



Grado Universitario en Ingeniería en Tecnologías
Industriales 2016/2017

Trabajo Fin de Grado

La paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen y el teorema de Bell

Iván Díaz Hernando

Tutor

Eduardo Jesús Sánchez Villaseñor

Leganés, 16 de octubre de 2017



Esta obra se encuentra sujeta a la licencia Creative Commons **Reconocimiento - No Comercial - Sin Obra Derivada**

Índice

Prefacio	2
1. Introducción	4
1.1. Conceptos básicos	4
1.2. Argumento EPR	7
2. Espín	9
2.1. Aparato de Stern-Gerlach	13
3. Sistemas compuestos	15
3.1. Singlete	19
3.2. Cálculo de probabilidades con ordenador	22
4. Computaciones cuánticas	25
4.1. Puerta de Hadamard	25
4.2. Puerta de cambio de fase	25
4.3. Puertas para N -qubits	26
4.4. Operaciones elementales	27
4.5. Primeras computaciones cuánticas	28
5. Clasificación de estados	32
5.1. Diferencia entre estados GHZ y estados W	34
5.1.1. Matrices densidad en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$	35
5.1.2. Matrices densidad en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2^n}$	35
5.1.3. Criterio PPT	37
6. Desigualdades de Bell	39
6.1. Correlación perfecta	39
6.2. Situación general	40
7. Teorema de Bell sin desigualdades y sin probabilidad	42
7.1. Sistemas tripartitos	42
7.2. Sistemas bipartitos	43
8. Resultados experimentales	49
9. Conclusiones	54
Apéndices	56

Prefacio

John Stewart Bell nació en Belfast el 28 de junio de 1928. Obtuvo el grado de física experimental en la Universidad de Queen en 1948. Su carrera científica comenzó en Harwell y Malvern, donde realizó cálculos de trayectorias de partículas en aceleradores. En 1956 obtuvo su doctorado en Harwell como especialista en física de partículas elementales y teoría cuántica de campos. Años después se trasladó a los laboratorios del CERN. A pesar de que su trabajo se centró exclusivamente en física de partículas teóricas y diseño de aceleradores, donde aportó notables contribuciones, tenía como afición el estudio de los fundamentos de la mecánica cuántica, lo que le llevó a su mayor y más importante descubrimiento.

Mientras trabajaba con Rudolf Peierls en su tesis, descubrió de manera independiente a G. Liiders y W. Pauli el teorema CPT, uno de los teoremas más básicos de la física. Además, descubrió junto a Roman Jackiw lo que hoy recibe el nombre de la anomalía de Bell-Jackiw-Adler. Otra de sus contribuciones más importantes fue su propuesta de 1967, en la que sugirió que debía existir una teoría de campos *gauge* para describir la interacción débil. Esta idea influyó en gran medida a Martinus Veltman y Gerard 't Hooft, y resultó en un completo entendimiento de la fuerza débil.

Como hemos mencionado anteriormente, aunque no se pueden infravalorar sus aportes en física de aceleradores y teoría de campos, sus contribuciones más importantes fueron precisamente en los fundamentos de la mecánica cuántica. Al parecer, J. Bell mostró interés en el conflicto entre Bohr y Einstein, y se posicionó a favor de las ideas de este último. Él también pensaba que una descripción completa de la mecánica cuántica usando “variables ocultas” sería lo más deseado, puesto que ayudaría a retomar la idea de un mundo realista y objetivo.

Sin embargo, en 1952, David Bohm logró algo que hasta entonces se había proclamado imposible. John von Neumann había probado que ninguna teoría de variables ocultas podía encajar con la mecánica cuántica, pero Bohm consiguió formular dicha teoría, donde cada partícula tenía una posición y un momento bien definidos para todo instante. El conflicto que surgió entre von Neumann y Bohm fue elegantemente resuelto por Bell, que mostró que la prueba de von Neumann contenía una suposición físicamente injustificable. Paradójicamente, justo cuando Bell pareció abrir las puertas para las teorías de variables ocultas, su descubrimiento demostró todo lo contrario. En 1964, publicó el artículo “*On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*” [1], donde mostró que cualquier teoría de variables ocultas que obedece el principio de localidad propuesto por Einstein entraría automáticamente en conflicto con la mecánica cuántica. Este es el conocido *Teorema de Bell*.

No obstante, aunque la mecánica cuántica ya era una teoría consolidada en el momento en el que Bell publicó sus resultados, no existían experimentos que permitiesen descartar el realismo local. Como veremos en la sección 8, la publicación del teorema de Bell motivó la realización de una serie de experimentos que se han ido mejorando cada vez más hasta el día de hoy, confirmando todos ellos la violación de las desigualdades y, por tanto, respaldando la mecánica cuántica y entrando en conflicto con el realismo local.

Actualmente, las desigualdades de Bell y la física de las partículas entrelazadas

se han convertido en la piedra angular de la nueva tecnología basada en la información cuántica. Experimentalmente se ha comprobado que se puede almacenar más de un bit de información en un sistema bipartito, que se puede teletransportar un estado cuántico a largas distancias, y que se puede usar el entrelazamiento cuántico para diseñar métodos criptográficos protegidos por las leyes de la física y no por las habilidades de un ser humano [2]. La computación cuántica promete ser un campo de gran relevancia en el futuro que probablemente tenga el mismo crecimiento exponencial que tuvo en su día toda la electrónica. Es por ello que en este trabajo hemos decidido incluir las bases sobre las que se cimienta esta tecnología.

Es interesante saber que, a pesar de su teorema, John Bell continuó creyendo en las teorías de variables ocultas, que, después de su descubrimiento, tenían que ser no locales. Él fue uno de los pocos que, como Albert Einstein, se dieron cuenta de lo extremadamente extrañas que eran las consecuencias de la mecánica cuántica. Si finalmente resulta que su teoría es la correcta y la definitiva, es muy posible que el *Teorema de Bell* cambie trascendentalmente nuestra visión del mundo. Para él aún no lo era, y eso es un signo de que no estaba dispuesto a ceder fácilmente y cambiar su ideología.

J. Bell murió en 1990, dejando tras su muerte un gran aporte en el mundo de la física, y en cuyo mayor logro se basa este trabajo.

1. Introducción

1.1. Conceptos básicos

En primer lugar, con intención de adentrarnos en el mundo de la mecánica cuántica, vamos a ver las diferencias que existen entre la mecánica clásica y esta rama de la física. También debemos mencionar que este trabajo se enfoca en la mecánica cuántica no relativista, por lo que no estudiaremos los fenómenos de los que se encarga la teoría cuántica de campos.

Las teorías físicas describen el comportamiento de los sistemas físicos dentro de un rango de energías, tamaños, etc. Los “objetos” del mundo físico sobre los que se interesan las teorías físicas se denominan sistemas físicos o, simplemente, sistemas. No resulta difícil enumerar sistemas físicos: una partícula puntual, una partícula obligada a moverse sobre una cierta superficie, el campo electromagnético en una cierta región del espacio... Sin embargo, si uno intenta dar una descripción precisa de sistema se da cuenta de que los sistemas anteriores están descritos, en cierto sentido, en términos de conceptos poco precisos. Para no caer en el campo de la metafísica, es conveniente adoptar un punto de vista operacional. Siguiendo los trabajos de Segal [3], en este trabajo un sistema físico está definido por el conjunto de propiedades físicas que se pueden medir sobre él utilizando dispositivos físicos concretos. De esta manera, un sistema quedará definido por la familia \mathcal{O} de observables. Un observable es cualquier propiedad del sistema que puede ser determinada (observada) por alguna secuencia de operaciones físicas[4]. Por supuesto, en cualquier modelo matemático de “sistema”, el conjunto \mathcal{O} estará equipado con ciertas propiedades algebraicas y topológicas. Dado un sistema físico descrito por \mathcal{O} , cada sistema tendrá asociado un conjunto \mathcal{S} de estados. Los estados están caracterizados por los resultados de las medidas de todos los observables de la siguiente manera: dado un estado $\omega \in \mathcal{S}$, para cualquier $A \in \mathcal{O}$, $\omega(A)$ proporciona el valor esperado sobre todas las medidas del observable A .

Por ejemplo, en mecánica clásica, para el sistema formado por una partícula puntual, los observables son las funciones $A(\vec{x}, \vec{p})$ que dependen de la posición y el momento de la partícula (por ejemplo, el Hamiltoniano del sistema -la energía- o las componentes del momento angular). Por otro lado, los *estados puros* (es decir, aquellos en los que uno tiene el máximo conocimiento sobre el sistema) son el conjunto de todos los pares (\vec{x}, \vec{p}) de posiciones y momentos de la partícula:

$$\mathcal{O} = \{\text{funciones } A(\vec{x}, \vec{p})\}, \quad \mathcal{S}_{\text{puros}} = \{\text{pares } (\vec{x}, \vec{p})\} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

Obviamente, conocido el estado puro (\vec{x}, \vec{p}) , el valor esperado del observable A es $A(\vec{x}, \vec{p})$ y la dispersión en torno a dicho valor medio es cero.

Además de observables y estados, las teorías físicas tienen leyes de evolución que se encargan de describir cómo varía un estado puro con el tiempo. En el ejemplo que estamos considerando, dicha ley de evolución es la segunda ley de Newton, la cual establece que:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)) \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \\ \dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0 \end{array} \right\} \text{datos iniciales}$$

Si definimos la cantidad de movimiento o momento lineal como $\vec{p}(t) = m\dot{\vec{x}}(t)$, podemos reescribir la ecuación diferencial anterior y transformarla en una ecuación diferencial de primer orden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{x}}(t) = \vec{p}(t)/m \\ \dot{\vec{p}}(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t), \vec{p}(t)/m) \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \\ \vec{p}(0) = \vec{p}_0 \end{array} \right\} \text{datos iniciales}$$

Además, si \vec{F} es conservativa, $\vec{F}(\vec{x}) = -(\vec{\nabla}U)(\vec{x})$ y la ecuación de evolución queda controlada por los gradientes del Hamiltoniano:

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + U(\vec{x}).$$

Asimismo, un calculo directo muestra que el Hamiltoniano es constante sobre soluciones de la ecuación de evolución:

$$\frac{d}{dt}H(\vec{x}(t), \vec{p}(t)) = 0.$$

Lo lógico sería pensar que las mismas leyes que rigen el comportamiento de los fenómenos macroscópicos deberían servir también para describir los fenómenos que se producen a nivel atómico y subatómico. Sin embargo, para nuestra sorpresa, la realidad ha demostrado que esto no es así y, en consecuencia, ha llevado a la necesidad de crear un modelo totalmente distinto al empleado en la mecánica clásica que sea capaz de explicar dichos fenómenos. En concreto, para describir un sistema cuántico necesitaremos:

- **Estados puros cuánticos:** Un estado puro cuántico $|\Psi\rangle$ es un vector unitario de un espacio de Hilbert complejo \mathcal{H} . El hecho de que sea unitario implica a su vez que debe ser un vector no nulo. Debemos recordar que un espacio de Hilbert no es otra cosa que un espacio vectorial (de dimensión finita o infinita) con un producto escalar. Dicho espacio está asociado al sistema físico y, dependiendo de qué sistema se estudie, será necesario un tipo u otro de \mathcal{H} . La notación *bra-ket* o notación de Dirac es la notación estándar para describir los estados puros de la mecánica cuántica. Recibe ese nombre porque el producto escalar de dos estados cuánticos se escribe utilizando el “paréntesis angular” (del inglés *angle bracket*), $\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle$, que está formado por una parte izquierda $\langle\Psi_1|$, llamada *bra*, y una parte derecha, $|\Psi_2\rangle$, llamada *ket*[5].
- **Observables cuánticos:** Un observable cuántico es un operador lineal autoadjunto en \mathcal{H} . Todos los operadores importantes de la mecánica cuántica, como la posición, el momento, el momento angular, el espín o la energía; se representan como operadores autoadjuntos en un dominio denso del espacio de Hilbert. La importancia de que sean autoadjuntos reside en que, de esta forma, se les puede aplicar el teorema de la descomposición espectral, que expresa las condiciones bajo las cuales un operador (una matriz en dimensión finita) puede ser diagonalizado[6]. De este modo, los operadores

corresponderán a la cualidad de los observables, mientras que los valores propios de un operador corresponderán a los posibles valores de una medición para ese observable.

- **Ley de evolución:** La ecuación de Schrödinger juega el papel de la segunda ley de Newton en la mecánica cuántica:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{\mathbf{H}}(t) |\Psi(t)\rangle \quad (1)$$

Donde $i = \sqrt{-1}$ representa la unidad imaginaria, $\hbar = h/2\pi$, siendo h la constante de Planck y $\hat{\mathbf{H}}$ es el operador Hamiltoniano. Este operador representa al observable energía del sistema.

La ecuación de Schrödinger original no tenía en cuenta los efectos relativistas y tampoco incorporaba el espín. Más tarde, Pauli introdujo el espín modificando la ecuación y, finalmente, Dirac incorporaría tanto el espín como los efectos relativistas.

Max Born dio a la función de onda una interpretación probabilística, de manera que se abandonó el enfoque de la función de onda como una onda material y pasó a interpretarse de modo más abstracto como una amplitud de probabilidad[7].

Uno de los postulados de la mecánica cuántica [8, 9] establece que la probabilidad de que la medida de un observable \mathbf{A} dé como resultado el valor propio a es

$$P(\mathbf{A} = a|\psi) = |\langle a|\psi\rangle|^2,$$

donde $|a\rangle$ es el autovector asociado a a y el vector $|\psi\rangle$ representa un estado puro (que deberá estar normalizado de manera que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$)

En consecuencia, el valor esperado de las medidas de observable A cuando el sistema está en el estado $|\psi\rangle$ es

$$\langle \mathbf{A} \rangle_\psi = \sum_i a_i |\langle a_i|\psi\rangle|^2 = \langle \psi|\mathbf{A}|\psi\rangle$$

y su dispersión (o incertidumbre) viene dada por la raíz cuadrada de la varianza:

$$\Delta_\psi \mathbf{A} = \sqrt{\langle \psi|\mathbf{A}^2|\psi\rangle - \langle \psi|\mathbf{A}|\psi\rangle^2}$$

Es posible demostrar que el producto de las dispersiones de dos observables sobre el mismo estado está acotado por el principio de incertidumbre de Heisenberg[10]:

$$\Delta_\psi \mathbf{A} \cdot \Delta_\psi \mathbf{B} \geq \frac{1}{2} |\langle \psi|[\mathbf{A}, \mathbf{B}]|\psi\rangle|.$$

En particular, cuando dichos observables son la posición y el momento de una partícula unidimensional se tiene la famosa desigualdad de Heisenberg [9, 10]:

$$\Delta_\psi \mathbf{X} \cdot \Delta_\psi \mathbf{P} \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Por tanto, no se pueden conocer con precisión dos observables (que no conmuten) cuando se realiza una medida sobre un sistema cuántico. Esto supone una de las diferencias fundamentales entre la física clásica y la física cuántica.

Consideremos un observable \mathbf{A} con un autovalor a degenerado, con autovectores (ortogonales y normalizado) $|a, 1\rangle, |a, 2\rangle, \dots, |a, n\rangle$. Si un sistema físico se halla en un estado $|\psi\rangle$, el estado resultante tras la medida ideal de un observable \mathbf{A} cuyo resultado sea justamente a viene descrito por:

$$\frac{\langle a, 1|\psi\rangle|a, 1\rangle + \langle a, 2|\psi\rangle|a, 2\rangle + \dots + \langle a, n|\psi\rangle|a, n\rangle}{\sqrt{|\langle a, 1|\psi\rangle|^2 + |\langle a, 2|\psi\rangle|^2 + \dots + |\langle a, n|\psi\rangle|^2}}.$$

El cambio en el estado $|\psi\rangle$ tras la medición se denomina *reducción o colapso del estado*.

Para una discusión detallada de los postulados de la mecánica cuántica ver capítulo 2 de [11] o [12].

1.2. Argumento EPR

En 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen (EPR) propusieron un experimento para mostrar que la descripción de la mecánica cuántica de la realidad física era incompleta. Para ello, formularon una serie de condiciones que toda teoría consistente y completa debería cumplir [13]:

- **Completitud:** En una teoría física completa, cada elemento de la realidad física debe tener su equivalente en la teoría física.
- **Realidad:** Si, sin perturbar de ningún modo un sistema, podemos predecir con seguridad (por ejemplo, con probabilidad 1) el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de la realidad física correspondiente a esa cantidad física.
- **Localidad:** Los cambios de una partícula no pueden influenciar a otra partícula si ambas están separadas en el espacio de modo que no haya interacción entre ellas. Las acciones instantáneas no son posibles, puesto que supondrían una transmisión de información más rápida que la velocidad de la luz, y esto no puede ocurrir.

En mecánica cuántica, cuando dos cantidades físicas vienen representadas por operadores no conmutables, el conocimiento de uno excluye el conocimiento del otro. Por tanto, o bien la descripción de la realidad dada en mecánica cuántica por la función de onda es incompleta (a), o bien esas dos cantidades no pueden tener realidad simultánea (b). El problema de hacer predicciones concernientes a un sistema basándose en medidas realizadas en otro sistema que previamente había interactuado con él es que conduce a la conclusión de que si (a) es falsa, entonces (b) también lo es.

EPR consideraron un sistema de dos partículas preparado en un estado en el que la posición relativa, $x_1 - x_2$, y el momento total, $p_1 + p_2$, tienen valores definidos. Los operadores para $x_1 - x_2$ y $p_1 + p_2$ conmutan, por lo que existe tal autoestado. Después de finalizar la preparación del estado no hay interacción alguna entre las dos partículas. Midiendo la posición de la partícula 1 se puede predecir con seguridad la posición de la partícula 2. Como la segunda partícula está separada en el espacio de la primera y no hay interacción entre ellas, la medida

sobre la partícula 1 no altera de ningún modo a la partícula 2. Por tanto, de acuerdo al criterio establecido anteriormente, la posición de la partícula 2 debe ser un elemento de realidad. De igual forma, se podría medir el momento de la partícula 1 y predecir con seguridad el momento de la partícula 2, lo que haría del momento de la partícula 2 un elemento de realidad. Puesto que cualquier medida sobre la partícula 1 no tiene ningún efecto físico en la partícula 2, EPR concluyeron que, en esa situación, los valores de x_2 y p_2 son elementos de realidad. Como los operadores correspondientes no tienen autovectores comunes a ambos que pudiesen describir valores definidos para estos dos elementos de realidad, se concluye que la descripción de la realidad proporcionada por el “vector estado de la mecánica” cuántica es incompleta, según lo definido anteriormente (capítulo 20 de [11]).

2. Espín

Como paso previo al estudio del entrelazamiento cuántico conviene hablar del espín. El espín es el momento angular intrínseco de una partícula o de un sistema de partículas. Es un valor fijo y, junto con la masa y la carga eléctrica, es una propiedad básica e intrínseca de todas las partículas elementales.

Cabe recordar que en mecánica clásica una partícula puntual no puede girar sobre sí misma, es decir, no posee momento angular intrínseco. Para buscar alguna analogía clásica debemos considerar el estudio de un sistema de más de una partícula, ya que, en ese caso, el momento angular total de ese sistema se puede separar en dos componentes, la componente del momento del centro de masas, y la componente del momento de una de las partículas referida al centro de masas.

En la figura 1 podemos observar cómo se define el momento angular de una partícula de masa m respecto a un punto O . El momento angular de una partícula con respecto a un punto O es el producto vectorial de su momento lineal \vec{p} con el vector \vec{r} que une el punto O con la posición de la masa puntual.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

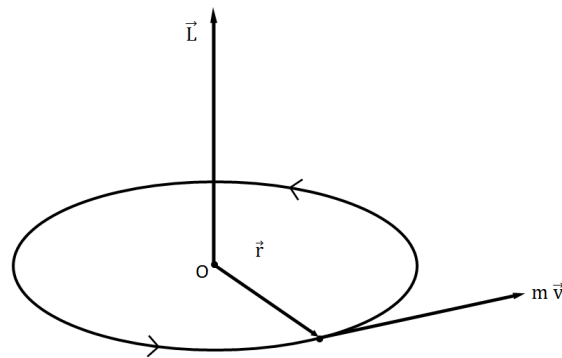


Figura 1: Momento angular

En un sistema de N partículas, el momento angular total del sistema es:

$$\vec{L}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Esta expresión se puede separar en dos partes si se quiere estudiar una partícula concreta de ese sistema, de modo que el momento angular total quede como la suma del momento angular del centro de masas y el momento angular de esa partícula concreta respecto al centro de masas:

$$\vec{L}_{\text{total}} = \vec{L}_{\text{CM}} + \vec{L}_{\text{partícula}} \quad (2)$$

En mecánica cuántica tendremos un momento angular total, que es la suma del momento angular orbital y del espín o momento angular intrínseco,

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \quad (3)$$

donde \vec{J} es el momento angular total, \vec{L} el momento angular orbital y \vec{S} el momento angular intrínseco o espín. Como se puede observar, la expresión (3) es semejante a la (2). Sin embargo, en mecánica cuántica sí que existe un momento angular intrínseco para las partículas puntuales, mientras que en mecánica clásica dicho momento intrínseco no existe y para darle algún sentido hay que recurrir a un sistema de partículas y a una descomposición concreta.

El momento angular orbital cuántico viene dado por el operador

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$$

donde \hat{r} es el operador de posición y \hat{p} el operador momento. En representación de posiciones, $\hat{p} = -i\hbar\nabla$. Si usamos coordenadas cartesianas, $\vec{r} = (x, y, z)$, y los tres operadores del momento angular orbital quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \hat{L}_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Estos operadores cumplen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y.$$

A continuación deduciremos la primera de ellas [14]. Por un lado, usaremos la definición del conmutador:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x. \quad (4)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\hat{L}_x\hat{L}_y\psi &= \left[-i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \left[-i\hbar \left(z \frac{\partial\psi}{\partial x} - x \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) \right] = \\ &= -\hbar^2 \left(y \frac{\partial\psi}{\partial x} + yz \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x} - yz \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - z^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} + zx \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} \right) \\ \hat{L}_y\hat{L}_x\psi &= \left[-i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \left[-i\hbar \left(y \frac{\partial\psi}{\partial z} - z \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \right] = \\ &= -\hbar^2 \left(zy \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} - z^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - zy \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + x \frac{\partial\psi}{\partial y} + xz \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y} \right)\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo en (4):

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x = -\hbar^2 \left(y \frac{\partial}{\partial z} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) = -\frac{\hbar}{i} (-i\hbar) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = i\hbar\hat{L}_z$$

De forma análoga se calculan los conmutadores entre las restantes componentes del momento angular. El hecho de que las componentes del momento angular no

conmuten entre sí implica que no es posible diagonalizarlas simultáneamente y esta propiedad es la responsable de que, en mecánica cuántica, el vector momento angular no tenga un valor bien definido.

Después de haber visto someramente el momento angular orbital, vamos a centrarnos en el espín, que es el observable que verdaderamente nos interesa en el desarrollo de este trabajo. Antes de nada, debemos enumerar una serie de propiedades que presenta el espín para entender su naturaleza [15]:

- El valor del espín está cuantizado, lo que significa que no existen partículas cuyo espín tenga cualquier valor.
- Estos valores siempre son múltiplos enteros de $\hbar/2$, donde \hbar es la constante de Planck dividida entre 2π .
- También debemos aclarar que, como hemos mencionado anteriormente, el espín es una propiedad intrínseca de las partículas, que estas tienen por el mero hecho de existir, y no tiene por qué estar asociado con un giro o movimiento. Esto implica que, al medir el espín de una partícula, su valor (que no la dirección) va a ser independiente de la posición del observador, el cual va a medir el momento angular intrínseco total que tiene la partícula. Esto difiere enormemente de lo que sucedía en mecánica clásica. Ahora bien, como veremos más adelante, si medimos el espín en distintas direcciones, solo obtendremos unos valores posibles, que son sus posibles proyecciones sobre esa dirección. El experimento de Stern y Gerlach (que veremos con más detalle en la próxima sección) fue el que demostró que las partículas tienen propiedades cuánticas intrínsecas, que las medidas efectuadas a las partículas afectan a sus propiedades y que los estados cuánticos necesariamente se describen a través de números complejos.

Además de estas propiedades, las partículas cuánticas presentan otra característica diferenciadora, y es que parecen existir solo dos tipos de partículas elementales: Aquellas que tienen espines semienteros, llamadas fermiones; y aquellas cuyos espines son enteros, llamadas bosones.

Según cual sea el espín s de una partícula, su función de onda asociada tendrá un número determinado de componentes. Por ejemplo, para una partícula de espín 0, su función de onda viene descrita por una única función $\psi(\vec{r})$. Para una de espín $1/2$ su función de onda tendrá dos componentes, $(\psi_+(\vec{r}), \psi_-(\vec{r}))$. Una partícula de espín 1 tendrá una función de onda formada por tres componentes, $(\psi_{+1}(\vec{r}), \psi_0(\vec{r}), \psi_{-1}(\vec{r}))$. En general, la función de onda de una partícula de espín s se representa mediante un vector de $2s + 1$ componentes, cuyas componentes son funciones.

Para fijar ideas, nos centraremos en el caso de partículas de espín $1/2$, donde las componentes cartesianas del observable de espín

$$\vec{\hat{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$$

vienen dadas en términos de las llamadas matrices de Pauli [16]

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mediante

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z.$$

Estas matrices cumplen unas reglas de conmutación similares a las del momento angular orbital que hemos demostrado previamente:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z \quad (5)$$

$$[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x \quad (6)$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y \quad (7)$$

Al igual que ocurría con el momento angular orbital, las componentes del espín no conmutan, lo que quiere decir que son observables incompatibles. Los conmutadores que hemos obtenido se llaman conmutadores de Born, que se caracterizan por tener una incertidumbre. Por ejemplo, si quisiésemos medir \hat{S}_x , alteraríamos cualquier información previa que hubiésemos poseído sobre \hat{S}_y o \hat{S}_z , mientras que si midiésemos \hat{S}_x una y otra vez de manera continua, siempre obtendríamos el mismo valor. Del mismo modo, si tras esas mediciones de \hat{S}_x , decidiésemos medir \hat{S}_y , entonces destruiríamos la información que teníamos de \hat{S}_x , y ahora \hat{S}_x y \hat{S}_z tendrían una incertidumbre que vendría dada por el principio de incertidumbre de Heisenberg (Sección 1.1). En otras palabras, una característica esencial del proceso de medición de espines es la imposibilidad de medir simultáneamente dos o más componentes de espín de una misma partícula.

Las matrices de Pauli son autoadjuntas y unitarias. Por tanto,

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$$

y los autovalores de todas ellas son $\lambda = \pm 1$. En consecuencia, los autovalores de \hat{S}_x, \hat{S}_y y \hat{S}_z son $\pm\hbar/2$. Si calculamos los autovectores y los normalizamos, obtenemos:

- Autoestados de σ_x :

$$\lambda = 1 \rightarrow |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = -1 \rightarrow |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Autoestados de σ_y :

$$\lambda = 1 \rightarrow |+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = -1 \rightarrow |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Autoestados de σ_z :

$$\lambda = 1 \rightarrow |+\rangle_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = -1 \rightarrow |-\rangle_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En general, $|+\rangle_I$ indica que el autovalor del espín es positivo en la dirección I , y $|-\rangle_I$ que es negativo. Como se puede observar, el resultado de medir \hat{S}_z solo puede dar dos posibles valores, $\hat{S}_z = +\hbar/2$ o $\hat{S}_z = -\hbar/2$, que se conocen con el nombre de espín *up* y espín *down*, respectivamente.

En el caso de una partícula de espín s , las distintas componentes del espín vendrán descritas por matrices $(2s + 1) \times (2s + 1)$. Por ejemplo, para $s = 1$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices son autoadjuntas, sus autovalores son $+\hbar$, 0 y $-\hbar$ y cumplen las relaciones de conmutación (5), (6) y (7). En este caso, si calculamos

$$\begin{aligned} \vec{S}^2 &= \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2\hbar\mathbb{I}_3 = s(s+1)\hbar\mathbb{I}_{2s+1} \end{aligned}$$

En general, para espín s , las matrices $(2s + 1) \times (2s + 1)$ autoadjuntas \hat{S}_x^2 , \hat{S}_y^2 , \hat{S}_z^2 tienen autovalores $s\hbar$, $(s-1)\hbar, \dots, -s\hbar$ y se cumple que

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = s(s+1)\hbar\mathbb{I}_{2s+1} \quad (8)$$

2.1. Aparato de Stern-Gerlach

En 1922, Otto Stern y Walther Gerlach realizaron un experimento que ayudó a sentar las bases experimentales de la mecánica cuántica. El experimento de Stern-Gerlach consistía en enviar un haz de átomos de plata a través de un campo magnético no homogéneo. El campo magnético crecía en intensidad en la dirección perpendicular a la que se envía el haz[17].

La energía potencial de un momento magnético μ en un campo magnético B es igual a $-B \cdot \mu$. Si el campo magnético está distribuido en el espacio de manera no homogénea, entonces el gradiente negativo de esta energía potencial se corresponde con una fuerza sobre la partícula, $F = \nabla(B \cdot \mu)$. Como el momento magnético μ es proporcional al espín S , la magnitud de esta fuerza y, por tanto, la desviación de la partícula, dependerá de la componente de espín en la dirección del gradiente del campo magnético. Por tanto, se puede conocer el valor de la componente de espín a partir de la desviación que el campo magnético produce sobre las partículas. Por ejemplo, en el experimento que realizaron Stern y Gerlach, el espín de los diferentes átomos de plata forzó a las partículas de espín $+1/2$ a ser desviadas hacia arriba y a las partículas de espín $-1/2$ a ser desviadas hacia abajo. Este método solo es práctico para átomos y moléculas neutras, ya que la desviación de una partícula cargada producida por la fuerza de Lorentz eclipsaría esta desviación dependiente del espín (capítulo 9 de [11]).

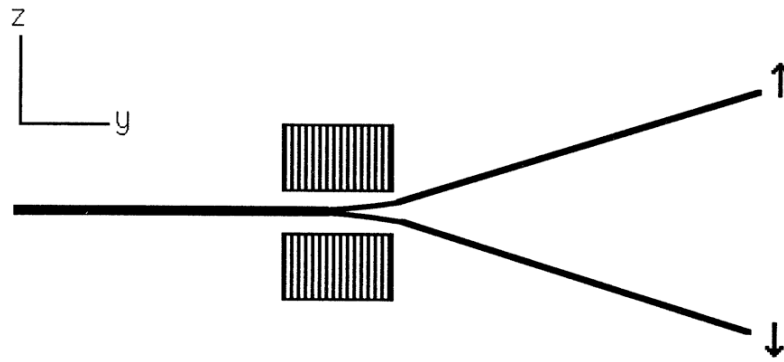


Figura 2: Medición del espín con un aparato de Stern-Gerlach

3. Sistemas compuestos

Un sistema compuesto es un sistema físico formado por más de una componente. Asumiremos que cada una de las componentes puede separarse de las demás de manera que no se vea influenciada por las restantes y, en consecuencia, pueda ser descrita sin hacer referencia al resto. Los sistemas bipartitos son aquellos sistemas formados por dos componentes. Consideremos un sistema bipartito en el cual el operador $\hat{A}^{(1)}$ represente un observable de la primera componente y el $\hat{B}^{(2)}$ un observable de la segunda componente. Si las dos componentes pueden ser separadas de modo que no se influyan entre sí, entonces debería ser posible describir una de ellas sin hacer referencia a la otra y, además, la descripción del sistema combinado debería ser compatible con las descripciones separadas. En particular, debería ser posible preparar estados para cada componente de forma independiente (lo cual no quiere decir que todos los estados del sistema compuesto deban ser de este tipo). Supongamos que preparamos a la primera componente en un autoestado $|a\rangle^{(1)} \in \mathcal{H}^{(1)}$ de $\hat{A}^{(1)}$ y a la segunda en un autoestado $|b\rangle^{(2)} \in \mathcal{H}^{(2)}$ de $\hat{B}^{(2)}$. Puesto que las componentes 1 y 2 pueden ser manipuladas independientemente, debe existir un estado puro $|a, b\rangle$ del sistema compuesto que describa dicha combinación (capítulo 3 de [11]). Tal estado es el *producto tensorial* (o *producto de Kronecker*):

$$|a, b\rangle := |a\rangle^{(1)} \otimes |b\rangle^{(2)} \in \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}.$$

Antes de explicar en detalle qué es el producto tensorial, es importante señalar cómo se construyen sistemas compuestos en mecánica clásica. En mecánica clásica, en el caso simplificado de partículas puntuales moviéndose en una dimensión espacial, el espacio de estados está compuesto por vectores $(x, p) \in \mathbb{R}^2$ pertenecientes a un espacio de dimensión 2. Si consideramos un sistema bipartito formado por dos de tales partículas, los estados del sistema vendrán descritos por vectores $(x_1, p_1, x_2, p_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ pertenecientes a un espacio de cuatro dimensiones. En general, para un sistema formado por N -partículas que se mueven en una dimensión, los estados son vectores $(x_1, p_1, x_2, p_2, \dots, x_N, p_N) \in \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2N}$. Como vemos, la dimensión del espacio de estados es $2N$.

Veamos qué sucede con los sistemas cuánticos compuestos. Por simplicidad, estudiaremos el caso de sistemas compuestos de partículas de espín $1/2$. Si solamente tenemos una partícula, tal y como vimos en la sección 2, los estados pertenecen a un espacio de Hilbert complejo de dimensión 2, $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^2$. Un sistema cuántico formado por dos partículas de espín $1/2$ tiene un espacio de estados $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ de dimensión 4. En general, un sistema de N -partículas de espín $1/2$ tiene un espacio de Hilbert de estados $\mathcal{H}_N = \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2$ de dimensión 2^N .

Estudiemos más detalladamente el caso de un sistema bipartito formado por dos partículas de espín $1/2$. Para una sola partícula de espín $1/2$, tenemos que la base canónica del espacio de estados $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^2$ está formada por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que se corresponden, respectivamente, con los autovectores $|+\rangle$ y $|-\rangle$ de la componente z del espín. Si tenemos ahora dos partículas de espín $1/2$, la base

de estados de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ estará formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} |+\rangle \otimes |+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |+\rangle \otimes |-\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |-\rangle \otimes |+\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |-\rangle \otimes |-\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un observable importante en este espacio de estados es el espín total \hat{S} del sistema

$$\hat{S} := \hat{S}^{(1)} + \hat{S}^{(2)} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_x \\ \sigma_y \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_y \\ \sigma_z \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_z \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_x \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que $\hat{S} = \hat{S}^{(1)} + \hat{S}^{(2)} = (S_x, S_y, S_z)$, donde S_x, S_y, S_z son tres observables no compatibles, ya que cumplen las reglas de conmutación del momento angular (5)-(7), e indican los espines totales en las direcciones x, y y z , respectivamente. Explícitamente:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix}, S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El observable \hat{S}^2 tiene cuatro autovalores: 0, 2, 2, 2. De la ecuación (8) se puede obtener que los espines totales del sistema correspondientes a los posibles autovalores de \hat{S}^2 son:

- Para el autovalor 0, $0 = s(s+1) \rightarrow s = 0$
- Para el autovalor 2, $2 = s(s+1) \rightarrow s = 1$

Asimismo, los autovectores de \hat{S}^2 son:

- Para $s = 0$, un autovector normalizado es

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Para $s = 1$, tres autovectores normalizados son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es posible reescribir dichos autoestados haciendo uso de los vectores $|+\rangle$ y $|-\rangle$. En concreto:

- Para el valor del espín $s = 0$, se tiene que:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A este estado se le denomina singlete de espín 0.

- Para el valor del espín $s = 1$, los tres autoestados son:

$$|+\rangle \otimes |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|-\rangle \otimes |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Estos tres estados forman el denominado triplete de espín 1.

Si nos fijamos ahora en la tercera componente S_z del espín total se cumple que:

- Sobre el estado singlete (espín 0):

$$S_z \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso el espín total del sistema es 0 y la componente del espín en la dirección z es 0. Habitualmente a este estado se le representa mediante $|0, 0\rangle$, donde el primer término indica el valor del espín total y el segundo el de su componente en la dirección z .

- Sobre los estados del triplete de espín 1:

- Estado $|+\rangle \otimes |+\rangle$:

$$S_z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, este vector tiene espín total 1 y también valor 1 de la componente z del espín total. Haciendo uso de la nueva notación,

$$|1, 1\rangle := |+\rangle \otimes |+\rangle.$$

- Estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle)$:

$$S_z \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como se observa, este estado va ligado al espín total de valor 1 y a un valor 0 en la tercera componente del espín total. Por consiguiente, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle)$ puede denotar mediante $|1, 0\rangle$.

- Estado $|-\rangle \otimes |-\rangle$:

$$S_z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo, el estado $|-\rangle \otimes |-\rangle$ suele denotarse mediante $|1, -1\rangle$

3.1. Singlete

El estado singlete desempeña un papel importante en la mecánica cuántica, puesto que presenta unas cualidades que hacen de él uno de los estados más apropiados dentro de los sistemas bipartitos para estudiar las desigualdades de Bell. Normalmente, el estado singlete se define como

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle)$$

donde los vectores $|+\rangle$ y $|-\rangle$ representan los estados de espín *up* y *down* con componente $+1/2$ y $-1/2$ en una dirección z dada (como veremos más adelante, la elección de z es arbitraria debido a la simetría esférica del estado). En principio, se podría pensar que existe un estado singlete distinto para cada dirección \vec{n} elegida, definido a través de la expresión:

$$|\psi_{\vec{n}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+; \vec{n}\rangle \otimes |-\; \vec{n}\rangle - |-\; \vec{n}\rangle \otimes |+; \vec{n}\rangle).$$

En esta ecuación, $|+; \vec{n}\rangle$ y $|-\; \vec{n}\rangle$ son los estados de espín *up* y *down* en la dirección \vec{n} [18], caracterizados por

$$\begin{aligned} \sigma_{\vec{n}}|+; \vec{n}\rangle &= +|+; \vec{n}\rangle, \\ \sigma_{\vec{n}}|-\; \vec{n}\rangle &= -|-\; \vec{n}\rangle, \end{aligned}$$

siendo $\sigma_{\vec{n}}$ la componente en la dirección $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ del operador de Pauli $\vec{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\vec{n}} &= \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z \\ &= \begin{pmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & -n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Sin embargo, si desarrollamos $|+; \vec{n}\rangle$ y $|-\; \vec{n}\rangle$ en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} |+; \vec{n}\rangle &= e^{-\phi/2} \cos(\theta/2)|+\rangle + e^{i\phi/2} \sin(\theta/2)|-\rangle \\ |-\; \vec{n}\rangle &= -e^{-\phi/2} \sin(\theta/2)|+\rangle + e^{i\phi/2} \cos(\theta/2)|-\rangle \end{aligned}$$

y, por tanto, mediante un cálculo directo se llega a que

$$|\psi_{\vec{n}}\rangle = |\psi_0\rangle \quad \forall \vec{n}.$$

Esto demuestra que el estado singlete es invariante bajo rotaciones y que, para describirlo, no es necesario especificar ninguna dirección. Otra manera de demostrar la simetría esférica es usar que, tal y como vimos en la sección anterior, el espín total del estado singlete es 0. Esto implica que si se mide una componente del espín de una de las dos partículas, se obtienen como posibles resultados $+1/2$ o $-1/2$ con igual probabilidad, independientemente de la dirección que se elija. Por otro lado, si se miden las componentes del espín de las dos partículas en la misma dirección, sea cual sea, se obtienen valores opuestos; mientras que si medimos las componentes del espín de las dos partículas en dirección opuesta, obtenemos el mismo valor. Por tanto, existe una correlación negativa perfecta entre ambos espines [19].

El experimento ideal propuesto por EPR no es un modelo adecuado con el que realizar un experimento real (capítulo 20 de [11]). No es práctico preparar un estado inicial (un autoestado de la posición relativa y el momento total) e, incluso si se pudiese preparar, no tendría una existencia transitoria, ya que un autoestado de la posición relativa no puede ser un estado estacionario. Bohm propuso un experimento más realista que seguía ilustrando los mismos principios. Consideró un sistema de dos átomos, cada uno de espín $1/2$, y preparados en un estado de espín total 0. (Ciertas moléculas diatómicas tienen estados excitados inestables con esas propiedades). Este estado de espín singlete para las dos partículas es justamente el estado

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle).$$

Aunque el estado orbital no es estacionario, las interacciones no involucran al espín, por lo que el espín no cambiará. Las partículas pueden separarse y, cuando están lo suficientemente alejadas como para que no haya interacción entre ellas, se puede medir la componente z del espín de la partícula 1. Por tanto, se puede predecir con seguridad y sin perturbar de ningún modo a la segunda partícula, que la componente z del espín de la partícula 2 debe tener el valor contrario al de la partícula 1, lo que implica que $\sigma_z^{(2)}$ es un elemento de realidad de acuerdo con el criterio EPR. No obstante, el singlete es invariante a la rotación y, por tanto, presenta la misma forma en términos de los vectores espín *up* y espín *down* sea cual sea la dirección que se elija para dichos vectores. Esto sugiere que, según la definición de elementos de realidad de EPR, todas las componentes de espín de la segunda partícula tienen valores bien definidos antes de efectuar ninguna medida sobre dicha partícula. Otro tanto puede decirse para las componentes de espín de la primera partícula. Este es el modelo del singlete con variables ocultas locales y, de acuerdo con esto, la mecánica cuántica no es una descripción completa de la realidad física.

Salvo por esta reafirmación del argumento EPR en términos de un experimento práctico, no hubo más progresos hasta 1964, cuando a J. S. Bell se le ocurrió considerar las correlaciones no solo entre componentes de espín en la misma

dirección espacial, como $\sigma_z^{(1)}$ y $\sigma_z^{(2)}$; sino también entre componentes de espín en direcciones arbitrarias.

Si denotamos como $\sigma_{\vec{n}_1}$ a la componente del operador de Pauli en la dirección del vector unitario \vec{n}_1 y como $\sigma_{\vec{n}_2}$ a la componente en la dirección \vec{n}_2 , y tomamos el eje z como la dirección de \vec{n}_1 y como \vec{n}_2 un vector coplanar a este con un ángulo θ , los cálculos se simplifican, de manera que el observable (9) queda en la forma:

$$\sigma_{\vec{n}_1} = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\vec{n}_2} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -i \operatorname{sen} \theta \\ i \operatorname{sen} \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Si calculamos el observable $\sigma_{\vec{n}_1}^{(1)} \otimes \sigma_{\vec{n}_2}^{(2)}$ para el sistema de las dos partículas de espín 1/2:

$$\sigma_{\vec{n}_1}^{(1)} \otimes \sigma_{\vec{n}_2}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos \theta & -i \operatorname{sen} \theta \\ i \operatorname{sen} \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Explícitamente:

$$\sigma_{\vec{n}_1}^{(1)} \otimes \sigma_{\vec{n}_2}^{(2)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -i \operatorname{sen} \theta & 0 & 0 \\ i \operatorname{sen} \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \theta & i \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 0 & -i \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

En coordenadas, el estado singlete tiene la forma

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El valor esperado del observable $\sigma_{\vec{n}_1}^{(1)} \otimes \sigma_{\vec{n}_2}^{(2)}$ es:

$$\langle \psi_0 | \sigma_{\vec{n}_1}^{(1)} \otimes \sigma_{\vec{n}_2}^{(2)} | \psi_0 \rangle = \frac{1}{2} (0, 1, -1, 0) \begin{pmatrix} \cos \theta & -i \operatorname{sen} \theta & 0 & 0 \\ i \operatorname{sen} \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \theta & i \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 0 & -i \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, sin más que multiplicar dichas matrices, se tiene que

$$\langle \psi_0 | \sigma_{\vec{n}_1}^{(1)} \otimes \sigma_{\vec{n}_2}^{(2)} | \psi_0 \rangle = -\cos \theta \quad (10)$$

donde θ es el ángulo entre las direcciones \vec{n}_1 y \vec{n}_2 .

En la sección 6 veremos que este resultado lleva al incumplimiento de las desigualdades de Bell por parte del estado singlete y que, por tanto, entrará en conflicto con el principio de localidad de Einstein.

3.2. Cálculo de probabilidades con ordenador

En esta sección vamos a mostrar cómo se puede simular fácilmente con un ordenador las mediciones sobre estados cuánticos y, de esa forma, comprobar las probabilidades que se obtienen cuando se realiza un gran número de ensayos. Proporcionaremos un código escrito con MATHEMATICA que sirve para simular medidas sobre N -qubits.

El *bit* es la unidad más pequeña de información en la informática clásica. Puede tomar solamente dos posibles valores, 0 y 1. Para guardar físicamente estos valores, se puede usar, por ejemplo, un condensador que tenga dos niveles distintos de carga que representen el 0 y el 1. En los ordenadores cuánticos, el *bit* es reemplazado por el *qubit*, que consiste en un sistema cuántico cuyo espacio de Hilbert tiene dimensión 2 [20]. A los vectores de la base de estados los denotaremos mediante $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

El primer paso al ejecutar el programa es elegir el número N de qubits. Por ejemplo, si consideramos 3 qubits, para inicializar el sistema definimos un vector columna formado por las $2^3 = 8$ amplitudes de probabilidad que constituyen el estado cuántico general, el cual se define como la superposición de los ocho estados de la base. Hemos llamado a este vector $|\Psi\rangle$:

$$|\Psi\rangle = a|000\rangle + b|001\rangle + c|010\rangle + d|011\rangle + e|100\rangle + f|101\rangle + g|110\rangle + h|111\rangle$$

Las componentes a, \dots, h de este vector son números complejos que pueden tomar cualquier valor siempre y cuando cumplan que la suma de los cuadrados de las ocho componentes valga 1, es decir, siempre que el vector esté normalizado. Esto debe ser así si queremos que el resultado de las medidas tenga una interpretación probabilística, de modo que la probabilidad de medir cada estado de la base venga dada por el valor absoluto de su amplitud correspondiente. Para asegurarnos de que el vector definido es válido, se puede comprobar si está normalizado antes de llegar al siguiente paso.

```

1
2 Medida[Psi_, numqubits_] :=
3   Module[{r = RandomReal[WorkingPrecision -> 30]},
4     Min[Flatten[Position[Table[Boole[(r - Sum[Map[Abs[#]^2 &,
5       \[Psi]]][[k]], {k, 1, 1}]]][[1]] < 0], {1, 1, 2^numqubits
6       }], 1]]]/.
7     Table[n ->StringJoin["|", StringJoin[Table["0",
8       {k, 1, numqubits - Length[IntegerDigits[n - 1, 2]]}],
9       IntegerString[n - 1, 2], ">"], {n, 1, 2^numqubits}]]
10
11 Experimento[n_, numqubits_] := Table[Medida[\[Psi],
12   numqubits], {k, 1, n}];

```

Procedemos a explicar el funcionamiento del algoritmo. La función MEDIDA actúa sobre estados cuánticos de N qubits y simula una medida de las componentes z de N espines en el estado correspondiente. Para fijar ideas, en lo que sigue tomaremos $N = 3$. Su funcionamiento es el siguiente:

En primer lugar, se genera un número aleatorio entre 0 y 1 (RANDOMREAL). Si este número, al que hemos llamado r , valiese 1, el algoritmo no funcionaría. Para solventar este problema, establecemos que el número generado tenga una precisión decimal de 30 dígitos, de modo que la probabilidad de que salga 1 sea prácticamente nula.

A continuación, se compara este número con el cuadrado de la primera amplitud. Si el número aleatorio es menor que dicho valor, significa que el resultado de la medida es $|000\rangle$, si no, lo compara de nuevo con la suma de los cuadrados de la primera y segunda amplitud. En este caso, si r es menor, significa que la medida resulta ser $|001\rangle$. Si nuevamente r es mayor, se comparará con la suma de los cuadrados de las tres primeras componentes, y así sucesivamente. El algoritmo está diseñado de esta forma para que respete la interpretación probabilística que se ha impuesto al comienzo del programa.

Para realizar la comparación de r en cada paso, se le resta el valor de las componentes que estén implicadas en ese paso, y se comprueba si el resultado es un valor positivo o negativo con la función BOOLE. Esta función da un valor de salida 0 cuando el resultado es positivo, y 1 cuando es negativo. De este modo, se puede detectar en qué posición se produce el cambio que nos interesa.

Si hacemos que el algoritmo actúe siempre hasta la última componente y usamos la función TABLE para almacenar los ocho valores en una lista, solo quedará ver en qué posición se encuentra el primer 1 para saber el resultado de la medición. La función POSITION nos da todas las posiciones en las que el 1 aparece. El último paso es tan sencillo como hallar el valor más pequeño de la lista para conocer la primera posición. Por último, se hace una asignación de cada posición con su estado correspondiente.

Finalmente, simulamos una tanda de n medidas sobre el estado cuántico para ver el resultado y comprobar que, efectivamente, la probabilidad de que midamos un estado de la base viene dada por el módulo al cuadrado de su amplitud. La función EXPERIMENTO recoge el resultado de las n medidas y la función CONTADOR, como su propio nombre indica, cuenta el número de veces que se da cada resultado (frecuencia absoluta).

Vamos a ilustrarlo con un ejemplo, en el que nuevamente utilizaremos un sistema de 3 qubits en un estado Ψ . Por ejemplo:

$$|\Psi\rangle = |000\rangle + |010\rangle + |111\rangle$$

Una vez que estemos dentro del programa, debemos inicializar el estado como hemos explicado anteriormente. De este modo, tenemos que:

```
1 \[Psi] = {{1}, {0}, {1}, {0}, {0}, {0}, {0}, {1}}/Sqrt[3]
```

Se puede comprobar que el vector formado por las amplitudes está normalizado. Ahora procedemos a utilizar el algoritmo:

```
1 Medida[\[Psi], 3]
2 "|000>"
3
4 Experimento[n_, numqubits_] := Table[Medida[\[Psi],
   numqubits], {k, 1, n}];
```



```
5
6 Contador[a_, s_] := Count[a, s]
7
8 a = Experimento[300, 3];
9
10 Contador[a, "|000>"]
11 Contador[a, "|010>"]
12 Contador[a, "|111>"]
13
14 107
15
16 94
17
18 99
```

Lo primero que hemos hecho es llamar a la función MEDIDA para que actúe sobre el estado Ψ y especificar que estamos trabajando con 3 qubits. Después hemos llamado a a la tabla de resultados que genera la función EXPERIMENTO que, en este caso, corresponde con los datos de 300 mediciones. Finalmente, hemos usado la función CONTADOR para saber el número de veces que se obtiene cada posible resultado. En el ejemplo mostrado, de las 300 mediciones realizadas, en 107 de ellas se ha obtenido el estado $|000\rangle$, en 94 el $|010\rangle$ y en 99 el $|111\rangle$. Es decir, cada estado aparece como resultado con una probabilidad de aproximadamente $1/3$, lo que confirma el comportamiento probabilístico de la función de onda.

4. Computaciones cuánticas

En esta sección haremos una pequeña referencia a la computación cuántica con una breve introducción a las puertas cuánticas más utilizadas [20, 21]. Estas puertas serían el equivalente a las puertas lógicas AND, OR y NOT tan empleadas en la informática clásica. La característica fundamental que deben cumplir las puertas cuánticas es que no deben colapsar el estado del sistema cuando realicen operaciones sobre él, cómo sucedía al realizar una medición de un sistema cuántico. Partiendo de esta premisa, un sistema cuántico que no está siendo perturbado por ningún agente externo viene descrito por la ecuación de Schrödinger (1):

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi\rangle$$

En un ordenador cuántico, el Hamiltoniano \hat{H} debe variar con el tiempo de modo que la ecuación (1) resulte en las operaciones cuánticas deseadas realizadas por las puertas. Aplicar la ecuación de Schrödinger durante un periodo de tiempo es equivalente a aplicar un operador unitario sobre $|\Psi\rangle$. Por tanto, toda operación llevada a cabo por una puerta cuántica debe realizarse aplicando un operador unitario \hat{U} al estado $|\Psi\rangle$:

$$|\Psi\rangle \mapsto \hat{U}|\Psi\rangle$$

donde $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \mathbb{I}$ (definición de unitario).

4.1. Puerta de Hadamard

La puerta de Hadamard es una de las puertas más usadas en computación cuántica. Cuando actúa sobre un solo qubit, la puerta de Hadamard es de la forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

donde \hat{H} representa la puerta de Hadamard y no debe confundirse con el Hamiltoniano.

Cuando se aplica una puerta de Hadamard a cualquier estado de la base, la puerta da como resultado una superposición de los estados de la base. Sin embargo, si la puerta de Hadamard es aplicada a una superposición de estados de la base, transforma esta superposición en uno de los estados de la base.

4.2. Puerta de cambio de fase

La puerta de cambio de fase también desempeña un papel importante en la computación cuántica. Para el caso de un solo qubit, la puerta de cambio de fase se define como:

$$\hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Si se aplica sobre un estado $|\Psi\rangle$ de un qubit con amplitudes a y b :

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\hat{R}_\theta|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ e^{i\theta}b \end{pmatrix}$$

Se observa que las probabilidades $|a|^2$ y $|b|^2$ de encontrar el qubit en cada uno de los estados de la base no cambia, pero la fase relativa de las dos amplitudes sí. Aunque una fase cuántica no puede ser medida directamente, el cambio de fase provocado por la puerta puede tener consecuencias si más adelante se aplican nuevas operaciones cuánticas al qubit antes de que sea medido.

4.3. Puertas para N -qubits

Un sistema de N -qubits tiene 2^N estados de la base, por lo que una puerta cuántica que actúe sobre el sistema deberá estar representada por una matriz unitaria de dimensión $2^N \times 2^N$. Esta matriz se obtiene a partir de las matrices 2×2 de las ecuaciones (11) y (12) mediante el producto tensorial con la identidad. Por ejemplo, para el caso de 3 qubits, la operación en la que se aplica sobre el primer qubit la puerta de Hadamard es:

$$\hat{H}^{(1)} = \hat{H} \otimes \hat{I} \otimes \hat{I} \quad (13)$$

donde el superíndice 1 indica que la puerta actúa sobre el qubit 1. Esta puerta no causa ningún efecto en los qubits 2 y 3. Análogamente, los operadores para aplicar una puerta de Hadamard a los qubits 2 y 3 son, respectivamente:

$$\hat{H}^{(2)} = \hat{I} \otimes \hat{H} \otimes \hat{I} \quad (14)$$

$$\hat{H}^{(3)} = \hat{I} \otimes \hat{I} \otimes \hat{H} \quad (15)$$

Usando (11), las ecuaciones (13), (14) y (15) se reescriben en forma matricial quedando:

$$\hat{H}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\hat{H}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\hat{H}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

De manera similar, pueden obtenerse las matrices para las puertas de cambio de fase que actúen en los qubits 1, 2 ó 3. Por ejemplo, la puerta de cambio de fase para el qubit 3 es:

$$\hat{R}_\theta^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Esta matriz presenta el mismo patrón que $\hat{H}^{(3)}$, con cuatro copias de la matriz 2×2 original dispuestas a lo largo de la diagonal de la matriz 8×8 .

4.4. Operaciones elementales

Antes de realizar cálculos más complejos, y con el objetivo de entender la acción que realiza cada tipo de puerta, conviene ver algún ejemplo del efecto que produce una puerta de Hadamard sobre un sistema cuántico (ya vimos uno con la puerta de cambio de fase). Si tomamos, por ejemplo, como estado inicial el estado Ψ (podemos tomar cualquier estado siempre que el vector formado por sus amplitudes sea unitario):

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando la puerta de Hadamard en el qubit 1 obtenemos:

$$\hat{H}^{(1)}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Partiendo del estado $|100\rangle$, al aplicar la puerta de Hadamard vemos que crea una superposición de los estados $|000\rangle$ y $|100\rangle$. Esto tiene sentido, ya que al estar aplicada sobre el qubit 1, crea una superposición del estado de la base inicial y de aquel que se diferencia de este solamente en el primer qubit, es decir, el $|000\rangle$. En este punto se podría comprobar que $\hat{H}^{(1)}\hat{H}^{(1)}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$, puesto que, como $\hat{H}^{(1)}$ es un operador unitario, $\hat{H}^{(1)}\hat{H}^{(1)} = I$. Por tanto, aplicar dos veces la misma puerta de Hadamard sobre el sistema no produce efectos netos, pues el estado final y el inicial coinciden.

Por dar otro ejemplo, aplicaremos ahora la puerta de Hadamard sobre el qubit 2:

$$\hat{H}^{(2)}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, la puerta crea una superposición de los estados $|100\rangle$ y $|110\rangle$, es decir, crea una superposición del estado inicial con el estado de la base cuya única diferencia se encuentra en el valor del segundo qubit.

4.5. Primeras computaciones cuánticas

En este apartado realizaremos 4 ejemplos de computaciones cuánticas elementales que vienen representados en la figura 3. Para interpretar los esquemas, fijémonos en el ejemplo *d*. Se parte de un estado inicial $|000\rangle$ al que se aplica, consecutivamente, una puerta de Hadamard (representada por una caja con una H dentro), una puerta de cambio de fase (representada por una caja con el valor de la fase en ella) y, de nuevo, una puerta de Hadamard en el tercer qubit. Posteriormente, se mide el sistema, acción que viene representada por los "medidores" de la derecha. Las puertas se aplican a $|\Psi\rangle$ en el mismo orden que se muestra en cada circuito.

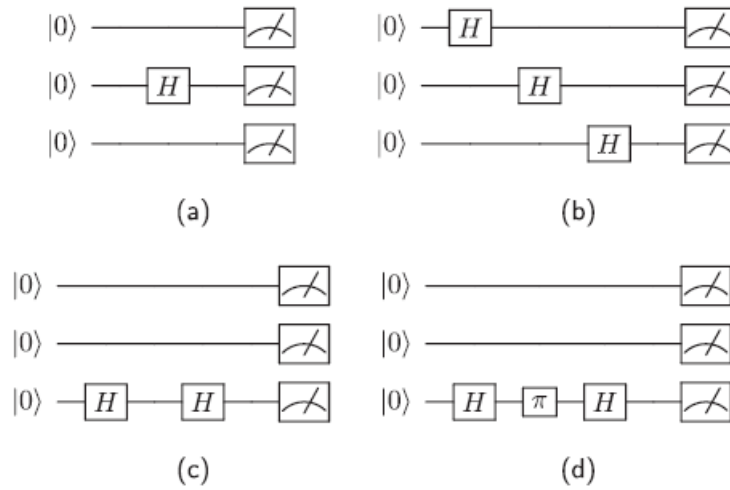


Figura 3: Esquemas de 4 cálculos distintos con 3 qubits

Ejemplo (a)

En este ejemplo simularemos un número determinado de veces la aplicación sobre el estado $|000\rangle$ de una puerta de Hadamard en el segundo qubit y después la medición del resultado. Por tanto, en primer lugar, realizamos la operación que representa la puerta de Hadamard:

$$\hat{H}^{(2)}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al aplicar la puerta de Hadamard sobre el segundo qubit, transforma el estado inicial en una superposición de los estados $|000\rangle$ y $|010\rangle$, lo que tiene sentido, puesto que el estado $|010\rangle$ es el que se diferencia solamente en el segundo qubit con el estado de partida. Para llevar a cabo la simulación de las medidas, haremos uso del código empleado en la sección 3.2. Al simular 300 veces el experimento, observamos que aproximadamente en la mitad de las mediciones el resultado es $|000\rangle$ y en la otra mitad $|010\rangle$. Por tanto, se cumple que el resultado varía aleatoriamente entre esas dos posibilidades pero respeta la probabilidad de que cada una de ellas suceda.

Ejemplo (b)

Ahora aplicaremos una puerta de Hadamard en cada uno de los 3 qubits y mediremos el resultado final. Como siempre, simularemos este proceso un número

determinado de veces para ver qué estadísticas se obtienen con las mediciones. Aplicar una puerta de Hadamard en cada uno de los 3 qubits es equivalente a calcular $\hat{H}^{(3)}\hat{H}^{(2)}\hat{H}^{(1)}|\Psi\rangle$, operación que da como resultado:

$$\hat{H}^{(3)}\hat{H}^{(2)}\hat{H}^{(1)}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que, en este caso, al realizar la multiplicación de las matrices el orden no importa, ya que cada una de ellas solo afecta a uno de los qubits. El resultado que se obtiene es una superposición de los 8 estados de la base. Esto se debe a lo siguiente: $\hat{H}^{(1)}$ daría una superposición de dos estados diferenciados solo en el primer qubit ($|000\rangle$ y $|100\rangle$). Sin embargo, ahora se aplica adicionalmente $\hat{H}^{(2)}$ a este estado, lo que genera una superposición de los estados que se diferencian en el segundo qubit a partir de la superposición creada por $\hat{H}^{(1)}$, es decir, una superposición con $|000\rangle$, $|010\rangle$, $|100\rangle$ y $|110\rangle$. Del mismo modo, al aplicar $\hat{H}^{(3)}$ sobre este estado, se obtiene la superposición que hemos obtenido como resultado.

Se observa que al realizar 800 simulaciones, el resultado varía aleatoriamente entre los ocho estados de la base, con aproximadamente la misma probabilidad de obtener cada uno de ellos: $1/8$. Transformar un registro de N-qubits en una superposición de todos sus 2^N estados de la base aplicando una puerta de Hadamard a cada uno de sus qubits es uno de los bloques básicos más importantes de muchos algoritmos cuánticos.

Ejemplo (c)

Consiste en aplicar dos puertas de Hadamard seguidas al tercer qubit y medir el resultado. Como mencionamos anteriormente, la segunda puerta deshace el efecto creado por la primera, ya que retorna el qubit a su estado inicial.

$$\hat{H}^{(3)}\hat{H}^{(3)}|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |\Psi\rangle$$

Por consiguiente, el resultado de las medidas es siempre $|000\rangle$, como podemos comprobar en la simulación.

Ejemplo (d)

Como último ejemplo, aplicaremos sobre el tercer qubit una puerta de Hadamard seguida de una de cambio de fase con valor π y, a continuación, otra

puerta de Hadamard. Finalmente, mediremos el sistema final. Por tanto, primero hallamos el resultado de aplicar las tres puertas cuánticas:

$$\hat{H}^{(3)} \hat{R}_\pi^{(3)} \hat{H}^{(3)} |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La primera puerta genera la superposición de los estados $1/\sqrt{2}(|000\rangle + |001\rangle)$. La puerta de cambio de fase, al tener un valor de π , multiplica por -1 el segundo término, quedando $1/\sqrt{2}(|000\rangle - |001\rangle)$. Al aplicar otra puerta de Hadamard sobre el tercer qubit, obtenemos $1/2(|000\rangle + |001\rangle - |000\rangle + |001\rangle) = |001\rangle$. Se observa que el aplicar una puerta de cambio de fase para cambiar la fase de amplitudes cuánticas realmente puede cambiar los resultados de los cálculos

Al realizar el experimento (n) veces, vemos que el resultado de todas las mediciones es $|001\rangle$, coincidiendo con el estado final que se obtiene después de haber aplicado las tres puertas.

Si en este último caso alterásemos el orden de las puertas e hiciésemos, por ejemplo

$$\hat{H}^{(3)} \hat{H}^{(3)} \hat{R}_\pi^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vemos que no se obtiene el mismo resultado, puesto que dos puertas de Hadamard seguidas no provocan cambios netos y la matriz de cambio de fase no afecta a los estados de la base impares, como el de este caso. En conclusión, el orden en el que se colocan las puertas cuánticas es de vital importancia.

5. Clasificación de estados

Un estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ es *entrelazado* si no puede expresarse como producto tensorial de estados de cada uno de los subsistemas, 1 y 2:

$$|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

Por otro lado, los estados de la forma $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ reciben el nombre de estados *producto*.

En general, para sistemas N -partitos, un estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}^{(N)}$ se denomina estado producto si puede ser escrito en la forma

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_N\rangle, \quad |\psi_i\rangle \in \mathcal{H}^{(i)}.$$

En caso contrario, el estado se denomina *entrelazado*. Debido al importante papel que los estados entrelazados juegan en las desigualdades de Bell, serán los que estudiemos con más detalle en este trabajo. No obstante, para poder identificar dichos estados, sería conveniente contar con un procedimiento operacional que nos permitiese distinguir a estos estados del resto. Sin embargo, en general, dicho procedimiento no existe. Únicamente cuando las dimensiones de los subsistemas son bajas es posible encontrar caracterizaciones sencillas que permitan identificar a los estados entrelazados.

En la práctica trabajaremos con clases de equivalencia de estados, con el fin de identificar aquellas características que juegan un papel relevante en el entrelazamiento (Sección 7 de [22]). La forma usual de definir una relación de equivalencia en el espacio de estados es la siguiente:

- En $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ diremos que dos estados puros $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ son equivalentes (y escribiremos $|\psi\rangle \sim |\phi\rangle$) si existe un operador biyectivo $A_1 \otimes A_2$ tal que

$$|\phi\rangle = A_1 \otimes A_2 |\psi\rangle$$

- En general, en $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}^{(N)}$ dos estados puros $|\psi\rangle, |\phi\rangle$, pertenecen a la misma clase de equivalencia si existe un operador biyectivo $A_1 \otimes \cdots \otimes A_N$ tal que

$$|\phi\rangle = A_1 \otimes \cdots \otimes A_N |\psi\rangle$$

Es posible demostrar que, en el caso de sistemas bipartitos, el espacio de estados se divide en las siguientes clases de equivalencia:

- Clase 1-2, estados *producto*. Son estados del tipo $|\psi_{\text{prod}}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Siempre pueden conectarse mediante operadores de la forma $A_1 \otimes A_2$ con el estado $|\text{prod}\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$. Recordemos que estos estados no están entrelazados.
- Clase 12, estados con doble entrelazamiento. Son aquellos que pueden ponerse en correspondencia con estados de la forma

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle \otimes |0\rangle + \beta|1\rangle \otimes |1\rangle$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha\beta \neq 0$.

Dentro de esta clase, el más conocido es el estado singlete:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle).$$

Siguiendo el mismo criterio de clasificación, las diferentes clases de equivalencia en sistemas tripartitos de 3 qubits son:

- Clase 1-2-3, estados *producto*. Del mismo modo que en los sistemas bipartitos, los estados *producto* son aquellos cuyo estado total puede descomponerse en el producto de estados para cada una de sus partes. Cualquier estado $|\psi_{\text{prod}}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle$ puede obtenerse de manera reversible a partir del estado

$$|\text{prod}\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

Los estados que pertenecen a esta clase de equivalencia no presentan ningún tipo de entrelazamiento.

- Clases 1-23, 2-31 y 3-12, estados con “doble” entrelazamiento. Son aquellos estados en los que solo dos partes del sistema presentan entrelazamiento entre ellas, y estas a su vez forman un estado producto con la parte restante. Cualquier estado perteneciente a esta clase puede ser transformado reversiblemente mediante operaciones unitarias en el estado

$$|\psi_{\text{bip}}\rangle = |0\rangle \otimes (\alpha|0\rangle \otimes |0\rangle + \beta|1\rangle \otimes |1\rangle), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 = 1, \alpha\beta \neq 0.$$

El estado representativo de esta clase es el estado

$$|\text{bip}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes (|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$$

- Clase 123, estados con triple entrelazamiento. Esta clase de estados se subdivide, a su vez, en dos clases:
 - Clase *GHZ* (Greenberger–Horne–Zeilinger). Estos estados pueden expresarse como una suma de solo dos productos y todos ellos pueden transformarse u obtenerse a partir del estado

$$|\psi_{\text{GHZ}}\rangle = \alpha|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + \beta e^{i\phi}|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes |\phi_3\rangle,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 = 1, 0 < \phi < 2\pi$. $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ y $|\phi_3\rangle$ representan cualquier superposición de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

La clase toma el nombre de su estado representativo

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle)$$

- Clase *W*. Los estados que pertenecen a esta clase se caracterizan por tener que escribirse como una suma de al menos tres productos y son de la forma

$$|\psi_{\text{W}}\rangle = a|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle + b|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle + c|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + d|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

que es equivalente a una suma de tres productos si lo expresamos como

$$|\psi_W\rangle = a|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle + b|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle + (c|1\rangle + d|0\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

El estado

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle)$$

es el representativo de esta clase.

La clasificación aquí mostrada no es la única que existe. En 2008, C. Sabín y G. García Alcaine realizaron una clasificación basándose en los diferentes tipos de entrelazamiento [23].

Los estados GHZ son un conjunto de estados con entrelazamiento que pueden usarse para probar el teorema GHZ [24]. El teorema GHZ es una extensión del teorema de Bell para estados de N qubits, siendo este un caso particular para $N = 2$. Mientras que el teorema de Bell demuestra que existen contradicciones entre la mecánica cuántica y la teoría de elementos de realidad locales de manera estadística, el teorema GHZ establece que, realizando unos experimentos concretos con los estados GHZ, es posible probar dicha contradicción con tan solo un experimento con mediciones de espín en la misma dirección, es decir, con carácter absoluto. Además, las desigualdades de Bell no se violan para el caso de mediciones en la misma dirección. En la sección 6 veremos esto en detalle.

5.1. Diferencia entre estados GHZ y estados W

La forma más conveniente de discutir la diferencia entre los estados GHZ y W requiere la introducción de las *matrices densidad*. Dado un estado $|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|0\rangle \in \mathbb{C}^2$ y su dual $\langle\psi| = c_1^*|1\rangle + c_2^*|0\rangle$, se define la matriz densidad (proyector) asociada a $|\psi\rangle$ como:

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle\langle\psi| = |c_1|^2|1\rangle\langle 1| + c_1c_2^*|1\rangle\langle 0| + c_1^*c_2|0\rangle\langle 1| + |c_2|^2|0\rangle\langle 0| \\ &= \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1c_2^* \\ c_1^*c_2 & |c_2|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En general, una *matriz densidad* presenta las siguientes propiedades:

- Es autoadjunta, $\rho^\dagger = \rho$.
- Su traza es igual a 1, $\text{Tr}(\rho) = 1$.
- Todos sus autovalores son mayores o iguales que 0.
- En el caso de estados puros, la matriz también es un proyector, es decir, $\rho^2 = |\psi\rangle\langle\psi||\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho$. Por consiguiente, los *estados mezcla* serán aquellos para los que $\rho^2 \neq \rho$.

Por tanto, se puede utilizar esta última propiedad para diferenciar a los estados puros de los estados mezcla. En el caso de un estado puro, tenemos que $\rho^2 = \rho$ y $\text{Tr}(\rho) = 1$. Si denotamos como ρ_i a los elementos de la diagonal de ρ , tendremos

que $\sum_i \rho_i = 1$ y $\sum_i \rho_i^2 = 1$ con $0 \leq \rho \leq 1$. Esto solo se cumple si $\rho_j = 1$ y $\rho_{i \neq j} = 0$ para un valor de j . Dicho de otro modo, solo se cumple en aquellas matrices donde uno de los términos de la diagonal valga 1 y todos los demás 0 [25].

Como ρ siempre es diagonalizable, para todas las demás situaciones en las que no se cumpla lo anterior, hablaremos de un estado mezcla. Los estados mezcla permiten describir situaciones en las que no se conoce con certeza el estado puro que representa al sistema. Por ejemplo, supongamos que un sistema pudiese estar representado por los estados $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$ con probabilidades p_1, \dots, p_n . En esa situación de mezcla estadística, la matriz densidad del sistema sería:

$$\rho = p_1 \rho_1 + \dots + p_n \rho_n = p_1 |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + \dots + p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \Rightarrow \rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|,$$

donde $\sum_n p_n = 1$. Si uno de los valores $p_n = 1$ y el resto vale 0, nos encontraríamos ante un estado puro. De lo contrario, sería un estado mezcla.

5.1.1. Matrices densidad en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

En $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, una base de matrices autoadjuntas ($\rho^\dagger = \rho$) viene dada por $\mathbb{I}, \sigma_x, \sigma_y$ y σ_z . Cualquier matriz densidad es una combinación lineal (con coeficientes reales) de estas:

$$\rho = c_1 \mathbb{I} + c_2 \sigma_x + c_3 \sigma_y + c_4 \sigma_z.$$

Como $\text{Tr}(\rho) = 1$, $2c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 1/2$. Definiendo $c_2 = 1/2 \cdot a_1, c_3 = 1/2 \cdot a_2$ y $c_4 = 1/2 \cdot a_3$, podemos reescribir ρ como:

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}),$$

con $0 \leq |\vec{a}| \leq 1$.

De esta última expresión se puede hacer distinción entre estados puros y estados mezcla. Para estados puros, $\rho^2 = \rho$, lo cual es posible si y solo si $|\vec{a}| = 1$, es decir, si el vector \vec{a} se encuentra sobre una esfera de radio 1. Por otro lado, si el vector \vec{a} se encuentra en el interior de la esfera de radio 1, $|\vec{a}| < 1$, la matriz densidad describe estados mezcla. Además, dentro de los estados mezcla, el estado con $|\vec{a}| = 0$ es conocido como el estado máximamente mezclado:

$$\rho = \frac{1}{2} \mathbb{I} = \frac{1}{2} |+, \vec{n}\rangle \langle +, \vec{n}| + \frac{1}{2} |-, \vec{n}\rangle \langle -, \vec{n}|$$

donde $|\pm, \vec{n}\rangle$ son los autovectores de la componente de espín en la dirección \vec{n} .

5.1.2. Matrices densidad en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2^n}$

Cuando $n \geq 2$, los estados puros y los estados mezcla que se encuentran en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2^n}$ pueden presentar o no entrelazamiento. Por ejemplo, la matriz densidad correspondiente a un estado puro no entrelazado $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$ es

$$\rho_{\text{prod}} = (|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle)(\langle \phi_1| \otimes \langle \phi_2|) = |\phi_1\rangle \langle \phi_1| \otimes |\phi_2\rangle \langle \phi_2| = \rho_1 \otimes \rho_2$$

Es decir, es el producto tensorial $\rho_{\text{prod}} = \rho_1 \otimes \rho_2$ de matrices densidad de cada uno de los dos subsistemas. De esta forma, si calculamos la traza parcial

$$\text{Tr}_2(\rho_{\text{prod}}) = |\phi_1\rangle \langle \phi_1| = \rho_1$$

obtenemos la matriz densidad de un estado puro.

Si, por el contrario, partimos de un estado puro entrelazado, como el singlete:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle)$$

la matriz densidad es

$$\rho_{\text{sing}} = \frac{1}{2}(|10\rangle - |01\rangle)(\langle 10| - \langle 01|) = \frac{1}{2}(|10\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|)$$

y su traza parcial respecto del segundo subsistema es

$$\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho_{\text{sing}}) = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbb{I}$$

En este caso, ρ_1 corresponde a la matriz densidad de un estado mezcla máximamente mezclado, lo cual podemos interpretar diciendo que el estado singlete es un estado máximamente entrelazado.

Como se verá a continuación, la utilización de matrices densidad es de gran utilidad a la hora de diferenciar a los estados GHZ de los W. Si partimos del estado GHZ

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$$

su matriz densidad es

$$\rho_{GHZ} = \frac{1}{2}(|000\rangle\langle 000| + |000\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|)$$

Hallando la traza parcial con una base en la tercera parte

$$\rho_{12}^{GHZ} = \text{Tr}_3(\rho_{GHZ}) = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el mismo resultado se obtiene si trazamos respecto del segundo o del primer subsistema. La matriz ρ_{12}^{GHZ} corresponde a un estado mezcla cuyas partes no presentan entrelazamiento. Esto nos dice que el estado GHZ es un estado entrelazado. Además, si volvemos a trazar respecto de uno de los subsistemas (por ejemplo, el segundo) llegamos a la matriz densidad del estado máximamente mezclado en \mathbb{C}^2 :

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{2}\mathbb{I}.$$

Es decir, el estado GHZ está máximamente entrelazado.

Por otro lado, si tomamos el estado W:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$$

se tiene que

$$\rho_W = \frac{1}{3} \left(|001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 010| + |001\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| \right. \\ \left. + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 001| \right)$$

y

$$\rho_{12}^W = \text{Tr}_3(\rho_W) = \frac{1}{3}(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$$

Sin más que calcular el cuadrado de dicha matriz, al igual que sucedía con el estado GHZ, es directo ver que ρ_{12}^W describe un estado mezcla. Sin embargo, en este caso no es tan trivial comprobar si está o no entrelazado. Más adelante, mediante el criterio PPT, veremos que dicho estado es un estado entrelazado. Por otro lado, si lo expresamos matricialmente:

$$\rho_{12}^W = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y volvemos a calcular la traza parcial respecto de, por ejemplo, el segundo subsistema

$$\rho_1^W = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vemos que ρ_1^W representa un estado mezcla, pero no el máximamente mezclado [26].

5.1.3. Criterio *PPT*

La diferencia fundamental entre los estados GHZ y los W viene del hecho de que al trazar una parte en GHZ se llega a un estado no entrelazado, mientras que en W se llega a un estado entrelazado. Para demostrar que ρ_{12}^W es un estado entrelazado necesitamos introducir el *criterio Peres–Horodecki*, también conocido como criterio *PPT*. Este criterio presenta una condición necesaria que deben cumplir dos sistemas cuánticos, 1 y 2, para que la matriz densidad del sistema conjunto, ρ , sea separable (no presente entrelazamiento). En dimensiones $2 \otimes 2$ y $2 \otimes 3$ esta condición es además suficiente [22, 24, 26, 27].

Antes de introducir el teorema debemos definir la traspuesta parcial de una matriz. Sea ρ_{12} la matriz densidad de un sistema formado por dos partes, 1 y 2, cuyas dimensiones por separado son n_1 y n_2 respectivamente, entonces ρ_{12} tiene $n_1 n_2 \times n_1 n_2$ entradas o, escrito de otro modo, $n_1^2 \times (n_2 \times n_2)$ entradas, lo que se puede interpretar como n_1^2 matrices de dimensión $n_2 \times n_2$. De este modo, indicando como M_{ij} las matrices $n_2 \times n_2$, tenemos que

$$\rho_{12} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n_1} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n_1 1} & M_{n_1 2} & \dots & M_{n_1 n_1} \end{pmatrix}$$

En este caso, la traspuesta parcial de ρ_{12} respecto a la parte 2 es

$$\rho_{12}^{T_2} = \begin{pmatrix} M_{11}^T & M_{12}^T & \dots & M_{1n_1}^T \\ M_{21}^T & M_{22}^T & \dots & M_{2n_1}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n_1 1}^T & M_{n_1 2}^T & \dots & M_{n_1 n_1}^T \end{pmatrix}$$

El criterio *PPT* establece que:

Teorema (PPT): Si ρ_{12} es separable, entonces $\rho_{12}^{T_2}$ no tiene autovalores negativos.

En otras palabras, si $\rho_{12}^{T_2}$ tiene algún autovalor negativo, entonces ρ_{12} no es separable y, por consiguiente, el estado correspondiente presenta entrelazamiento.

Si aplicamos este criterio a la matriz densidad del estado W:

$$\rho_W = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando su traza parcial respecto del tercer subsistema y su traspuesta parcial respecto del segundo:

$$(\rho_{12}^W)^{T_2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que dicha matriz tiene un autovalor negativo y, por tanto, de acuerdo con el criterio, la matriz no es separable, lo que implica que el estado está entrelazado.

Sin embargo, si aplicamos el criterio al estado GHZ, tenemos que

$$(\rho_{12}^{GHZ})^{T_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ser matriz diagonal, su traspuesta parcial es ella misma y sus autovalores 0,5 y 0, ambos dobles. Por tanto ρ_{12}^{GHZ} es una matriz separable y, en consecuencia, el estado no presenta entrelazamiento (al estar en dimensión $2 \otimes 2$).

En conclusión, la diferencia entre ambos tipos de estado radica en que, aunque los dos presentan entrelazamiento, el del W es en cierto sentido más robusto, puesto que si se elimina uno de los tres qubits el estado restante sigue conservando entrelazamiento [28].

6. Desigualdades de Bell

A continuación, mostraremos de manera aproximada el segundo argumento de Bell, el cual fue utilizado por John S. Bell en 1971 para demostrar que su teorema se podía generalizar para experimentos reales, en los cuales los detectores no son ideales.

Consideremos un sistema compuesto por dos partículas y un par de instrumentos de medida que pueden medir una cierta variable dinámica que solo toma dos posibles valores en cada una de las componentes (capítulo 20 de [11]). Por conveniencia, denotaremos mediante ± 1 a los resultados posibles de una medida. Para fijar ideas, podemos pensar en partículas de espín $1/2$ y en medidas de componentes de espín en una cierta dirección.

Denotaremos mediante \vec{n}_1 y \vec{n}_2 a las orientaciones del primer y segundo Stern-Gerlach (Sección 2.1). Los resultados $s^{(1)} = \pm 1$ de la medida sobre la primera partícula dependerán de la orientación \vec{n}_1 del primer aparato y de una serie de parámetros que no podremos controlar y que denotaremos colectivamente mediante $\lambda \in \Lambda$. Supondremos, por tanto, que existe una función $s^{(1)}(\vec{n}_1, \lambda)$ que determina el resultado de la primera medida y toma valores ± 1 . De manera análoga, supondremos que existe una función $s^{(2)}(\vec{n}_2, \lambda) = \pm 1$ que determina el resultado de la medida sobre la segunda partícula. Aunque la situación más general no llevaría a suponer que dichas funciones son de la forma $s^{(1)}(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \lambda)$ y $s^{(2)}(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \lambda)$, si asumimos el principio de localidad de Einstein, ni los resultados de las medidas sobre la primera partícula pueden depender de la orientación \vec{n}_2 del segundo aparato de medida ni los resultados de las medidas sobre la segunda partícula pueden depender de la orientación \vec{n}_1 del primer aparato de medida. Por consiguiente, las funciones de la forma $s^{(1)}(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \lambda)$ y $s^{(2)}(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \lambda)$ pueden excluirse.

Los parámetros λ estarán sujetos a alguna distribución de probabilidad $\rho(\lambda)$ de manera que, para una configuración determinada de los aparatos, el valor esperado del producto de los resultados de las medidas (que, esencialmente, recoge el valor de las correlaciones) es

$$E(\vec{n}_1, \vec{n}_2 | \rho) := \int_{\Lambda} s^{(1)}(\vec{n}_1, \lambda) s^{(2)}(\vec{n}_2, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (20)$$

6.1. Correlación perfecta

Supongamos en primer lugar que las partículas tienen correlación perfecta, es decir, que si se miden las componentes de espín de las dos partículas en una misma dirección (arbitraria, pero igual para las dos) se encuentran siempre valores opuestos. Dicho de otro modo, supondremos que:

$$s^{(2)}(\vec{n}, \lambda) = -s^{(1)}(\vec{n}, \lambda).$$

En ese caso

$$E(\vec{n}_1, \vec{n}_2 | \rho) = - \int_{\Lambda} s^{(1)}(\vec{n}_1, \lambda) s^{(1)}(\vec{n}_2, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

y se cumple que

$$\begin{aligned} E(\vec{n}_1, \vec{n}_2|\rho) - E(\vec{n}_1, \vec{n}_3|\rho) &= - \int_{\Lambda} \left(s^{(1)}(\vec{n}_1, \lambda) s^{(1)}(\vec{n}_2, \lambda) - s^{(1)}(\vec{n}_1, \lambda) s^{(1)}(\vec{n}_3, \lambda) \right) \rho(\lambda) d\lambda \\ &= - \int_{\Lambda} s^{(1)}(\vec{n}_1, \lambda) s^{(1)}(\vec{n}_2, \lambda) \left(1 - s^{(1)}(\vec{n}_2, \lambda) s^{(1)}(\vec{n}_3, \lambda) \right) \rho(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que, independientemente de λ , $s^{(1)}(\vec{n}_1, \lambda) s^{(1)}(\vec{n}_2, \lambda) = \pm 1$ y que $1 - s^{(1)}(\vec{n}_2, \lambda) s^{(1)}(\vec{n}_3, \lambda) \geq 0$, se tiene que

$$|E(\vec{n}_1, \vec{n}_2|\rho) - E(\vec{n}_1, \vec{n}_3|\rho)| \leq \int_{\Lambda} \left(1 - s^{(1)}(\vec{n}_2, \lambda) s^{(1)}(\vec{n}_3, \lambda) \right) \rho(\lambda) d\lambda = 1 + E(\vec{n}_2, \vec{n}_3|\rho).$$

Por tanto, en el caso de correlación perfecta, el razonamiento anterior conduce a la *desigualdad de Bell*:

$$\boxed{|E(\vec{n}_1, \vec{n}_2|\rho) - E(\vec{n}_1, \vec{n}_3|\rho)| - E(\vec{n}_2, \vec{n}_3|\rho) \leq 1, \quad \forall \vec{n}_i \text{ unitarios.}}$$

La desigualdad de Bell no hace uso de la mecánica cuántica. Por tanto, no es directo saber si la mecánica cuántica es consistente con esta desigualdad. No obstante, los observables y los estados pueden elegirse de forma que las predicciones concretas de la mecánica cuántica violen las desigualdades de Bell. Como ejemplo de la anterior afirmación, compararemos la desigualdad con la correlación del espín del estado singlete. Puesto que este estado es esféricamente simétrico, su función de correlación solo depende del ángulo relativo entre las orientaciones de los instrumentos de medida \vec{n}_1 y \vec{n}_2 (10)

$$E^{\text{QM}}(\vec{n}_1, \vec{n}_2|\Psi_0) = -\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -\cos(\theta_{12}) \quad (21)$$

Si tomamos \vec{n}_1 , \vec{n}_2 y \vec{n}_3 coplanares y tales que $\theta_{12} = \pi/3$, $\theta_{13} = 2\pi/3$ y $\theta_{23} = \pi/3$ se tiene que

$$\begin{aligned} |E^{\text{QM}}(\vec{n}_1, \vec{n}_2|\Psi_0) E^{\text{QM}}(\vec{n}_1, \vec{n}_3|\Psi_0)| - E^{\text{QM}}(\vec{n}_2, \vec{n}_3|\Psi_0) &= |\cos(\theta_{12}) - \cos(\theta_{13})| + \cos(\theta_{23}) \\ &= \frac{3}{2} \geq 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la mecánica cuántica entra en conflicto con, al menos, una de las suposiciones que hemos utilizado para llegar a la desigualdad de Bell. La prueba de que esta incompatibilidad existe se conoce como *Teorema de Bell*.

6.2. Situación general

Para obtener la desigualdad de Bell cuando no hay correlación perfecta supondremos una situación ligeramente más general en la que nos interesaremos por dos observables $A^{(1)}$ y $B^{(2)}$ cuyos valores dependen de las “direcciones” \mathbf{a} , \mathbf{b} de los instrumentos y los parámetros que no se pueden controlar, representados por λ . El valor esperado del producto de los resultados de las medidas es

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}|\rho) = \int_{\Lambda} A^{(1)}(\mathbf{a}, \lambda) B^{(2)}(\mathbf{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (22)$$

En este caso

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}, \mathbf{b}|\rho) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}'|\rho) &= \int_{\Lambda} \left(A^{(1)}(\mathbf{a}, \lambda)B^{(2)}(\mathbf{b}, \lambda) - A^{(1)}(\mathbf{a}, \lambda)B^{(2)}(\mathbf{b}', \lambda) \right) \rho(\lambda)d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} A^{(1)}(\mathbf{a}, \lambda)B^{(2)}(\mathbf{b}, \lambda) \left(1 \pm A^{(1)}(\mathbf{a}', \lambda)B^{(2)}(\mathbf{b}', \lambda) \right) \rho(\lambda)d\lambda \\ &\quad - \int_{\Lambda} A^{(1)}(\mathbf{a}, \lambda)B^{(2)}(\mathbf{b}', \lambda) \left(1 \pm A^{(1)}(\mathbf{a}', \lambda)B^{(2)}(\mathbf{b}, \lambda) \right) \rho(\lambda)d\lambda. \end{aligned}$$

Si las variables dinámicas están acotadas y, por ejemplo, satisfacen $|A^{(1)}(a, \lambda)| \leq 1$ y $|B^{(2)}(a, \lambda)| \leq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}|\rho) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}'|\rho)| &\leq \int_{\Lambda} \left(1 \pm A^{(1)}(\mathbf{a}', \lambda)B^{(2)}(\mathbf{b}', \lambda) \right) \rho(\lambda)d\lambda \\ &\quad + \int_{\Lambda} A^{(1)}(\mathbf{a}, \lambda)B^{(2)}(\mathbf{b}', \lambda) \left(1 \pm A^{(1)}(\mathbf{a}', \lambda)B^{(2)}(\mathbf{b}, \lambda) \right) \rho(\lambda)d\lambda. \\ &= 2 \pm (E(\mathbf{a}', \mathbf{b}'|\rho) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}|\rho)) \end{aligned}$$

de donde se deduce directamente la *desigualdad de Bell*:

$$\boxed{|E(\mathbf{a}, \mathbf{b}|\rho) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}'|\rho)| + |E(\mathbf{a}', \mathbf{b}'|\rho) - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}|\rho)| \leq 2 \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'}$$

Por tanto, en el caso de dos espines, las desigualdades de Bell implican que

$$|E(\vec{n}_1, \vec{n}_2|\rho) - E(\vec{n}_1, \vec{n}'_2|\rho)| + |E(\vec{n}'_1, \vec{n}'_2|\rho) - E(\vec{n}'_1, \vec{n}_2|\rho)| \leq 2 \quad \forall \vec{n}_1, \vec{n}'_1, \vec{n}_2, \vec{n}'_2$$

Ahora bien, en mecánica cuántica, eligiendo $\vec{n}_1, \vec{n}'_1, \vec{n}_2, \vec{n}'_2$ coplanares, con \vec{n}_1 y \vec{n}'_2 formando un ángulo 2θ y de manera que $\vec{n}'_1 = \vec{n}_2$ coincidan con la bisectriz de \vec{n}_1 y \vec{n}'_2 se tiene que

$$\begin{aligned} |E^{\text{QM}}(\vec{n}_1, \vec{n}_2|\Psi_0) - E^{\text{QM}}(\vec{n}_1, \vec{n}'_2|\Psi_0)| + |E^{\text{QM}}(\vec{n}'_1, \vec{n}'_2|\Psi_0) - E^{\text{QM}}(\vec{n}'_1, \vec{n}_2|\Psi_0)| \\ = 4 \cos \theta - 2 \cos(2\theta) \end{aligned}$$

Basta representar la función $\theta \mapsto 4 \cos \theta - 2 \cos(2\theta)$ para comprobar que las desigualdades de Bell se violan para ángulos dentro de un cierto intervalo y que la violación máxima se produce para $\theta = \pi/3$.

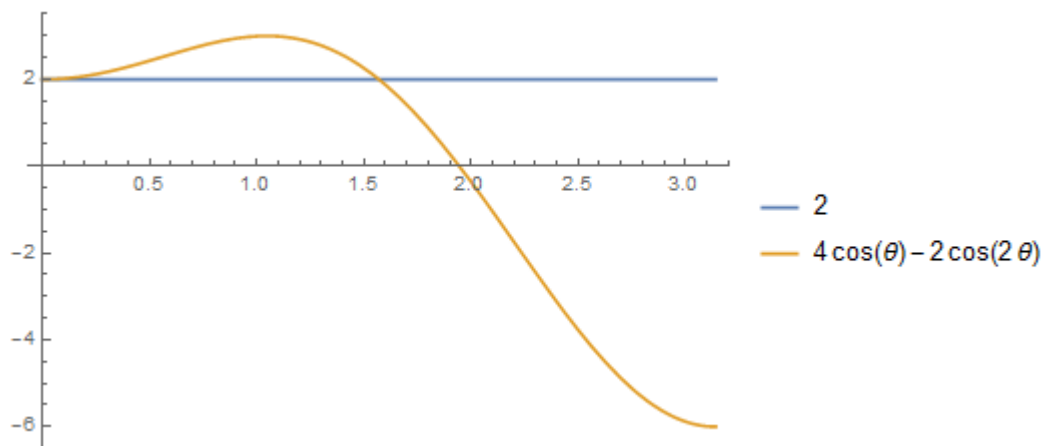


Figura 4: Violación de la desigualdad de Bell

7. Teorema de Bell sin desigualdades y sin probabilidad

7.1. Sistemas tripartitos

En esta sección procederemos a estudiar cómo el argumento EPR se viola de manera indiscutible para sistemas de 3 qubits, sin necesidad de recurrir a un resultado probabilístico para la demostración de su incompatibilidad con la mecánica cuántica. Como vimos en la clasificación de la sección (5), existen dos tipos de estados totalmente entrelazados en sistemas de 3 qubits, a saber, los estados GHZ y los estados W.

En primer lugar, nos centraremos en el estado GHZ y consideraremos los observables

$$\begin{aligned} O_1 &= \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \otimes \sigma_y^{(3)}, \\ O_2 &= \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} \otimes \sigma_y^{(3)}, \\ O_3 &= \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)}, \\ O_4 &= \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)}. \end{aligned}$$

Como el cuadrado de estos cuatro operadores es la identidad, sus autovalores solo pueden ser ± 1 [24]. Por tanto, estos serán los posibles resultados que obtendremos al medir dicho observable. Debemos hacer notar la forma que tienen los tres primeros observables, en los que para el observable O_n se mide la componente x del espín de la partícula n , mientras que en las demás partículas se mide la componente en la dirección y , por lo que se podría extender a estados GHZ de N -qubits. Si tomamos uno de los estados GHZ más sencillos

$$|\psi_{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle)$$

es directo comprobar que $|\psi_{GHZ}\rangle$ es autoestado de O_1 con autovalor 1:

$$\begin{aligned} O_1\sqrt{2}|\psi_{GHZ}\rangle &= \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \otimes \sigma_y^{(3)}(|000\rangle - |111\rangle) \\ &= \sigma_x|0\rangle \otimes \sigma_y|0\rangle \otimes \sigma_y|0\rangle - \sigma_x|1\rangle \otimes \sigma_y|1\rangle \otimes \sigma_y|1\rangle \\ &= |1\rangle \otimes (-i|1\rangle) \otimes (-i|1\rangle) - |0\rangle \otimes (i|0\rangle) \otimes (i|0\rangle) \\ &= (-i)^2|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle - i^2|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= -|111\rangle + |000\rangle = \sqrt{2}|\psi_{GHZ}\rangle. \end{aligned}$$

Este mismo resultado se obtiene al considerar O_2 y O_3 . En el caso del observable O_4 , $|\psi_{GHZ}\rangle$ es autoestado de autovalor -1 :

$$\begin{aligned} O_4\sqrt{2}|\psi_{GHZ}\rangle &= \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)}(|000\rangle - |111\rangle) \\ &= \sigma_x|0\rangle \otimes \sigma_x|0\rangle \otimes \sigma_x|0\rangle - \sigma_x|1\rangle \otimes \sigma_x|1\rangle \otimes \sigma_x|1\rangle \\ &= |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle - |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle = |111\rangle - |000\rangle = -\sqrt{2}|\psi_{GHZ}\rangle. \end{aligned}$$

De acuerdo con el argumento EPR, las componentes del espín de cada una de las partículas deben tener valores definidos S_j^i antes de efectuar medidas sobre

ellas. De ser así, considerando el estado GHZ y partiendo de los observables O_1 , O_2 y O_3 que hemos presentado anteriormente:

$$\begin{aligned} S_x^{(1)} S_y^{(2)} S_y^{(3)} &= 1 \\ S_y^{(1)} S_x^{(2)} S_y^{(3)} &= 1 \\ S_y^{(1)} S_y^{(2)} S_x^{(3)} &= 1 \end{aligned}$$

Ahora bien, si multiplicamos los tres observables

$$S_x^{(1)} S_x^{(2)} S_x^{(3)} (S_y^{(1)})^2 (S_y^{(2)})^2 (S_y^{(3)})^2 = 1$$

Como cada término $S_I^{(i)}$ solo puede valer ± 1 y los tres últimos están elevados al cuadrado, podemos simplificar la expresión:

$$S_x^{(1)} S_x^{(2)} S_x^{(3)} = 1$$

Nos damos cuenta de que esta expresión no es otra cosa que el valor del observable que habíamos denotado anteriormente como O_4 . Sin embargo, llegamos a una contradicción, ya que sobre el estado GHZ el observable O_4 vale -1 con probabilidad 1. En otras palabras, en el estado GHZ, un razonamiento del estilo EPR conduce a que cualquier medida del observable O_4 tiene siempre como resultado 1, mientras que la mecánica cuántica nos dice que O_4 vale siempre -1 . Experimentalmente se ha comprobado (ver Sección 8) que la mecánica cuántica proporciona la descripción correcta de este tipo de situaciones. Esto constituye un argumento categórico que demuestra que Einstein, Podolski y Rosen se equivocaban y que el valor de las componentes del espín de cada una de las partículas no puede tener un valor definido previo a la medida.

Podría pensarse que con los estados W se puede diseñar un procedimiento similar al visto con los GHZ. Sin embargo esto no es posible ya que, a pesar de que los estados W son estados con entrelazamiento de la clase 123, no existen cuatro observables que conmuten (que puedan diagonalizarse simultáneamente) y tales que $O_4 = O_1 O_2 O_3$ (Sección VI de [28]).

7.2. Sistemas bipartitos

En la sección anterior hemos visto que, en sistemas tripartitos, es posible refutar el punto de vista de Einstein, Podolski y Rosen sin necesidad de recurrir a desigualdades de carácter probabilístico. Una pregunta obvia que surge en este contexto es si, en sistemas bipartitos, es posible también encontrar estados que, de alguna manera, demuestren dicha contradicción sin necesidad de recurrir a las desigualdades. Esta pregunta se la hizo Lucien Hardy en 1993 y, efectivamente, sus sospechas iban bien encaminadas.

A continuación, mostraremos un procedimiento similar al que siguió Hardy para dar con los estados mencionados, con la diferencia de que no usaremos un formalismo tan estricto y solamente con la intención de exponer las bases de su descubrimiento [29, 30].

Consideremos un sistema bipartito de 2 qubits $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ y dos observables O_1 y O_2 para cada una de las partes cuyos valores de medida solamente pueden ser ± 1 . Buscamos ahora un estado $|\psi\rangle$ tal que:

- 1) Al medir $(O_1^{(1)}, O_2^{(2)})$ o $(O_2^{(1)}, O_1^{(2)})$ nunca se observe $(-1, -1)$. En otras palabras, si sobre dicho estado, el resultado de medir $O_2^{(2)}$ fuese -1 , con total seguridad al medir $O_1^{(1)}$ deberíamos obtener $+1$. Igualmente, si $O_2^{(1)}$ resulta ser -1 , entonces $O_1^{(2)}$ vale con seguridad $+1$.
- 2) Al medir $(O_2^{(1)}, O_2^{(2)})$ obtengamos con probabilidad *no nula* el valor $(-1, -1)$.
- 3) Al medir $(O_1^{(1)}, O_1^{(2)})$, la probabilidad de obtener $(+1, +1)$ sea cero.

Para encontrar dicho estado, procedemos de la siguiente manera. En primer lugar, los autovectores de los observables O_1 y O_2 formarán dos bases de \mathbb{C}^2 :

$$\{|O_1 = +1\rangle, |O_1 = -1\rangle\}, \quad \{|O_2 = +1\rangle, |O_2 = -1\rangle\}.$$

Por tanto

$$\{|O_1^{(1)} = +1, O_1^{(2)} = +1\rangle, |O_1^{(1)} = +1, O_1^{(2)} = -1\rangle, \\ |O_1^{(1)} = -1, O_1^{(2)} = +1\rangle, |O_1^{(1)} = -1, O_1^{(2)} = -1\rangle\}.$$

es una base de \mathcal{H} . En consecuencia, cualquier estado (incluido el que queremos encontrar), podrá escribirse en la forma

$$|\psi\rangle = \alpha|O_1^{(1)} = +1, O_1^{(2)} = +1\rangle + \beta|O_1^{(1)} = +1, O_1^{(2)} = -1\rangle \\ + \gamma|O_1^{(1)} = -1, O_1^{(2)} = +1\rangle + \delta|O_1^{(1)} = -1, O_1^{(2)} = -1\rangle$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Sin embargo, la condición 3) establece que

$$\text{Prob}(O_1^{(1)} = +1, O_1^{(2)} = +1|\psi) = |\langle O_1^{(1)} = +1, O_1^{(2)} = +1|\psi\rangle|^2 = 0$$

de donde es directo comprobar que $\alpha = 0$. Para simplificar los cálculos, nos centraremos en estados con $a = \beta = \gamma, b = \delta > 0$ ya que, como veremos, es posible conseguir las condiciones anteriormente descritas sin necesidad de usar coeficientes complejos. Teniendo en cuenta todo esto, podemos reescribir $|\psi\rangle$ como:

$$|\psi\rangle = a|O_1^{(1)} = +1, O_1^{(2)} = -1\rangle + a|O_1^{(1)} = -1, O_1^{(2)} = +1\rangle + b|O_1^{(1)} = -1, O_1^{(2)} = -1\rangle$$

donde $a, b > 0$ y $2a^2 + b^2 = 1$ para que tenga carácter probabilístico.

La condición 1) impone que

$$\text{Prob}(O_1^{(1)} = -1, O_2^{(2)} = -1) = \text{Prob}(O_2^{(1)} = -1, O_1^{(2)} = -1) = 0,$$

lo que obliga a que

$$\langle O_1^{(1)} = -1, O_2^{(2)} = -1|\psi\rangle = 0$$

Por otro lado, como $\{|O_1 = +1\rangle, |O_1 = -1\rangle\}$ es una base de \mathbb{C}^2 , podemos escribir $|O_2 = -1\rangle$ como:

$$|O_2^{(2)} = -1\rangle = c|O_1 = -1\rangle + d|O_1 = +1\rangle,$$

donde, una vez más, podemos suponer que $c, d \in \mathbb{R}$ y cumplen $c^2 + d^2 = 1$. De esta manera $\langle O_2^{(2)} = -1 | = c \langle O_1 = -1 | + d \langle O_1 = +1 |$ y se tiene que

$$\langle O_1^{(1)} = -1 | \otimes \langle O_2^{(2)} = -1 | = c \langle O_1 = -1, O_1 = -1 | + d \langle O_1 = -1, O_1 = +1 |$$

y la condición 1) implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle O_1^{(1)} = -1, O_2^{(2)} = -1 | \psi \rangle = c \langle O_1 = -1, O_1 = -1 | \psi \rangle + d \langle O_1 = -1, O_1 = +1 | \psi \rangle \\ &= -cb + da \Rightarrow ad = cb. \end{aligned}$$

La misma condición se obtiene al imponer que $\text{Prob}(O_2^{(1)} = -1, O_1^{(2)} = -1) = 0$.

Finalmente, nos queda imponer la condición 2):

$$\text{Prob}(O_2^{(1)} = -1, O_2^{(2)} = -1) > 0.$$

Un cálculo directo implica

$$\text{Prob}(O_2^{(1)} = -1, O_2^{(2)} = -1 | \psi) = |\langle O_2^{(1)} = -1, O_2^{(2)} = -1 | \psi \rangle|^2 = (-c^2b + 2cda)^2.$$

Usando $ad = cb$ se tiene que $(-c^2b + 2cda)^2 > 0 \Leftrightarrow c^4b^2 > 0$. Esta desigualdad implica que $c \neq 0$ y $b \neq 0$, y como $ad = cb \Rightarrow a \neq 0$ y $d \neq 0$.

Reuniendo todas las condiciones:

$$\begin{aligned} 2a^2 + b^2 &= 1 \\ c^2 + d^2 &= 1 \\ ad &= cb \\ c^4b^2 &> 0 \end{aligned}$$

donde a, b, c y $d > 0$. Dichas ecuaciones nos permiten expresar todos los parámetros en función de c :

$$a = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \quad (23)$$

$$b = \sqrt{\frac{1-c^2}{1+c^2}} \quad (24)$$

$$d = \sqrt{1-c^2} \quad (25)$$

$$c \in (0, 1) \quad (26)$$

Haciendo uso de estas expresiones

$$\text{Prob}(O_2^{(1)} = -1, O_2^{(2)} = -1) = c^4b^2 = c^4 \frac{1-c^2}{1+c^2}, \quad c \in (0, 1)$$

Cada valor de c que se encuentre dentro de este intervalo define un estado $|\psi\rangle$ que cumple las condiciones 1), 2) y 3). No obstante, si pedimos que la probabilidad $\text{Prob}(O_2^{(1)} = -1, O_2^{(2)} = -1)$ sea máxima debemos tomar

$$c = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

En este caso, la función de probabilidad alcanza su máximo punto con un valor de 0,09017. Es decir, que para ese valor de c , el estado $|\psi\rangle$ resultante viola un argumento tipo EPR en un 9,017% de las veces:

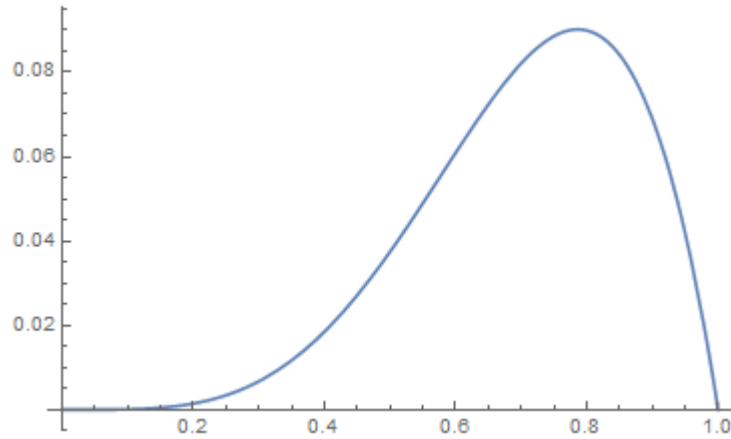


Figura 5: Probabilidad($O_2^{(1)} = -1, O_2^{(2)} = -1$)

Resumiendo, los estados de Hardy son de la forma

$$|\psi_{\text{Hardy}}\rangle = a|10\rangle + a|01\rangle + b|00\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

donde los valores a y b quedan definidos en función del parámetro c a través de las ecuaciones (23) y (24). En términos de la probabilidad, el valor óptimo de c es $c = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Otro criterio que nos permitiría fijar el valor de c es el grado de entrelazamiento de los estados de Hardy. Para analizar el grado de entrelazamiento consideremos la matriz densidad de un estado de Hardy cualquiera

$$\begin{aligned} \rho_{\text{Hardy}} = & a^2|10\rangle\langle 10| + a^2|10\rangle\langle 01| + ab|10\rangle\langle 00| + a^2|01\rangle\langle 10| + a^2|01\rangle\langle 01| \\ & + ab|01\rangle\langle 00| + ab|00\rangle\langle 10| + ab|00\rangle\langle 01| + b^2|00\rangle\langle 00|. \end{aligned}$$

Calculando la segunda traza parcial (el mismo resultado se obtiene trazando el primer subsistema)

$$\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho_{\text{Hardy}}) = a^2|0\rangle\langle 0| + a^2|1\rangle\langle 1| + ab|1\rangle\langle 0| + ab|0\rangle\langle 1| + b^2|0\rangle\langle 0|$$

En forma matricial

$$\rho_1 = \rho_2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Para escribir ρ_1 en la forma $\frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{a}\vec{\sigma})$, planteamos el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{a_2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{a_3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que, operando, se reduce a:

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + a_3 & a_1 - a_2i \\ a_1 + a_2i & 1 - a_3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones resultante, obtenemos que:

$$a_1 = 2ab, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -b^2$$

Por tanto, tenemos que

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + 2ab\sigma_1 - b^2\sigma_3)$$

con $\vec{a} = (2ab, 0, -b^2)$. Reescribiendo \vec{a} en función de c nos queda

$$\vec{a} = \left(2\frac{c\sqrt{1-c^2}}{1+c^2}, 0, \frac{c^2-1}{1+c^2} \right)$$

Seguidamente calculamos su módulo:

$$f(c) := |\vec{a}|^2 = 4\frac{c^2(1-c^2)}{(1+c^2)^2} + \frac{(c^2-1)^2}{(1+c^2)^2} = \frac{-3c^4 + 2c^2 + 1}{(1+c^2)^2}.$$

Calculando el máximo de esta función, hallamos que se encuentra en $c = 0$, pero debemos recordar que $c \in (0, 1)$ por lo que $c = 0$ no es un valor permitido. Por otro lado la función $f(c)$ es decreciente en el intervalo en el que está definida y $f(1) = 0$. En los extremos del intervalo, si c valiese 0, $|\vec{a}| = 1$ y nos encontraríamos frente a un estado puro. Por el contrario, si c fuese igual a 1, $|\vec{a}| = 0$ y tendríamos un estado máximamente mezclado. En conclusión, para $c \in (0, 1)$, ρ_1 es siempre un estado mezcla pero no está máximamente mezclado. Esto implica que $|\psi_{\text{Hardy}}\rangle$ es siempre un estado entrelazado pero no máximamente entrelazado. De hecho, si queremos aumentar el entrelazamiento nos vemos obligados a tomar $c \rightarrow 1$, pero en ese caso $\text{Prob}(O_2^{(1)} = -1, O_2^{(2)} = -1) \rightarrow 0$.

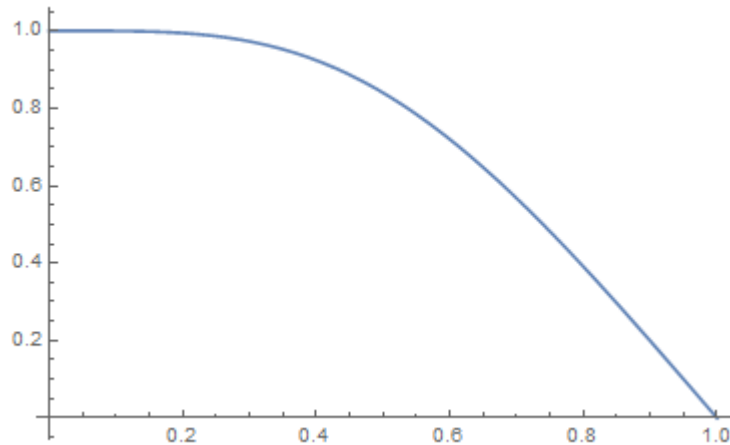


Figura 6: $f(c)$

Por último, se observa que no es posible maximizar al mismo tiempo la probabilidad de que un estado de Hardy viole un argumento tipo EPR y su grado de entrelazamiento, puesto que, dentro del intervalo $c \in (0, 1)$, la función de probabilidad alcanzaba su máximo valor en $c \approx 0,7862$, mientras que el grado de entrelazamiento era mayor cuanto más nos acercásemos a $c = 1$, es decir, a $|\vec{a}| = 0$. Como se muestra en la figura 7, si buscásemos valores cercanos a $c = 1$, provocaríamos que la probabilidad de que ese estado violase un argumento tipo EPR fuese prácticamente nula. Por esta razón, en la práctica prevalecerá el criterio de la máxima probabilidad.

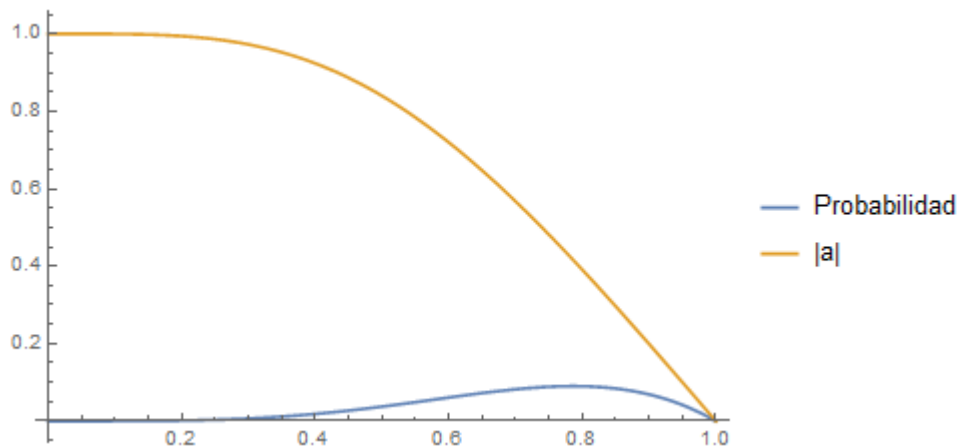


Figura 7: Probabilidad vs Grado de mezcla/entrelazamiento

8. Resultados experimentales

Hasta esta sección nos hemos centrado solamente en aspectos teóricos, con excepción de las simulaciones realizadas en la sección 4, que pueden seguir siendo operaciones matemáticas muy alejadas de la realidad empírica.

Tras la publicación en 1964 de los resultados de J. Bell quedaba a la tarea de los científicos demostrar su teorema con experimentos reales. En 1969, Clauser *et al.* expusieron en un artículo [31] la posibilidad de realizar dichos experimentos con fotones entrelazados. Sin embargo, los experimentos que se desarrollaron a continuación presentaban un conjunto de problemas, debidos principalmente a que no se disponía de la tecnología adecuada, lo que hizo que se tuviesen que tomar un conjunto de suposiciones para su realización [2, 32]. Hubo que esperar hasta 1982, cuando Alain Aspect llevó a cabo una serie de experimentos [33, 34], que resultaron ser los primeros en probar experimentalmente y de la forma más concluyente la violación de las desigualdades de Bell y, en consecuencia, demostrar que la mecánica cuántica otorga una correcta descripción de tales sucesos.

En el primero de los experimentos de Aspect aquí citado [33], intentaron seguir un esquema lo más parecido posible al propuesto por Einstein, Podolsky, Rosen y Bohm. Entre las mejoras respecto a los experimentos anteriores cabe destacar la sustitución de los polarizadores ordinarios por polarizadores de dos canales, la separación de las dos polarizaciones (todos los experimentos anteriores transmitían una polarización y bloqueaban la ortogonal) y el subsiguiente uso de dos fotomultiplicadores. De este modo, las medidas de la polarización se asemejaban a las mediciones de partículas de espín 1/2 con el aparato de Stern-Gerlach. Para crear un emisor eficiente de fotones, se utilizó una cascada de átomos radioactivos de Calcio-40. Las desigualdades de Bell generalizadas tienen como resultado $-2 \leq S \leq 2$, donde $S = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b')$. A. Aspect, P. Grangier and G. Roger obtuvieron para esa desigualdad y un ángulo de 22.5° ó 67.5° (donde ocurre la mayor violación) un valor de $S = 2,697 \pm 0,015$. Con polarímetros simétricos, obtuvieron $S = 2,70 \pm 0,05$.

El segundo experimento [34] se diferenció de todos los anteriores porque fue el primero en usar polarizadores variables. Los estudios previos se habían realizado con polarizadores estáticos, los cuales se mantenían fijos durante todo el experimento y, por tanto, con la misma orientación. En este caso, se utilizaron dos polarizadores con dos posibles orientaciones. Si las dos posiciones varían de forma aleatoria y de modo que los polarizadores no estén correlacionados, es posible escribir las desigualdades de Bell generalizadas de manera similar a las desigualdades de Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) [31], en las que $-1 \leq S \leq 0$. Tras realizar dos veces el experimento, el resultado medio fue de $S = 0,101 \pm 0,020$, violando la desigualdad $S \leq 0$ con 5 desviaciones estándar. Citando sus palabras:

“Sería necesario un experimento más ideal con cambios completamente aleatorios para un argumento plenamente concluyente contra todas las teorías de variables ocultas que obedecen a la casualidad Einsteniana. Sin embargo, nuestra observación de la violación de las desigualdades de Bell indica que la precisión experimental fue lo suficientemente buena para señalar una hipotética discrepancia con las predicciones de la mecánica cuántica. Tal efecto no fue observado.”

Por esta razón, no fue hasta 2016 cuando el teorema de Bell quedó demostrado de la manera más contundente posible. Esto es así porque, aunque todos los experimentos citados anteriormente permitían descartar el realismo local, presentaban una serie de problemas [35], entre los cuales, incluso después de los resultados de Aspect, perduraba esa no aleatoriedad ideal de los instrumentos empleados. Con esto nos referimos a que los científicos más reticentes sugirieron la posible existencia de una variable oculta por la cual las máquinas utilizadas en los ensayos no poseyeran la aleatoriedad ideal necesaria para la correcta realización del experimento. Concretamente, como las mediciones sobre las partículas se realizaban de acuerdo a series aleatorias generadas por ordenador, existía el dilema, tanto filosófico como científico, de si las conclusiones obtenidas en esos experimentos podían dar lugar a una afirmación categórica del teorema de Bell, o si de alguna forma las partículas podían influir sobre esas generaciones aleatorias.

El 30 de noviembre de 2016, el llamado *The Big Bell Test* [36] acabó con estas dudas, ya que, por primera vez, no fue un aparato físico el que generó las series aleatorias sobre las partículas, sino que fueron miles de mentes humanas las que lo hicieron. En concreto, participaron más de 100 000 personas y se recogieron 90 millones de bits, con los que más de 100 científicos de 15 centros de investigación diferentes pudieron trabajar. En total se llevaron a cabo nueve experimentos, coordinados por el Instituto de Ciencias Fotónicas (ICFO) de Barcelona. Para fomentar la participación de la gente, diseñaron un juego consistente en crear una secuencia de ceros y unos lo más aleatoria posible. Los bits se enviaron en tiempo real y para que el experimento funcionara se necesitaba que al menos 30 000 personas participasen, condición que se superó con creces.

De esos nueve experimentos, comentaremos los resultados de aquellos que guardan mayor relación con el tema tratado en este trabajo [36].

The Bell Test Machine

Lo llevó a cabo el NIST (National Institute of Standards and Technology) con la ayuda de otros 10 institutos de Europa y América del Norte. Consistió en medir la polarización de la luz (400 000 fotones entrelazados por segundo) con unos polarizadores capaces de girar 100 000 veces por segundo. Los pares de fotones entrelazados se generaban por un proceso de conversión descendiente paramétrica y cada bit aleatorio hacía que los polarizadores girasen en un ángulo determinado. El emisor de fotones y los dos detectores se encontraban en tres salas diferentes, ampliamente separadas, en la misma planta de un gran edificio de laboratorio. Los dos detectores estaban a 184 *m* de distancia el uno del otro, y se encontraban a 126 *m* y 132 *m*, respectivamente, del emisor de fotones. El experimento duró casi 7 minutos, durante los cuales se midió el grado de libertad de los fotones a una tasa de 100 000 mediciones por segundo. En ese tiempo utilizaron más de 80 millones de bits aleatorios recogidos previamente, ya que debido a la velocidad que requiere el experimento no se podían utilizar los bits en tiempo real. La distancia entre los detectores fue de 187 *m*. En 2015 habían realizado el mismo experimento, con la diferencia de que las decisiones sobre cómo realizar las mediciones se hicieron con números aleatorios generados a partir de diferentes procesos físicos. Se quiso comprobar si había alguna diferencia entre los resultados de un test de Bell donde

los seres humanos determinasen de alguna manera las elecciones de los detectores, pero no observaron ninguna diferencia notable. La desigualdad de Bell estudiada fue la desigualdad CH (Clauser-Horne), para la que el realismo local implica $J \leq 0$. Obtuvieron un valor para J de $(1,65 \pm 0,20) \times 10^{-4}$, que corresponde a una violación de la desigualdad por más de 8.7 desviaciones estándar.

Violation of a Bell Inequality using Entangled Photons and Human Random Numbers

Fue realizado por el IQOQI (Institute of Quantum Optics and Quantum Information) de Viena y la Academia de Ciencias Austriaca. Al igual que en el anterior experimento, se trabajó con pares de fotones entrelazados en los que se midió su polarización en dos direcciones distintas con dos detectores cuyos ajustes quedaban establecidos por los bits enviados por los humanos. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, los bits se procesaron en tiempo real. Los fotones fueron enviados por fibra óptica desde la fuente de emisión hasta un telescopio de transmisión que los envió a su vez al aparato donde se encontraban los detectores.

Realizaron el mismo experimento de dos formas distintas. En la primera usaron los números aleatorios generados por los humanos mezclados con números cuánticos aleatorios, y en la segunda usaron los números generados por los humanos mezclados con números aleatorios de una base de datos, de modo que pudieron separar y comparar los resultados de ambas pruebas, en las que se examinó la desigualdad de Bell CHSH, para la cual el realismo local implica que $|S| \leq 2$. En el primer experimento obtuvieron un valor para S de $2,639 \pm 0,008$, lo que significa que la violación de la desigualdad es de más de 80 desviaciones estándar. En el segundo experimento, obtuvieron un valor de S de $2,643 \pm 0,006$ que corresponde a una violación de la desigualdad de más de 107 desviaciones estándar.

Violation of Bell's inequality with a single atom and single photon entangled over a distance of 400 m

Este experimento fue realizado por la universidad Ludwig-Maximilians de Múnich y el Max-Planck-Institute of Quantum Optics. En él entrelazaron un átomo de Rubidio-87 con un fotón, así como dos átomos de este elemento. Para entrelazar el átomo con un fotón, se parte de un solo átomo de Rubidio 87 (isótopo radioactivo) almacenado en un dipolo óptico. El entrelazamiento se genera al excitar el átomo a un nivel superior de energía de corta duración, de modo que vuelva a su estado inicial emitiendo un fotón. La superposición coherente de los dos canales de decaimiento proporciona un estado entrelazado entre el espín del átomo y la polarización del fotón emitido.

Los dos laboratorios en los que se midió cada partícula estaban separados por una distancia de 400 m. Para enviar el fotón se empleó fibra óptica, mientras que para el experimento con dos átomos no se necesitó ningún medio para separarlos, ya que se pueden entrelazar aunque no hayan interactuado nunca. La forma de tratar los bits fue la siguiente. Un bit decidió si la elección de la medida del átomo se haría utilizando un bit proveniente de los humanos o uno proveniente de un generador local de números aleatorios. En el primer caso, ese bit humano encendió

uno de los dos haces de luz con diferentes polarizaciones para leer el estado del espín del átomo.

La desigualdad de Bell que se comprobó fue la CHSH ($|S| \leq 2$) y se dividieron los resultados en dos grupos, según fuese la medida del espín del átomo elegida por los bits de los humanos o por los bits del generador de números aleatorios. Para el primer grupo se obtuvo $S = 2,427 \pm 0,0223$, lo que corresponde a una violación de la desigualdad de más de 19 desviaciones estándar. En el caso del segundo grupo se obtuvo $S = 2,413 \pm 0,0223$, con una violación de la desigualdad de más de 18.5 desviaciones estándar.

Telecom compliant source of polarization entangled photons for the violation of Bell inequalities driven by human-generated random numbers

La Université Côte d'Azur y el CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) fueron los encargados de realizar esta prueba. Se utilizaron pares de fotones entrelazados que fueron medidos con unos detectores separados por 5 m de distancia. En este caso, los bits generados por los humanos cambiaban el estado de polarización de los fotones. Físicamente, esto se consigue con un modulador de fase electro-óptico, que aplica un voltaje sobre uno de los fotones de 0 o 2.4 V dependiendo de si recibe un 0 o un 1, respectivamente, lo que consigue rotar la polarización del fotón en 0 o 45 grados, respectivamente. Sobre el otro fotón las tensiones que se aplican son de 1.2 y 3.6 V, lo que se traduce a una rotación de la polarización de 22.5 o 67.5 grados, respectivamente. La mayor parte de los bits se usaron en el primer segundo desde de su llegada, aunque también almacenaron varios bits generados por números aleatorios por si hubiese habido problemas con la red.

Se midió la desigualdad CHSH ($|S| \leq 2$), para la que obtuvieron un valor de $S = 2,431 \pm 0,003$, lo que supone una violación de la desigualdad de más de 140 desviaciones estándar.

Entanglement between Atoms and Light: Quantum Memories for Quantum Info. Frequency-Bin Entanglement

El ICFO (Instituto de Ciencias Fotónicas) de Barcelona llevó a cabo dos experimentos. En el primero generaron entrelazamiento entre un fotón y una sola excitación colectiva espín (llamada *spin-wave*) formada por una nube de 1 millón de átomos de Rubidio. Para crear esta nube, los átomos se enfrían con un láser a una temperatura de 100 microgrados por encima del cero absoluto dentro de una cámara de vacío ultra-alta. Generaron entrelazamiento probabilísticamente entre un *time-bin qubit* (un qubit almacenado en un fotón), adaptado para la transmisión en fibras ópticas, y un *spin-wave qubit* (un qubit almacenado en la nube de átomos). Este entrelazamiento se puede almacenar durante un tiempo programable en la nube de átomos fríos, que sirve como una memoria cuántica. Después de un tiempo controlado de almacenamiento, el *spin-wave qubit* se convierte de forma determinista en un *time-bin qubit*. Ambos qubits fotónicos se analizaron utilizando interferómetros ópticos. Los números aleatorios proporcionados por los humanos

se utilizaron para elegir aleatoriamente las bases de medida, cambiando la fase de cada interferómetro mediante un dispositivo piezoeléctrico.

El segundo experimento consistió en probar la interferencia en frecuencia de dos fotones, uno visible y el otro en el rango de telecomunicaciones. Debido al proceso de generación, los fotones se crean en una superposición de múltiples modos espectrales y, debido a la conservación de la energía, dos fotones generados al mismo tiempo por un proceso paramétrico de conversión descendente están correlacionados en su frecuencia. Gracias a la forma multimodo del espectro, pudieron identificar cada modo espectral como un *frequency-bin* discreto. Con esto último pudieron comprobar la desigualdad de Bell en el grado de libertad de tiempo-frecuencia. Los bits aleatorios provenientes de los humanos configuraron la fase y la amplitud de las señales de radiofrecuencia que se enviaron a unos moduladores encargados de generar la superposición de las frecuencias.

Se comprobó la desigualdad CHSH ($|S| \leq 2$) y obtuvieron un resultado de $S = 2,25 \pm 0,08$, lo que corresponde a una violación de la desigualdad de más de 3 desviaciones estándar.

Para terminar, debemos mencionar que en junio de 2017 China batió el récord de distancia en una comunicación cuántica [37]. Lograron transmitir información entre la Tierra y un satélite ubicado en el espacio en una órbita situada a 536 *km* de distancia. El satélite tenía instalado un instrumento capaz de emitir pares de fotones entrelazados. Cada uno de ellos se recibía en un receptor distinto, y la distancia que había entre ambos detectores fue de 1203 *km*. A pesar de que la distancia que recorrían los fotones variaba entre los 1600 y los 2400 *km*, no hubo ninguna pérdida de información. En el espacio apenas hay pérdida de información porque los fotones no interactúan con el vacío, esto permite extender el alcance de las comunicaciones cuánticas a distancias de miles de kilómetros. De este modo, en un futuro se podría crear una red global de satélites de comunicación cuántica para transmitir datos de manera segura entre dos puntos cualesquiera de la Tierra, puesto que la información transmitida es imposible de ser hackeada, ya que por el momento no se puede interceptar sin que el que lo intente sea descubierto.

9. Conclusiones

La paradoja EPR constituye un claro ejemplo de lo extraños que nos pueden resultar ciertos fenómenos cuánticos. Gracias al *teorema de Bell* se ha podido comprobar que a nivel cuántico el principio de localidad no se cumple y, hasta el día de hoy, no se ha dado con la explicación de por qué sucede esto, si es que la hubiese.

En este trabajo se ha intentado explicar resumidamente la parte de la mecánica cuántica relacionada con el entrelazamiento y la violación de las desigualdades de Bell.

El espín es una de las propiedades más importantes de las partículas atómicas y subatómicas. El hecho de que sus componentes sean operadores no conmutables implica la imposibilidad de medir al mismo tiempo más de una componente. Además, el hecho de que sus posibles valores estén cuantizados tiene grandes consecuencias. Una de ellas es el posible uso del espín de un sistema aislado como *qubit*, que ha dado lugar a la computación cuántica, tecnología mucho más potente que la actual computación basada en el transistor. Algo tan importante no podía quedar fuera de este trabajo, donde se ha dedicado una sección entera a introducir los principios básicos de esta tecnología y se ha realizado una serie de simulaciones para mostrar con ejemplos concretos los aspectos teóricos. Al mismo tiempo, los resultados obtenidos han servido para comprobar el carácter probabilístico inherente a la función de onda. Las simulaciones se han llevado a cabo con un programa realizado en MATHEMATICA, el cual se adjunta en la sección 3.2, y permite reproducir medidas sobre un sistema de N -qubits, así como de almacenar y mostrar los resultados de un número determinado de mediciones.

Por otro lado, se ha realizado una clasificación de los estados basándonos en el entrelazamiento. Las matrices densidad y el *criterio PPT* han resultado ser herramientas poderosas para poder diferenciar unos estados de otros, ya que, como sucede en sistemas tripartitos, ciertas distinciones no son tan triviales. Por esta razón, se ha analizado con especial énfasis la diferencia entre los estados GHZ y los W, concluyendo que los estados W están en cierto modo más entrelazados que los GHZ, pues si se suprime una de las partes el estado restante sigue estando entrelazado. El motivo de este interés en diferenciarlos radica en que los estados GHZ desempeñan un papel fundamental en el *teorema de Bell*. En el apéndice se adjunta un programa para MATLAB para calcular la traspuesta parcial de una matriz, a fin de facilitar los cálculos que se requieren en la aplicación del *criterio PPT*.

A continuación, se ha estudiado las desigualdades de Bell. Primero para el caso de correlación perfecta con el clásico ejemplo del singlete, y posteriormente para el caso general, obteniendo que el valor del ángulo para el que se produce la mayor violación es de $\pi/3$.

Sin embargo, en sistemas tripartitos no es necesario recurrir a las desigualdades de Bell para demostrar la invalidez del argumento EPR. Los estados GHZ permiten concluir con certeza, y sin necesidad de desigualdades ni probabilidades, que las componentes del espín no pueden tener valores definidos previos a la medida.

Hardy descubrió que también existían estados bipartitos que podían probar la incompatibilidad de la paradoja EPR con la mecánica cuántica sin el uso de

desigualdades, aunque sí recurriendo a resultados probabilísticos. Se ha analizado la relación entre el grado de entrelazamiento de estos estados con la probabilidad de que violen un argumento tipo EPR y, en definitiva, se impone la búsqueda de un estado que maximice dicha probabilidad, la cual puede alcanzar un valor máximo de 0,09017.

Finalmente, se ha pretendido comentar los resultados de los experimentos más importantes realizados en este campo, sin menospreciar todos aquellos que no se mencionan, puesto que, con afán de no extenderse demasiado, no hay cabida en este trabajo para todos ellos. No obstante, todas las pruebas experimentales que se han llevado a cabo desde que J. Bell expuso sus desigualdades han servido para consolidar la mecánica cuántica, dado que todas han probado de manera contundente la violación de las desigualdades y, en consecuencia, el rechazo del argumento de Einstein, Podolski y Rosen.

Apéndices

Cálculo de probabilidades

Supongamos que un sistema compuesto por dos espines $1/2$ se encuentra en el estado singlete:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle).$$

Nos preguntamos cuál es la probabilidad de que al medir $S_x^{(1)}$ se obtenga el valor $+1/2$. Puesto que

$$S_x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

un cálculo directo muestra que los autovalores de esta matriz son $+1/2$ (doble) y $-1/2$ (doble) y sus autovectores normalizados correspondientes son:

$$\begin{aligned} \lambda = +1/2: \quad |S_1^{(1)} = +1/2, 1\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |S_1^{(1)} = +1/2, 2\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda = -1/2: \quad |S_1^{(1)} = -1/2, 1\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |S_1^{(1)} = -1/2, 2\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando lo visto en la sección 1.1:

$$\begin{aligned} \text{Prob}(S_1^{(1)} = +1/2|\psi_0) &= |\langle S_1^{(1)} = +1/2, 1|\psi_0\rangle|^2 + |\langle S_1^{(1)} = +1/2, 2|\psi_0\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 + \frac{1}{4} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Un cálculo análogo conduce a que:

$$\text{Prob}(S_1^{(1)} = -1/2|\psi_0) = \frac{1}{2}$$

Del mismo modo, haciendo cálculos similares a los anteriores, se puede demostrar que:

$$\text{Prob}(S_I^{(i)} = \pm 1/2|\psi_0) = \frac{1}{2} \quad \forall i = 1, 2; \forall I = x, y, z.$$

Supongamos ahora que comenzamos con el sistema compuesto en el estado singlete $|\psi_0\rangle$ y medimos $S_1^{(1)}$, obteniendo como resultado $S_1^{(1)} = +1/2$. Veamos qué ocurre con el estado cuando se realiza una nueva medición:

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &\mapsto (|S_1^{(1)} = +1/2, 1\rangle\langle S_1^{(1)} = +1/2, 1| + |S_1^{(1)} = +1/2, 2\rangle\langle S_1^{(1)} = +1/2, 2|)|\psi_0\rangle \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si normalizamos el vector resultante, obtenemos:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De este modo, se puede concluir que al realizar una medición sobre $S_x^{(1)}$ el sistema cambia del estado $|\psi_0\rangle$ al estado $|\psi\rangle$. En otras palabras, cuando medimos un sistema en mecánica cuántica, provocamos que el sistema cambie. Este fenómeno se conoce como colapso (Sección 1.1). Veamos qué sucede si después de medir $S_x^{(1)}$ y obtener un valor de $+1/2$, decidimos medir $S_x^{(2)}$. Para ello, procedemos a calcular el valor que resultaría de la medición, así como la probabilidad de que dicho valor saliese:

$$\begin{aligned} S_x^{(2)}|\psi\rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}|\psi\rangle \end{aligned}$$

Como $|\psi\rangle$ es autoestado de $S_x^{(2)}$ con autovalor $-1/2$ podemos concluir que:

$$\text{Prob}(S_x^{(2)} = -1/2|\psi) = 1.$$

En otras palabras dicha medida nos dará el valor $-1/2$ con absoluta certeza.

La misma conclusión se alcanza si, partiendo del estado singlete, medimos en primer lugar $S_I^{(1)}$ y después $S_I^{(2)}$ para cualquier $I = x, y, z$ (y, en consecuencia, para cualquier dirección \vec{n}). Por ejemplo, si se mide $S_I^{(1)}$ y se obtuviese $1/2$, al medir a continuación $S_I^{(2)}$ obtendremos $-1/2$ con probabilidad 1.

Cálculo de la traspuesta parcial

A continuación se muestra un código en MATLAB que permite calcular la traspuesta parcial de una matriz:

```
1 function x = Tx(rho,sys,dim)
2
3 n = length(dim);
4 d = size(rho);
5 perm = [1:2*n];
6 perm([n+1-sys,2*n+1-sys]) = perm([2*n+1-sys,n+1-sys]);
7 x = reshape(permute(reshape(rho,[dim(end):-1:1],dim(end):-1:1)
8     ],perm),d);
end
```

$X=Tx$ (RHO, SYS, DIM) devuelve la traspuesta parcial de una matriz RHO respecto al subsistema SYS, donde las dimensiones del subsistema quedan especificadas por el vector DIM. Si se especifica solamente una dimensión, por ejemplo, DIM=dim1; se asume que el sistema es de $\text{dim1} \times \text{dim1}$ dimensiones.

Índice de figuras

1.	Momento angular	9
2.	Medición del espín con un aparato de Stern-Gerlach	14
3.	Esquemas de 4 cálculos distintos con 3 qubits	29
4.	Violación de la desigualdad de Bell	41
5.	Probabilidad($O_2^{(1)} = -1, O_2^{(2)} = -1$)	46
6.	$f(c)$	47
7.	Probabilidad vs Grado de mezcla/entrelazamiento	48

Referencias

- [1] J. S. Bell *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*, *Physics* **1**, 195-200 (1964).
- [2] Bertlmann, R.A., Zeilinger, A. (2002) *Quantum (un)speakables. From Bell to quantum information*. (1st Edition). Springer.
- [3] I. E. Segal, *Postulates for General Quantum Mechanics*, *The Annals of Mathematics*. **48**, 930-948 (1947).
- [4] Observable. *Wikipedia, La enciclopedia libre*.
- [5] Notación bra-ket. *Wikipedia, La enciclopedia libre*.
- [6] Operador hermítico. *Wikipedia, La enciclopedia libre*.
- [7] Ecuación de Schrödinger. *Wikipedia, La enciclopedia libre*.
- [8] L. E. Ballentine, *Probability theory in quantum mechanics*, *Am. J. of Phys.* **54**, 883 (1986).
- [9] Postulados de la mecánica cuántica. *Wikipedia, La enciclopedia libre*.
- [10] Relación de indeterminación de Heisenberg. *Wikipedia, La enciclopedia libre*.
- [11] E. Ballentine, Leslie (1998) *Quantum mechanics: A modern development*. (2nd Edition). Singapore: World Scientific Publishing.
- [12] Galindo A., Pascual P. (1990) *Quantum Mechanics I and II*. (1ª edición). Springer.
- [13] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [14] Reglas de conmutación en operadores del momento angular. *QuímicaFísica.com*.
- [15] Espín. *Wikipedia, La enciclopedia libre*.
- [16] Matrices de Pauli. *Wikipedia, La enciclopedia libre*.
- [17] Experimento de Stern y Gerlach. *Wikipedia, La enciclopedia libre*.
- [18] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, *Bell's theorem without inequalities*, *Am. J. of Phys.* **58**, 1131 (1990).
- [19] G. G. Alcaine, *Enredo cuántico*, *Revista española de física* Vol. **14**, N°. 1 (2000).
- [20] D. Candela, *Undergraduate computational physics projects on quantum computing*, *Am. J. of Phys.* **83**, 688 (2015).
- [21] N. D. Mermin, *From Cbits to Qbits: Teaching computer scientists quantum mechanics*, *Am. J. of Phys.* **71**, 23-30 (2003).

- [22] P. Krammer, *Quantum entanglement: Detection, classification, and quantification*, Universität Wien (2005).
- [23] C. Sabín and G. García Alcaine, *A classification of entanglement in three-qubit systems*, Eur. Phys. J. D **48**, 435-442 (2008).
- [24] G. Uchida, *Geometry of GHZ type quantum states*, Universität Wien (2013).
- [25] Matrices densidad. *Bosoneando*.
- [26] H. Eneriz, *Entanglement in bipartite and tripartite quantum systems*, Universidad del País Vasco (2015).
- [27] Peres–Horodecki criterion. *Wikipedia, The Free Encyclopedia*.
- [28] A. Cabello, *Multiparty multilevel Greenberger-Horne-Zeilinger states*, Phys. Rev. A **63**, 022104 (2001).
- [29] L. Hardy, *Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states*, Phys. Rev. Lett. **71**, 1665 (1993).
- [30] A. Cabello, *Bell's theorem with and without inequalities for the three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger and W states*, Phys. Rev. A **65**, 032108 (2002).
- [31] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, and R.A. Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).
- [32] S.J. Freedman and J.F. Clauser, *Experimental test of local hidden-variable theories*, Phys. Rev. Lett. **28**, 938 (1972).
- [33] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger *Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities*, Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).
- [34] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger *Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).
- [35] J. Larsson, *Loopholes in Bell inequality tests of local realism*, J. Phys. A **47**, 424003 (2014).
- [36] The Big Bell Test
- [37] QSS (Mozi). *space.skyrocket.de*. Gunter's Space Page.
- [38] N. D. Mermin, *Bringing home the atomic world: Quantum mysteries for anybody*, Am. J. of Phys. **49**, 940 (1981).
- [39] N. D. Mermin, *Quantum mysteries revisited*, Am. J. of Phys. **58**, 731 (1990).