Documento de Trabajo 98-02
Series de Economía 02
Enero 1998

Departamento de Economía
Universidad Carlos III de Madrid
Calle Madrid, 126
28903 Getafe (Spain)
Fax (341) 624-98-75

LA COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE RENTA EN UN CONTEXTO DINÁMICO: DIFICULTADES Y PERSPECTIVAS

Javier Ruiz-Castillo*

Resumen

Actualmente comienza a ser posible el seguimiento de las rentas individuales en muestras de datos de panel. El objetivo de este trabajo es poner de manifiesto que no es obvio cómo analizar esta riqueza de datos desde el punto de vista normativo. El problema central es el siguiente: ¿debemos concentrarnos exclusivamente en comparar las distribuciones de renta agregada sin conceder ningún peso a la distribución de rentas en cada período de tiempo particular? ¿No cabe también conceder alguna importancia a la comparación de las rentas de los individuos que están en la misma etapa del ciclo vital? En el estudio de estas alternativas comprobamos que es imprescindible atender otros problemas también acuciantes, como la conveniencia de aplicar una tasa social de descuento positiva, la comparación de los flujos de renta de individuos que viven un número distinto de años, y la extensión a un contexto verdaderamente intertemporal de las ideas de la literatura sobre la movilidad de la renta desarrolladas en un mundo de dos períodos. Nuestra discusión va guiada por la pregunta de si es necesario añadir nuevos juicios de valor a la lista que hemos venido utilizando desde 1970 hasta la fecha para comparar dos distribuciones de renta independientes.

Palabras clave: Datos panel; desigualdad de la renta; bienestar social; movilidad de la renta; tasa social de descuento.

* Ruiz-Castillo, Departamento de Economía, Universidad Carlos III de Madrid. E-mail: jrc@eco.uc3m.es.
Este trabajo se ha realizado con el apoyo financiero del Programa de Igualdad de la *Fundación Argentaria*.

"La comparación de distribuciones de renta en un contexto dinámico: dificultades y perspectivas"

Javier Ruiz-Castillo

Enero de 1998

Este trabajo se ha realizado con el apoyo financiero del Programa de Igualdad de la Fundación Argentaria

ABSTRACT

Actualmente comienza a ser posible el seguimiento de las rentas individuales en muestras de datos de panel. El objetivo de este trabajo es poner de manifiesto que no es obvio cómo analizar esta riqueza de datos desde el punto de vista normativo. El problema central es el siguiente: ¿debemos concentrarnos exclusivamente en comparar las distribuciones de renta agregada sin conceder ningún peso a la distribución de rentas en cada período de tiempo particular?¿No cabe también conceder alguna importancia a la comparación de las rentas de los individuos que están en la misma etapa del ciclo vital? En el estudio de estas alternativas, comprobamos que es imprescindible atender otros problemas también acuciantes, como la conveniencia de aplicar una tasa social de descuento positiva, la comparación de los flujos de renta de individuos que viven un número distinto de años, y la extensión a un contexto verdaderamente intertemporal las ideas de la literatura sobre la movilidad de la renta desarrolladas en un mundo de dos períodos. Nuestra discusión va guiada por la pregunta de si es necesario añadir nuevos juicios de valor a la lista que hemos venido utilizando desde 1970 hasta la fecha para comparar dos distribuciones de renta independientes.

PALABRAS CLAVE: Datos panel; desigualdad de la renta; bienestar social; movilidad de la renta; tasa social de descuento

INTRODUCTION

Durante los últimos 25 años se ha producido una abundante literatura sobre la medición de la desigualdad y otros conceptos cercanos. Enlazando con el trabajo pionero de Dalton (1920), se reconoce a los autores contemporáneos Atkinson (1970), Kolm (1976a, 1976b) y Sen (1973) por sentar las bases analíticas de la teoría de la distribución de la renta. El objetivo habitual del paradigma desarrollado desde 1970 hasta la fecha puede enunciarse de la manera siguiente: dadas dos distribuciones de renta, ¿cómo podemos compararlas a efectos de eficiencia, desigualdad, bienestar o pobreza?

La idea central consiste en situar el problema en un contexto de bienestar social donde se hacen explícitos los juicios de valor sobre los que se basan los distintos procedimientos de evaluación. Alternativamente, se busca la caracterización de los instrumentos de medida admisibles en términos de un conjunto de propiedades normativas interesantes.

El desarrollo de este área durante los últimos 25 años se debe tanto a la riqueza de la teoría existente como a la disponibilidad en muchos paises de muestras de datos microeconómicos de sección cruzada. La gran novedad es que, actualmente, comienza a ser posible el seguimiento de las rentas individuales en muestras de datos de panel. Es decir, empezamos a contar con "toda" la información concebible sobre la renta de los individuos a lo largo de su ciclo vital.

Pues bien, el objetivo de este trabajo es poner de manifiesto que no es obvio cómo analizar esta riqueza de datos desde el punto de vista normativo. En particular, no existe todavía un consenso entre los economistas para responder a las dudas que, como en otras ocasiones en Economía del Bienestar, nos llegan desde el campo de la Filosofía. El problema central es el siguiente: ¿debemos concentrarnos exclusivamente en comparar las distribuciones de renta agregada sin conceder ningún peso a la distribución de rentas en cada período de tiempo particular?¿No cabe también conceder alguna importancia a la comparación de las rentas de los individuos que están en la misma etapa del ciclo vital? Pero en los dos últimos casos, aún suponiendo que hayamos resuelto la evaluación dentro de cada período de tiempo o cada etapa, ¿cómo agregar en un escalar el juicio que nos merecen el conjunto de los períodos de tiempo o de las etapas por las que atraviesan los individuos?

En el estudio de estas alternativas, comprobamos que es imprescindible atender otros problemas también acuciantes, como los tres siguientes. ¿Es socialmente recomendable descontar el futuro a una tasa positiva como hacen los individuos o las empresas en el desarrollo habitual de sus asuntos? ¿Cómo comparar los flujos de renta de individuos que viven un número distinto de años? ¿Cómo extender a un contexto verdaderamente intertemporal las ideas de la literatura sobre la movilidad de la renta desarrolladas en un mundo de dos períodos?

Nuestra discusión de estos problemas va guiada por la pregunta de si es necesario añadir nuevos juicios de valor a la lista que hemos venido utilizando desde 1970 hasta la fecha para comparar dos distribuciones de renta independientes.

El resto de este trabajo consiste en cuatro apartados. El primero se dedica a revisar brevemente los axiomas fundamentales del paradigma vigente. En el segundo, que se consagra al caso dinámico, se describen tres maneras alternativas de organizar la información disponible de acuerdo con McKerlie (1989), y se sugiere una forma de relacionarlas inspirada en Salas y Rabadán (1995). En el tercer apartado, haciendo uso de resultados recientes en Ruiz-Castillo (1997), se justifica la opción de conjugar dos de las tres alternativas en el contexto de un mundo con sólo dos períodos de tiempo. El cuarto apartado contiene algunas conclusiones sobre los problemas tratados, y determinadas reflexiones sobre las dificultades que se nos presentarían si abandonáramos algunas de las simplificaciones de las que nos hemos servido en el grueso del trabajo.

I. EL PARADIGMA VIGENTE

I. 1. Notación y supuestos

Sea x^i la renta del individuo i, y sea $x = (x^1,..., x^N)$ la distribución de la renta para una población de tamaño N. Una función de bienestar social (FBS) proporciona el bienestar asociado a una distribución de la renta y resume la totalidad de los juicios de valor que la sociedad mantiene al respecto. La denotamos por $W: R^N \rightarrow R$, $W(x) = W(x^1,..., x^N)$.

Un índice de desigualdad es una función que proporciona la desigualdad asociada a cada distribución de la renta. Lo denotamos por $I: R^N \rightarrow R$, $I(x) = I(x^1,..., x^N)$. Por simplificar, en este trabajo nos concentraremos exclusivamente en los índices relativos de desigualdad, es decir, en aquellos índices para los cuales si la proporción de ricos y pobres no varía la desigualdad se mantiene constante. Formalmente, los índices de desigualdad relativa satisfacen la propiedad de que, para todo $\lambda > 0$, $I(\lambda x) = I(x)$.

¿Qué propiedades debe reunir una FBS para ser admisible desde el punto de vista normativo? Revisaremos de manera informal las más importantes dentro del paradigma vigente. En primer lugar, es conveniente que la FBS sea *continua* **(P1)**, es decir, que cuando la distribución de la renta varie poco, el bienestar social asociado también varie poco. En segundo lugar, la FBS debe mostrar cierta concavidad, es decir, debe recoger cierta preferencia por la igualdad. La propiedad técnica habitual es la llamada *S-concavidad* **(P2)**. En tercer lugar, si deseamos comparar distribuciones con un número variable de individuos, se suele admitir el principio de población de Dalton, o la propiedad de la *invarianza ante réplicas de la población* **(P3)**. Diremos que una FBS es *regular* si satisface las tres propiedades anteriores.

A renglón seguido, debemos incluir alguna propiedad que nos asegure que si las rentas de todos los individuos aumentan el bienestar social también aumenta. Pero ese crecimiento debe respetar la noción de desigualdad que adoptamos en todo el trabajo. Nos referimos a la condición de *monotonicidad a lo largo de rayos desde el origen* **(P4)**, según la cual el bienestar social aumenta sólo si todas las rentas crecen en la misma proporción. Es decir, para todo $\lambda > 1$, $W(\lambda x) > W(x)$. La propiedad siguiente se denomina *homoteticidad débil* **(P5)**, una condición que requiere que para cualquier par de distribuciones de la renta x, y con la misma media, $W(x) \geq W(y) \Leftrightarrow W(\alpha x) \geq W(\alpha y)$ para todo $\alpha > 0$. La *homoteticidad* **(P6)** requiere que para cualquier par de distribuciones de la renta x, y, $W(x) \geq W(y) \Leftrightarrow W(\alpha x) \geq W(\alpha y)$ para todo $\alpha > 0$.

Armados con estas propiedades, ilustraremos su uso en dos problemas de indudable interés. En primer lugar, recordemos que la mayor parte de la Economía del Bienestar entiende que el bienestar social es un concepto que combina, exclusivamente, una preferencia por la eficiencia, es decir, por el tamaño de la renta agregada o la renta media de la población, y una preferencia por la igualdad(1).

Sea $\mu(x)$ la media de la distribución x. Entonces nos preguntamos: ¿bajo qué condiciones sobre una FBS $W(\cdot)$ regular existe una función $V: R^2 \rightarrow R$ tal que

$$W(x) = V(\mu(x), I(x)),$$

con $V(\cdot)$ creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo? La respuesta se encuentra en Dutta y Estaban (1992), donde se demuestra que éste es el caso si y sólo si la FBS satisface además las condiciones **P4** y **P5**.

En segundo lugar, recordemos la definición de *renta igualmente distribuida* (RID) que propusieron Atkinson, Kolm y Sen en sus trabajos clásicos. Dada una distribución de la renta x, la RID es la renta que distribuida igualitariamente entre todos los individuos genera el mismo bienestar social que x. Es decir, si la denominamos por $\zeta(x)$, la RID se define implícitamente por la condición

$$W(\zeta(x),\dots,\zeta(x)) = W(x).$$

Pues bien, es sabido que el índice de desigualdad normalizado entre 0 y 1,

$$I^{AKS}(x) = (\mu(x) - \zeta(x))/\mu(x),$$

es consistente con la FBS de partida en el sentido de que, para cada par de distribuciones de la renta x e y,

$$I^{AKS}(x) > I^{AKS}(y) \Leftrightarrow W(x) < W(y).$$

La cuestión es: ¿bajo qué condiciones sobre una FBS regular el índice $I^{AKS}(\cdot)$ es un índice de desigualdad relativa? La respuesta, que se puede encontrar, por ejemplo, en Blackorby y Donaldson (1978), es que la FBS debe satisfacer también la P6. En ese caso, podemos escribir

$$W(x) = \mu(x)(1 - I^{AKS}(x)). \tag{1}$$

Así pues, de acuerdo con la ecuación (1) el bienestar social es la renta media corregida por un índice de igualdad relativa $(1 - I^{AKS}(x))$ que varía entre 0 y 1, de manera que cuanto más cercano sea ese valor a la unidad, o mayor sea la igualdad, menor será el ajuste a la baja que sufre la media. Haciendo uso de esa ecuación, dadas dos distribuciones de la renta podemos dirimir qué parte del cambio en el bienestar se debe al cambio en la media y qué parte al cambio en la desigualdad.

En muchas ocasiones disponemos de datos, no sólo sobre la renta, sino sobre las características geográficas, demográficas y/o socioeconómicas de los individuos o los hogares en los que éstos se agrupan. Dada una partición de la población, en Comunidades Autónomas por ejemplo, es útil trabajar con indicadores de desigualdad *aditivamente descomponibles* que nos permiten expresar la desigualdad global como la suma de dos términos: un factor que recoge la desigualdad dentro de cada Comunidad y otro que refleja la desigualdad entre las Comunidades, medida como la desigualdad de una distribución en que cada individuo recibe la renta media de la Comunidad en la que reside. Sabemos que existe una única familia de índices de desigualdad relativa que, además de cumplir las propiedades normativas habituales **P1** a **P4**, es descomponible en el sentido indicado: se trata de la familia de índices de entropía(2).

Desde el punto de vista de las FBS, desearíamos contar con una propiedad análoga que nos permitiera descomponer el bienestar global en dos términos: el bienestar dentro de cada subgrupo de una partición, y un término que penalizara la desigualdad entre los subgrupos. Consideremos la siguiente expresión, análoga a la ecuación (1),

$$W_c(x) = \mu(x)(1 - I_c(x)), \tag{2}$$

donde $I_c(\cdot)$ representa la familia de índices de entropía indiciada por el parámetro c. La cuestión es: ¿para qué miembros de esa familia que satisfacen la ecuación (2), la FBS es aditivamente descomponible en el sentido apuntado y las ponderaciones del bienestar dentro de cada subgrupo vienen dadas por la importancia demográfica de cada uno de ellos? La respuesta se encuentra en Herrero y Villar (1989): el índice correspondiente a $c = 1$ es el único para el que se cumplen esas condiciones. Así pues, en el caso relativo esa FBS tiene atractivos evidentes para utilizarse en la práctica: posee buenas propiedades normativas, permite expresar el *trade-off* entre eficiencia y desigualdad de acuerdo con la ecuación (2) y es aditivamente descomponible. Este caso culmina nuestra discusión de las propiedades más importantes dentro del paradigma vigente[3].

II. EL CASO DINÁMICO

II. 1. La información disponible en la actualidad

Comenzaremos construyendo el modelo intertemporal más sencillo posible que sea congruente con nuestros propósitos. Para ello vamos a simplificar extraordinariamente las características demográficas de la población.

En primer lugar, supondremos que contamos con una población de tamaño dado que consta, digamos, de N individuos. Si denominamos por N_j al conjunto de individuos que nacen en el período j = 1,..., J, tendremos que $\Sigma_j N_j =$ N. En segundo lugar, supondremos que todos los individuos viven el mismo número de años. De hecho, supondremos que cada individuo atraviesa un mismo número de etapas s = 1,..., S a lo largo de su vida. A título de ejemplo, más adelante supondremos que los individuos solo pueden ser jóvenes (JO), adultos (AD) o mayores (MA).

Sea $x_s^{i(j)}$ la renta del individuo i, nacido en el año j, cuando atraviesa la etapa s. Suponemos que para cada i nacido en el período j observamos un vector $x^{i(j)}$ de S rentas:

$$x^{i(j)} = (x_1^{i(j)}, \dots, x_s^{i(j)}, \dots, x_S^{i(j)}).$$

Así pues, tenemos la siguiente matriz de datos:

$$X = \{x_s^{i(j)}, s = 1,\dots,S, i \in N_j, j = 1,\dots,J\}.$$

Denominamos por $O = N \cdot S$ al número de observaciones y por $T = J + S - 1$ al número de períodos en que hay alguien vivo.

Concentrémonos en el caso en que los individuos atraviesan solo por tres etapas, de manera que cada uno de ellos puede ser observado mientras es JO(ven), AD(ulto) o MA(yor), y adoptemos la hipótesis de que todos los individuos tienen descendencia en la misma etapa. Supongamos, por ejemplo, que cada individuo adulto tiene un solo descendiente. Si $J = 5$ y suponemos que $N_j = 1$ para todo j, tendremos que $N = \Sigma_j N_j = 5$. El número de observaciones de las rentas individuales será $O = 5 \cdot 3 = 15$. Finalmente, el número de períodos en que hay alguien vivo es $T = J + S - 1 = 5 + 3 - 1 = 7$. Es útil representar la matriz de datos de la manera siguiente:

$$X = \begin{bmatrix} JO & AD & MA & & & & \\ & JO & AD & MA & & & \\ & & JO & AD & MA & & \\ & & & JO & AD & MA & \\ & & & & JO & AD & MA \end{bmatrix}$$

II. 2. Tres maneras de organizar la información disponible

En general, dada una matriz de datos del tipo indicado, será útil distinguir entre las tres particiones siguientes. Para la primera partición, denotemos por $X_s(t)$ el vector de las rentas de los individuos que en el período t atraviesan por la etapa s, es decir,

$$X_s(t) = \{x_s^{i(j)}, j = t - s + 1\}.$$

Así pues, el vector de rentas de todas las personas que viven en el período t será

$$X(t) = (X_1(t),...,X_s(t),...,X_S(t)).$$

Luego podemos particionar la matriz de datos de la manera siguiente:

$$X = (X(1),...,X(t),...X(T)). \qquad \text{(I)}$$

Si denominamos por $N(t) = \Sigma_s N_{t-s+1}$ al número de prsonas vivas en cada período t, tendremos que $N = \Sigma_t N(t)$.

En segundo lugar, sea N_s el número de personas que atraviesan la etapa s, de manera que $N = \Sigma_s N_s$ y supongamos que $N_s = I$ para cada s. Sea X_s el vector de rentas de los individuos que atraviesan la etapa s, es decir, sea

$$X_s = (x_s^1 ,... x_s^i ,...,x_s^I).$$

Entonces, la segunda partición de interés será:

$$X = (X_1,...,X_s,...X_S). \qquad \text{(II)}$$

Finalmente, el vector de rentas a lo largo de la vida para cada individuo i será

$$x^i = (x_1^i ,...,x_s^i , \ldots ,x_S^i).$$

En consecuencia, podemos particionar la matriz de datos de la manera siguiente

$$X = (x^1,\dots, x^i,\dots, x^N). \qquad \text{(III)}$$

Conceptualmente, la pregunta que debemos formularnos es cúal de estas alternativas debe atraer nuestra máxima atención, o en palabras de Tempkin (1992), cúal debe ser *the proper unit of egalitarian concern*. Siguiendo a McKerlie (1989), la primera partición recoge la visión de los segmentos simultáneos (*simultaneous segment view*). Obsérvese que en el paradigma vigente se trata de comparar las distribuciones correspondientes a dos momentos del tiempo, es decir, X(t) *versus* X(t'). En paises donde se lleva a cabo una Encuesta de Presupuestos Familiares anual, como en el Reino Unido, Francia o los Estados Unidos, la prolongación natural de ese enfoque se traduce en la comparación de dos matrices de datos X = (X(1),...,X(t),...X(T)) *versus* Y = (Y(1),...,Y(t),...,Y(T)). En este caso, el carácter longitudinal de la información contenida en X o Y no es imprescindible. Sin embargo, subsiste el problema de como ponderar la evaluación correspondiente a períodos distintos en situaciones donde no se da una dominancia completa de una matriz sobre otra para todos los períodos. Para la extensión a este caso de procedimientos de dominancia secuencial bien conocidos en el paradigma vigente, puede consultarse el trabajo de Karcher *et al* (1995).

Los economistas suelen ser muy críticos ante la evaluación de la igualdad o el bienestar social de una sociedad en términos de una secuencia temporal de fotografías de la situación, como se desprende de este primer enfoque esencialmente estático. Seguramente, la recomendación que formularían consistiría en centrarse en alguna versión de la alternativa (III), la visión de las vidas completas (*complete lives view*), de acuerdo con la terminología de McKerlie. Para ello, convendría resumir en un escalar la experiencia de cada individuo a lo largo de su ciclo vital. Lo cual nos obliga a confrontar la conveniencia de introducir una tasa social de descuento.

Filósofos como Cowen y Parfit (1992) se han manifestado en contra de una tasa social de descuento positiva. Posiblemente muchos economistas estemos también de acuerdo en desechar esta práctica para propósitos normativos(4). Lo cierto es que, aún en caso de aceptarla, como hacen Maasoumi y Zandvakili (1990) y Karcher *et al* (1995), las fórmulas para ello deben estudiarse con cuidado. A este respecto, pensamos que es importante el trabajo de Dardadoni (1990) sobre las condiciones necesarias que debe reunir la función que resume en un escalar el flujo intertemporal de rentas individuales para garantizar que el bienestar social no aumenta ante ciertas reasignaciones inequaitativas.

En suma, la oportunidad o no de descontar socialmente el futuro es un primer área en la que cabría debatir si debemos incorporar nuevos juicios normativos a los que heredamos del paradigma vigente. En lo que resta de este trabajo, supondremos que no interesa descontar. Y como hemos supuesto que todos los individuos pasan por las mismas etapas a lo lo largo de su vida, es indiferente que sumemos las rentas indiduales o que nos fijemos en la media a la hora de resumir la experiencia individual.

Finalmente, puede concebirse que en determinados contextos interese adoptar la visión (2), o la *corresponding segments view* en la terminología de McKerlie. Piénsese, por ejemplo, en un contexto intergeneracional donde se pretende evaluar un programa de reforma del sistema de Seguridad Social en términos de su impacto sobre los jóvenes, los adultos o los mayores. En ese caso, compararíamos dos matrices de datos $X = (X_1,...,X_s,...X_S)$ *versus* $Y = (Y_1,...,Y_s,...Y_S)$. Obsérvese que esta idea también puede llevarse a la práctica sin necesidad de explotar el carácter longitudinal de los datos. Obsérvese también que en este enfoque habría que decidir cómo ponderar los resultados de la comparación entre X_1 e Y_1, X_2 e Y_2, y así sucesivamente. Si pudiéramos ordenar las etapas desde un punto normativo, los métodos de dominancia secuencial desarrollados en Karcher *et al* (1995) podrían aplicarse también a este caso.

Para los filósofos McKerlie y Tempkin no está claro en absoluto por qué debe predominar la visión dominante que, en su opinión, es precisamente la preferida por los economistas, es decir, la representada por la partición (III). Para poner de manifiesto la razón de esas dudas, hemos construido las siguientes matrices de datos, donde a la derecha de cada matriz se incluye una columna que proporciona la renta total de cada individuo a lo largo de su ciclo vital sin aplicar tasa social de descuento alguna.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & \\ & 1 & 2 & 3 & \\ & & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{matrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & \\ & 2 & 2 & 2 & \\ & & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{matrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & & \\ & 2 & 1 & 3 & \\ & & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{matrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & & \\ & 2 & 2 & 3 & \\ & & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{matrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & & \\ & 3 & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{matrix}$$

Supongamos que deseamos ordenar estas matrices desde el punto de vista, por ejemplo, de la desigualdad. Denotemos por los símbolos $\approx$ y $\rangle$ las relaciones de indiferenciala y de preferencia estricta, respectivamente. Ordenemos esas matrices desde el punto de vista de cualquier índice de desigualdad que sea S-convexo. La S-convexidad implica la propiedad de simetría, según la cual si permutamos una distribución la desigualdad no varía. Así, por ejemplo, I(1, 2, 3) = I(3, 1, 2). La ordenación según las tres visiones sería la siguiente:

Visión (I): $U \approx V \rangle Z \rangle X \approx Y$

Visión (II): $X \rangle U \rangle Y \approx V \approx Z$

Visión (III): $X \approx Z \approx V \rangle U \rangle Y$.

Las diferencias son notables. En primer lugar, por ejemplo, X es indiferente a Y desde el punto de vista de (I), mientras que X es preferida a Y desde (II). En segundo lugar, U es preferida a Z desde (II), mientras que lo contrario ocurre desde (III). En tercer lugar, Z y V están ordenadas en la visión (I) al revés que en la (III). En particular, McKerlie y Temkin no encuentran tan deseables matrices como la Z en que cada individuo tiene un perfil temporal muy distinto aunque la renta agregada sea igual para todos ellos.

En conclusión, la diversidad de ordenaciones dependiendo del punto de vista que se tome habla bien a las claras de la necesidad de introducir juicios de valor a este respecto. Tal vez, como veremos en el siguiente apartado, cabe proponer un criterio que nos permita discriminar en favor de alguna de las matrices **X**, **Z** o **V** que dominan la ordenación de acuerdo con (III).

II. 3. Conexiones

Antes de finalizar este apartado pensamos que es interesante subrayar las conexiones entre estas tres maeras alternativas de organizar la información a efectos de su evaluación normativa. La forma de conseguirlo es recurrir a indicadores de desigualdad aditivamente descomponibles como, por ejemplo, la desviación logarítmica media.

Este índice tiene la propiedad de que para cada partición de **X** en $k = 1,\ldots, K$ subgrupos, la desigualdad global puede expresarse como la suma de dos términos: la suma ponderada de la desigualdad en cada subgrupo de la partición, con ponderaciones iguales a la importancia demográfica de cada subgrupo en la población total, y la desigualdad entre los subgrupos, medida a través de la aplicación del índice de desigualdad a la distribución en que cada individuo recibe la renta media del subgrupo a que pertenece. Sean X^k, μ^k y N^k el vector de rentas, la renta media y el número de individuos perteneciente al subgrupo k, respectivamente. Sea $\alpha^k = N^k/N$ la importancia demográfica del subgrupo k. Entonces tenemos:

$$I(X) = \omega + B$$

donde

$$\omega = \Sigma_k \alpha^k I(X^k) \text{ es la desigualdad } \textit{dentro} \text{ de los subgrupos}$$

y

$$B = I(\mu^1,..., \mu^k,..., \mu^K) \text{ es la desigualdad } \textit{entre} \text{ los subgrupos}$$

donde, para cada k, μ^k se repite N^k veces.

En nuestro caso tenemos tres particiones. La primera divide la matriz de datos en períodos de tiempo, $X = (X(1),...,X(t),...X(T))$. La segunda, en etapas por las que atraviesan todos los individuos, $X = (X_1,...,X_s,...X_S)$. Por último, la tercera considera directamente los individuos, $X = (x^1,..., x^i,..., x^N)$.

Sea $\alpha(t) = N(t)/N$ y $\mu(t)$ la renta media del período $t = 1,..., T$. Entonces tendremos:

$$I(X) = \omega(t) + B(t)$$

donde

$$\omega(t) = \Sigma_t \alpha^t I(X(t))$$

y

$$B(t) = I(\mu(1),..., \mu(t),... \mu(T)).$$

Por tanto, la visión (I) estaría aquí representada por el término $\omega(t)$, es decir, la desigualdad dentro de cada período, ponderada por el peso demográfico de los individuos que viven en cada período en relación a la población total. Sea $\alpha_s = N_s/N$ y μ_s la renta media de la etapa $s = 1,..., S$. Entonces tendremos:

$$I(X) = \omega_s + B_s$$

donde

$$\omega_s = \Sigma_s \, \alpha_s \, I(X_s)$$

y

$$B_s = I(\mu_1, \ldots, \mu_s, \ldots \mu_S).$$

En este contexto, la visión (II) estaría reflejada en el término ω_s. Finalmente, sea $\alpha^i = N^i / N$ y μ^i la renta media del individuo i. Entonces tendremos:

$$I(X) = \omega^i + B^i$$

donde

$$\omega^i = \Sigma_i \, \alpha^i \, I(x^i)$$

y

$$B^i = I(\mu^1, \ldots, \mu^i, \ldots, \mu^I).$$

Ahora la visión (III) se refleja en el término B^i, la desigualdad entre la renta media de los individuos que, en el caso en que todos viven el mismo número de años, coincide con la renta total de cada cual.

Salas y Rabadán (1995) aplican un razonamiento similar para las visiones (I) y (III), utilizando el índice de Atkinson que no es descomponible en el sentido indicado. En nuestra notación, demuestran que $\omega(t) \geq B^i$. Es decir, la visión intertemporal estática incorporada en $\omega(t)$ exagera, como era de esperar, la desigualdad existente entre las rentas agregadas individuales. La razón es que la visión (I) ignora elementos dinámicos del proceso relacionados con el grado de movilidad social que los datos entrañen. Por ejemplo, si quien era rico pasa a ser pobre y viceversa, la nueva desigualdad así generada puede tener efectos igualitarios en el espacio de las rentas agregadas de unos y otros propio de la visión (III) que no caben en la visión (I).

III. UNA PROPUESTA CONCRETA

En este apartado propondremos un procedimiento para la evaluación de distribuciones de renta donde se combinan dos de las visiones discutidas en el apartado anterior. Para ello, partimos de determinadas ideas desarrolladas en la literatura sobre movilidad de la renta.

En matrices de datos longitudinales se observan dos tipos de cambios: variaciones en la desigualdad de la renta en cada período de tiempo, y variaciones en las rentas relativas de los individuos o en las diferencias absolutas entre ellos. Como en el resto del trabajo, aquí nos restringiremos a índices relativos de movilidad que miden los cambios ocasionados en las rentas relativas. Partimos de un modelo de bienestar social donde es posible determinar si la movilidad que nos proponemos medir es o no socialmente deseable.

En su importante contribución a este área, King (1883) propone un modelo de dos períodos donde la función de bienestar social se define sobre las rentas individuales del segundo período y las reordenaciones que tienen lugar entre los individuos al término de los dos períodos. Así pues, es preciso incorporar juicios de valor sobre tales reordenaciones que resultaban completamente innecesarios en el paradigma vigente descrito en el primer apartado. En el contexto de un modelo de crecimiento, King supone que las reordenaciones son socialmente deseables pues tenderán a reducir la desigualdad de las rentas agregadas de los individuos. Sin embargo, cuando las reordenaciones se producen como consecuencia del impuesto sobre la renta, se identifican con desigualdades horizontales que han de valorarse negativamente desde el punto de vista social.

Por nuestra parte, tomamos como punto de partida el modelo de Chakravarty, Dutta y Weymark (1985), o CDW para abreviar. Estos autores comparan la secuencia de rentas observada con una distribución de la renta de referencia en la que las proporciones relativas de las rentas individuales se mantienen constantes a lo largo del tiempo. La función de bienestar social se define sobre la renta agregada a lo largo de los dos períodos por lo que, contrariamente a King, no resulta necesario introducir nuevos juicios de valor sobre las reordenaciones que hayan podido tener lugar.

Sea $X = \{x(1), x(2)\}$ una matriz de datos donde $x(1)$ y $x(2)$ son los vectores de rentas individuales en los períodos 1 y 2, respectivamente. La renta agregada correspondiente se define como $x_a = x(1) + x(2)$. El modelo de CDW se caracteriza por dos supuestos cruciales. En primer lugar, dada una matriz de datos X, decimos que $X_b = \{x_b(1), x_b(2)\}$ exhibe una inmovilidad completa si i) las proporciones de las rentas individuales respecto de la renta total se mantienen a lo largo del tiempo iguales a las del primer período en $x(1)$, y ii) la renta media de cada período se mantiene igual a la de X, es decir, si $\mu(x_b(1)) = \mu(x(1))$ y $\mu(x_b(2)) = \mu(x(2))$. Así pues, si denominamos por $x_b = x_b(1) + x_b(2)$ a la distribución de la renta agregada asociada a la matriz X_b, la proporción de la renta total que recibe cada individuo en x_b es igual a la proporción que recibía en x(1). En consecuencia, para cualquier índice de desigualdad relativa, $I(x_b) = I(x(1))$. Por otra parte, $\mu(x_b) = \mu(x_a)$.

En segundo lugar, se supone que el único aspecto de las matrices X y X_b que importa a efectos del bienestar social son las distribuciones agregadas x_a y x_b. Entonces, dada una función de bienestar social W(.), el índice de movilidad relativa propuesto por estos autores se define como

$$M^{CDW} = (W(x_a) - W(x_b)) / W(x_b). \tag{3}$$

Es decir, la movilidad se mide como la diferencia proporcional entre el bienestar asociado a la matriz de datos observada y la matriz que representa la situación de inmovilidad total. Si el bienestar en X es mayor que en X_b entonces el índice M^{CDW} es positivo, indicando que la movilidad contribuye positivamente al binestar; en caso contario, la movilidad será socialmente indeseable.

Será útil restringirse al caso en que el bienestar social es función solamente de la media de la distribución y de un índice de desigualdad relativo (para los supuestos sobre la función de bienestar social necesarios en este caso, veáse el primer apartado). Para simplificar, si suponemos también que $W(x) = \mu(x)(1 - I(x))$, la ecuación (3) queda como sigue:

$$M^{CDW}(X) = (I(x_b) - I(x_a)) / (1 - I(x_b)) = (I(x(1)) - I(x_a)) / (1 - I(x(1)). \tag{4}$$

A tenor de esta expresión, parecería que el signo del índice de movilidad depende exclusivamente del cambio en la desigualdad desde el período 1 a la distribución agregada. Sin embargo, como se muestra en Ruiz-Castillo (1997), es posible descomponer este índice en dos términos que reflejan tanto el cambio en desigualdad como las variaciones en las rentas relativas que hayan podido tener lugar.

Para entender este punto es importante distinguir entre dos tipos de cambios de orden: el que se produce cuando comparamos el vector de rentas del primer período con el del segundo, que denominamos *permutaciones*; y el que tiene lugar cuando comparamos el primer período con el vector de rentas agregadas, que denominamos *reordenaciones*. Por supuesto, las reordenaciones implican necesariamente la existencia de permutaciones, pero no al revés. Pues bien, la descomposición siguiente permite distinguir entre la movilidad atribuible al cambio en desigualdad entre **x**(1) y **x**(2) sin permutación alguna -la llamada *movilidad estructural* o ME- y la movilidad atribuible a las permutaciones entre **x**(1) y **x**(2), hayan dado o no lugar a reordenaciones entre **x**(1) y $\mathbf{x}_a$ - lo que denominamos *movilidad de intercambio* o MI.

Dada una matriz de datos $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2)\}$, supondremos desde ahora que el vector de rentas **x**(1) está ordenado de menor a mayor. En el caso en que exista alguna permutación entre **x**(1) y **x**(2), denominemos por **x**(2)′ el vector de rentas del segundo período ordenado como **x**(1), y sea $\mathbf{x}_c = \mathbf{x}(1) + \mathbf{x}(2)'$. Naturalmente, en la matriz $\mathbf{X}' = \{\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2)'\}$ se produce la misma variación en el crecimiento económico que en la situación original $X = \{x(1), x(2)\}$ puesto que $\mu(x(2)) = \mu(x(2)')$. Sin embargo, en X' habrán desaparecido las permutaciones entre los vectores de rentas del primer y el segundo período. Es fácil observar que:

$$M^{CDW}(X) = ME(X) + MI(X),$$

donde

$$ME(X) = (W(x_c) - W(x_b))/ W(x_b) = (I(x(1)) - I(x_c))/(1 - I(x(1)) \quad (5)$$

y

$$MI(X) = (W(x_a) - W(x_c))/ W(x_b) = (I(x_c) - I(x_a))/(1 - I(x(1)). \quad (6)$$

La ecuación (5) mide el cambio en bienestar asociado a una situación en que no se hubiera producido permutación alguna, mientras que la ecuación (6) refleja el cambio en bienestar atribuible a la existencia de permutaciones entre x(1) y x(2), hayan dado o no lugar a reordenaciones entre x(1) y x_a.

En Ruiz-Castillo (1997) se demuestra que MI(X) tiene siempre signo positivo, es decir, que las permutaciones aumentan siempre el bienestar social. Merece la pena subrayar que, a diferencia de King (1983), este resultado no require juicios de valor sobre la FBS $W(\cdot)$ de los habituales en el paradigma vigente.

El siguiente ejemplo muestra un caso en que i) hay permutaciones sin reordenaciones, y ii) existe movilidad estructural positiva. Por tanto, $M^{CDW}(X)$ es positiva. Sea $X = \{x(1), x(2)\} = \{(2, 4), (4, 3)\}$, de forma que $x_a = (6, 7)$. Entonces $x(2)' = (3, 4)$ y $x_c = (5, 8)$. Dado que $1 - I\,(x(1)) = 1 - I(2, 4)$ es positivo, el signo de ME(X) y MI(X) depende de los numeradores en (5) y (6), respectivamente. Puesto que $I(x(1)) = I(2, 4) > I(x_c) = I(5, 8)$, $ME(X) > 0$. Por otra parte, como $I(x_c) = I(5, 8) > I(x_a) = (6, 7)$, $MI(X) > 0$. Luego $M^{CDW}(X) > 0$, como dijimos.

Es fácil comprobar que cuando las permutaciones se deben a un aumento de la desigualdad en el período 2 demasiado "fuerte", la movilidad estructural de signo negativo puede compensar el efecto positivo de las permutaciones sobre el bienestar para dar lugar a una movilidad global negativa. El ejemplo siguiente ilustra esta posibilidad. Sea $X^{\#} = \{x^{\#}(1), x^{\#}(2)\} = \{(2, 4), (7, 0)\}$, de forma que $x_a = (9, 4)$. En este caso, $x^{\#}(2)' = (0, 7)$ y $x_c^{\#} = (2, 11)$. Ahora tenemos que $I(x(1)) = I(2, 4) < I(x_c^{\#}) = I(2, 11)$, por lo que $ME(X) < 0$. Por otra parte, como $I(x_c^{\#}) = I(2, 11) > I(x_a) = I(9, 4)$, tenemos que $MI(X) > 0$; pero en valor absoluto $ME(X) > MI(X)$, por lo que $M^{CDW}(X) < 0$.

En Ruiz-Castillo (1997) se demuestra que, en presencia de reordenaciones, siempre podemos encontrar una situación $X^* = \{x(1), x(2)^*\}$, donde $\mu(x(2)^*) = \mu(x(2))$, no hay reordenaciones entre $x(1)$ y $x_a^* = x(1) + x(2)^*$, y sin embargo $M^{CDW}(X^*) = M^{CDW}(X)$, es decir, se alcanza la misma movilidad que en la situación original. La diferencia es que ahora $I(x(2)^*) < I(x(2))$. La lección es clara: cuando las permutaciones son tan fuertes que dan lugar a reordenaciones, siempre existe una forma de reasignar la renta total del segundo período entre los individuos de manera que se preserva el grado de movilidad original, se evitan las reordenaciones y se consigue que la desigualdad del segundo período sea menor.

En el ejemplo anterior, $X^* = \{x(1), x(2)^*\} = \{(2, 4), (2, 5)\}$, de forma que $x_a^* = (4, 9)$ y $\mu(x(2)^*) = \mu(2, 5) = \mu(7, 0) = \mu(x(2))$. Es fácil comprobar que $I(x_a^*) = I(4, 9) = I(9, 4) = I(x_a)$, por lo que $M^{CDW}(X^*) = M^{CDW}(X)$. Pero ahora $I(x(2)^*) = I(2, 5) < I((x(2)) = I(7, 0)$.

Estos resultados nos conducen a la siguiente sugerencia de un criterio de evaluación en un mundo de dos períodos:

Diremos que la matriz $X = \{x(1), x(2)\}$, es superior a la $Y = \{y(1), y(2)\}$, siempre que:

i) $M^{CDW}(X) > M^{CDW}(Y)$;

ii) si $M^{CDW}(X) = M^{CDW}(Y)$, *entonces se requiere que* $I(x(2)) < I(y(2))$.

En particular, si $X = \{x(1), x(2)\}$ da lugar a reordenaciones, la situación $X = \{x(1), x(2)^*\}$ será siempre superior de acuerdo con este criterio. De esta manera, hemos combinado la visión (III) del apartado anterior con la (I).

IV. CONCLUSIONES

1. Cuando disponemos de información longitudinal sobre la distribución de la renta percibida por cada individuo a lo largo de su vida, no es obvio qué

alternativa tomar: (I) valorar simplemente la secuencia de distribuciones de la renta en cada período de tiempo en que hay individuos con vida; (II) valorar la secuencia de las distribuciones correspondientes a las etapas por las que atraviesan todos los individuos, o III) valorar la distribución en la que las rentas individuales han sido conveniente agregadas en un escalar para cada uno de los individuos. La necesidad de elegir una de estas opciones -o una combinación de ellas- representa una novedad fundamental respecto del paradigma vigente en que el problema central es la comparación de dos distribuciones de la renta que provienen de sendas muestras independientes.

Por nuestra parte, en el apartado anterior hemos sugerido un criterio que combina las opciones (III) y (I) en un mundo de sólo dos períodos donde se compara el bienestar social que proporciona una matriz de datos con el que corresponde a una situación de completa inmovilidad a lo largo del tiempo. Tal inmovilidad corresponde al mantenimiento de las posiciones relativas de las rentas individuales durante el primer período. Dada una matriz de datos $X = \{x(1), x(2)\}$, lo que importa en primer lugar es el bienestar que proporciona la distribución de la renta agregada $x_a = x(1) + x(2)$ y, en segundo lugar, la desigualdad de la renta en el segundo período. Ahora bien, ¿cómo extender este criterio a un mundo donde hay más de dos períodos de tiempo? ¿Cúal es, para empezar, la noción de completa inmovilidad relevante en este caso? En la actualidad, no contamos con una respuesta convincente a estas preguntas.

2. En este trabajo hemos dado por resuelto el problema de cómo agregar en un escalar el perfil intertemporal de las rentas percibidas por cada individuo.

Por un lado, hemos supuesto que desde el punto de vista social no está justificado descontar el futuro. Por otro, bajo el supuesto de que todos los individuos atraviesan por las mismas etapas y viven el mismo número de años, hemos resumido indistintamente la experiencia de cada individuo por la renta total a lo largo de su vida o por la renta media.

En principio, no vemos la necesidad de introducir una tasa social de descuento positiva. ¿Pero cómo comparar el perfil de rentas de dos individuos que viven un número distinto de años? En ausencia de un criterio claro, siempre podríamos parametrizar los juicios de valor al respecto definiendo la renta ajustada de cada individuo por la fórmula:

$$z^{i}(\Theta) = \Sigma_{s} x_{s}^{i} \;/ (S)^{\Theta},\ \Theta \in [0,1],$$

donde x_s^i es la renta que el individuo I percibe en la etapas, y S es el número total de etapas. Así, cuando $\Theta = 0$ la renta ajustada coincide con la renta total, cuando $\Theta = 1$ coincide con la renta media y cuando Θ toma un valor intermedio la renta ajustada queda comprendida entre las dos anteriores.

3. Finalmente, es preciso referirse al supuesto de que las observaciones diponibles se refieren a sociedades con el mismo número de individuos. Por supuesto, siempre es posible aplicar en este contexto el principio de invarianza ante réplicas de la población (supuesto P3 en el primer apartado) que se utiliza con profusión en el paradigma vigente. Sin embargo, esto equivale a eludir el problema del tamaño óptimo de la población y a quedar expuesto a la crítica de "la conclusión repugnante" planteada por Parfit (1984). Esta crítica puede ilustrase a

través del ejemplo siguiente. Supongamos una sociedad con una persona rica y diez pobres. De acuerdo con P3, la desigualdad y/o el bienestar en esa sociedad es el mismo que en una sociedad con 100 ricos y 1,000 pobres, un juicio enteramente discutible desde el punto de vista normativo. Aunque no contamos con espacio para una discusión de estos problemas, el lector interesado puede consultar las dos revisiones recientes de la literatura debidas a Broome (1996) y a Blackorby *et al* (1997).

NOTAS

(1) Al reducirnos a estos dos estadísticos de la distribución de la renta, estamos haciendo abstracción del estudio de tramos específicos de la misma. Así, por ejemplo, excluimos el estudio de la pobreza iniciado por Sen (1976).

(2) Véase, por ejemplo, Shorrocks (1980, 1984).

(3) Para una revisión detallada de la literatura desde un punto de vista operativo, véase Ruiz-Castillo (1995).

(4) Véase, por ejemplo Blackorby *et al* (1995). Para una discusión enriquecedora sobre este punto, puede consultarse Broome (1992, y 1994)

REFERENCIAS

Atkinson, A. (1970), "On the Measurement of Inequality," *Journal of Economic Theory*, **2**: 244-263.

Blackorby, C. y D. Donaldson (1978), "Measures of Relative Inequality and their Meaning in Terms of Social Welfare, " *Journal of Economic Theory*, **18**: 59-80.

Blackorby, C. W. Bossert y D. Donaldson (1995), "Intertemporal Population Ethics: Critical-Level Utilitarian Principles", *Econometrica*, **63**: 1303-1320.

Blackorby, C. W. Bossert y D. Donaldson (1997), "Critical-Level Utilitarianism and the Population Dilemma", *Economics and Philosophy*, **13**: 197-230.

Broome, J. (1992), *Counting the Cost of Global Warming*, White Horse Press, Cambridge.

Broome, J. (1994), "Discounting the Future", *Philosophy and Public Affairs*, 128-156.

Broome, J. (1996), "The Welfare Economics of Population", *Oxford Economic Ppaers*, **48**: 128-156.

Chakravarty, S., B. Dutta and J. Weymark (1985), "Ethical Indices of Income Mobility," *Social Choice and Welfare*, **2**: 1-21.

Cowen, T y D. Parfit (1992), "Against the Social Discount Rate", en *Justice between Age Groups and Generations*, P. Lasslet y J. Fishkin (eds.), Yale University Press.

Dalton, H. (1920), "The Measurement of Inequality of Income, " *Economic Journal*, **30**: 348-361.

Dardadoni, V. (1990), "A Note on Multidimensional Inequality Comparisons", mimeo.

Dutta, B. and J. M. Esteban (1992), "Social Welfare and Equality," *Social Choice and Welfare*, **50**: 49-68.

Herrero, C. and A. Villar (1989), "Comparaciones de renta real y evaluaci—n del bienestar, " *Revista de Econom'a Pública*, **2**: 79-101.

Karcher, T., P. Moyes y A. Trannoy (1995), "The Stochastic Dominance Ordering of Income Distributions over Time: The Discounted Sum of the Expected Utilities of Incomes", Capítulo 17 en W.A. Barnett, H. Moulin, M.

Salles y N.J. Schofield (eds), *Social Welfare and Ethics*, Cambridge University Press.

King, M. (1983), "An Index of Inequality: With Applications to Horizontal Equity and Social Mobility," *Econometrica*, **51**: 99-115.

Kolm, S. C. (1976), "Unequal Inequalities I, " *Journal of Economic Theory*, **12**: 416-442.

Kolm, S. C. (1976), "Unequal Inequalities II, " *Journal of Economic Theory*, **13**: 82-111.

Maasoumi, E. y S. Zandvakili (1990), "Generalized Entropy Measures of Mobility for Different Sexes and Income Levels", *Journal of Econometrics*, **43**: 121-134.

McKerlie, D. (1989), "Equality and Time", *Ethics* , **99**: 474-491.

Parfit, D. (1984, *Reasons and Persons*, Oxford University Press.

Ruiz-Castillo, J. (1995), "Income Distribution and Social Welfare: A Review Essay", *Investigaciones Económicas*, **XIX**: 3-34.

Ruiz-Castillo, J. (1997), "Income Mobility, Permutations and Rerankings", Fundación Argentaria, mimeo.

Salas, R. y I. Rabadán (1995), "Cyclical and Vertical Intertemporal Inequality, Redistribution and Estabilization: A Social Welfare Approach", presentado en el Segundo Simposio de la Fundación Argentaria sobre Distribución de la renta y la riqueza.

Sen, A. (1973), *On Economic Inequality*. Oxford: Clarendon Press.

Sen, A. (1976), "Poverty: An Ordinal Approach to Measurement, " **44**: 219-231.

Shorrocks, A. (1980), "The Class of Additively Decomposable Inequality Measurement, " *Econometrica*, **48**: 613-625.

Shorrocks, A. F. (1984), "Inequality Decomposition by Population Subgroups, " *Econometrica*, **52**: 1369-1388.

Tempkin, L (1992), "Intergenerational Inequality", en *Justice between Age Groups and Generations*, P. Lasslet y J. Fishkin (eds.), Yale University Press.