ESTADISTICA ESPAÑOLA
Vol. 32, Núm. 124, 1990, págs. 417 a 437

Problemas de homogeneidad en modelos de series temporales (*)

por
J. IGNACIO PEÑA
Departamento Análisis Económico
Universidad Autónoma de Madrid

RESUMEN

Este trabajo se ocupa de problemas de homogeneidad en general, y de cambios en el modelo ARMA en particular, de una serie temporal. Dada una serie temporal, se propone un modelo compuesto de diversos elementos. Cada componente puede reflejar cambios de modelo ARMA o de varianza en la perturbación o de ambas cosas a la vez, o heterogeneidades en general.

Se propone un método secuencial para detectar y modelizar heterogeneidades en series temporales univariantes y este método se aplica a dos series temporales.

Palabras clave: modelos ARMA, cambio de varianza, cambio de modelo, homogeneidad.

Clasificación AMS: 62P20.

(*) El autor agradece el estímulo intelectual de R. S. Tsay para la elaboración de una versión anterior de este trabajo, realizada en la Graduate School of Business, University of Chicago y financiada por la comisión Fulbright. Este trabajo se ha beneficiado de los comentarios recibidos durante su presentación en el XIV Simposio de Análisis Económico, Universidad Autónoma de Barcelona. Los acertados comentarios del evaluador anónimo han contribuido a mejorar la presentación del trabajo.

1. INTRODUCCION

En el análisis de series temporales reales, es frecuente observar que la serie no sigue un comportamiento regular a lo largo de todo el período de observación, sino que aparecen rasgos heterogéneos en puntos arbitrarios de la muestra. Ejemplos típicos de falta de homogeneidad incluyen datos atípicos, cambios de nivel, cambios en la variabilidad (dispersión) y cambios en la estructura del modelo (tanto en los valores de los parámetros, como en la existencia de nuevos retardos en el mismo).

Se han propuesto diversos enfoques para tratar algunos de los casos de heterogeneidad mencionados. Así, para tratamiento de datos atípicos, Harrison y Stevens (1976) y Abraham y Box (1978) adoptan un enfoque Bayesiano; Martin y Yohai (1986) emplean un modelo de distribuciones contaminadas y estudian los funcionales influyentes de una serie. En otra línea, Fox (1972), Chang y Tiao (1983), Tiao (1985) y Tsay (1986) desarrollan métodos paramétricos para clasificar y modelizar observaciones atípicas.

En lo referente a cambios en la varianza, Wichern, Miller y Hsu (1976), y Hsu (1977) estudian cambios en escalón y usan para detectarlos varianzas residuales "móviles"; Baufays y Rasson (1985) investigan cambios de varianza en modelos AR cuando el punto de cambio es desconocido; la generalización de este enfoque a modelos ARMA se expone en Tsay (1988). Un enfoque adicional es proponer modelos generales para la varianza condicional, como los modelos ARCH, Engle (1982) o GARCH, Bollerslev (1986).

El estudio de cambios en el modelo se expone en Brown, Durbin y Evans (1975) para modelos de regresión, y para modelos simples ARMA en Bagshaw y Johnson (1977).

En este trabajo nos ocuparemos de cambios en la varianza y/o en el modelo. El objetivo es estudiar si una serie es homogénea o no, con respecto a estas dos características. Se utiliza un procedimiento secuencial (predictivo) de detección y se derivan contrastes tipo F para la hipótesis de homogeneidad en la serie. Asimismo, se emplean diversos gráficos que ayudan a detectar los posibles puntos de cambio. Una vez detectado el punto (o puntos) de cambio, se computan diversas funciones de covarianza de los datos para profundizar en la distinción entre si hay cambio de modelo, cambio de varianza, o ambos simultáneamente. Finalmente, se expone un procedimiento iterativo para modelizar procesos heterogéneos.

El enfoque predictivo adoptado en este trabajo es similar al de Bagshaw y Johnson (1977), pero los contrastes propuestos son diferentes y más generales.

El problema de detección de cambio de modelo está estrechamente relacionado con el de detección de sistemas defectuosos en la literatura de control. Se han propuesto diversos métodos (on-line y off-line) para detectar los posibles puntos de cambio. Una buena recopilación de estos métodos se encuentra en Basseville y Benveniste (1986). En general, los métodos de detección en circuito abierto ("off-line") pueden clasificarse en dos categorías: los basados en sumas acumuladas (cusum) y los derivados del contraste de razón de verosimilitud (LR). Los métodos cusum se basan en resultados para procesos de Wiener (esto es, movimiento Browniano), mientras que, los métodos LR suponen conocido el punto de cambio, aunque este enfoque puede generalizarse incluyendo este punto como un parámetro más a estimar en la función de verosimilitud.

En el trabajo que aquí se presenta, el punto de cambio es desconocido y se estima de los datos, así como la forma del posible cambio en el modelo.

En este sentido, y al usar contrastes que son asintóticamente equivalentes al de razón de verosimilitud este enfoque pertenece a la segunda vía mencionada, mientras que, por ejemplo, Bagshaw y Johnson (1977) utilizan la primera vía para proponer contrastes que son esencialmente extensiones de los propuestos por Page (1954, 1955) para esquemas de control continuos.

El trabajo está organizado como sigue: en la sección 2 se presenta el modelo y sus rasgos principales; en la sección 3 se muestra el procedimiento de construcción de modelos para series heterogéneas. La sección 4 presenta dos aplicaciones empíricas. Finalmente, algunas conclusiones se exponen en la sección 5. (Se emplean las abreviaturas FAS para la función de autocorrelación simple, FAP para la parcial y EACF para la función de autocorrelación extendida).

2. EL MODELO

Supongamos una serie temporal discreta Z_t, generada por el modelo ARMA:

$$Z_t = \Gamma(B)\, a_t \quad t = 1,\dots, n \tag{1}$$

donde

$$\Gamma(B) = \alpha_q(B) \,/\, \beta_p(B) \tag{1}$$

tal que

$$\chi_q(B) = 1 - \chi_1 B - \dots - \chi_q B^q \tag{3}$$

y además

$$\beta_p(B) = 1 - \beta_1 B - \dots - \beta_p B^p \tag{4}$$

es decir, tenemos dos polinomiales en el operador de retardo B de orden p y q respectivamente. Asimismo, a_t es una secuencia de variables Gaussianas distribuidas idéntica e independiente con media cero y varianza constante h. Supondremos D ceros de $\beta_p(B)$ en el círculo unidad y que no hay factores comunes entre $\beta_p(B)$ y $\chi_q(B)$, que además satisface las condiciones de invertibilidad. Si D es diferente de cero, y, por tanto, la serie no es estacionaria, asumiremos que la serie comienza en un instante fijo, con valores iniciales conocidos.

Dado un momento arbitrario $t = d$, podemos escribir el modelo

$$Z_t = \Gamma_0(B)\, a_t \quad t = 1, \dots, d-1 \tag{5}$$

$$Z_t = \Gamma_1(B)\, a_t \quad t = d, \dots, n \tag{6}$$

Si $\Gamma_0(B) = \Gamma_1(B)$ para cualquier valor de d, llamaremos a esa serie Z_t homogénea. Sin embargo, si existe alguna d tal que $\Gamma_0(B) \neq \Gamma_1(B)$, consideraremos heterogénea a la serie.

Para modelizar la falta de homogeneidad, usaremos la siguiente expresión:

$$\Gamma_1(B) = \Gamma_0(B) \cdot V_1^{(d)}(B) \tag{7}$$

y el nuevo elemento que define el cambio es:

$$V_1^{(d)}(B) = W_1(B) / \delta_1(B) \tag{8}$$

donde $\delta_1(B)$ y $W_1(B)$ son polinomiales en B tal que

$$W_1(B) = W_{01} + W_{11}B + \dots + W_{s1}B^{s1} \tag{9}$$

$$\delta_1(B) = 1 - \delta_{11}B - \dots - \delta_{r1}B^{r1} \tag{10}$$

y son de grado $s1$ y $r1$ respectivamente. De nuevo suponemos que no hay factores comunes entre $W_1(B)$ y $\delta_1(B)$; asimismo se admite que existan ceros de $\delta_1(B)$ en el círculo unidad.

Nótese que la anterior estructura (5)-(10) puede recoger cambios tanto en la varianza, como en el modelo, como en ambos aspectos a la vez.

Varios casos particulares de interés de la formulación anterior son:

— Si consideramos $r1 = 0$, $s1 = 0$, tenemos $V_1^{(d)} = W_{01}$ y, por tanto, sustituyendo en (5) y (6) obtenemos:

$$Z_t = \frac{\alpha(B)}{\beta(B)} a_t \quad t = 1,\ldots, d\text{-}1 \tag{11}$$

$$Z_t = \frac{\alpha(B)}{\beta(B)} W_{01} a_t \quad t = d,\ldots, n \tag{12}$$

es decir, tenemos un brusco cambio de varianza en *d*, cuya magnitud es el cuadrado de W_{01}.

— En el caso $r1=0$, $s1=1$, tenemos $V_t^{(d)} = (W_{01} + W_{11}B)$ y, por tanto, sustituyendo en (6) y (7) obtenemos la expresión de la segunda parte ($t = d,\ldots, n$) como sigue:

$$Z_t = \frac{\alpha(B)}{\beta(B)} (W_{01}a_t + W_{11}a_{t-1}) \quad t=d,\ldots, n \tag{13}$$

o equivalentemente

$$Z_t = \frac{\alpha(B)}{\beta(B)} (1\text{-}fB)\, W_{11}\, a_t \quad t = d,\ldots, n \tag{14}$$

donde $f = -W_{11}/W_{01}$. Por tanto, tenemos tanto un cambio de varianza de magnitud W_{01} al cuadrado, como un cambio en la estructura del modelo. Nótese que el nuevo término MA puede incorporarse al modelo o bien cancelando un término del operador AR (p) o combinarse con la parte MA (q), dando lugar a una nueva estructura MA de orden igual o menor a $q+1$. Por tanto, en el período $t = d,\ldots, n$ la variable Z_t seguirá un modelo ARMA (p^*,q^*), ($q^* \leq q+1$, $p^* \geq p-1$).

En general, para cualquier valor de $s1$, el modelo de la "segunda parte" seguirá un modelo ARMA (p^*,q^*), ($q^* \leq q+s1$, $p^* \geq p\text{-}s1$).

— En el caso $r1=1$, $s1=0$, tenemos $V_t^{(d)} = W_{01}/(1\text{-}\delta_{11}B)$ y, por tanto, la estructura para la segunda parte de Z_t es:

$$Z_t = \frac{\alpha(B)}{\beta(B)} \left(\frac{W_{01}}{1\text{-}\delta_{11}B} \right) a_t \quad t = d,\ldots, n \tag{15}$$

y, por tanto, tenemos en $t = d$ un cambio de varianza y de modelo. Si tenemos en cuenta los efectos de posible cancelación o combinación del nuevo término con los anteriores AR (p) y MA (q), es inmediato ver que en

$t = d,..., n$, seguirá un modelo ARMA (p^*,q^*), $(p^* \leq p+1,\ q^* \geq q-1)$. En general, para cualquier valor de $r1$, el modelo de la "segunda parte" seguirá un ARMA (p^*,q^*), $(p^* \leq p+1,\ q^* \geq q-r1)$.

Además, es inmediato comprobar, que para cualquier valor de $r1$ y $s1$, tenemos:

$$Z_t = \frac{\alpha(B)}{\beta(B)} \left(\frac{W._1(B)}{\delta_{11}(B)} \right) W_{01} a_t \quad t = d,..., n \tag{16}$$

donde $W_{01}.W._1(B) = W_1(B)$ y, por tanto, siempre habrá un cambio de varianza (excepto si $W_{01} = 1.0$) y un cambio de modelo, desde el original ARMA (p,q) al siguiente ARMA (p^*,q^*), $(p\text{-}s1 \leq p^* \leq p+r1,\ q\text{-}r1 \leq q^* \leq q+s1)$.

El anterior enfoque puede generalizarse sin dificultad a i diferentes regímenes o estructuras $(i=1,...k)$ en la evolución de Z_t, cada uno de ellos definido por puntos de cambio sucesivos, d_i, cada una de ellas con diferentes modelos ARMA y/o diferentes varianzas.

Por tanto, el modelo general puede escribirse:

$$Z_t = \begin{cases} \Gamma_0(B) & t = 1, ..., d_1-1 \\ \Gamma_1(B) & t = d_1, ..., d_2-1 \\ \quad . & \\ \quad . & \\ \quad . & \\ \Gamma_k(B) & t = d_k, ..., n \end{cases} \tag{17}$$

donde

$$\Gamma_i(B) = \Gamma_{i-1}(B) \,.\, V_i^{(di)}(B) \quad i = 1, ..., k$$

Si no hay cambios en el modelo original $(i=0)$, llamaremos a la serie Z_t homogénea, y si hay cambios $(i > 0)$, lo consideraremos heterogéneo. Nótese que esta estructura (17), (18) permite modelos ARIMA por tramos ("piece-wise") según diferentes períodos de tiempo y puede interpretarse como el equivalente lineal de los modelos TAR no lineales de Tong y Lim (1980) y Tsay (1987).

Sin embargo, la diferencia entre ambos enfoques es clara; mientras que los modelos TAR consideran modelos diferentes para diferentes regiones del espacio Euclídeo generado por los valores de Z_t, los modelos ARMA heterogéneos aquí presentados, consideran diferentes modelos para diferentes períodos temporales de la evolución de Z_t.

3. IDENTIFICACION Y ESTIMACION

Para poder utilizar el modelo (17), necesitamos conocer los valores de los parámetros en α, β, W_{si}, δ_{si}, además de los instantes de tiempo d_i en $V_t^{(di)}$. En la práctica (y salvo información externa sobre los d_i) estos parámetros deben estimarse de la muestra. Para ello usaremos el siguiente método. Reescribamos el modelo (1) en forma autorregresiva pura

$$Z_t = \emptyset_0^{(0)} + \sum_{v=1}^{p_0} \emptyset_v^{(0)} Z_{t-v} + a_t^{(0)} \quad t < d \tag{19}$$

$$Z_t = \emptyset_0^{(1)} + \sum_{v=1}^{p_1} \emptyset_v^{(1)} Z_{t-v} + a_t^{(0)} \quad t < d \tag{20}$$

suponiendo un único cambio en d. Si se conociese el punto de cambio d, pueden obtenerse fácilmente estimadores consistentes de los parámetros autorregresivos, Tiao y Tsay (1983). Sin embargo, el punto d será, en general, desconocido y lo estimaremos utilizando los métodos recursivos autorregresivos de Ertel y Fowlkes (1976) y Goodwin y Payne (1977).

Para un valor de t, por ejemplo, t^* ($t^* < n$) los estimadores MCO de $\emptyset = \{\emptyset_0^{(0)}, \emptyset_1^{(0)}, ..., \emptyset_v^{(0)}\}$ son consistentes, si se cumple que t^* es menor que d. Podemos calcular los residuos predictivos en el instante t como

$$\hat{a}_t = Z_t - \hat{b}_{t-1} X_t \tag{21}$$

donde $\hat{b}_{t-1}$ es el vector de estimadores mínimo-cuadráticos recursivos, basados en t-1 observaciones y X_t es el vector de regresores en el momento t ($X_t = (1, Z_{t-1}, ..., Z_{t-p0})$). En esta situación, los residuos predictivos (o errores de predicción un paso adelante) serán asintóticamente ruido blanco y ortogonales a los regresores.

Sin embargo, cuando t supera el valor d (punto de cambio), los residuos predictivos en los instantes d, d+1, ... etc., obtenidos por el método anterior, son estimaciones sesgadas de las verdaderas perturbaciones, debido al cambio de modelo en d. Por tanto, una forma de efectuar un contraste de cambio de modelo es obtener el conjunto completo de residuos predictivos en la autoregresión (19-20) y tomando éstos como variable dependiente, computar su regresión sobre las variables X_t, y usar el estadístico F de esa regresión como contraste de cambio de modelo.

Los detalles del procedimiento son los siguientes: para un valor fijo de p_0, el número efectivo de observaciones en la autoregresión es n-p_0-j-1, donde j es el número de condiciones iniciales para el algoritmo de estimación recursiva (habitualmente $n/10$); y, por tanto, disponemos de n-p_0-j-1 residuos recursivos, a los que denominamos a'_t.

Con ellos, puede calcularse la regresión

$$a'_t = r_0 + \sum_{v=1}^{p_0} r_v Z_{tv} + \epsilon_t \qquad (22)$$

para $t = j+p_0+1, ..., n$ y computar el estadístico F asociado como

$$F'(m,l) = ((\Sigma a'^2_t - \Sigma \hat{\epsilon}^2_t)/l) \qquad (23)$$

donde $m=p_0+1$ y $l = n-j-p_0-1$. Es inmediato ver que la distribución de (23) es $F(m,l)$ bajo la hipótesis nula de ortogonalidad entre los residuos recursivos y los regresores.

Este es un procedimiento similar al empleado por Tsay (1989) para modelos TAR. Adicionalmente, otros elementos útiles son los t ratios recursivos de los coeficientes estimados y las medias móviles de cuadrados de residuos recursivos, usando un método de suavizado adecuado.

Casos de especial interés son los siguientes:

— *Cambio permanente de varianza*

Sea $a_1, a_2, ..., a_t$ una serie temporal discreta, con valores gaussianos distribuidos independiente e idénticamente de media cero, cuyos estimadores a'_t son los residuos recursivos obtenidos en la última iteración ($l = n-p_0-j-1$). Consideremos los dos bloques adyacentes de observaciones de a_t, cada uno de ellos de tamaño n^*, a los que denominaremos

$a_{1i} = (a_{i+1}, ..., a_{i+n^*})'$ y

$a_{2i} = (a_{i+n^*+1}, ..., a_{i+2n^*})'$ $i = 0, 1, ..., l-2n^*$.

Para un i dado y suponiendo que

var $(a_t) = \sigma_1^2$, $t = i+1, ..., i+2n^*$ (es decir, la varianza es idéntica en a_{1i} y a_{2i}) la función de densidad conjunta de a_{1i} y a_{2i} es

$$P(a_{1i},a_{2i}/\sigma_i^2) = (2\pi\sigma_1^2)^{-n^*} exp(-Q_{1i}/2\sigma_1^2)\ exp(-Q_{2i}/2\sigma_1^2) \qquad (24)$$

donde $Q_{1i} = \sum_{j=1}^{n^*} a^2_{i+j}$ y $Q_{2i} = \sum_{j=n^*+1}^{2n^*} a^2_{i+j}$

Por tanto, Q_{1i}/σ_1^2 y Q_{2i}/σ_1^2 se distribuyen independientemente como una chi-cuadrado con n^* grados de libertad. Por tanto, $v_i = Q_{2i}/Q_{1i}$ se distribuye como una F con n^* y n^* grados de libertad, es decir F (n^*,n^*). Si denotamos $F_\alpha (n^*,n^*)$ como el 100 α porcentaje de una F con esos grados de libertad, entonces

$$P_r \{F_{1-1/2}\,\alpha\,(n^*,n^*) < v_i\ F_{1/2}\,\alpha\,(n^*,n^*)\} = 1-\alpha \qquad (25)$$

Supongamos que, por ejemplo, se produce un cambio permanente de varianza en el segundo bloque de datos a_{2i} en el instante $t=d$. Entonces, si hay n_i observaciones en a_{2i} antes de d, podemos particionar $a_{2i}=(a^{(1)}{}_{2i}{}',a^{(2)}{}_{2i}{}')'$ tal que

$$
\begin{aligned}
a^{(1)}{}_{2i} &= (a_{i+n^*+1}, \ldots, a_{i+n^*+ni})' \\
a^{(2)}{}_{2i} &= (a_{i+n^*+ni+1}, \ldots, a_{i+2n^*})'
\end{aligned}
\tag{26}
$$

para $n^* \geq n_i \geq 0$. Definamos:

$$\text{var}\,(a_t) = \sigma^2{}_{(2)},\ t = i+n^*+n_i+1, \ldots, i+2n^* .$$

Por tanto, el ratio $v_i = Q_{2i}/Q_{1i}$ se distribuye como ($X^2(n)$ es chi-cuadrado con n grados de libertad)

$$(\sigma_1^2\, X^2\,(n_i) + \sigma_2^2\, X^2\,(n^*-n_i))\ /\ \sigma_1^2\, X^2\,(n^*)$$

donde

$$\sigma_1^2\, X^2\,(n_i)\ ,\ \sigma_2^2\, X^2\,(n^*-n_i)\ \text{ y }\ \sigma_1^2\, X^2\,(n^*)$$

son estadísticamente independientes. La distribución exacta de v_i puede derivarse, Box (1954) o aproximarse mediante una F corregida, Satherthwaite (1941) aunque aquí, como se verá, se emplee un procedimiento más simple. Con estas ideas previas, el método para detección de cambio de varianza será como sigue:

a) Elíjase un valor adecuado para n^* (tamaño de los bloques de observaciones) tratando de equilibrar el conflicto entre "potencia" del contraste (n^* grande) y "precisión" del mismo (n^* pequeño). Inspección gráfica de los residuos a'_t puede ayudar a la elección del tamaño adecuado, aunque en este trabajo se empleará un número fijo $n^*=n/10$, que puede ser razonable para la mayoría de las situaciones

b) Compútese la secuencia $v_0, v_1, \ldots, v_{I\text{-}2n^*}$ y obténganse los valores máximo y mínimo, $K_{v,max}$ y $K_{v,min}$, donde

$$K_{v,max} = \text{Max}\ (v_i/n^*) \tag{27}$$

$$K_{v,min} = \text{Min}\ (v_i/n^*) \tag{28}$$

A continuación, seleccionamos

$K_v = \text{Max}(K_{v,max}, [K_{v,min}]^{-1})$ comparamos con K_v con un valor prefijado C. Si $K_v < C$ no se considera cambio en la varianza, pero si $K_v \geq C$ se considera al punto i asociado al V_i correspondiente como un candidato a posible punto de cambio de varianza (d). Valores razonables para C son 2.5, 3 ó 3.5; en las aplicaciones empíricas usaremos C = 2.5.

Nótese que la raíz cuadrada del ratio de varianzas v_l es un estimador razonable de W_{01} en los modelos expuestos en el apartado 2.

Como un contraste adicional, recuérdese que bajo la hipótesis nula de varianza estable y, conocido el punto de cambio d, puede construirse fácilmente un contraste F de la forma

$$F^*_{(m,n)} = (\sum_{i=d}^{l} a_i^2 / m) \, / \, (\sum_{i=1}^{d-1} a_i^2 / n) \tag{29}$$

$m = l\text{-}d+1$, $n = d\text{-}1$, que puede servir para reforzar la elección de d como punto de cambio. Por tanto, con una probabilidad prefijada de "falsa alarma" (0.05 o 0.01 habitualmente), el contraste maximiza la probabilidad de detección.

Sin embargo, si d es desconocido y se estima de los datos, como será en general la situación, las propiedades de optimalidad de (25) sólo se mantienen asintóticamente.

Existen otros enfoques para la detección secuencial del punto de cambio d; véase Nikiforov (1986).

Nótese que se ha obtenido un estimador razonable del cuadrado de W_{01} que es K_v; por tanto, puede construirse la serie homogénea Z_t^* simplemente multiplicando los valores después de d por la inversa de la raíz cuadrada de K_v.

$$Z^*_t = Z_t \quad t < d \tag{30}$$

$$Z^*_t = Z_t / [K_v]^{1/2} \quad t \geq d \tag{31}$$

Nótese que un estimador más consistente de W_{01} se obtendría directamente de (29).

— Si se detecta un *cambio de modelo* al utilizar el contraste (23) en el procedimiento recursivo, selecciónese d mediante (27-29) y compútese las FAS, FAP y EACF de los residuos previos y posteriores a d. Si hay cambio de modelo, esto debe reflejarse en esas funciones de covarianza. Para ilustrar este punto, supongamos que tenemos el siguiente modelo:

$$Z_t = a_t \quad t = 1, \ldots, d\text{-}1 \tag{32}$$

$$Z_t = V_1^{(d)} \, . \, a_t \quad t = d, \ldots, n \tag{33}$$

donde

$$V_1^{(d)} = W_0 + W_1 B \tag{34}$$

o equivalentemente

$$Z_t = a_t \, W_0 \, (1 - f B) \quad t = d, \ldots, n \tag{35}$$

donde $f = -W_1/W_0$. En función de los valores de f, W_0 y W_1 y del tamaño relativo de las dos submuestras, la serie completa Z_t se identificaría o bien como ruido blanco o bien como MA (1).

Supongamos que sea identificada como ruido blanco. En este caso, nótese que en la primera parte:

$$\mathrm{Var}\ (Z_t) = \sigma_a^2$$

mientras que en la segunda

$$\mathrm{Var}\ (Z_t) = W_0^2\ (1 + f^2)\ \sigma_a^2$$

Por tanto, mediante el uso de las "varianzas móviles", los contrastes propuestos seleccionarían el punto de cambio d (si éste es razonablemente importante). A continuación, al calcular las FAS, FAP y EACF de las dos submuestras, la estructura MA (1) en la segunda, aparecerá con claridad para valores suficientes de f.

Supongamos ahora que la serie Z_t fuese identificada como MA (1). Usando las estimaciones recursivas (19)-(20) y los correspondientes t-ratios, se verá como antes de d, el parámetro f toma valores no significativos. Después de d, la significación estadística de f empezará a manifestarse, señalando el cambio de estructura. De nuevo, estimado el punto d, las FAS, FAP y EACF para las dos partes clarificará la situación.

3.1. Modelización de $V_t^{(di)}$

Como síntesis de lo anterior, el procedimiento general que proponemos para modelizar series no homogéneas es el siguiente:

1. Identifíquese un modelo ARMA (p,q) para la serie total Z_t utilizando las FAS, FAP y EACF.
2. Estímese recursivamente un modelo AR (p^*) de orden adecuado, con especial atención al gráfico de residuos recursivos, los t-ratios y las sumas de cuadrados residuales.
3. Si se detecta algún dato atípico muy considerable (por ejemplo, a 6 desviaciones típicas de la media), analícese y corríjase esta situación.
4. Aplíquese el procedimiento de detección de cambio de varianza y selecciónese el punto (o puntos) de cambio d_i' (por simplicidad supongamos un solo d').
5. Si se detecta algún cambio de varianza, corríjase y compútese las FAS, FAP y EACF para identificar estructura en los diversos subconjuntos de residuos.

6. Si se detecta estructura ARMA en alguna de las submuestras, esto es una clara indicación de cambio de modelo. Por tanto, ajústense los modelos ARMA correspondientes a las submuestras.

7. Mediante el procedimiento de Chang y Tiao (1983), detéctense y corríjanse los datos atípicos usando el Análisis de Intervención.

8. Como un contraste adicional del cambio de modelo (si se ha detectado y modelizado), efectúense predicciones con el modelo inicial para la muestra completa y con los modelos para las submuestras. Si, efectivamente, hay un cambio de modelo, el segundo enfoque dará mejores predicciones que el primero.

Parece conveniente hacer algunas matizaciones al método propuesto. En primer lugar, el procedimiento comienza asumiendo implícitamente $V_i^{(di)} = 1$, que de no ser cierto, ocasionará sesgos tanto en los parámetros como en los residuos estimados. Sin embargo, a falta de información externa, este es el modo más simple de actuar. A continuación, y previo al análisis detallado, es necesario eliminar los datos atípicos de grandes dimensiones, debido a su conocido efecto distorsionador de las herramientas de identificación y estimación. Sin embargo, no sugerimos aplicar en esta primera fase el análisis tipo Chang-Tiao debido a que los cambios de varianza pueden aparecer como un grupo de datos atípicos en alguna de las submuestras de Z_t; véase un punto similar en Box y Tiao (1976).

El procedimiento presta especial atención a distinguir entre cambios de modelo (MC) y cambios en la varianza (VC). Habitualmente un MC implica VC, pero no viceversa. Por tanto, en primer lugar, se atiende a la situación más simple (VC), se corrige y luego se analizan los residuos para detectar MC.

Un enfoque alternativo podría ser: una vez seleccionado d', ajustar el modelo original a las dos (o más) submuestras por separado y efectuar un contraste de cambio estructural tipo Chow. Sin embargo, esto tiene un problema potencial (fundamentalmente, con series de fuerte componente estacional y no muy largas) debido a que las submuestras pueden ser demasiado cortas para estimar con precisión los parámetros asociados a retardos lejanos.

Consideramos, por tanto, que con nuestro sencillo procedimiento (y muy fácil de implementar computacionalmente) se presta primordial atención a los cambios VC o MC que sean relevantes en la muestra.

4. APLICACIONES EMPIRICAS

Como ejemplos de aplicación del procedimiento expuesto en 3.1., analizaremos en esta sección dos series temporales reales. La primera de ellas ha sido analizada extensamente en la literatura y la segunda nos fue proporcionada por el Center for Research in Security Prices (CRSP) de la Graduate School of Business, University of Chicago y está a disposición de cualquier lector interesado.

4.1. La serie IBM

Esta es la conocida serie de datos diarios de cotización de acciones de IBM, serie B en Box y Jenkins (1976).

La serie completa (en logaritmos) de 369 datos se usa en Box y Jenkins (1976) para ilustrar el modelado de procesos MA (1) (véase fig. 1 datos originales en logs y fig. 2 datos diferenciados); asimismo indicaron la posibilidad de un cambio en el parámetro MA entre las observaciones 150 y 250. Posteriormente, Wichern, Miller y Hsu (1976) detectaron dos cambios de varianza en la serie y su análisis fue revisado y matizado por Tsay (1986b). Deshayes y Picard (1986) encuentran un cambio en la estructura estocástica de la serie cerca de $t = 260$ pero no hacen un análisis detallado.

Usando el procedimiento expuesto en 3, se identificó la serie como un proceso AR (1) con constante. Los resultados de la estimación recursiva de ambos parámetros así como sus t-ratios asociados está en las figs. 3, 4, 5 y 6. Los residuos recursivos predictivos están en la fig. 7 y el ratio v_t de varianzas móviles en la fig. 8. Los valores finales de los estimadores son: (valores en paréntesis son los errores estandard)

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= 0.0087 \ (0.0308) \\ \hat{\beta}(1) &= 1.0363 \ (0.0523) \end{aligned} \tag{36}$$

lo cual sugiere que un simple paseo aleatorio es una presentación razonable para esta serie. El valor del estadístico F' (23) en la regresión (22) es F (2,329) ($p_0 = 1$, $j = 38$, $m = 2$) es 2.79 lo cual sugiere un cambio de modelo en la serie.

Utilizando los ratios de varianzas móviles se detectó un cambio de varianza en $t = 237$.

El valor fue $K_v = 1 \,/\, (K_{v,min})$ donde $K_{v,min} = 0.13$, es decir $K_v = 7.65$. El valor de referencia del estadístico F* (29) con (93,236) grados de libertad ($\alpha = 0.05$) es aproximadamente 1.2, luego el valor obtenido rechaza claramente la hipótesis nula de igualdad de varianza residual e indica que se ha producido un sustancial aumento de la misma a partir de $t=237$. Nótese que el estimador de W_0 será en este caso $W'_0=2.7$.

Con este resultado, se multiplicó la primera parte de la serie por esa cantidad, con objeto de homogeneizar las varianzas y se calculó la FAS para la primera (40,236) y segunda (237,369) parte de los residuos del modelo ajustado. Los valores para la primera parte (retardos 1 a 5) son:

RETARDO	1	2	3	4	5	
$\hat{r}(k)$	0,19	-0,11	-0,10	0,08	0,08	
s.e. (k)	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	(37)
Q (LB)	8,7	11,5	13,9	15,3	16,7	

Para la segunda parte:

RETARDO	1	2	3	4	5	
$\hat{r}(k)$	-0,06	0,02	-0,03	-0,09	-0,06	
s.e. (k)	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	(38)
Q (LB)	0,4	0,5	0,7	1,8	2,3	

Hay una clara indicación de que la primera parte sigue un MA (1) mientras que la segunda es ruido blanco. Ajustando los modelos a la serie completa tenemos:

$$(1-B)\, Z_t = (1+0{,}257\ B)\, a_t \quad t = 2{,}236 \tag{39}$$

con un estadístico t-Student de 4.1, $Q(5)=6{,}4$ y varianza residual de $8{,}79 \times 10^{-5}$

Para la segunda parte

$$(1-B)\, Z_t = a_t \quad t = 237{,}369 \tag{40}$$

donde $Q(5) = 1{,}8$ y varianza residual es $70{,}48 \times 10^{-5}$.

Por tanto, se ha detectado un cambio en la función de distribución de la serie diferenciada a partir de $t=237$, definido por cambios tanto en la varianza como en las autocovarianzas.

En las series residuales de ambas submuestras se detectan algunos datos atípicos poco relevantes, pero su inclusión en el modelo no altera significativamente los resultados aquí presentados. Por tanto, usando la estructura en (1) tenemos ($i = 1$)

$$\Gamma_0(B) = (1+0{,}257\ B) \qquad t = 2{,}236$$

$$\Gamma_1(B) = 2{,}7 \qquad t = 237{,}369 \tag{41}$$

$$V_1^{(237)} = 2{,}7\ /\ (1+0{,}257\ B)$$

Es interesante la interpretación de los resultados: en la primera parte, la serie tiene una menor varianza y sigue un comportamiento más sistemático (predecible) que en la segunda. En esta segunda parte, la volatilidad de la serie aumenta considerablemente (casi tres veces más que el período anterior). Una explicación habitual para cambios de varianza en precios de activos es que se ha producido un incremento del volumen de negocio de esa acción. De cualquier forma, el análisis ha revelado interesantes rasgos de los datos, que claramente sugieren la necesidad de investigación adicional, por ejemplo, de efectos no lineales (Granger y Andersen (1978), Peña (1985), Weiss (1986)).

4.2. La serie American Stores

Esta serie es el precio el último día del mes de las acciones de American Stores en el New York Stock Exchange, desde Marzo de 1971 a Diciembre de 1985, con un total de 178 datos. El gráfico original está en la fig. 9 y en logaritmos en la fig. 10 (la transformación logarítmica se eligió debido a la forma lognormal de la variable original). La serie en diferencias está en la fig. 11.

Se identificó un modelo AR (1) más constante. Los valores de la estimación recursiva de ambos parámetros y sus t-ratios están en las figs. 12, 13, 14 y 15. Los residuos recursivos están en la fig. 16 y los ratios de varianzas v_i en la fig. 17.

Los valores de los parámetros estimados y sus errores estandard son:

$$\hat{\mu} = 0{,}1288\ (0{,}077)$$

$$\hat{\beta}\,(1) = 0{,}9858\ (0{,}075)$$

lo cual sugiere para esta serie un paseo aleatorio con una pequeña deriva. El valor de la F' (2,157) es 0,268 no es significativo al nivel de 0,05.

Sin embargo, hay un enorme residuo negativo en $t = 150$, cuyo valor es aproximadamente -6,5 desviaciones típicas y que influye, considerablemente, en los resultados anteriores. Para eliminar su efecto se construyó y estimó el modelo de intervención

$$(1\text{-}B)\ Z_t = -1{,}078\ X_t^{(150)} + a_t \quad t = 2{,}178 \tag{43}$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = 0{,}01277$$

$$\hat{\sigma}_a \times 100 = 11{,}30$$

$$Q(12,\ 24,\ 36) = 14,\ 28,\ 29$$

$$\text{EACF } (0{,}0)$$

donde $X_t^{(150)}$ es una variable binaria que toma valor 1 en $t = 150$ y cero en el resto. Los residuos de este modelo están en la fig. 18 y hay indicios de cambio en la varianza cerca de $t = 80$. El procedimiento de cambio de varianza señaló un VC en $t = 77$ con $K_{v,max} = 2{,}54$. El valor de referencia de la F (100,76) es 1,23 ($\gamma = 0{,}05$) luego se rechaza claramente la igualdad de varianzas y $W_0 = 1{,}59$.

Asimismo, se detectaron 6 puntos atípicos en $t = 9$, 26, 33, 47, 51 y 61 (todos ellos antes del cambio de varianza). Por tanto, se corrigió la segunda parte de la serie multiplicándola por 1,59 (véase Fig. 19) y luego se identificaron los dos subconjuntos de residuos de (43), a_{1t}, $t = 2{,}76$ y a_{2t}, $t = 77{,}178$.

Los resultados son:

	$\hat{\sigma}_a$	Q(12,24,36)	EACF
a_{1t}	0.1387	6, 26, 36	(0,0)
a_{2t}	0,1392	31, 35, 48	(0,2) (0,9)

Hay indicios de cambio de modelo en la segunda parte a_{2t}, por lo que se ajustó un MA (2) a la misma. El coeficiente de orden 2 no fue estadísticamente significativo (valor de *t*, 0,35 a *n*.sig.= 0,05) pero aparecieron dos datos atípicos importantes así como la necesidad de un término MA (9). Incluyendo todo ello en el modelo tenemos:

$$(1\text{-}B)\ Z_{2t} = -\ 1{,}08\ X^{(150)}{}_t + 0{,}208\ X^{(148)}{}_t\ -$$

$$-\ 0{,}13\ (1\text{-}B)\ X^{(131)}{}_t + (1 + 0{,}30B + 0{,}43\ B^9)\ a_{2t} \tag{45}$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = 0{,}01388$$

$$\hat{\sigma}_a \times 100 = 17{,}78$$

$$Q(12,\ 24,\ 36) = 8,\ 18,\ 28$$

$$\text{EACF } (0{,}0)$$

Los valores de t = (16.1, 3.1, 3.2, 3.1, 5.2). Todas las variables $X^{(j)}_t$ son binarias tomando valor uno en $t=j$ y cero en otro caso. El gráfico de residuos está en la fig. 20 y no hay síntomas claros de falta de adecuación del modelo. Además, se computaron las raíces del polinomial MA (9) y no hay raíces cerca del círculo unidad.

En definitiva, el modelo conjunto propuesto para la serie es:

$$
\begin{aligned}
(1-B)\, Z_{1t} &= a_{1t} \quad t = 2{,}76 \\
(1-B)\, Z_{2t} &= \sum_{i=1}^{3} \delta_i X^{(d)}_t + (1-\alpha_1 B - \alpha_9 B^9)\, a_t \; t = 77{,}178
\end{aligned}
\tag{46}
$$

con los valores dados en (45). Usando la estructura (1) podemos escribir el modelo como:

$$
\begin{aligned}
(1-B)\, Z_{1t} &= \Gamma_0(B)\, a_t \\
(1-B)\, Z^*_{2t^*} &= \Gamma_1(B)\, a_t
\end{aligned}
\tag{47}
$$

donde $Z^*_{2t^*}$ es la serie corregida de intervenciones y

$$
\begin{aligned}
\Gamma_0 (B) &= 1{,}0 \\
\Gamma_1 (B) &= 0{,}63\ (1+0{,}30B+0{,}43\,B^9)
\end{aligned}
\tag{48}
$$

y además

$$V_1^{(77)} = (0{,}63 + 0{,}19B + 0{,}27B^9) \tag{49}$$

Como un contraste adicional de la partición de la serie en dos modelos, se estimaron los modelos (43) y (46) para el período $t = 1{,}160$ y se efectuaron predicciones un paso adelante para los 18 períodos siguientes. El error medio cuadrático (EMC) para el modelo (43) fue de 0,00767 y para el modelo (46) de 0,00582, con una ganancia en EMC sustancial (un 24%) lo cual sugiere que el modelo (46) representa más adecuadamente los datos que (43).

La interpretación de los modelos obtenidos para estas series es similar que en el caso IBM. El segundo período tiene menor varianza y mayor estructura que el primero. Por tanto, parece interesante estudiar los acontecimientos asociados a la fecha de cambio de varianza, Julio de 1977, con objeto de mejorar el conocimiento de las razones del comportamiento reflejado por los modelos aquí presentados.

5. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Este trabajo presenta un nuevo método para la detección y modelización de heterogeneidades en los momentos de segundo orden de una serie temporal. Como casos particulares de este tipo de situaciones, tenemos los cambios en la varianza de la perturbación y/o en los parámetros del modelo ARMA.

La principal ventaja del procedimiento aquí expuesto es su simplicidad, tanto conceptual como computacional. Sin embargo, a pesar de su sencillez, puede abarcar situaciones bastante complejas, como se muestra en los ejemplos presentados, en los cuales se han detectado notables cambios de varianza y modelo, así como la presencia de datos atípicos y cambios de nivel (en el caso IBM un enfoque alternativo con modelos bilineales y ARCH se encuentra en Weiss (1986)).

Por lo anterior, pensamos que el método aquí expuesto amplía considerablemente las posibilidades del Análisis de Intervención, Box y Tiao (1975), al extender la clase de fenómenos contemplados, con la ventaja adicional de la detección del momento en el que comienzan a producirse las heterogeneidades; lo cual en el enfoque tradicional, se supone conocido.

REFERENCIAS

ABRAHAM, B. and BOX, G. E. P. (1979). Bayesian analysis of some outliers problems in time series. *Biometrika*, 66, 229-236.

BAGSHAW, M. and JOHNSON, R. (1977). Sequential Procedures for Detecting Parameter Changes in a Time Series Model. *Journal of the American Statistical Association*, 72, 593-597.

BASSEVILLE, M. and Benveniste, A. eds. (1986). *Detection of abrupt changes in signals and dynamic systems. Springer-Verlag.* New York.

BAUFAYS, P. and RASSON, J. P. (1985). Variance changes in the autoregresive models. *Time Series Analysis, Theory and Practice*, Vol. 7. 119-127.

BOX, G. E. P. (1954). Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems. I Effect of inequality of variance in the one-way classification. *Annals of Mathematical Statistics*, 25, 290-302.

BOX, G. E. P. and JENKINS, G. M. (1976). *Time series analysis: forecasting and control.* Holden Day. San Francisco.

BOX, G. E. P. and TIAO, G. C. (1975). Intervention analysis with applications to environmental and economic problems. *Journal of the American Statistical Association*, 70, 70-79.

BOX, G. E. P. and TIAO, G. C. (1976). Comparison of forecast and actuality. *Applied Statistics*, 25, 195-200.

BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

BROWN, R., DURBIN, J. and EVANS, J. (1975). Techniques for testing the constancy of regression relationships over time. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 37, 149-192.

CHANG, I. and TIAO, G. C. (1983). Estimation of time series parameters in the presence of outliers. *Technical Report núm. 8. Statistics Research Center*. University of Chicago.

DESHAYES, J. and PICARD, D. (1986). Off-line statistical methods of change point models using non parametric and likelihood methods. *In Detection of abrupt changes in signals and dynamic systems*, M. Basseville and A. Benveniste, eds. Springer-Verlag. New York.

ENGLE, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 987-1007.

ERTEL, J. E. and FOWLKES, E. B. (1976). Some algorithms for linear spline and piece wise multiple linear regression. *Journal of the American Statistical Association*, 71, 640-648.

FOX, A. J. (1972). Outliers in time series. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*. 34, 350-363.

GRANGER, C. W. J. and ANDERSEN, A. P. (1978). *An introduction to Bilinear time series models*. Gottingen. Vandenhoech and Rupecht.

GOODWIN, G. C. and PAYNE, R. L. (1977). *Dynamic system identification: Experiment design and data analysis*. New York. Academic Press.

HARRISON, G. and STEVENS, D. (1976). Bayesian Forescasting. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*. 38, 205-228.

HSU, D. A. (1977). Test for variance shift at an unknown time point. *Applied Statistics*, 26, 279-284.

MARTIN, R. D. and YOHAI, V. J. (1986). Influence functionals for time series (with discussion). *Annals of Statistics*, 12, 157-191.

NIKIFOROV, I. V. (1986). Sequential detection of changes in stochastic systems. *In Detection of abrupt changes in signals and dynamic systems*, M. Basseville and A. Benveniste, eds. Springer-Verlag. New York.

PAGE, E. S. (1954). Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*, 41, 100-115.

PAGE, E. S. (1955). A Test for Change in a Parameter Ocurring at an Unknown Point. *Biometrika*, 42, 523-527.

PEÑA, J. I. (1985). Procedimientos de selección para modelos no lineales de Series Temporales. *Estadística Española*, 107, 39-53.

SATTERTHWAITE, F. E. (1941). Syntheses of variance. *Psychometrika*, 6, 309-316.

TIAO, G. C. and TSAY, R. S. (1983). Consistency properties of least squares estimates of autoregresive parameters in ARMA models. *Annals of Statistics*, 11, 856-871.

TIAO, G. C. (1985). ARMA models, Intervention Analysis and Outlier Detection in Time Series. *Handbook of statistics*, Vol. 5, E. J. Hannan, P. R. Krishnaia and M. M. Rao eds.

TONG, H. and LIM, K. S. (1980). Threshold autoregression limit cycles and cyclical data. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 42, 245-292.

TSAY, R. S. (1986). Time series model specification in the presence of outliers. *Journal of the American Statistical Association*, 81, 132-141.

TSAY, R. S. (1988). Outliers, level shifts and variance changes in Time Series. *Journal of Forecasting*, 7, 1-20.

TSAY, R. S. (1989). Testing and modelling TAR processes. *Journal of the American Statistical Association*, 84, 155-168.

WEISS, A. A. (1986). ARCH and bilinear time series models: comparison and combination. *Journal of Business and Economic Statistics*, 4, 59-70.

WICHERN, D. W., MILLER, R. B. and HSU, D. (1976). Changes of variance in first order autoregresive time series with applications. *Applied Statistics*, 25, 248-256.

HOMOGENEITY PROBLEMS IN THE SERIES MODELS

SUMMARY

This work studies homogeneity problems, and in particular ARMA model changes, in time series. For a given time series a multiple component model is proposed. Each component can encompass changes in ARMA model, changes in noise variance or both, as well as more general non-homogeneous behaviour.

A modelling procedure is proposed and illustrated by means of two real time series.

Key words: ARMA models, variance change, model change, homogeneity.

AMS 1980 Subject classification: 62P20.