# Sobre *Introducción al Análisis Matemático* de Mario O. González

Luis Giraldo González Ricardo

7 de mayo de 2019

**Resumen**

En el presente artículo, tomamos como pretexto los 75 años de la publicación de *Introducción al Análisis Matemático* de Mario O. González para estudiar su trascendencia y elementos notables. Además, se comentan algunas cuestiones novedosas de la biografía del autor antes de la publicación de ese libro.

In this article, we use the 75th anniversary of the publication of *Introducción al Análisis Matemático* by Mario O. González to study its importance. Besides, we give new biographical data from his author in the previous years to the publication of the book.

## Introducción

La etapa colonial cubana fue adversa para el desarrollo de la cultura matemática. Por una parte, la mayoría de la población cubana era analfabeta o poseía escasa instrucción; y por otra, los pocos que tenían acceso a la Universidad de La Habana única de su tipo en el país, encontraban que el nivel de las asignaturas relacionadas con la matemática era muy bajo. En este sentido puede consultarse [13]. Con el nacimiento de la República, gracias al Plan Varona, se movieron nuevos aires en la educación superior cubana. A pesar de ello, la situación de la reina de las ciencias no cambió en demasía. Baste señalar que el catedrático de Análisis de la Facultad de Letras y Ciencias de la Universidad de La Habana, el Ing. José A. Villalón (1864-193?), tenía numerosas deficiencias en lo que a sus conocimientos de análisis matemático respecta. Fue el profesor de origen catalán Claudio Mimó y Caba (1844-1929), quien aglutinó a su alrededor a los primeros doctores en Ciencias Físico-Matemáticas de la nación [13].

Fue el inicio de la actividad docente de Pablo Miquel y Merino (1877-1944), en el curso 1912-13, lo que marcó un cambio cualitativo en la instrucción del análisis en la Universidad de La Habana, lo que es visible en su libro *Elementos de álgebra superior* (1914). Allí, se tratan los conceptos básicos del análisis de manera didáctica, y con el nivel de rigor típico de la segunda década del siglo XX, superior en muchos sentidos a los otros textos empleados en la enseñanza del cálculo [15]. Gracias al arduo trabajo del profesor Miquel, la cultura matemática cubana fue en ascenso con el transcurso del siglo. Bajo su auspicio, se formaron muchos de los pedagogos que dieron prestigio los cursos de matemática en los Institutos de Segunda Enseñanza. Sin duda, el más reconocido de sus pupilos fue Mario O. González (1913-1999), quien se convirtió en el matemático cubano más destacado a nivel internacional antes del triunfo revolucionario de 1959. Por mucho tiempo los textos de Mario O. González fueron utilizados en la enseñanza secundaria y preuniversitaria de Cuba por lo que su influencia en la formación matemática de los cubanos trascendió su presencia en el país y entre ellos, los más conocidos son *Complementos de aritmética y álgebra*, *Álgebra elemental moderna* (con J. D. Mancill) y *Fundamentos de la teoría de funciones de variable compleja*. Menos conocido es su primer libro *Introducción al análisis matemático*, publicado en Matanzas en 1940. A poco más de 75 años de su primera y única edición, la situación de la enseñanza de la matemática en Cuba, y en el mundo, pasa por momentos difíciles. Este pequeño texto puede servir de ejemplo a profesores de diferentes niveles de cómo el rigor y la didáctica no tienen por qué estar en desacuerdo.

En la primera parte del artículo se realiza un pequeño estudio biográfico de Mario O. González, donde se comentan algunos datos novedosos obtenidos en el Archivo Histórico Provincial de Matanzas y el Archivo Central de la Universidad de La Habana. En el resto se discuten varios aspectos relacionados con *Introducción al análisis matemático*.

# 1. Nota biográfica (1913-40)

Mario Octavio José de Jesús de la Caridad González Rodríguez, nació en la ciudad de Matanzas en la madrugada (5:30 AM) del 14 de septiembre de 1913. Hijo de Mario González Darna, natural de Cárdenas, y de Margarita Edelmira Rodríguez Llorente, natural de Matanzas. Sus abuelos maternos y su abuela paterna eran también matanceros, mientras que su abuelo paterno era originario de Gijón, Asturias. Su padre fue profesor de la cátedra B (Inglés) del Instituto de Segunda Enseñanza de Matanzas, y además fungió como Director Interino del mismo en la década del 30. Sus primeros años los vivió en la vivienda situada en la calle Contreras número 146, y posteriormente su familia se trasladó a una casa con dirección Milanés 110[1]; ambas situadas a menos de 100m del Instituto de Segunda Enseñanza de Matanzas.

En los fondos del Archivo Histórico Provincial, se conserva el expediente académico de Mario O. González, como alumno del Instituto de Segunda Enseñanza de Matanzas. En este, se declara que se matriculó para iniciar sus estudios de bachillerato en el año lectivo 1926-27; y los culminó con la obtención del título de bachiller en 1930. El profesor Manuel Labra (1900-82), uno de los más destacados pedagogos cubanos de la primera mitad del siglo XX, fue su profesor de Aritmética, en la que consiguió, mediante examen de oposición uno de los premios. Mario O. González tuvo un desempeño sobresaliente en las asignaturas

[1]Hoy en día la casa de Milanés 110 todavía conserva la fachada original.

de matemática y física (Álgebra, Aritmética, Geometría y Trigonometría, Física I y Física II), en las que obtuvo la máxima calificación, y además, sus respectivos premios.

La culminación de la enseñanza media y el comienzo de su etapa universitaria, coincidieron con una de las etapas más convulsas de la historia nacional. Entre 1930 y 1933 se produjo un amplio movimiento popular en contra de la dictadura de Gerardo Machado, en la que los estudiantes especialmente los universitarios, fueron parte activa. Incluso después de la fuga del dictador, en agosto de 1933, la agitación política continuó reinando en el país hasta comienzos del año 1937, cuando se estabilizó durante el gobierno de Federico Laredo Bru.

La situación político-social de la nación influyó notablemente en la formación universitaria de Mario O. González. Su solicitud de ingreso a la Universidad de La Habana se efectuó el 16 de septiembre de 1930, con la finalidad de obtener la titulación de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas e Ingeniero Electricista. Para el año académico 1930-31 matriculó las asignaturas propias del primer año de la especialidad en Ciencias Físico Matemáticas, así como Química (Inorgánica y Analítica) y Física del segundo año. En las materias seleccionadas estaba el Análisis Matemático I, que consistía en Álgebra Superior, pero no tocaba ningún tema de álgebra abstracta.

El inicio del curso estaba previsto para el 3 de diciembre de 1930, pero el movimiento estudiantil en contra de la dictadura de Gerardo Machado mantuvo las aulas universitarias vacías [2, p. 431]. El dictador trató de disminuir el ímpetu del estudiantado con el cierre de la Universidad de La Habana, por decreto presidencial el 15 de diciembre de 1930, que estuvo vigente hasta mayo de 1932 cuando fue declarado inconstitucional. Sin embargo, el recinto universitario se mantuvo cerrado hasta después de la caída del machadato, si bien esta decisión fue tomada por el claustro como medida ante la convulsa situación política y social que se vivía en el país [2, p. 453].

Por las razones anteriores, el primer curso de Mario O. González fue el correspondiente al año académico de 1933-34, iniciado el 14 de enero de 1934. En este, a las asignaturas matriculadas en 1930 se añadieron las del segundo año de Ciencias Físico Matemáticas. En total fueron 14 materias las cursadas salvo en Dibujo Natural y Física Superior, todas sus notas fueron de Sobresaliente; además, en Análisis Matemático I y II, Trigonometría y Geometría obtuvo el Premio de Oro. En su expediente consta que en el inicio de este curso se solicitó la matrícula para obtener los títulos de Doctor en Ciencias Físico Matemáticas, Físico Químicas, Ciencias Naturales e Ingeniero Electricista.

En el siguiente año académico, las asignaturas matriculadas corresponden en su mayoría a las propias del tercer año de estudio de las Ciencias Físico-Matemáticas. Además, se encuentran materias más avanzadas como Complementos de Análisis Matemático (con Pablo Miquel) y Complementos de Mecánica Racional, que fueron de nueva incorporación al programa de estudios; en ellas se enseñaron por vez primera de manera sistemática temas como series de Fourier, cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales [13]. Sin dudas, estos cambios favorecieron su formación científica y crearon un ambiente propicio para un salto cualitativo del desarrollo matemático en Cuba. También cursó otras como

Agrimensura, Topografía y Geología, más alejadas del perfil matemático.

El fin del machadato no significó el regreso de la estabilidad en la nación, pues cuando parecía que las medidas del Gobierno de los Cien Días lo encaminaban a cumplir, al menos, una parte de los reclamos populares, fue derrocado por el coronel Batista. La dictadura disimulada de Batista acarreó una nueva ola de protestas, en especial por parte de los estudiantes de la Universidad de La Habana. Por esa razón fue ocupada militarmente a partir de marzo de 1935, y con ello comenzó un período en el cual la vida universitaria fue sumamente irregular. Aunque el gobierno intentó iniciar el curso 1936-37 en mayo de 1936, pero esto no sucedió de manera efectiva hasta marzo de 1937 [2, pp. 491-493].

Por el motivo anterior, las notas que aparecen en el expediente de Mario O. González fueron reportadas en octubre y noviembre de 1937. Entonces, para fines de ese año, tuvo aprobadas todas las asignaturas correspondientes al plan de estudios del doctorado en Ciencias Físico-Matemáticas, y solo le faltaban los ejercicios de fin de estudios los que no se efectuaron hasta junio de 1938.

Para obtener el título de doctor, además de aprobar las asignaturas correspondientes, era necesario la discusión de un tema de investigación; un examen práctico con dos problemas de Matemática y uno de Física; y una breve presentación con un tema del currículo escogido por el estudiante. El tribunal formado para el ejercicio de Mario O. González tuvo como Presidente a Pablo Miquel, como Vocero a Enrique Badell y como Secretario a Rafael Fiterre, el que se reunió el 27 de junio de 1938, para escuchar su tesis Algunos nuevos tipos de ecuaciones diferenciales invariantes en ciertas transformaciones infinitesimales; y nuevamente el día siguiente para el examen práctico, y evaluar una breve conferencia sobre el concepto de derivada. En todos los casos, el tribunal evaluó con la máxima calificación los ejercicios, por lo que el título de Doctor en Ciencias-Físico Matemáticas a nombre de Mario O. González se expidió en octubre de 1938.

Después de graduarse, impartió clases de Aritmética en el Instituto de Segunda Enseñanza de Matanzas y en el de La Habana. En 1939 ganó una beca Guggenheim, y el 23 de agosto[2] de ese año partió hacia los Estados Unidos. Allí realizó estudios de posgrado en el MIT [13], y al prorrogarse la beca por un año, continuó su formación en la Universidad de Princeton; por lo que su regreso definitivo a Cuba no ocurrió hasta bien entrado el año 1941.

Es en agosto o septiembre de 1940 que se publica, por la Editorial Barani, su libro *Introducción al análisis matemático*. En este momento es becario Guggenheim, por lo que podemos conjeturar que la mayor parte del libro estuvo hecha antes de su viaje a Estados Unidos. Uno de los elementos a favor de esta suposición es que uno de los textos más citados en *Introducción... Theory of functions of a real variable* de E. W. Hobson, se encuentra en la Biblioteca Central de la Universidad de La Habana desde 1937. Otro de sus referentes fue *Elementos de análisis algebraico* de Rey Pastor, y en la Biblioteca Central se encontraban las ediciones de 1922 y 1939. Aunque no hay evidencias del momento de entrada a

[2]Como consta en una carta firmada por Mario O. González dirigida al director del Instituto de Segunda Enseñanza de Matanzas. Dicha carta se encuentra en expediente laboral de Mario O. González que se conserva en el Archivo Histórico Provincial de Matanzas.

los fondos de la biblioteca, es muy probable que, al menos, la edición de 1922 se encontrara a su alcance.

Sin embargo, hay una serie de elementos que apuntan que la estancia en los Estados Unidos le dio la oportunidad de redondear las notas al final de cada capítulo. Esta conjetura se sostiene porque varios textos mencionados en las notas no se encuentran ahora allí, y es muy probable que nunca hayan pertenecido a los fondos de la Biblioteca Central. Es el caso de la traducción de Oscar Zariski de *Was sind und was sollen die Zahlen?* o *Elementi di aritmetica regionata e di algebra* de Alfredo Capelli.

## 2. Razones para un libro

El propio Mario O. González establece que el motivo fundamental que lo movió a escribir *Introducción al análisis matemático* fue la existencia en nuestra enseñanza matemática de algunas discontinuidades entre los estudios secundarios y los universitarios [6].

Según él, para lograr una completa comprensión del análisis matemático, se necesita dominar previamente ciertos temas que no se abordan de forma correcta, o no se tratan en los cursos de matemática elemental. Entre estos destaca la teoría del número irracional, que es ineludible antecedente de la teoría de los límites.

En el prólogo de *Complementos de aritmética y álgebra*, Mario O. González resaltó nuevamente la necesidad del estudio de la teoría del número irracional: Puede considerarse la teoría de los límites como la línea fronteriza que separa la matemática elemental de la superior. Pero esta frontera es para algunos, muralla insalvable que les veda el dominio del Cálculo infinitesimal y otras teorías del Análisis. Esta dificultad proviene a nuestro entender, en el aspecto conceptual, del desconocimiento o confusión en que se ha mantenido a los alumnos sobre el importantísimo concepto de número irracional [7].

Nuevamente, se expone la necesidad de sortear con habilidad pedagógica las dificultades que presenta la enseñanza de los números irracionales y no evadir el tema. La exposición de estas ideas en *Complementos...* es más reducida que la hecha en *Introducción...*. Desde el punto de vista práctico hay también deficiencias, las que serán nuevamente expuestas en [6]: en nuestra enseñanza se elude sistemáticamente el cálculo aproximado y los métodos de computación gráfica y mecánica, y se cultiva el hábito de la precisión indeterminada en vez de estudiar los métodos para averiguar en cada caso la aproximación necesaria y los procedimientos que permitan alcanzarla.

En las palabras del autor es sencillo notar que, sobre todas las cosas, prima un incentivo didáctico más que teórico. En el mismo sentido se destaca una separación notable entre los estudios elementales y los superiores, lo que da muestra de los problemas de la enseñanza cubana de la época. Las opiniones de Mario O. González sobre las deficiencias de la matemática que se enseñaba en el bachillerato no provienen solo de su experiencia como alumno, sino también como profesor. En 1933 se le abrió un expediente laboral en el Instituto de

Matanzas, como profesor titular de la cátedra de Agricultura. Sin embargo, en el año académico 1937-38 recibió la autorización para impartir Aritmética, quizás gracias a que en ese entonces el director del Instituto era el profesor Manuel Labra. En ese propio curso sirvió como docente de la misma materia en el Instituto No.1 de La Habana.

En los programas de matemática vigentes alrededor de 1940 para los bachilleratos, había amplia preponderancia de los temas de geometría plana y trigonometría. Los aspectos aritméticos se reducían a las propiedades básicas de proporcionalidad, divisibilidad de números enteros, y algunos temas de matemática financiera. Así lo demuestra el contenido de los libros de texto utilizados en el primer período republicano [3], [4], [5], [10].

Sin embargo, no debe dejar de buscarse motivaciones dentro de la propia Universidad. A partir del curso de 1912-13 en que Pablo Miquel se convirtió en profesor de Análisis Matemático en la Universidad de La Habana, el nivel de los cursos creció tanto en rigor como en claridad. Lo anterior se puede evidenciar a través del texto básico empleado en dichos cursos: *Elementos de álgebra Superior*, del profesor Miquel.

La obra de Miquel constituye un hito de la cultura matemática cubana, pues en él se exponían los elementos del cálculo diferencial e integral con mucho más rigor que en cualquier otro documento elaborado o utilizado en la Isla. Además, para su momento fue un libro al mismo nivel de actualización de sus similares europeos [15]. Sin embargo, el texto de Miquel tenía una deficiencia: la definición de número real. Esta cuestión le dificultó el tratamiento riguroso, por ejemplo, del teorema de Bolzano sobre los valores intermedios [15].

En *Introducción...* no se menciona de manera explícita el texto de Pablo Miquel, ni la forma en que se trataba el tema de los números reales en la Universidad de La Habana. Sin embargo, creemos que el hecho de no existir un tratamiento riguroso de este tema en el texto básico para el curso de cálculo diferencial e integral, constituyó una motivación fundamental para que Mario O. González publicara su pequeño libro. En buena lid se podía utilizar algún título extranjero, especialmente cuando *Grundlagen der Analysis*[3](1929) de Edmund Landau, sigue un guión similar al de *Introducción...*, y constituye un modelo de rigor a seguir para, a partir de los axiomas de los números naturales, construir cada uno de los diferentes dominios numéricos. Sin embargo, a causa de su rigor extremo no fue bien acogido, ni por los estudiantes, ni por el resto de la comunidad matemática. Por años este libro ha servido de ejemplo de cómo el rigor absoluto puede dañar la matemática.

El objetivo de Landau fue desarrollar de forma **completamente rigurosa** cada sistema numérico a partir de los axiomas de los números naturales. Siguiendo una idea similar al método genético, construye $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Si bien en el original en alemán Landau tutea al lector para intentar una comunicación más cercana, no lo logra. El modo en que está escrito es, dada la sencillez del contenido, de un estilo despiadadamente similar a un telegrama, con el que estima que, luego de las cinco primeras páginas de contenido realmente abstracto

[3]Fundamentos de análisis

la lectura es sencilla. Tal vez, la mejor opinión sobre los *Grundlagen...* se debe a J. Stillwell: En mi opinión, el problema del libro de Landau no es el rigor (aunque es excesivo) sino la ausencia de notas históricas, ejemplos y comentarios. Además, está el hecho de que luego de construir los números reales, él hace **absolutamente nada**[4] con ellos. [14].

En contraposición, en el prólogo de [6] aparece: Muy lejos de nuestro ánimo está pretender alcanzar el rigor absoluto, que no consentiría un libro didáctico como este. Este comentario muestra que Mario O. González está dispuesto a sacrificar un poco de rigor con tal de hacer su obra asequible a un público más amplio. Es decir, de qué vale un texto sumamente riguroso que no sea leído? Por ello se justifica plenamente la necesidad de preparar un texto para explicar la teoría del número irracional a los estudiantes cubanos, interesados en ampliar sus conocimientos matemáticos.

Por otro lado, en [14] se afirma que luego del texto de Landau muy poco o casi nada se escribió sobre la teoría del número irracional. Esto muestra que *Introducción...* constituye una obra que, a pesar de tratar un tema relativamente básico del Análisis, explora una zona poco tratada en la época: un acercamiento didáctico a los números reales. Además de exponer la teoría de número real, Mario O. González espera que su breve libro sirva a los profesores de nivel secundario, dado la inclusión de numerosos comentarios históricos. De esta forma, la utilización de la historia como recurso didáctico por los profesores de matemática en Cuba puede encontrar un precedente en la obra de esta eminente figura.

## 3. Interioridades del texto

El primero de los capítulos de *Introducción al Análisis Matemático* está dedicado a los números naturales. Este comienza con un epígrafe de Félix Klein: Las propiedades básicas de los números y las operaciones que con ellos se efectúen pueden reducirse a las propiedades generales de los conjuntos y a las relaciones abstractas que entre ellos existen. Haciendo honor a estas palabras, 17 de las 33 secciones están dedicadas a estudiar propiedades básicas de la teoría de conjuntos que servirán para deducir las reglas operativas de los números naturales. En este sentido, la obra de Mario O. González está claramente influida por las ideas de Dedekind en *Was sind und was sollen die Zahlen?*.

Como libro didáctico no se consideran los axiomas de la teoría de conjuntos, por lo que se deja a un nivel intuitivo. Sin embargo, no se da pie a que el tratamiento *naïve* dé lugar a las antinomias, pues se deja claro que no se puede subordinar la definición de conjunto a la de sus elementos y viceversa. Esto muestra que Mario O. González no solo se encuentra al tanto de los problemas de los fundamentos de la teoría de conjuntos, sino que los comprende y expone con claridad.

Son varios los puntos de contacto que tiene *Introducción...* con *Was sind...*, pues allí se utiliza el concepto de conjunto simplemente infinito y se demuestra

[4]Resaltado del autor.

el principio de inducción matemática. Pero también existen diferencias notables, pues Mario O. González define conjunto finito y utiliza el principio de buen ordenamiento como base de su teoría. Esto le permite simplificar todo el aparataje teórico que Dedekind introdujo en su monografía de 1888.

Para Mario O. González el número natural es primero cardinal, a diferencia de Dedekind para quien es antes ordinal. Sin embargo, prevalece la abstracción para definir el concepto de número natural: Número natural es, pues, el concepto abstracto nacido espontáneamente en nuestra conciencia para representar los conjuntos que son coordinables[5] y diferenciarlos de los no coordinables. [6, p. 14]

Las operaciones aritméticas entre números naturales se definen a partir de operaciones entre conjuntos. La suma se define a partir de la unión, y la multiplicación a partir del producto cartesiano. Aquí vale señalar que se utiliza el término *composición de conjuntos* en vez de producto cartesiano. Además, este método oscurece un poco la definición de las operaciones aritméticas respecto a Dedekind, y se debe a que Mario O. González prescinde de la operación *sucesor* utilizada en *Was sind...* para definir la suma, multiplicación y elevación a potencias naturales.

Como colofón del primer capítulo, aparece una sección de **Notas**, en las que se exponen varios comentarios históricos. Aquí se hace un breve recorrido por el concepto de número natural, en la que se destaca el papel de Dedekind y su *Was sind...*, la que considera como la más aceptada. También expone los axiomas de Peano para $\mathbb{N}$ y los de Hilbert para $\mathbb{R}$. Estas **Notas** muestran la amplia cultura matemática, el especial interés por la historia de esta ciencia y los problemas de sus fundamentos.

En el segundo capítulo se tratan los números racionales positivos, los que de acuerdo a su origen histórico y teniendo presente atendibles razones de orden didáctico se establece el concepto de número racional apoyándonos en la teoría de la medida. Ello tiene otra ventaja y es que permite fijar con precisión los conceptos de magnitud y cantidad, los cuales entre nosotros suelen tratarse de manera bastante errónea y confundirse muchas veces.[6, p. 41].

Se puede comprobar aquí como Mario O. González no separa la idea abstracta de número de su origen práctico. Es decir, no se desliga la matemática de sus raíces en la actividad humana, pues el origen histórico de los números racionales positivos está en la acción de medir. Por ello se han utilizado para representar las cantidades de las más diversas magnitudes, y entre estas últimas, la más sencilla es *longitud*; la que también se ha utilizado como representación natural de los números racionales. Estas ideas le permiten introducir de forma natural el cálculo con números decimales aproximados. Además, no se sigue el método genético estrictamente, pues los números racionales se definen a partir de $\mathbb{N}$, no se construyen.

Es en este capítulo donde resalta sobremanera el hecho de que Mario O. González no desliga el concepto de número de su utilidad práctica, y sobre todo de la profunda simbiosis existente entre el mundo matemático y el mundo real.

[5] Léase equipotentes.

Por ejemplo, veamos su comentario respecto a la posibilidad de definir de otra manera las operaciones aritméticas entre los números racionales:

> desde el punto de vista puramente lógico podrían ser adoptadas otras definiciones que, presentando esa simetría formal, dejaran a salvo el principio de permanencia de Hankel. Mas, sin duda, el olvido que tales definiciones supondrían del significado concreto de los números, haría perder a la teoría que se desarrollase sobre ellas todo interés científico; con raras excepciones, las doctrinas que se han edificado desdeñando el contacto con la realidad objetiva, han tardado poco en quedar anquilosadas.
>
> Las definiciones usuales no responden, pues, a una necesidad lógica fatalmente inevitable; sí a una obligatoriedad práctica imperativa. [6, p. 59].

No se le debe dar a estas palabras un sentido puramente literal, pues pudiera cometerse el error de malinterpretarlas. Es claro que en este caso no se refiere al desarrollo de nuevas teorías a partir de la generalización de ideas y conceptos ya conocidos. También es claro que, si se sacan de contexto estas palabras, la posición de Mario O. González estaría en franca contradicción con la introducción de los números complejos o los cuaterniones.

El tercer capítulo está dedicado a la introducción de los números negativos, la que se realiza tanto a partir de consideraciones aritméticas como prácticas. Desde el punto de vista aritmético los números negativos son necesarios para dar sentido a la resta entre dos número racionales arbitrarios. En sentido práctico, los números negativos aparecen al considerarse magnitudes que pueden medirse en dos sentidos, como es el caso de la relación entre deudor y acreedor.

Pero sin duda, el capítulo más interesante es el cuarto, porque es el dedicado al estudio de los números reales que, en esencia, es un *leit motiv* de *Introducción. . . .* El capítulo se inicia con un epígrafe de J. Tannery: Yo he adoptado la idea fundamental de Dedekind, que me parece ilumina profundamente la naturaleza del número irracional.. Con ella se anuncia el camino que se seguirá para la construcción de los números reales: las cortaduras de Dedekind.

La primera sección es un pequeño comentario histórico en el que se demuestra la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado de lado 1, como descubrimiento de los números irracionales. Seguidamente se muestra que para resolver el problema de logaritmación y elevación a potencia racional, se necesitan los números irracionales. De esta forma Mario O. González muestra que la introducción de los irracionales parte de una necesidad práctica.

De acuerdo al epígrafe que da inicio al capítulo, se escoge el método de las cortaduras de Dedekind. Esta elección se debe a que de las varias vías para construir $\mathbb{R}$, las cortaduras es la más sencilla. Sin embargo, el punto débil del método de Dedekind es lo enrevesado que resulta definir las operaciones aritméticas fundamentales. Luego, por razones didácticas, Mario O. González escoge otro camino para definir las operaciones aritméticas en el conjunto de los números reales: Al exponer las operaciones aritméticas nos apartamos del método de Dedekind porque estimamos más claro y también más práctico enseñar a ejecutarlas utilizando las expresiones decimales de los números reales [6, p. 81]. De esta manera se comprueba que el objetivo de Mario O. González no es preparar un texto con la construcción de los números reales, sino hacerlo de forma didáctica y sencilla.

Es necesario resaltar la profunda comprensión de las ideas de Dedekind que logra Mario O. González. Muestra de ello es un breve comentario que aparece en el acápite dedicado al concepto de número real:

> Algunos autores consideran la cortadura en sí como el número irracional, de suerte que para ellos hablar de número irracional o de una cortadura sin elemento de separación en el campo de los números racionales, es exactamente la misma cosa. Un número irracional no sería, pues, sino un símbolo con el cual se representarían las dos clases de una cortadura del tipo mencionado.
>
> Aunque esta manera de ver la cuestión sea perfectamente legítima, nos parece, sin embargo, más de acuerdo con el pensamiento original de Dedekind [...] considerar la cortadura $(A, B)$ como representación de un ente abstracto (el número irracional), creado para servir de elemento de separación de las dos clases, y no inversamente. [6, p. 84]

Esto demuestra que Mario O. González no se contenta con la reproducción de las ideas de Dedekind, sino que se preocupa por comprender las ideas fundacionales desarrolladas por el matemático germano.

El basamento teórico escogido por Mario O. González para simplificar el tratamiento de las operaciones aritméticas en $\mathbb{R}$ es el concepto de *clases contiguas*[6]. El origen de este método se debe a Alfredo Capelli entre 1897 y 1903. Este método evita la utilización de todos los elementos de la cortadura, basta considerarse una sucesión en cada clase con la condición que la diferencia entre sus términos sea infinitesimal. Luego, en el lenguaje de las sucesiones es mucho más sencillo lidiar con las operaciones aritméticas.

Las operaciones aritméticas discutidas por Mario O. González son la suma, resta, multiplicación, división, radicación, potencia con exponente racional y real, y la logaritmación. Este espectro de operaciones en $\mathbb{R}$ es superior al estudiado en [8]; sin embargo, no es un aporte de su persona, porque ya está en [11][7].

La sección Algunas propiedades del conjunto de los números reales está dedicada al estudio de propiedades menos operativas de $\mathbb{R}$. En ella se enuncia y demuestra correctamente el teorema de Dedekind referente a que una cortadura en $\mathbb{R}$ determina un único número real, y viceversa. Además, se introduce la noción de conjunto numerable y se prueba la numerabilidad de los números racionales y la no numerabilidad de los reales contenidos en el $(0, 1)$.

[6] Es necesario señalar que Mario O. González demuestra rigurosamente que una cortadura define dos clases contiguas, y que dos clases contiguas define una cortadura.

[7] La edición de 1922 de este texto se encontraba en la Bilblioteca Central de la Universidad de La Habana, porque es muy probable que haya sido consultado por Mario O. González.

En las notas al capítulo, se critica el concepto de número irracional dado por Aurelio Baldor en *Aritmética teórico práctica*, que por mucho tiempo fue utilizado en las escuelas cubanas y latinoamericanas. Sin embargo, lo más destacable es el estudio histórico del concepto de número real. En este bosquejo se discuten diferentes teorías aparecidas en el siglo XIX para explicar la naturaleza del número real, como las más importantes debidas a Weierstrass, Cantor y Dedekind; y otras menos conocidas como las de C. Méray. También se tratan otras aún menos divulgadas, como son las aportadas por C. Arzelá, P. Bachmann y A. Capelli, y además se incluye un breve comentario de las ideas promovidas por Kronecker. Es curioso que en su breve historia del número real, Mario O. González no menciona a Heine, -quien dio una construcción de los números reales en 1872 de forma similar a Cantor-; ni la versión axiomática de Hilbert, aunque es necesario señalar que en el primer capítulo del libro aparecen los axiomas de la aritmética dados por este último. En estas notas al capítulo, se destacan dos elementos esenciales de la obra de Mario O. González, especialmente por ser *Introducción...* una obra de juventud: su amplia cultura matemática y su especial interés por la historia de la ciencia.

Otro de los aspectos sobresalientes de *Introducción...* es su particular énfasis en el cálculo con números aproximados. Por qué se necesita tratar este tema? Según Mario O. González porque: no obstante su gran importancia teórica y práctica, a pesar de lo extraordinariamente útil que es al matemático puro, al físico, al químico, al agrimensor, al ingeniero, y en general, a todos los que hacen aplicación de la ciencia matemática, el cálculo con números aproximados se ha visto hasta ahora excluido sistemáticamente de nuestros programas oficiales. [6, p. 133]. Es decir, la necesidad es eminentemente práctica. La otra lectura que se le debe hacer es sobre las deficiencias del sistema educacional cubano de la época. En un país donde uno de los objetivos fundamentales de enseñar matemática son sus aplicaciones y además, en un momento donde no existían aún las grandes máquinas de cómputo, sus educandos no tenían dentro de su programa la herramienta que les permitía obtener los resultados numéricos necesarios.

Los números complejos son introducidos de manera similar a la construcción de Hamilton. Las definiciones de las operaciones aritméticas básicas en este dominio son deducidas a partir del principio de permanencia de las leyes formales de Hankel. Este método posibilita la deducción de las operaciones en $\mathbb{C}$, a partir de sus similares reales. Además, de cierta forma se evita la introducción axiomática de las operaciones con números complejos, para luego verificar que son compatibles con las definidas en $\mathbb{R}$.

Lo que resulta extraño es el motivo por el cual no se da un orden para el sistema de los números complejos: porque en este campo carecen de importancia afirma Mario O. González en [6, p. 155]. Una explicación razonable para esto es evitar el análisis de la compatibilidad de las operaciones aritméticas con el orden. En el estudio de los números complejos que se realiza en [7] no hay ningún comentario sobre la no existencia de orden en $\mathbb{C}$.

En el resto del capítulo se estudian la forma binomial y la representación geométrica de los números complejos, así como la interpretación geométrica de la suma y la multiplicación. Se introduce la forma trigonométrica, la fórmula de

Moivre y la extracción de raíces. El capítulo y por ende el libro con el estudio de la elevación de un número complejo a potencias no enteras, y la definición del logaritmo complejo.

En las notas al capítulo se hace un breve recorrido por la historia de los números complejos, en él se resalta cómo demoró su aceptación por la comunidad matemática. Además, se realiza una pequeña introducción a los cuaterniones.

## 4. A modo de conclusión

La trascendencia de *Introducción al Análisis Matemático* debe buscarse en varios sentidos, y no porque sea el primer texto de Mario O. González. Este libro es, casi seguramente, el primero impreso fuera de La Habana en lidiar con temas de matemática. Además, aborda un asunto que, aunque elemental, no es nada sencillo, y lo hace con mucho didactismo. La introducción rigurosa de los números reales nunca ha sido un aspecto trivial del análisis, dada su profunda relación con los fundamentos de la matemática.

Quizás, fue también el primer texto cubano de matemática en trascender más allá de las fronteras nacionales. Así lo demuestra el siguiente comentario de Rey Pastor sobre *Introducción...*: ensayo de crítica, en algunos puntos atinada, de las diversas teorías del número [11, p. 6]. Esta opinión evolucionó, y en su monumental obra *Análisis Matemático* Tomo I comenta que es un ensayo de crítica de las diversas teorías del número. Con exposición preferente de la teoría cardinal, conteniendo en cada paso adecuada reseña histórica y además un capítulo sobre números aproximados de gran valor didáctico.

No se realizaron otras ediciones porque casi todos los contenidos tratados pasaron a formar parte de [7]. Por ejemplo, el contenido del capítulo I de *Introducción...* pasaron al capítulo I de *Complementos...*; mientras que el estudio de los números reales, el cálculo con números aproximados y los números complejos, se encuentran en los capítulos III y VI de *Complementos...*, respectivamente.

Por otro lado, el texto de Mario O. González se inscribe en lo que puede ser llamada la tradición cubana de textos de análisis matemático, inaugurada con *Elementos de álgebra superior* de Pablo Miquel, quien la continuó con sus *Curso de cálculo diferencial* (1941) y *Curso de cálculo integral* (1942). Además de iniciar otro aspecto importante de la matemática cubana: el interés por la historia de la matemática en sí, y su utilidad en la enseñanza.

## Fuentes documentales

- Archivo Central de la Universidad de La Habana: Expediente académico de Mario O. González Rodríguez.
- Archivo Histórico Provincial de Matanzas: Expediente académico de Mario O. González Rodríguez, Instituto de Segunda Enseñanza de Matanzas.

## Referencias


[1] L. F. Batard Martínez and P. J. Villegas Aguilar. *Las ciencias exactas y naturales en Cuba*. Editorial Científico-Técnica, La Habana, 2010.

[2] R. de Armas et al. *Historia de la Universidad de La Habana. 1930-1978.* Editorial de Ciencias Sociales, La Habana, 1984.

[3] I. Fiterre Riveras. *Matemática. Segundo curso. Geometría*. Editorial Selecta, La Habana, 4 edition, 1949.

[4] I. Fiterre Riveras. *Matemática. Tercer curso. Geometría y nociones de trigonometría*. Editorial Selecta, La Habana, 5 edition, 1952.

[5] I. Fiterre Riveras. *Matemática. Cuarto curso. Geometría*. Editorial Selecta, La Habana, 5 edition, 1955.

[6] M. O. González. *Introducción al análisis matemático*. Editorial Barani, Matanzas, 1940.

[7] M. O. González. *Complementos de análisis y álgebra*. Editorial Selecta, La Habana, 8 edition, 1952.

[8] E. Landau. *Foundations of analysis*. Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[9] A. Miyares and J. M. Escalona. *Matemática segundo curso. Geometría*. Empresa Consolidada de Artes Gráficas, La Habana, 3 edition, 1962.

[10] A. Paz Sordía. *Matemática cuarto curso. Geometría*. Casa Lorié, La Habana, 1951.

[11] J. Rey Pastor. *Elementos de análisis algebraico*. Soc. de Resp. Ltda., Buenos Aires, 3 edition, 1948.

[12] J. Rey Pastor et al. *Anĺisis matemático*, volume 1. Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 8 edition, 1969.

[13] C. Sánchez Fernández and C. Valdés Castro. Emergencia de una cultura matemática en Cuba. *Ciencias Matemáticas*, 27(2):3–16, 2013.

[14] J. Stillwell. *The real numbers*. Springer Verlag, Heidelberg, 2013.

[15] C. Valdés Castro and C. Sánchez Fernández. El texto *Elementos de Álgebra Superior* de Pablo Miquel: un salto cualitativo en la instrucciń matemática en Cuba. *Ciencias Matemáticas*, 20(1):54–66, 2002.