

Relación entre las medidas de Radon fuertemente regulares y las medidas σ -finitas

POR A. BALBÁS DE LA CORTE

Recibido: 5 diciembre 1984

Presentado por el académico numerario D. Enrique Linés

Abstract

The object of this paper is to give sufficient conditions for a Radon measure of type (\mathcal{H}) to be σ -finite.

En este trabajo nos proponemos dar condiciones suficientes para que una medida de Radon de tipo (\mathcal{H}) sea σ -finita. El interés de esta cuestión, radica en que muchas de las propiedades válidas para medidas finitas, siguen siendo ciertas en el caso σ -finito.

A lo largo de todo el trabajo, E será un espacio topológico (no necesariamente separado), y (\mathcal{H}) será una clase de cerrados de E , que por comodidad, supondremos estable para las uniones finitas (esto último no supone en realidad ninguna restricción). β representará la σ -álgebra de Borel de E , y una medida μ sobre β , diremos que es una medida de Radon de tipo (\mathcal{H}) , cuando cumpla las condiciones que se dan en la definición 68 de [5].

Todas las notaciones y propiedades de las medidas de Radon de tipo (\mathcal{H}) no especificadas en este trabajo, se pueden encontrar en [5].

Por el teorema 80 de [5], si $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ (donde $M(E, \mathcal{H})$ representa el conjunto de todas las medidas de Radon de tipo (\mathcal{H}) sobre E), μ es localmente σ -finita si y sólo si admite un concassage, es decir, existe una familia localmente contable $(F_i)_{i \in I}$, formada por conjuntos cerrados disjuntos, y tales que

$$0 < \mu(F_i) < +\infty \quad \forall i \in I$$

$$\mu\left(E - \bigcup_{i \in I} F_i\right) = 0,$$

siendo además

$$\text{Sop } \mu_{F_i} = F_i \quad \forall i \in I$$

Representaremos por \mathcal{M} la σ -álgebra de los conjuntos M contenidos en E , que son μ -medibles, y por el teorema 73 de [5] se sabe que \mathcal{M} contiene a β .

Usaremos repetidamente las siguientes propiedades que no demostraremos por considerar que son conocidas:

Sea μ una medida de Radon de tipo (\mathcal{H}) sobre E localmente σ -finita, y sea $(F_i)_{i \in I}$ un concassage de μ . Entonces:

0.1. Si $M \in \mathcal{M}$ es tal que $\mu'(M) < +\infty$, existe $I_0 \subset I$ contable y tal que

$$\mu'(M \cap F_i) = 0 \quad \forall i \notin I_0$$

$$\mu'(M) = \sum_{i \in I_0} \mu'(M \cap F_i) = \sum_{i \in I} \mu'(M \cap F_i)$$

0.2. μ es σ -finita, si y sólo si, I es contable.

0.3. Si $S \subset E$, entonces S está en \mathcal{M} si y sólo si $S \cap F_i \in \mathcal{M} \forall i \in I$.

1. **Definición.**— Diremos que $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ es regular, si

$$\mu(B) = \inf \{ \mu(G) : \mathfrak{G} \ni G \supset B \} \quad \forall B \in \mathfrak{B}$$

donde \mathfrak{G} representa la clase de los conjuntos abiertos de E .

Diremos que $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ es fuertemente regular, si

$$\mu(M) = \inf \{ \mu(G) : \mathfrak{G} \ni G \supset M \} \quad \forall M \in \mathcal{M}$$

Obsérvese que la definición de medida regular que hemos dado equivale a que μ sea simultáneamente medida de Radon de tipo (\mathcal{H}) , y medida de Radon estricta de tipo (\mathcal{H}) . Este último concepto se puede encontrar definido en [4].

2. **Definición.**— Diremos que $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ es difusa, si para cada $x \in E$.

$$\mu'(\{x\}) = 0$$

En consecuencia, si μ es difusa, $\{x\} \in \mathcal{M}$ para todo x de E .

3. **Lema.**— Sea $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ localmente σ -finita, y fuertemente regular. Sea $(F_i)_{i \in I}$ un concassage de μ entonces, el conjunto

$$I_0 = \{i \in I : \exists S_i \subset F_i \text{ con } S_i \neq \emptyset \text{ y } \mu'(S_i) = 0\}$$

es contable.

Demostración.— Para cada $i \in I_0$ consideremos S_i satisfaciendo las condiciones del enunciado. Sea

$$S = \bigcup_{i \in I_0} S_i$$

Por 0.3, se tiene que $S \in \mathcal{M}$ y por 0.1, es $\mu'(S) = 0$.

Supongamos que I_0 no es contable. Sea G un abierto de E que contiene a S . Para cada $i \in I_0$,

$$G \cap F_i \supset S_i \neq \emptyset,$$

y por ser

$$\text{Sop } \mu_{F_i} = F_i \quad \forall i \in I,$$

resulta

$$\mu(G \cap F_i) > 0 \quad \forall i \in I_0.$$

De ser I_0 no contable, y de 0.1, se deduce por tanto que

$$\mu(G) = +\infty.$$

Por consiguiente, de ser μ fuertemente regular, podemos deducir que

$$\mu'(S) = +\infty$$

y estamos en contradicción.

4. Teorema.— Sea $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ localmente σ -finita y fuertemente regular. Sea $(F_i)_{i \in I}$ un concassage de μ . Entonces, si para cada i de I , existe $S_i \subset F_i$ tal que $\mu'(S_i) = 0$, μ es σ -finita.

Demostración.— Naturalmente, estamos suponiendo los S_i no vacíos. Si I_0 es el del lema anterior, resulta de la hipótesis del teorema que $I = I_0$, y por tanto I es contable. Por 0.2, μ es σ -finita.

5. Corolario.— Sea $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ localmente σ -finita, fuertemente regular, y difusa. Entonces μ es σ -finita.

Demostración.— Resulta inmediatamente del teorema anterior.

6. Corolario.— Sea $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ localmente σ -finita, fuertemente regular, y no atómica. Si E satisface el axioma de separación T_1 , entonces μ es σ -finita.

Demostración.— Cada $\{x\} \subset E$ es un conjunto de Borel de E . de ser μ no atómica, se deduce que $\mu(\{x\}) = 0$, y por tanto μ es difusa.

7. Corolario.— Sea $\mu \in M(E, \mathcal{K})$ localmente σ -finita, fuertemente regular, y no atómica. Si cada $H \in \mathcal{K}$ es compacto, entonces μ es σ -finita.

Demostración.— Sea $(F_i)_{i \in I}$ un concassage de μ . Para cada $i \in I$ se tiene

$$\mu(F_i) > 0$$

y por ser μ no atómica, existirá $B_i \in \mathfrak{B}$ con $B_i \subset F_i$ y tal que

$$0 < \mu(B_i) < \frac{\mu(F_i)}{2}$$

de ser

$$\mu(B_i) = \text{Sup} \{ \mu(H) : B_i \supset H \in \mathcal{K} \}$$

se deduce que existe $H_i \subset B_i$ de \mathcal{K} y tal que

$$0 < \mu(H_i) < \frac{\mu(F_i)}{2}$$

Nótese por H_i^1 el H_i anterior. Mediante un razonamiento similar, se puede probar que existe una familia H_i^2 contenida en \mathcal{K} y tal que

$$H_i^2 \subset H_i^1 \quad \forall i \in I$$

y además

$$0 < \mu(H_i^2) < \frac{\mu(H_i^1)}{2} < \frac{\mu(H_i^0)}{4}$$

donde $H_i^0 = F_i$ para $i \in I$.

Procediendo por inducción, se obtiene una sucesión decreciente $(H_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ que depende de i , y tal que cada $H_i^n \in \mathcal{K}$ y

$$0 < \mu(H_i^n) < \frac{\mu(F_i)}{2^n}$$

Sea

$$S_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_i^n \quad \forall i \in I$$

Evidentemente, S_i es no vacío cualquiera que sea $i \in I$, ya que es intersección de una familia de compactos que por ser decreciente, verifica la propiedad de la intersección finita. Además, es claro que

$$\mu(S_i) = 0 \quad \forall i \in I.$$

Del teorema 4 resulta que μ es σ -finita.

Hasta ahora hemos estudiado condiciones que garanticen que una medida de Radon de tipo (\mathcal{K}) fuertemente regular sea σ -finita. El problema inverso, es decir, encontrar condiciones que impliquen que una medida σ -finita es fuertemente regular, queda resuelto en la siguiente proposición.

8. Proposición.— Sea $\mu \in \mathcal{M}(E, \mathcal{K})$ σ -finita. Los siguientes apartados son equivalentes:

8.1. μ es moderada (es decir, existe una sucesión de abiertos de E , $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$$

y cada G_n tiene medida μ finita).

8.2. μ es fuertemente regular.

Demostración.— Supongamos que μ es moderada, y sea $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos E satisfaciendo las condiciones de 8.1. Sea $M \in \mathcal{M}$. Probaremos la igualdad

$$\mu^*(M) = \text{Inf} \{ \mu(G) : \mathfrak{G} \ni G \supset M \} \tag{8.1}$$

$$G_n - M \in \mathcal{M} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y en consecuencia

$$\mu^*(G_n - M) = \text{Sup} \{ \mu(H) : \mathcal{K} \ni H \subset G_n - M \}$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $H \in \mathcal{K}$ con $H \subset G_n - M$ y

$$\mu^*(G_n - M) \leq \mu(H) + \varepsilon$$

De ser $G_n - H \supset G_n \cap M$ y $G_n - H \in \mathfrak{G}$, y de

$$\begin{aligned} \mu(G_n - H) &= \mu(G_n) - \mu(H) = \mu^*(G_n \cap M) + \mu^*(G_n - M) - \mu(H) \leq \\ &\leq \mu^*(G_n \cap M) + \varepsilon \end{aligned}$$

se obtiene haciendo ε tender a cero

$$\mu^*(G_n \cap M) = \text{Inf} \{ \mu(G) : \mathfrak{G} \ni G, G_n \supset G \supset G_n \cap M \}$$

Luego para cada $\varepsilon > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$ existe $G'_n \in \mathfrak{G}$ con $G_n \supset G'_n \supset G_n \cap M$ y tal que

$$\mu(G'_n) \leq \mu(G_n \cap M) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Sea

$$G' = \bigcup_{n=1}^{\infty} G'_n$$

Se tiene que $G' \in \mathcal{G}$ y

$$G' \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cap M) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cap M = E \cap M = M$$

Además

$$\begin{aligned} \mu(G') &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G'_n\right) \leq \\ &\leq \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G'_n\right) - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cap M)\right)\right) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cap M)\right) \leq \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G'_n - (G_n \cap M))\right) + \mu(M) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G'_n - (G_n \cap M)) + \mu(M) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} + \mu(M) \leq \varepsilon + \mu(M) \end{aligned}$$

Haciendo ε tender a cero, se tiene (8.1).

La implicación en sentido contrario es inmediata.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GARDNER Y PFEFFER.: *Are diffused regular Radon measures σ -finites?* J. London Math. Soc. (2) 20 (1979) 485-494.
- [2] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Teoría de la medida sobre los espacios topológicos no localmente compactos.* Rev. Mat. Hisp. Amer. 33 (1973) 257-274.
- [3] — Y JIMENEZ GUERRA, P.: *Strictly localizable measures.* Nagoya J. Math. 85 (1982) 81-86.
- [4] —: *Teorema de Fubini en espacios topológicos arbitrarios.* R. Acad. Ci. Madrid 76 (1982).
- [5] —: *Medidas de Radon de tipo (\mathcal{H}) en espacios topológicos arbitrarios.* Memorias de la R. Acad. Ci. Madrid (1979).
- [6] SCHWARTZ, L.: *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.* Oxford University Press (1973).