LUCA PACIOLI: EN EL ORIGEN DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

F. JAVIER MARTÍN PLIEGO
Universidad Rey Juan Carlos

JESÚS SANTOS DEL CERRO
Universidad de Castilla-La Mancha

En términos generales los autores que se han dedicado al estudio del nacimiento del Cálculo de Probabilidades aceptan la importancia que representó la formulación del problema de la *«división de las apuestas»* en el origen de dicho cálculo. Como es sabido, este problema consiste en establecer una regla que permita dividir lo apostado en un juego cuando éste se interrumpe antes de que finalice. En la literatura especializada sobre los precedentes del Cálculo de Probabilidades se admite la idea de que Luca Pacioli fue el primero que formuló explícita y claramente de forma escrita el problema de la división de las apuestas. No obstante, esto no significa que sea un problema original de este autor, antes bien la hipótesis más plausible es que este problema de la división de las apuestas y otros similares sobre juegos de azar están ya presentes en el saber popular de estas sociedades cuya transmisión es de carácter oral, muchas de cuyas descripciones han llegado hasta nuestros días y otras se han perdido irremisiblemente al no haber sido recogidas por escrito en algún momento de la historia. Es también una idea comúnmente admitida la influencia recibida por Pacioli de manuscritos procedentes de Constantinopla. Hald le reconoce la labor de recogida y difusión de conocimientos de origen no sólo árabe y bizantino sino también del pensamiento griego. En esta cuestión resulta conveniente destacar el papel desempeñado por la Escuela de Traductores de Toledo en la difusión del pensamiento árabe y griego, de modo que muchas obras traducidas viajaron desde Toledo a otros puntos

Revista de Historia Económica
Año XVIII, Primavera-verano 2000, N.º 2.

de Europa de manos de estudiosos de otros países que iban a Toledo atraídos por esta riqueza cultural.

Ha habido tradicionalmente en los estudios sobre el origen del Cálculo de Probabilidades una actitud por parte de la mayoría de los autores de pasar velozmente por el análisis de los precedentes de Pascal y Fermat. De este modo, por ejemplo, Todhunter en su *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (1865) dedica seis páginas a dichos precedentes. Por otra parte, muchos autores modernos han seguido la misma línea de investigaciones precedentes de tal modo que sus comentarios sobre esta cuestión constituyen la confirmación de las ideas contenidas en esas obras anteriores. Creemos que este problema puede deberse al hecho de que no se dispone de traducciones de los textos originales a las lenguas modernas. En este sentido, uno de los objetivos que persigue este trabajo es proporcionar la primera traducción, en este caso al castellano, del texto de Luca Pacioli, que como antes hemos dicho incorpora por primera vez el problema de la división de las apuestas de forma escrita. También se pretende realizar una revisión de los trabajos más importantes sobre la aportación de Pacioli al nuevo cálculo, así como llevar a cabo un análisis del escrito original que permita tener una concepción más precisa de la contribución de Pacioli.

Muchas de las ideas anteriores son defendidas por autores como F. N. David, P. Boutroux y M. Sol de Mora. Algún otro, como O. Ore, introduce alguna precisión en su formulación ya que afirma que antes que Pacioli escribiera acerca del problema de la división de las apuestas éste se encuentra ya tratado en manuscritos italianos sobre matemáticas que se remontan a 1380. Sostiene también que, aunque no aparece explícitamente planteado en el *Liber Abaci* (1202) de Leonardo Fibonacci, donde se realiza alguna alusión, su estructura constituye una reminiscencia de problemas árabes sobre repartos y herencias. No obstante, en este tipo de problemas no interviene el azar como elemento fundamental sino factores determinísticos, como el grado de consanguinidad, etc., para efectuar los repartos. Es preciso señalar también que, a pesar de que Luca Pacioli no hubiera sido original en la formulación de este problema, debe ser reconocida, y así lo mantiene F. N. David, la oportunidad de haber podido ser un estímulo a los trabajos sobre esta materia inmediatamente posteriores de Cardano, Tartaglia, Peveronne, etc.

Es, también, muy interesante señalar que en las primeras historias sobre el Cálculo de Probabilidades apenas se destacase, y en algún caso se despreciase, la contribución de Luca Pacioli al origen de este cálculo. Todhunter no hace ninguna referencia a Pacioli, mientras que Gouraud en su *Histoire du Calcul des Probabilités depuis ses Origines jusqu'à nos Jours* (1848) despacha el asunto de los precedentes de Pascal con una escueta y poco ecuánime nota a pie de página, que merece la pena traducir por su displicencia:

> «*Los antiguos* [precedentes de Pascal y Fermat] *parecen haber ignorado completamente este tipo de cálculo* [de probabilidades]. *La erudición moderna ha encontrado en ellos, esto es cierto, algunas muestras en un poema en latín vulgar titulado "De Vetula", obra de un monje del Bajo Imperio; en un comentario de Dante de finales del siglo XV, y en los escritos de algunos matemáticos italianos de la Edad Media y del Renacimiento, Pacioli, Tartaglia, Peverone; pero estos burdos ensayos, con un nivel de análisis extremadamente primitivo y permaneciendo todos igualmente estériles, no son dignos de observaciones ni de crítica ni de la historia. Pascal ignoró incluso su existencia y cuando los hubo conocido, no pudieron servirle ni de guías ni de modelos.*»

En cuanto al análisis del texto propiamente dicho, los autores que se han dedicado a su estudio suelen traducir, más o menos fielmente, el enunciado de uno de los problemas sobre división de las apuestas formulado por Pacioli, sin entrar, en general, en el análisis de la resolución que este autor realiza de los mismos. Distinguiremos dos tipos de traducciones, el primero se caracteriza por estar constituido por traducciones *parciales* más libres y menos ajustadas al texto original, y el segundo por representar traducciones *parciales* literales del original. En el primero destacamos las traducciones de M. G. Kendall, F. N. David y M. Sol de Mora. Entre ellos existen notables similitudes, incluso en sus errores. Por ejemplo, en el enunciado original del primer problema al interrumpirse el juego uno lleva ganadas cinco partidas y el otro dos y no cinco y tres. Reproduciremos la traducción de Kendall y M. Sol de Mora.

Kendall recoge el siguiente texto:

> *«A and B, playing at a fair game (not dice, but balla, presumably a ball game) agree to continue until one has won six rounds; but the match has to stop when A has won five and B has won three. How should the stakes be divided?»*

Y De Mora lo traduce como:

> *«A y B están jugando un juego honesto de balla. Se han puesto de acuerdo en continuar hasta que uno de ellos haya ganado seis juegos. El juego se detiene no obstante cuando A ha ganado cinco juegos y B, tres. ¿Cómo deben dividirse las apuestas?»*

En el segundo grupo destacamos las traducciones de P. Boutroux, I. Hacking, O. Ore y L. E. Maistrov. Para no alargar excesivamente la extensión de este trabajo, seleccionaremos la parte traducida al francés por P. Boutroux.

> *«Une brigade joue à la paume; il faut 60 pour gagner, et chaque coup vaut 10, l'enjeu est de dix ducats. Un incident survient, qui force les soldats à interrompre la partie commencée, alors que le premier camp a gagné 50 et le second 20. On demande quelle parte de l'enjeu revient à chaque camp?»*

Debemos, sin embargo, destacar que Maistrov traduce los enunciados de los dos problemas centrales del texto de Pacioli, aunque en el primero de ellos no establece correctamente la apuesta total ni los puntos que lleva ganados el segundo jugador. Según este autor la apuesta total es igual a 22 ducados en lugar de 10 que es lo correcto, y al segundo jugador le otorga 30 puntos siendo 20 los puntos que aparecen en el original. Además, Maistrov dedica algunas líneas al análisis de la solución del primer problema, lo que hace distinguirle de la mayor parte de los autores que han tratado la contribución de Luca Pacioli al Cálculo de Probabilidades.

Antes de iniciar el análisis del texto propiamente dicho, debemos señalar que la traducción completa, que por primera vez se ofrece, se halla en la parte final de este estudio, al que acompaña la edición facsimilada original. Como sucede habitualmente en los escritos de esta época no existe una ordenación sistemática de las cuestiones que tratan. Es por este motivo por lo que los problemas que plantea Pacioli sobre la división de las apuestas se hallan en una sección dedicada a resolver una serie de problemas relacionados con lo castrense. Aunque menciona varios ejemplos de juegos y concursos en los que existe una necesidad de repartir lo apostado como el juego de los chinos, competiciones de tiro con arco, competiciones de carreras a pie o a caballo, centra su análisis en dos problemas concretos. Al primero le llamaremos el problema del juego de pelota y al segundo el problema del juego de ballesta. El principio que aplica para resolver uno y otro es el de reparto en función de las partidas que lleva cada jugador ganadas. Como es conocido este criterio conduce a soluciones erróneas, que analizaremos a continuación. La diferencia que existe en el planteamiento de ambos problemas es que el primero lo resuelve en un solo paso, mientras que en el segundo emplea dos pasos, siendo ambos procedimientos equivalentes.

En el problema del juego de pelota éste se interrumpe cuando un jugador ha conseguido 50 puntos y el otro 20 puntos, no alcanzando ninguno los 60 puntos necesarios para que uno de ellos venza. Cada partida vale

10 puntos. El reparto lo hace directamente en la proporción $\frac{5}{11}$ a $\frac{2}{11}$ (11 es el número máximo de partidas que puede alcanzar el juego cuando se inicia), lo que equivale a una razón de 5 a 2. Si el total apostado son 10 ducados, al primero, según esa proporción, le corresponden $7\frac{1}{7}$ y al segundo $2\frac{6}{7}$. La proporción correcta es 7 a 1. El error que comete es considerar el número de partidas que llevan ganadas en lugar de tener en cuenta el número de partidas que les faltan para ganar. Así el número de partidas máximas que faltan para que el juego termine es tres, cuyas posibles ordenaciones son $VR_2^3 = 2^3 = 8$, cuya descripción de las partidas ganadas por ambos jugadores es (A: jugador que tiene ganados 50 puntos, B: jugador que tiene ganados 20 puntos):

(A A A) (A B B)
(A A B) (B A B)
(A B A) (B B A)
(B A A) (B B B)

siendo favorables al jugador A siete ordenaciones y una al jugador B. Luego la proporción correcta es 7 a 1.

Cabe puntualizar que una de las críticas que se han realizado contra este criterio es que si uno de los jugadores no tiene ninguna partida ganada no le correspondería nada, si bien Pacioli evita este problema estableciendo la siguiente regla: si restásemos 20 puntos a ambos jugadores, al primero le quedarían 30 y al segundo nada, pues bien, según Pacioli en la *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita:*

> *«el de 30 deberá obtener la mitad de la apuesta que es 5, porque es a la mitad del juego, y los otros 5 se dividirán entre ellos de modo que el que lleva 50 tendría* $7\frac{1}{2}$ *y el otro* $2\frac{1}{2}$*».*

Los primeros 5 ducados que le corresponden a A se debe a que 30 es la mitad de 60 (puntos necesarios para ganar), siendo 5 la mitad de 10 (ducados totales de la apuesta). El resto de lo apostado (5 ducados) se repartirían a partes iguales, de modo que A percibiría $5 + 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$, y B, $0 + 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$.

Además merece la pena destacar que en esta parte de su análisis establece un método para resolver el problema, que al final rechaza por dar lugar a soluciones erróneas según el propio Pacioli. Éste consiste en ir restando puntos a ambos jugadores. No creemos que constituya un precedente del método recursivo de Pascal, pero sí pudo haber supuesto un estímulo a su creación por el genio del matemático francés. La frase de Pacioli es:

> *«Tampoco puedes decir, como algunos, que se apoyan en el juego de los chinos que, en el caso de dos, que juegan a 5 dedos, el uno tenga 4 y el otro 3 y digan que volvamos atrás uno, de modo que un jugador tendrá 2 y el otro 3, que no es lo debido porque el que obtiene* $\frac{1}{3}$ *de la apuesta en un caso y en otro* $\frac{4}{9}$ *no percibe de la misma manera, y así dicen algunos que si quitas 20 de cada parte el uno no tendrá nada y el otro 30.»*

Respecto del segundo problema su formulación es:

> *«Tres juegan a la ballesta, gana quien primero hace 6 dianas y hacen una apuesta de 10. Cuando el primero tiene 4 dianas, el segundo 3 y el tercero 2, ya no quieren jugar y todos de acuerdo quieren dividir la apuesta. Me pregunto ¿cuánto le toca a cada uno?»*

En primer lugar establece el número máximo de posibles partidas que puede alcanzar el juego cuando se inicia, que es 16:

> *«Antes tienes que ver cuántas dianas pueden hacer los tres en conjunto. Encontrarás que no pueden hacer más que 16 porque puede ser que los tres tengan 5 dianas y sólo uno luego se hará para tener 6, entonces hacen 16 como máximo.»*

En el primer paso o etapa el reparto se hace según las siguientes proporciones: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{16}$ y $\frac{1}{8}$, respectivamente. Si al primer jugador le entregamos $\frac{1}{4}$ de 10 ducados ($2\frac{1}{2}$ ducados), al segundo $\frac{3}{16}$ del total ($1\frac{7}{8}$ ducados) y al tercero $\frac{1}{8}$ de la apuesta total ($1\frac{1}{4}$ ducados), resultaría que de los 10 ducados sólo se repartirían $5\frac{5}{8}$, con lo que se hace preciso distribuir los $4\frac{3}{8}$ restantes. En este segundo paso procede directamente como en el problema del juego de pelota, es decir repartir los $4\frac{3}{8}$ ducados en tres partes según la proporción 4:3:2. De esta manera el resultado es:

> *«el primero en total tuvo* $2\frac{1}{2}$ *más* $1\frac{17}{18}$, *que son* $4\frac{4}{9}$; *al segundo* $1\frac{7}{8}$ *y* $1\frac{11}{24}$, *que son* $3\frac{1}{3}$; *al tercero* $1\frac{1}{4}$ *más* $\frac{35}{36}$, *que son* $2\frac{2}{9}$, *que está bien».*

Los intentos de solución posteriores son debidos a un conjunto de autores que proponen soluciones, algunas de las cuales están muy próximas a la correcta. Como se sabe esta última fue establecida definitivamente por Pascal y Fermat. Después de Pacioli, Tartaglia criticó el análisis de su predecesor y mantuvo una posición escéptica en cuanto a la solución del problema al considerar que se trataba de una cuestión jurídica y no matemática. No obstante, utilizando la notación de Hald, la apuesta total debería repartirse según la siguiente proporción: al jugador A le corresponde $\frac{1}{2} + \frac{S_A - S_B}{S}$ y al B, $\frac{1}{2} - \frac{S_A - S_B}{s}$, siendo S_A el número de partidas ganadas por A; S_B, las partidas ganadas por B; S, las partidas necesarias para ganar el juego, y considerando $S_A \geq S_B$.

Peverone plantea correctamente el problema de la división de las apuestas, si bien da una solución incorrecta, aunque muy aproximada:

> *«Dos juegan a diez partidas, es decir, a diez juegos. Y el primero ha ganado siete, el segundo nueve; entonces ocurre algún inconveniente de modo que no se puede terminar. Se quiere saber cuánto debe recibir cada uno del depósito, si es así.»*

La solución que da es que la apuesta ha de repartirse en una proporción de 6 a 1, siendo la correcta 7 a 1.

Cardano es el primer autor que considera que el reparto de la apuesta entre los jugadores ha de realizarse atendiendo al número de partidas que les faltan a cada uno de ellos y no a las que tienen ya ganadas. Utilizando la terminología de Hald, el reparto deberá hacerse en al proporción $[(S - S_B)(S - S_B + 1)] \div [(S - S_A)(S - S_B + 1)]$ para A y B respectivamente. A pesar de que el giro que da Cardano en el planteamiento de su solución es el adecuado al considerar el número de partidas que faltan a cada jugador, la solución definitiva, como ya hemos dicho, la establecieron a mediados del siglo XVII Pascal y Fermat en su conocida correspondencia epistolar.

Summma de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita (1494) *

A) *Una brigada practica el juego de pelota hasta alcanzar 60 puntos. Cada partida vale 10 puntos y apuestan un total de 10 ducados. Ocurre por accidente que no pueden concluir el juego, quedando una parte con 50 puntos y la otra con 20. Se pregunta: ¿qué toca a cada una de lo apostado? En este caso he encontrado distintas opiniones y tanto de un lado como de otro todas me parecen en algunos de sus argumentos falsas, pero la verdad es ésta que yo diré que es el camino correcto. Digo que antes hay que considerar cuántas partidas se pueden llegar a jugar entre la una y la otra parte, que serán 11, es decir, cuando se juega la última partida teniendo 50 puntos cada una. Ahora ves que la parte que cuenta con 50 puntos le corresponde* $\frac{5}{11}$ *y la parte que tiene 20 le toca* $\frac{2}{11}$. *Entonces se deduce que el reparto se debe realizar en la proporción* $\frac{5}{11}$ *y* $\frac{2}{11}$ *y que sumando ambas hace* $\frac{7}{11}$. *Luego éstos* $\frac{7}{11}$ *ganan 10 ducados que reparten según* $\frac{5}{11}$ *y* $\frac{2}{11}$, *de modo que a la parte que tiene 50 puntos le corresponde* $7\frac{1}{7}$ *y a la de 20 puntos* $2\frac{6}{7}$. *Otro modo similar de resolverlo será: ambas partes pueden conseguir en total 110 puntos, tienes que ver qué le corresponde a la parte que ha conseguido 50 que será como hemos visto arriba* $\frac{5}{11}$ *y a la parte de 20 le pertenece* $\frac{2}{11}$, *y sigues como arriba. El tercero es breve. Sumar todos los puntos de ambas partes que son* $50 + 20 = 70$, *se divide por 70 y se reparte proporcionalmente a las dos partes. Y así harás de una carrera a pie o a caballo viendo cuántas millas ha hecho cada uno, y de modo similar cuando se juegan a los chinos a 10 ó 5 dedos, que una parte tendrá 9 ganadas y la otra 7 ganadas, etc., o cuando se juega al arco a tantas dianas que hay que sumar antes de obtener el premio, etc., y mira arriba lo que se ha dicho del juego de pelota. Tú luego no digas*

* Agradecemos la ayuda prestada en la traducción de este texto por doña Elena Marcello, profesora asociada del Departamento de Filología Moderna de la Facultad de Letras de la Universidad de Castilla-La Mancha.

que una parte tiene los $\frac{5}{11}$ *de modo que pueda obtener de la totalidad* $\frac{5}{11}$ *de la apuesta, porque no sería justo porque el total no sería ni del uno ni del otro, a la parte de 50 le tocarían* $4\frac{6}{11}$, *y a la de 20,* $2\frac{9}{11}$, *que hacen un total de* $7\frac{4}{11}$ *y los* $2\frac{7}{11}$ *vendrían a ser de aquello que tiene la banca y así los demás ejemplos. Tampoco puedes decir, como algunos, que se apoyan en el juego de los chinos, que, en el caso de dos, que juegan a 5 dedos, el uno tenga 4 y el otro 3 y digan que volvamos atrás uno, de modo que un jugador tendrá 2 y el otro 3, que no es lo debido porque el que obtiene* $\frac{1}{3}$ *de la apuesta en un caso y en otro* $\frac{4}{9}$ *no percibe de la misma manera, y así dicen algunos que si quitas 20 de cada parte el uno no tendrá nada y el otro 30 y dicen luego que el de 30 deberá obtener la mitad de la apuesta que es 5, porque es a la mitad del juego, y los otros 5 se dividirán entre ellos de modo que el que lleva 50 tendría* $7\frac{1}{2}$ *y el otro* $2\frac{1}{2}$, *que no sería justo por la razón que he dicho anteriormente.*

B) *Tres juegan a la ballesta, gana quien primero hace 6 dianas y hacen una apuesta de 10. Cuando el primero tiene 4 dianas, el segundo 3 y el tercero 2, ya no quieren jugar y todos de acuerdo quieren dividir la apuesta. Me pregunto ¿cuánto le toca a cada uno?. Se hace así. Antes tienes que ver cuántas dianas pueden hacer los tres en conjunto. Encontrarás que no pueden hacer más que 16 porque puede ser que los tres tengan 5 dianas y sola uno luego se hará para tener 6, entonces hacen 16 como máximo. De estos 16, el primero tendrá 4, que es* $\frac{1}{4}$, *entonces debe tener* $\frac{1}{4}$ *de la apuesta, es decir de 10 le correspondería* $2\frac{1}{2}$; *el segundo tiene 3 dianas, que son* $\frac{3}{16}$ *de la proporción que tiene él, entonces los* $\frac{3}{16}$ *de la apuesta que es* $1\frac{7}{8}$; *el tercero tiene dos dianas, que son* $\frac{2}{16}$, *entonces le toca* $\frac{2}{16}$ *de la apuesta, es decir* $\frac{1}{8}$ *de la apuesta que equivale a* $1\frac{1}{4}$, *cuando las sumas todas juntas, es decir* $2\frac{1}{2}$, $1\frac{7}{8}$, $1\frac{1}{4}$ *hacen* $5\frac{5}{8}$ *y éstos restas de 10, luego de toda la apuesta queda* $4\frac{3}{8}$ *y esto ahora tienes que dividir entre el grupo y decir que uno tiene 4 dianas, el otro 3 y el último 2 dianas, es decir* $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{8}$ *y tienen que dividir* $4\frac{3}{8}$

entre los tres. Calcularás que al primero le tocará $1\frac{17}{18}$, *al segundo* $1\frac{11}{24}$ *y al tercero* $\frac{35}{36}$. *Conviene hacer la prueba de lo que le toca antes con la que le tocó después y lo sumas, luego dirás que el primero en total tuvo* $2\frac{1}{2}$ *más* $1\frac{17}{18}$, *que son* $4\frac{4}{9}$, *al segundo* $1\frac{7}{8}$ *y* $1\frac{11}{24}$, *que son* $3\frac{1}{3}$, *al tercero* $1\frac{1}{4}$ *más* $\frac{35}{36}$, *que son* $2\frac{2}{9}$, *que está bien. Pero esto mismo llegaría en un momento a través de la regla de compañía de la misma forma que hemos dicho antes del juego de pelota. Aunque aquí lo haces en dos pasos y allí lo haces en uno, por la causa que decir tres es hacer compañía, uno gana 4, el segundo 3 y el tercero 2, y tienen que dividir 10 entre los tres y después calcularías cómo he dicho, etc.*

BIBLIOGRAFÍA

BOUTROUX, P. (1908): «Les Origines du Calcul des Probabilités», *Revue du Mois,* t. V, 3.er año, enero-junio.

DAVID, F. N. (1962): *Games, Gods and Gambling. A History of Probability and Statistical Ideas,* London, Charles Griffin. Existe una reimpresión en Dover de 1998.

GOURAUD, C. (1848): *Histoire du Calcul des Probabilités depuis ses Origines jusqu'à nos Jours,* Paris, Librairie d'Auguste Durand.

HACKING, I. (1995): *El Surgimiento de la Probabilidad,* Barcelona, Gedisa.

HALD, A. (1990): *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750,* New York, Wiley.

KENDALL, M. G. (1970): «The Beginnings of a Probability Calculus», en PEARSON, E. S., y KENDALL, M. (eds.): *Studies in the History of Statistics and Probability,* vol. I, London, Griffin.

MAISTROV, L. E. (1974): *Probability Theory. A Historical Sketch,* New York, Academic Press.

MARTÍN CASALDERREY, F. (2000): *Cardano y Tartaglia: Las matemáticas en el Renacimiento italiano,* Madrid, Nivola.

MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): «Historia de la Probabilidad en España», *Revista de Historia Económica,* año XV, núm. 1.

— *Nota sobre la Historia de la Probabilidad en España,* núm. 15, Logroño, Zubia.

MORA CHARLES, M. S. de (1989): *Los Inicios de la Teoría de la Probabilidad. Siglos XVI y XVII,* San Sebastián, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

ORE, O. (1960): *Pascal and the Invention of Probability Theory,* vol. 67, núm. 1, The American Mathematical Montly.

PACIOLI, L. (1494): *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportiioni et Proportionalita,* Venecia, Paganino de Paganini.

PEVERONE, G. F.: *Due brevi e facili trattati, l'uno d'Arithmetica, l'altro di Geometria, ne i quali si contengono alcune cose nuove, pracevoli e utili si a gentilhuomini como a artegiani,* en MORA CHARLES, M. S.: *Los Inicios de la Teoría de la Probabilidad. Siglos* XVI *y* XVII.

SANTOS DEL CERRO, J. (1999): *Historia de la Probabilidad: Aportaciones Españolas a su Proceso de Conceptualización,* tesis doctoral leída en la Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales de Toledo.

TODHUNTER, I. (1965): *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace,* New York, Chelsea. Reimpresión de la 1.ª edición de Cambridge, 1865.

Ad illustrissimum Principem Gui. Ubaldum Urbini Ducē Montis feretri: ac Durantis Comitem. Grecis latinisq; litteris Ornatissimum: z Mathematice discipline cultorem ferventissimum: Fratris Luce de Burgo sancti Sepulchri: Ordinis minoꝝ: z sacre Theologie Magistri. In artez arithmetice: z Geometrie. Prefatio.

A quantita Magnanimo Duca: e si nobile z excellēte cosa che molti phylosophi per questo lhano giudicata ala substantia para: ecōessa coeterna. Peroche hano cognosciuto per verū modo alcuna cosa in rerū natura sença lei nō potere existere. Per la qual cosa de lei itēdo (cō laiuto de colui che li nostri sensi reggi) tractarne: nonche per altri prischi e antichi phylosophi nonne sia copiosamente tractato: e in theorica e pratica. Ma per che loꝛ dicti gia ali tempi nostri sonno molto obscuri: e damolti male apresi: e ale pratiche vulgari male applicati: diche i loꝛo operationi molto variano: e con grandi elaboriosi affanni mettano in opera: si de numeri cōmo de misure: vnde di lei parlando non intendo se non quāto che ala pratica e operare sia mestiero: mescolandoci secōdo iluoghi oportuni ancoꝛa la theoꝛica: ecausa de tale operare: si de numeri cōmo de geometria. Ma prima accio meglio qllo che sequita se habia apprehēdere: essa quantita diuid iremo secōdo el nostro proposito: ediuidendola aciascun suo membro assegnaremo sua propria e vera diffinitione e descriptione. E alora poi sequira quello che Arist. dici in secundo poster. Tūc enim maxime scitur aliquid cum habetur suum quid est zc.

Diffinitiones z diuisio discrete z continue quantitatis: articulus primus prime distinctionis.

Dico adōca. La quātita essere imediate bimembre: cioe continua e discreta. La continua e quella lechui parti sonno copulate e gionte a certo termine cōmune: cōme sōno legni: ferro: e saxa zc. La discreta ouerāmēte numero: e qlla lecui parti nō sōno giōte adalcuno termine cōe: cōmo e. 1. 2. 3. zc. Diche prima dela discreta: cioe del numero: e poi dela continua cioe geometria: quāto alo intento aspecta chiaramente tractaremo.

Diffinitio numeri propꝛissima: articulus secundus.

Numero: e (secondo ciascuno phylosophāte) vna multitudine de vnita cōposta: et essa vnita nō e numero: ma ben principio de ciascun numero: ede qlla mediāte laqle ogni cosa e dicta essere vna. E secōdo el seuerin Boetio ī sua musica: e la vnita ciascū nūero ī potētia: z passiz ī la sua arithmetica Regina e fondamento dogni numero lapella. Laqual piu magnificandola in le cose naturali disse in quello che fa de vnitate z vno. Omne quod est: ideo est: quia vnum numero est. E ne ancoꝛa el numero in infiniti membri diuiso: per quel che esso Aristo. dixe: cioe. Siquid infinitum est: numerus est. E per la terça petitione del sepcimo de Euclide: la sua serie in infinito potere procedere: et quocūq; numero dato: dari pōt maioꝛ: vnitatem addendo. Ma noi pigliaremo quelle parti a noi piu note e accomodate. E pero dico con glialtri alcuno essere primo: ede quello che solo dala vnita e numerato: e non ha altro numero: che integralmente aponto lo parta. Altro e ditto cōposto: ede quello che da altro numero e mesurato: ouero numerato. Exēplum primi Cōmo. 3. 7. 11. 13. e. 17. zc. Exemplū secūdi. Cōmo. 4. chel doi lo mesura e numera: e. 8. chel. 2. e. 4. E l. 12. 14. 18. e simili: tutti sōno ditti numeri composti: nō solo che constino

a

Una brigata gioca apalla a .60. el gioco e .10. p caccia. e fano posta duc. 10. acade p certi accideti che no posano fornire e luna pte a .50. e laltra .20. se dimanda che tocca p pte de la posta. In questo caso o trouato diuerse opinioni si in vn lato commo in laltro. e tutte mi paron certi frasci loro argumeti. ma la verita e qsta: chio diro e la retta via. Dico che poi seguire in tre modi prima die cosiderare quante caccie al piu fra luna e laltra parte si posino fare che seran .11. cioe quando sonno a vna .50. per vno. Ora vedi quella da .50. che parte ha no de tutte queste cacce che hanno li .$\frac{5}{11}$. e quelli da .20. hano li .$\frac{2}{11}$. donca di ch luna parte deue tirar per .$\frac{5}{11}$. e laltra parte per .$\frac{2}{11}$. summati fanno .$\frac{7}{11}$. poi di .$\frac{7}{11}$. guadagna .10. che tocca a .$\frac{5}{11}$. E che a .$\frac{2}{11}$. che a quel da .50. virra .$7\frac{1}{7}$. e a .20. $2\frac{6}{7}$. fatta. Uno altro modo sie simile: cioe in tutto posan fare .110. vedi che parte sia .50. de questo che harai vt supra .$\frac{5}{11}$. e cosi .20. sera .$\frac{2}{11}$. e segui vt supra. El terzo breuissimo sia che summi insiemi quello che hano fra tutte doi le parte cioe .50. e .20. fa .70. e questo e partitor e di .70. guadagna .10. che tocca a .50. e che a .20. zc. E cosi farai da vna corsa a pede: o a cauallo vedendo quati miglia a fatto per vno zc. e similiter quando giocano a la morra a .10. o .5. deta. che luna parte nara .9. e laltra .7. zc. o vero quando giocano a larco a tanti colpi che prima giongi habia el pregio et cetera. e guarda di sopra in quello de la palla: che tu non dicesse poi: che luna parte a li .$\frac{5}{11}$. di cioche posseno fare intutto due tirare li .$\frac{5}{11}$. d la posta ch no veria be pche auaº. d. ipoº no serebono ne d luno ne d laltro: pche a .50. toccaria .$4\frac{6}{11}$. e a .20. $2\frac{2}{11}$. ch son .$7\frac{1}{11}$. e li .$2\frac{7}{11}$. verieno a eer di qllo ch tene li pani. io zc. ne anch dire como alcuni che si fodano a la morra como se doi fano a .5. deta che lun habia .4. laltro .3. e dicano torniamo in drieto .1. si che lun hara .2. laltro .3. che no e el douere: pche colui butta el .$\frac{1}{5}$. de cioche a e colui butta el .$\frac{1}{4}$. siche no buttano a vn mo. e cosi dicono alcuni: che si buti .20. da ciascuna pte: luno hara nulla. laltro .30. e poi dicano che quel da .30. torra la .$\frac{1}{2}$. de la posta che .5. pche ala .$\frac{1}{2}$. del gioco e li altri .5. diuiderano in mezzo fra loro: si ch quel da .50. naria .$7\frac{1}{2}$. e laltro .$2\frac{1}{2}$. ch no serebbe iusto p la ragio gia ditta inaze zc. 51.

Tre fanno a balestrare: chi prima fa .6. colpi meglio quello tiri. e fanno posta fra tutti due .10. quando el primo ha .4. colpi: el .2º. 3. el .3º. 2. colpi non voglian far piu e dacordo vogliano ptire la posta. dimando quanti ne tocca per vno. Fa cosi: prime vedi quanti colpi posano fare al piu fra tutti .3. loro trouerai che no ne posson far piu che .16. perche esser po che tutti .3. ognuno habia .5. colpi e vno. Poi senefara per auerne .6. che tiri la posta: donca fanno .16. al piu di quali .16. el primo na .4. che e el .$\frac{1}{4}$ donca deue hauer il .$\frac{1}{4}$. de la posta: cioe de .10. d. che son .$2\frac{1}{2}$. el .2º. a .3. colpi. che son li .$\frac{3}{16}$. de cioche posa fare. donca li .$\frac{3}{16}$. de la posta. che son. $1\frac{7}{8}$ el terzo ha .2. che son li .$\frac{2}{16}$. doca li tocca li .$\frac{2}{16}$. cioe .$\frac{1}{8}$. de la posta. che son. $1\frac{1}{4}$. qua li summa tutti insiemi: cioe. $2\frac{1}{2}$. $1\frac{7}{8}$. $1\frac{1}{4}$. fanno. $5\frac{5}{8}$. e questo caua de .10. cioe de tutta la posta. resta .$4\frac{3}{8}$. e questo mo se deue diuidere commo compagnia. e dire luno a .4. laltro .3. laltro .2. colpi ouero .$\frac{1}{4}$. $\frac{3}{16}$. $\frac{1}{8}$. e hanno a partire .$4\frac{3}{8}$. che tocca p vno. opa harai che al pº tocara. $1\frac{17}{18}$. al. 2º $1\frac{11}{24}$ al. 3º $\frac{35}{36}$. fatta. La proua giogi insiemi quello che li tocca pma con quella che li tocco. poi couen far .10. E pero dirai chel primo intutto nebbe. $2\frac{1}{2}$. e. $1\frac{17}{18}$. che son .$4\frac{4}{9}$. al secodo. $1\frac{7}{8}$. e. $1\frac{11}{24}$. che son $3\frac{1}{3}$. el 3º. $1\frac{1}{4}$. e. $\frac{35}{36}$. che son .$2\frac{2}{9}$. che sta bene. Ma questo medesimo te dara a vn tratto per via de compagnia commo qui in quelli de la palla diciamo. sich qui la fai in doi volte: li la fai in vna peroche a dire .3. fan compagnia lun mette .4. el. 2º 3. el. 3º 2. e hanno a partire. 10. che tocca per vno. opera harai commo e detto zc.