.* **44** (1996) 3, 235–280.
- [38] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy: Geometry of multisymplectic Hamiltonian first-order field theories *J. Math. Phys.* **41** (11) (2000), 7402–7444.
- [39] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy: Multivector field formulation of Hamiltonian field theories: equations and symmetries *J. Phys. A* **32** (48) (1999), 8461–8484.
- [40] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy: Multivector fields and connections. Applications to field theories *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.* **96** (1) (2002), 83–93.
- [41] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy: Multivector fields and connections: setting Lagrangian equations in field theories *J. Math. Phys.* **39** (9) (1998), 4578–4603.
- [42] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy: On the multimomentum bundles and the Legendre maps in field theories *Rep. Math. Phys.* **45** (1) (2000), 85–105.
- [43] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy: Reduction of presymplectic manifolds with symmetry *Rev. Math. Phys.* **11** (10) (1999), 1209–1247.
- [44] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy, A. Ibort: Invariant forms and automorphisms of multisymplectic manifolds *arXiv:math.DG/9805040 v2*.
- [45] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy, J. Marín-Solano: Sections along maps in field theories: the covariant field operators *arXiv:math-ph/0103019 v2*

- [46] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy, C. López, J. Marín-Solano: Lagrangian-Hamiltonian unified formalism for field theory *J. Math. Phys.* **45** (1) (2004), 360–380.
- [47] R. J. Eden: The Hamiltonian dynamics of non-holonomic systems *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 205, (1951) 564–583
- [48] L. H. Erbe, P. Yan: Disconjugancy for linear Hamiltonian difference systems *J. Math. Anal. Appl.* **167** (1992), 355–367
- [49] A. Fernández, P. L. García-Pérez, C. Rodrigo: Lagrangian reduction and constrained variational calculus on: Proceedings of the IX Fall Workshop on Geometry and Physics, Vilanova i la Geltrú, 2000 *Publicaciones de la RSME* **3** (2002) 53–64
- [50] M. Forger, C. Paufler, H. Römer: A general construction of Poisson brackets on exact multisymplectic manifolds *Rep. Math. Phys.* **51** (2-3) (2003), 187–195.
- [51] M. Forger, C. Paufler, H. Römer: The Poisson bracket for Poisson forms in multisymplectic field theory *Rev. Math. Phys.* **15** (2003), no. 7, 705–743
- [52] P. L. García-Pérez: The Poincaré-Cartan invariant in the calculus of variations *Symp. Math.* **XIV** (1974), 219–246.
- [53] P.L. García-Pérez, A. Pérez-Rendón: Symplectic approach to the theory of quantized fields, I *Comm. Math. Phys.* **13** (1969), 24–44.
- [54] P.L. García-Pérez, A. Pérez-Rendón: Symplectic approach to the theory of quantized fields, II *Archive Rat. Mech. Anal.* **43** (1971), 101–124.
- [55] G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily: Covariant Hamilton equations for field theory *J. Phys. A* **32** (38) (1999), 6629–6642.
- [56] G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily: *New Lagrangian and Hamiltonian methods in field theory*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1997.
- [57] J. W. Gilliam: *Lagrangian and symplectic techniques in discrete mechanics* PhD thesis, University of California Riverside, Department of Mathematics, 1996.
- [58] H. Goldschmidt, S. Sternberg: The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **23** (1975), 203–267.
- [59] O. González: Mechanical systems subject to holonomic constraints: Differential-algebraic formulations and conservative integration *Physica D* **132** (1999), 165–174
- [60] M. J. Gotay: A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations I: Covariant Hamiltonian formalism: Mechanics, analysis and geometry. In: 200 years after Lagrange, *North-Holland Delta Ser.*, North-Holland, Amsterdam (1991), 160–188.
- [61] M. J. Gotay: A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations II: Space+Time decomposition *Differential Geom. Appl.* **1** (1997), 375–390.

- [62] M. J. Gotay: An exterior differential systems approach to the Cartan form. Symplectic geometry and mathematical physics (Aix-en-Provence, 1990), 160–188, *Progr. Math.*, **99**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, USA, 1991.
- [63] M. J. Gotay: *Presymplectic Manifolds, Geometric Constraint Theory and the Dirac-Bergmann Theory of Constraints*, Dissertation, Center for Theoretical Physics, University of Maryland, 1979.
- [64] M.J. Gotay, J. Isenberg, J.E. Marsden: *Momentun maps and classical relativistic fields, Part I: Covariant field theory*. MSRI preprint (1997).
- [65] M.J. Gotay, J. Isenberg, J.E. Marsden: *Momentun maps and classical relativistic fields, Part II: Canonical analysis of field theories*. MSRI preprint (1999).
- [66] M.J. Gotay, J. Nester, Presymplectic Lagrangian systems I: the constraint algorithm and the equivalence theorem *Ann. Inst. Henri Poincaré* **A 30** (1978), 129–142.
- [67] M.J. Gotay, J. Nester, Presymplectic Lagrangian systems II: the second order differential equation problem *Ann. Inst. Henri Poincaré* **A 32** (1980), 1–13.
- [68] M.J. Gotay, J. Nester, G. Hinds: Presymplectic manifolds and the Dirac-Bergmann theory of constraints. *J. Math. Phys.* **19** (1978), no. 11, 2388–2399.
- [69] X. Gràcia, J.M. Pons: Symmetries and infinitesimal symmetries of singular differential equations *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002), 5059–5077.
- [70] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner: *Geometric Numerical Integration, Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations* Springer Series in Computational Mathematics **31**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [71] A. Haková, O. Krupková: Variational first-order partial differential equations *J. Differential Equations* **191** (2003) 67–89.
- [72] F. Hélein: Hamiltonian formalisms for multidimensional calculus of variations and perturbation theory. *arXiv:math-ph/0212036 v1*.
- [73] S. Hrabak: On a Multisymplectic Formulation of the Classical BRST symmetry for First Order Field Theories Part I: Algebraic Structures *math-ph/9901012*.
- [74] S. Hrabak: On a Multisymplectic Formulation of the Classical BRST Symmetry for First Order Field Theories Part II: Geometric Structures *math-ph/9901013*.
- [75] G. Jaroszkiewicz, K. Norton: Principles of discrete time mechanics I: Particle systems *J. Phys. A* **30** (1997), 3115-3144
- [76] G. Jaroszkiewicz, K. Norton: Principles of discrete time mechanics II: Classical field theory *J. Phys. A* **30** (1997), 3145-3163
- [77] B. W. Jordan, E. Polak: Theory of a class of discrete optimal control systems *J. Electron. Control* **17** (1964), 697-711

- [78] C. Kane, J. E. Marsden, M. Ortiz: Symplectic-energy-momentum integrators *J. Math. Phys.* **40**, (1999) 3353-3371
- [79] C. Kane, J. E. Marsden, M. Ortiz, M. West: Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems *Internat. J. Numer. Math. Eng.* **49** (2000), 1295-1325
- [80] J. Koiller: Reduction of some classical non-holonomic systems with symmetry *Arch. Rational Mech. Anal.* **118** (1992), 113-148
- [81] W. S. Koon, J. E. Marsden: The Hamiltonian and Lagrangian Approaches to the Dynamics of Nonholonomic Systems *Rep. on Math. Phys.* **40** (1) (1997), 21-62
- [82] I.V. Kanatchikov: Canonical structure of classical field theory in the polymomentum phase space *Rep. Math. Phys.* **41** (1) (1998), 49–90.
- [83] J. Kijowski: A finite-dimensional canonical formalism in the classical field theory. *Comm. Math. Phys.* **30** (1973), 99-128.
- [84] J. Kijowski, W. Szczyrba: Multisymplectic manifolds and the geometric construction of the Poisson bracket in field theory. In: *Géométrie Symplectique et Physique Mathématique*, CNRS, Paris, 1975, pp. 347-378.
- [85] J. Kijowski, W. Tulczyjew: *A symplectic framework for field theories*, Lecture Notes in Physics, **107**, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [86] D. Krupka: *Some geometric aspects of variational problems in fibered manifolds*. Folia Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis **14** (1973), 1–65.
- [87] D. Krupka: The contact ideal *Differential Geom. Appl.* **5** 3 (1995), 257–276.
- [88] O. Krupková, Hamiltonian field theory *J. Geom. Phys.* **43** (2002), 93-132.
- [89] O. Krupková, *The Geometry of Ordinary Variational Equations*, Lecture Notes in Mathematics 1678, Springer, Berlin, 1997.
- [90] O. Krupková, D. Smetanová: On regularization of variational problems in first-order field theory *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **66** (2001) 133–140
- [91] O. Krupková, D. Smetanová: Legendre transformation for Regularizable Lagrangians in Field Theory *Lett. Math. Phys.* **58** (2001) 189–204
- [92] J.K. Lawson: A frame bundle generalization of multisymplectic geometries *Rep. Math. Phys.* **45** (2000), no. 2, 183–205.
- [93] T. D. Lee: Can time be a discrete dynamical variable? *Phys. Lett.*, **122B** (1983), 217-220
- [94] T. D. Lee: Difference equations and conservation laws *J. Statis. Phys.*, **46** (1987), 843-860
- [95] M. Leok: *Foundations of Computational Geometric Mechanics*. Tesis Doctoral, CALTECH (Pasadena, California, USA), 2004

- [96] M. de León: Media with microstructure: constitutive theory and dynamics. In: *Proceedings of the IX Fall Workshop on Geometry and Physics*, Real Sociedad Matemática Española, Madrid, (2001) 107–118.
- [97] M. de León, J. Cortés, D. Martín de Diego, S. Martínez: An introduction to mechanics with symmetry *Recent advances in Lie theory* (Vigo, 2000), 305–332, In *Res. Exp. Math.*, 25, Heldermann, Lemgo, 2002.
- [98] M. de León, M. McLean, L.K. Norris, A.M. Rey, M. Salgado: Geometric Structures in Field Theory. *arXiv:math-ph/0208036*.
- [99] M. de León, J. Marín-Solano, J.C. Marrero: A geometrical approach to Classical Field Theories: a constraint algorithm for singular theories. In: *New Developments in Differential Geometry (Debrecen, 1994)*, *Math. Appl.*, **350**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996, pp. 291–312.
- [100] M. de León, J. Marín-Solano, J.C. Marrero: Ehresmann connections in Classical Field Theories. In: *Proceedings of the III Fall Workshop: Differential Geometry and its Applications*, Granada, September 19-20, (1994), *Anales de Física, Monografías*, **2**, (1995). pp. 73–89.
- [101] M. de León, J. Marín-Solano, J.C. Marrero: The constraint algorithm in the jet formalism *Differential Geom. Appl.* **6** (1996) 275–300.
- [102] M. de León, J. Marín-Solano, J.C. Marrero, M. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy: Singular Lagrangian systems on jet bundles *Fortschritte für Physik* **50** (2) (2002), 105–169.
- [103] M. de León, J.C. Marrero: Constrained time-dependent Lagrangian systems and Lagrangian submanifolds *J. Math. Phys.* **34** (2) (1993), 622–644.
- [104] M. de León M, J. C. Marrero, D. Martín de Diego: A new geometric setting for classical field theories, on *Classical and quantum integrability (Warsaw, 2001)* 189–209, Banach Center Publ., **59**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2003.
- [105] M. de León M, J. C. Marrero, D. Martín de Diego: Mechanical systems with non-linear constraints *Int. J. Theor. Phys.* **36** (4) (1997), 973-989
- [106] M. de León, J. C. Marrero, D. Martín de Diego: Time-dependent constrained Hamiltonian systems and Dirac brackets *J. Phys. A : Math. Gen.* (1996) **29** 6843-6859
- [107] M. de León, D. Martín de Diego: Almost product structures and Poisson reduction of presymplectic systems *Extracta Mathematicae* **10** (1) (1995), 37–45.
- [108] M. de León, D. Martín de Diego: On the geometry of non-holonomic Lagrangian systems *J. Math. Phys.* **37** (7) (1996), 3389-3414
- [109] M. de León, D. Martín de Diego: Solving non-holonomic Lagrangian dynamics in terms of almost product structures *Extracta Mathematicae*, **11** (2) (1996) 325-347
- [110] M. de León, D. Martín de Diego: Symmetries and Constants of the Motion for higher-order Lagrangian Systems *J. Math. Phys.* **36** (8) (1995), 4138–4161.

- [111] M. de León, D. Martín de Diego: Symmetries and Constants of the Motion for Singular Lagrangian Systems *Int. J. Theor. Phys.* **35** (5) (1996), 975–1011.
- [112] M. de León, D. Martín de Diego: Variational integrators and time-dependent Lagrangian systems *Rep. on Math. Phys* **49** 2/3 (2002), 183-192
- [113] M. de León, D. Martín de Diego, A. Santamaría-Merino: Discrete optimal control theory and symplectic integrators *To Appear in Adv. Comput. Math.*
- [114] M. de León, D. Martín de Diego, A. Santamaría-Merino: Geometric numerical integration of nonholonomic systems and optimal control problems *2nd IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control, Seville* (2003), 163-168
- [115] M. de León, D. Martín de Diego, A. Santamaría-Merino: Symmetries in Classical Field Theory *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **1** 5 (2004) 651–710
- [116] M. de León, D. Martín de Diego, Aitor Santamaría-Merino: Tulczyjew' s triples and Lagrangian submanifolds in classical field theory. In: *Applied Differential Geometry and Mechanics*, W. Sarlet and F. Cantrijn (eds). Universiteit Gent, 2003. pp. 21-47.
- [117] M. de León, P. R. Rodrigues: *Generalized Classical Mechanics and Field Theory*. North-Holland Math. Studies, 112, Amsterdam, 1985.
- [118] M. de León, P. R. Rodrigues: *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics* North-Holland Math. Ser. 152 Amsterdam: North-Holland, 1989.
- [119] S. Maeda: Canonical structure and symmetries for discrete systems *Math. Japonica* **25** (1980), 405-420
- [120] S. Maeda: Extension of discrete Noether theorem *Math. Japonica* **26** (1981), 85-90
- [121] Ch. M. Marle: Reduction of constrained mechanical systems and stability of relative equilibria *Commun. Math. Phys.* **174** (1995), 295-318
- [122] G. Marmo, E. J. Saletan, A. Simoni, B. Vitale: *Dynamical systems: A differential geometric approach to Symmetry and Reduction* John Wiley & Sons, Great Britain, 1985.
- [123] G. Marmo, W. M. Tulczyjew, P. Urbański: Dynamics of autonomous systems with external forces *Acta Phys. Polon. B* **33** (2002), no. 5, 1181–1240.
- [124] J. E. Marsden *Park City Lectures on Mechanics, Dynamics and Symmetry, in Symplectic Geometry and Topology* Y. Eliashberg and L. Traynor, eds, American Mathematical Society, Providence, RI, Vol. 7 of IAS/Park City Math. Ser. (1999), 335-430
- [125] J. E. Marsden, S. Pekarsky, S. Shkoller: Discrete Euler-Poincaré and Lie-Poisson equations *Nonlinearity* **12** (1999), 1647-1662.
- [126] J.E. Marsden, S. Pekarsky, S. Shkoller: Multisymplectic Geometry, Variational Integrators and Nonlinear PDEs *Comm. Math. Phys.* **199** (1998), 351–391

- [127] J. E. Marsden, S. Pekarsky, S. Shkoller: Symmetry reduction of discrete Lagrangian mechanics on Lie groups *J. Geom. Phys.* **36** (1999), 140-151
- [128] J. E. Marsden, S. Pekarsky, S. Shkoller, M. West: Variational methods, multisymplectic geometry and continuum mechanics *J. Geom. Phys.* **38** (2001), 253-284
- [129] J. E. Marsden, T. S. Ratiu: *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Texts in Applied Mathematics **17** Springer-Verlag, 1994; Second Edition, 1999.
- [130] J. E. Marsden, M. West: Discrete mechanics and variational integrators *Acta Numerica* (2001), 357-514
- [131] G. Martin: A Darboux theorem for multi-symplectic manifolds *Letters in Math. Phys.* **16** (1988), 133-138.
- [132] G. Martin: Dynamical structures for k -vector fields *Int. J. Theor. Phys.* **27**, 5 (1988), 571-585.
- [133] D. Martín de Diego: *Simetrías y Constantes del movimiento de sistemas lagrangianos. Sistemas lagrangianos con ligaduras no holonómicas*. Tesis Doctoral, Universidad Complutense (Madrid), 1995.
- [134] J. Moser, A. P. Veselov: Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials *Comm. Math. Phys.* **139** (1991), 217-243
- [135] J. Neimark, N. Fufaev: *Dynamics of Nonholonomic Systems* Translations of Mathematical Monographs Vol. 33 Providence: Am. Math. Soc., 1972.
- [136] Jet Nestruev: *Smooth manifolds and observables*. (Joint work of A.M. Astashov, A.B. Bocharov, S.V. Duzhin, A.B. Sossinsky, A.M. Vinogradov and M.M. Vinogradov). Graduate Texts in Mathematics, 220. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [137] K. Norton, G. Jaroszkiewicz: Principles of discrete time mechanics, III: Quantum field theory *J. Phys. A* **31** (1998), 977-1000
- [138] P.J. Olver: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [139] A. Pandolfi, C. Kane, J. E. Marsden, M. Ortiz: Time-discretized variational formulation of nonsmooth frictional contact *Int. J. Num. Methods in Engineering* **53** (2002), 1801-1829
- [140] C. Paufler, H. Römer: De Donder-Weyl Equations and Multisymplectic Geometry *Reports on Mathematical Physics* **47** 1 (2001), 101-119.
- [141] C. Paufler, H. Römer; Geometry of Hamiltonian n -vectorfields in Multisymplectic Field Theory *J. Geom. Phys.* **44** 1 (2002), 52-69.
- [142] G. Prince: Toward a classification of dynamical symmetries in classical mechanics *Bull. Austral. Math. Soc.* **27** (1983), no. 1, 53-71
- [143] G. Prince: A complete classification of dynamical symmetries in classical mechanics *Bull. Austral. Math. Soc.* **32** (1985), no. 2, 299-308

- [144] J. M. Sanz-Serna, M. P. Calvo *Numerical Hamiltonian Problems* Chapman & Hall, London, 1994.
- [145] G. Sardanashvily: *Gauge theory in jet manifolds*. Hadronic Press Monographs in Applied Mathematics. Hadronic Press, Inc., Palm Harbor, FL, 1993.
- [146] G. Sardanashvily: *Generalized Hamiltonian formalism for field theory. Constraint systems*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995.
- [147] G. Sardanashvily, O. A. Zakharov: On applications of the Hamiltonian formalism in fibered manifolds to field theory *Diff. Geom. Appl.* **3** (1993), 245-263.
- [148] D. J. Saunders: An alternative approach to the Cartan form in Lagrangian field theories *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** (1987), 339-349.
- [149] D. J. Saunders: *The Geometry of Jet Bundles*. Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1989.
- [150] R. Schmid *Infinite dimensional Hamiltonian systems*. Monographs and textbooks in physical science, Bibliopolis, Nápoles (Italia), 1987.
- [151] Y. Shi: Symplectic structure of Discrete Hamiltonian Systems *J. Math. Anal. Appl.* **266** (2002), 472-478
- [152] J. Śniatycki: On the geometric structure of classical field theory in Lagrangian formulation *Proc. Camb. Phil. Soc.* **68** (1970), 475-483.
- [153] W. M. Tulczyjew: Les sous-variétés lagrangiennes et la dynamique hamiltonienne *C. R. Acad. Sc. Paris* **283**, Série A (1976), 15-18;
- [154] W. M. Tulczyjew: Les sous-variétés lagrangiennes et la dynamique lagrangienne *C. R. Acad. Sc. Paris* **283**, Série A (1976), 675-678.
- [155] A. M. Vershik, L. D. Faddeev: Differential geometry and Lagrangian mechanics with constraints *Sov. Phys. Dokl.* **17** (1) (1972), 34-36
- [156] A. P. Veselov: Integrable discrete-time systems and difference operators *Funct. Anal. Appl.* **22** (1988), 83-93
- [157] A. Vondra: *Towards a geometry of higher order partial differential equations represented by connections on fibered manifolds*. Tesis doctoral, Military Academy en Brno, 1995.
- [158] J. M. Wendlandt, J. E. Marsden Mechanical integrators derived from a discrete variational principle *Physica D* **106** (1997), 223-246
- [159] J. M. Wendlandt, J. E. Marsden *Mechanical systems with symmetry, variational principles and integration algorithms* Current and Future Directions in Applied Mathematics, M. Alber, B. Hu and J. Rosenthal. In: Birkhauser (1997), 219-261.