



## UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS  
Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

PROYECTO FIN DE CARRERA

# **ECUACIONES CONSTITUTIVAS AVANZADAS PARA DESCRIBIR EL COMPORTAMIENTO TERMOVISCOPLÁSTICO DE METALES FCC**

AUTOR: DANIEL PEREIRA VALADÉS

DIRECTOR: JOSÉ ANTONIO RODRÍGUEZ MARTÍNEZ

CODIRECTOR: MARCOS RODRÍGUEZ MILLÁN



---

## Agradecimientos

Este proyecto nunca podría haberse realizado de no ser por todas las personas que me han ayudado, apoyado y estado cerca de mí a lo largo de mi vida.

En primer lugar, me gustaría comenzar por agradecer el esfuerzo a mi director de proyecto, José Antonio Rodríguez Martínez, y a mi codirector, Marcos Rodríguez Millán. Sin vosotros no hubiera sido capaz de sacar adelante el proyecto, siempre que he necesitado ayuda me la habéis prestado y habéis estado ahí para ayudarme. Sin duda, trabajar con vosotros ha sido una oportunidad increíble y os agradezco todas las horas que habéis dedicado a ayudarme en la realización de este proyecto.

A mis compañeros de trabajo, así como a mis jefes, les quiero agradecer ese buen humor que mantienen toda la semana, y lo fáciles que son los lunes por la mañana junto a ellos. Gracias por ser los mejores.

A mis amigos de toda la vida, les agradezco el haber estado ahí, las bromas, el compañerismo y sobre todo, lo buenos amigos que han demostrado ser siempre. De no ser por vosotros, la vida habría sido más difícil.

A los amigos de la universidad les quiero agradecer todo el apoyo a lo largo de estos años. He tenido la grandísima suerte de conocerlos y poder contar con vosotros todos estos años, que habrían sido mucho más duros de llevar si no hubierais estado ahí siempre.

A mi familia, que siempre se han preocupado por mí y por mi vida entera. Gracias de verdad.

A mis padres, a los que debo todo. Sin ellos nunca hubiera llegado hasta aquí. Gracias por todos los consejos que me habéis dado durante toda la vida, aunque parezca que no os escuche, siempre los tengo presentes.

A Miriam. Sin ti no sería la persona que soy hoy. Sin tu amor y tu compañía nada de esto hubiera sido posible jamás. Siempre que te he necesitado has estado ahí, ayudándome y apoyándome. Eres mi mejor amiga y mi mayor regalo.

A todos los que menciono y a los que me olvido, gracias de corazón.

*"La sabiduría consiste en saber que se sabe lo que se sabe y saber que no se sabe lo que no se sabe."*

---

## **Resumen**

En este proyecto de fin de carrera se ha llevado a cabo el estudio y proposición de ecuaciones constitutivas avanzadas que permitan describir con exactitud el comportamiento termoviscoplastico de metales FCC. Este estudio es de vital importancia para entender el proceso que tiene lugar en estos metales bajo condiciones de carga dinámicas, siempre en deformación plástica. La utilidad del estudio reside en la gran cantidad de procesos industriales que se llevan a cabo con este tipo de sollicitaciones.

En primer lugar se han estudiado tres modelos diferentes propuestos por otros autores expertos en el tema. Este proceso se ha realizado consultando diversas fuentes bibliográficas, en su mayoría artículos científicos publicados en medios especializados y seleccionando tres de ellos que siendo diferentes en cuanto a la proposición, obtienen resultados similares y comparables a los datos experimentales.

Posteriormente se ha definido un nuevo modelo de ecuaciones constitutivas avanzadas, basándose y apoyándose en las hipótesis realizadas por otros autores, además de los tres que se han estudiado en profundidad. Una vez completadas las ecuaciones, se han empleado datos experimentales para calibrar los parámetros del modelo propuesto, de modo que el modelo se ajustará de la mejor manera posible a dichos datos. También es necesario en este tipo de trabajos comparar todos los datos experimentales posibles con los resultados proporcionados por el modelo, así como con los resultados de los otros tres modelos estudiados, para así validar el modelo propuesto.

Una vez descrito todo el proceso, se proponen en las líneas futuras de trabajo las posibles mejoras a las deficiencias que el modelo pueda mostrar, así como la implementación del mismo en un código comercial de elementos finitos que permita estudiar a fondo los procesos industriales mencionados.

---

## Contenidos

<b>1. Motivación y objetivos</b>	<b>1</b>
1.1. <i>Motivación</i>	1
1.2. <i>Antecedentes</i>	3
1.3. <i>Objetivos</i>	4
1.4. <i>Metodología general</i>	6
<b>2. Modelos constitutivos para metales</b>	<b>9</b>
2.1. <i>Introducción</i>	9
2.2. <i>Consideraciones teóricas</i>	10
2.3. <i>Modelo de Voyiadjis y Abed</i>	13
2.4. <i>Modelo de Cai, Niu, Ma y Shi (Cai et al.)</i>	33
2.5. <i>Modelo de Nemat-Nasser y Li</i>	50
<b>3. Desarrollo de un nuevo modelo constitutivo</b>	<b>69</b>
3.1. <i>Introducción</i>	69
3.2. <i>Formulación del modelo constitutivo</i>	70
3.3. <i>Parámetros de referencia</i>	81
3.4. <i>Resultados y validación del modelo propuesto</i>	82
3.5. <i>Efecto de históricos de velocidad de deformación plástica</i>	108
<b>4. Conclusiones y líneas futuras de trabajo</b>	<b>113</b>
4.1. <i>Conclusiones</i>	113
4.2. <i>Líneas futuras de trabajo</i>	114
<b>Anexo 1 - Identificación de parámetros del modelo propuesto</b>	<b>117</b>
<b>Referencias</b>	<b>121</b>

---

## 1. MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS

### 1.1. MOTIVACIÓN

El estudio de estructuras en aplicaciones de deformación plástica a velocidades de deformación bajas o medias o protección a altas velocidades de deformación tiene mucho interés en diferentes industrias actualmente, así como la influencia en dichos procesos. Estos estudios son de especial interés en la industria automovilística, aeroespacial, naval, civil y en todos los procesos de fabricación en los que se puedan dar altas velocidades de deformación (Figura 1.1). Para dichas industrias, el uso de aleaciones metálicas es muy común, y a pesar de todos los avances que han tenido lugar en las últimas décadas acerca del comportamiento de dichas aleaciones, aún no se conoce con cierta precisión cómo se comportan dichos materiales cuando son sometidos a solicitaciones muy agresivas (baja temperatura, alta velocidad de deformación y elevada deformación plástica). Es por ello que el estudio del comportamiento de ciertos metales - aleaciones metálicas requiere una mayor profundidad, aportando nueva información y vías de desarrollo de dichos estudios, siempre con un fundamento científico y tecnológico.



Figura 1.1 - Aplicaciones de la industria en las que se requiere un estudio en profundidad del comportamiento de las aleaciones metálicas sometidas a grandes velocidades de deformación y un gran rango de temperaturas. (a) Industria automovilística, (b) Industria naval, (c) Industria aeroespacial, (d) Industria civil, (e) Procesos de fabricación, (f) Perforaciones petrolíferas.

Los ejemplos mostrados en la Figura 1.1 son bastante ilustrativos de las solicitaciones de los materiales. En la industria automovilística, la absorción de energía a grandes velocidades de deformación es tan importante que hoy en día superar los test de impacto es obligatorio para la homologación de los vehículos (Figura 1.1-a). Los materiales empleados en la industria militar/naval/aeroespacial también sufren cargas elevadas, no sólo estáticamente, sino dinámicamente, ya que deben resistir impactos y han de soportar temperaturas extremas (Figura 1.1-b-c). También en la industria civil aparecen dichas solicitaciones, ya que pese a que

habitualmente las estructuras no están sometidas a cargas dinámicas, también han de prepararse para ellas, debido a que han de soportar huracanes, terremotos e incluso explosiones o impactos (Figura 1.1-d). Otro campo en donde son importantes las temperaturas y velocidades a las que se someten los materiales son los procesos de mecanizado a alta velocidad, ya que debido a dicha velocidad, el comportamiento del material difiere bastante del comportamiento habitual bajo cargas cuasi-estáticas (Figura 1.1-e). En la perforación de pozos petrolíferos (Figura 1.1-f), las cargas son del mismo tipo que en el caso de mecanizado (alta velocidad y temperatura, añadidas a la presión del pozo y la dureza del terreno), pero en este caso sólo es importante el comportamiento de la herramienta, que es vital para conseguir una perforación precisa y segura.

Una característica común a todos los procesos descritos es que el fallo del material siempre se produce debido a las sollicitaciones tan exigentes que provocan finalmente la rotura del mismo, pero antes de producirse la rotura se observa una variación considerable de las propiedades del material que será la que cause la rotura.

En este proyecto se estudiarán diversos modelos avanzados de comportamiento de los materiales FCC y se realizará una comparación entre ellos. Todos estos modelos serán formulaciones con sentido físico y no simplemente fenomenológico. Esto ayudará a desarrollar el estado del arte del comportamiento de dichos materiales, mediante el desarrollo de estos modelos y la identificación del modelo más válido para cada situación del material a estudiar, lo que permitirá profundizar en conocimiento y aunar las bondades de cada uno de los métodos.

Típicamente se emplea una relación constitutiva para determinar el comportamiento mecánico del material. Esta relación constitutiva será una expresión matemática que relacione la tensión a la que está sometida el material con variables medibles como la tensión, la velocidad de deformación o la temperatura, tal y como se muestra en la Ec. 1-1.

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}_p, \dot{\bar{\epsilon}}_p, T) \quad \text{Ec. 1-1}$$

Donde  $\bar{\sigma}$  es la tensión equivalente,  $\bar{\epsilon}_p$  la deformación plástica equivalente,  $\dot{\bar{\epsilon}}_p$  la velocidad de deformación plástica y  $T$  es la temperatura del material.

Ya que en las ecuaciones que gobiernan estos modelos no aparece únicamente la tensión como tal, sino que también lo hacen sus derivadas, es importante definir correctamente la sensibilidad a la velocidad de deformación (derivada de primer orden de la tensión respecto a la velocidad de deformación) o a la temperatura (derivada de primer orden de la tensión respecto a la temperatura). El análisis desarrollado en este proyecto determina cómo afectan todos estos factores al comportamiento del material.

Debido a la gran importancia de estas relaciones para evaluar el estado tensional de los materiales, diversos autores han desarrollado modelos que serán de gran utilidad para validar y aseverar la bondad del modelo propuesto, así como servir de ayuda para hallar una expresión mejor para el modelo definitivo.

## 1.2. ANTECEDENTES

En las últimas décadas, el tratamiento teórico del comportamiento constitutivo de los metales ha despertado el interés de los investigadores más relevantes en el marco de la mecánica de medios continuos (Campbell [15], Campbell y Fergusson [16], Conrad [19], Seeger [88], Klepaczko [46], Zerilli y Armstrong [104]). Los trabajos pioneros de Taylor [95] y Orowan [76] entre otros, establecieron el comportamiento de la deformación de metales en términos de la teoría de dislocaciones. Metales y aleaciones eran considerados como sólidos continuos en los cuales el flujo de tensión tenía lugar debido a un proceso que involucraba la creación de dislocaciones, su movimiento a través de la red cristalina y su aniquilación o acumulación. Por tanto, el endurecimiento por deformación (así como el ablandamiento)  $\theta = \partial\sigma/\partial\varepsilon_p$ , la sensibilidad a la velocidad de deformación  $m = \partial\sigma/\partial \log \dot{\varepsilon}_p$  y la sensibilidad a la temperatura  $v = \partial\sigma/\partial T$  del material estaban íntimamente relacionadas con la densidad de dislocaciones, así como la velocidad de desplazamiento de las mismas. Más tarde, las investigaciones de Perzyna [79], Campbell y Fergusson [16] y Kocks et al. [50] permitieron una mejor comprensión del comportamiento mecánico de los metales y sus aleaciones. Desde mediados del siglo XX se ha continuado investigando a fondo los mecanismos de deformación que residen tras la plasticidad de los metales (Seeger [88], Basinski [10], Conrad [19], Klepaczko y Duffy [47], Zerilli y Armstrong [104], Klepaczko [45], Taylor [94], Tanner y McDowell [93], Kocks [49], Kocks y Mecking [51], Lennon y Ramesh [57]).

Particularmente, la plasticidad dinámica ha sido sometida a un profundo análisis (Kumar et al. [54], Clifton [18], Follansbee [23], Regazzoni et al. [80], Follansbee y Kocks [24], Zerilli y Armstrong [105], Huang et al. [32]). A lo largo de los años, se ha intentado asiduamente describir teóricamente los efectos que la deformación, la velocidad de deformación y la temperatura causan sobre el comportamiento mecánico de los materiales. En la literatura se pueden encontrar numerosas descripciones del comportamiento de estos metales, analizando los procesos de carga para tratar de obtener una conclusión.

### 1.3. OBJETIVOS

El objetivo fundamental de este proyecto de fin de carrera es poder encontrar una relación constitutiva avanzada para los materiales FCC. Para ello, se emplearán datos experimentales de ensayos realizados con cobre de alta conductividad libre de oxígeno (OFHC Copper por sus siglas en inglés - Oxygen Free High Conductivity Copper), así como algunos modelos que se han desarrollado a lo largo de los años para este material (Voyiadjis y Abed [98], Cai, Niu, Ma y Shi [13], Nemat-Nasser y Li [68]). Se ha escogido este material por poseer una estructura puramente FCC (Figura 1.2), que es de gran importancia en la industria debido a sus elevadas conductividades térmica y eléctrica, combinadas con una gran ductilidad y baja volatilidad. Este material se emplea en la industria electrónica para la creación de semiconductores, superconductores e incluso en los aceleradores de partículas.

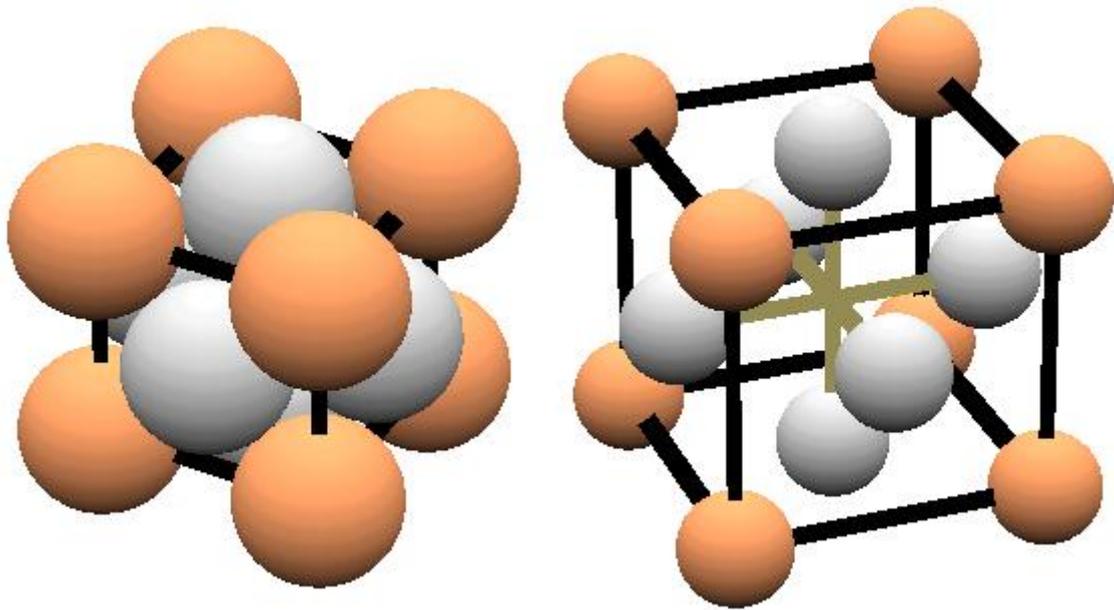


Figura 1.2 - Estructuras FCC. En color naranja, los átomos situados en los vértices. En color gris, los átomos centrados en las caras.

- En primer lugar, será necesario realizar una búsqueda bibliográfica de modelos propuestos previamente por algunos autores y seleccionar los más relevantes o varios que incluyan conceptos diferentes, para poder así tener una visión amplia del concepto de modelo de comportamiento bajo cargas dinámicas de un material FCC (Capítulo 2).
- En segundo lugar, se desarrollará el modelo, basado en consideraciones teóricas y respaldado por datos experimentales que permita predecir la respuesta termoviscoplastica de metales FCC bajo las condiciones de carga que se proponga. Para ello habrá resultado de muchísima utilidad el estudio de diversos modelos, y la captación de ideas de los mismos (Capítulo 3).
- Una vez se haya propuesto el modelo, habrá que definir un método que permita identificar ciertos parámetros que no sean físicos o directamente medibles en la naturaleza. La averiguación de estos parámetros es fundamental para que el modelo final proporcione valores que se ajusten considerablemente a los datos que se hayan recabado

experimentalmente. Para obtener los datos experimentales, se recurrirá a la bibliografía común para el desarrollo y/o proposición de modelos constitutivos de materiales FCC, ahorrando recursos económicos y personales, así como un valioso tiempo de investigación (Anexo 1).

- Una vez se hayan definido los parámetros del modelo, se procederá a su validación, comparando los resultados del modelo con más datos experimentales así como resultados de otros modelos. Unos errores pequeños entre los resultados obtenidos y los datos recabados significará que el modelo predice bien el comportamiento del material, dando por finalizada la validación y definición completa del modelo (Apartado 3.4),
- Definido el modelo completamente, se podrá aplicar a código de elementos finitos o de cálculo estructural, lo que permitirá aplicar el modelo a condiciones que puedan aparecer en la industria o en la vida cotidiana (Líneas futuras de trabajo).
- Este modelo permitirá por tanto avanzar en el conocimiento acerca del comportamiento de los materiales FCC en condiciones de carga dinámicas como predecir resultados de comportamiento de este tipo de materiales (como pueden ser el Cobre, Aluminio, Iridio, Oro...) que puedan emplearse en cualquier tipo de proceso en los que sea necesario el análisis de tensiones bajo condiciones dinámicas de carga (Conclusiones).

#### **1.4. METODOLOGÍA GENERAL**

Para realizar este proyecto se llevará a cabo la siguiente metodología, resumida en la Figura 1.3:

En primer lugar hay que tener claro el objetivo final del proyecto, que es obtener una relación constitutiva avanzada para materiales con estructura cristalina cúbica centrada en las caras (FCC por sus siglas en inglés - Face Centerd Cubic). Para ello se emplearán modelos basados en la microestructura que se puedan encontrar en las referencias. Conocida la microestructura del material, se pueden conocer y/o explicar con más facilidad los mecanismos internos que definen las propiedades mecánicas características del mismo.

Para encontrar una relación constitutiva avanzada para materiales FCC, habrá que hacerlo basándose en la física de los materiales. En la literatura se pueden encontrar modelos basados en la termodinámica que se apoyan en la distribución de las dislocaciones atómicas para comprender el comportamiento de un material sometido a diferentes sollicitaciones (ya sea carga estática, dinámica o incrementos de temperatura). Esto lleva directamente a que los procesos mecánicos se pueden estudiar como procesos térmicamente activados, que dependen de la deformación que sufra el material, la velocidad a la que sufre dicha deformación, y la temperatura a la que sucede este proceso.

Basándose en modelos ya propuestos, se puede estudiar y hallar una nueva relación constitutiva que permita definir correctamente el comportamiento de los materiales FCC.

Una vez se tenga la nueva formulación, es imprescindible comparar los datos de ésta con los datos que otros autores hayan expuesto, así como comparar todos los modelos con los datos experimentales que se tengan disponibles.

El análisis de datos se llevará a cabo explicando las deficiencias o bondades del modelo propuesto frente a otros modelos y datos experimentales, para posteriormente concluir si el modelo es válido o no. Será también necesario analizar el comportamiento del material y explicar si los datos obtenidos coinciden con lo física y teóricamente esperado.

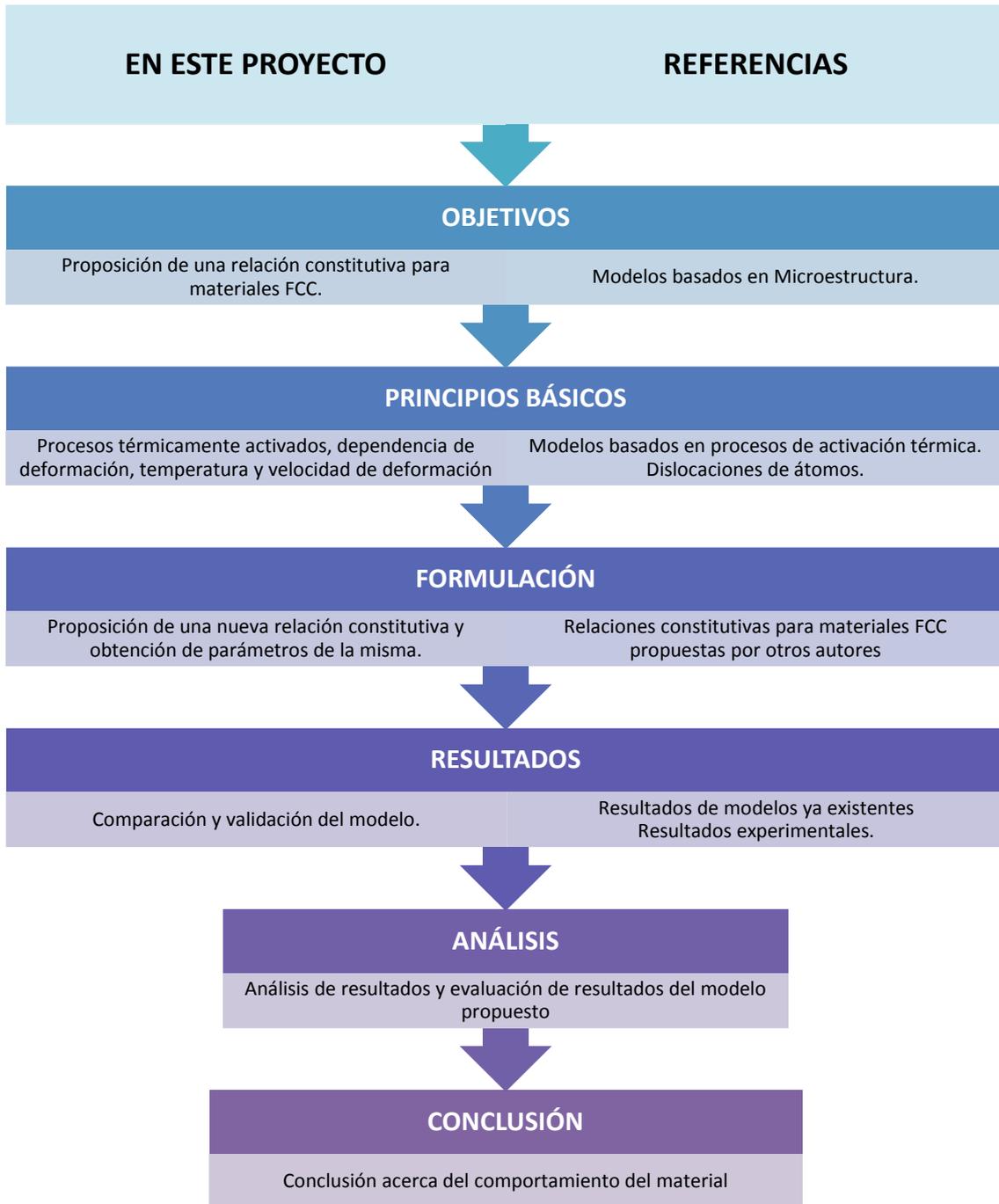


Figura 1.3 - Metodología general



## 2. MODELOS CONSTITUTIVOS PARA METALES

---

### 2.1. INTRODUCCIÓN

Para representar con precisión el comportamiento de los metales bajo diferentes condiciones de carga, será necesario considerar las diferentes formulaciones constitutivas. Estos modelos representan el comportamiento del material mediante relaciones matemáticas que involucran la tensión, la deformación, la temperatura y la velocidad de deformación.

En la clásica aproximación macroscópica, dichas descripciones constitutivas se clasifican frecuentemente atendiendo a su naturaleza en dos grupos (Voyiadjis y Almasri [99], Rusinek et al. [84]).

- **Formulaciones puramente fenomenológicas** (*descripciones constitutivas fenomenológicas*) (Cowper y Symonds [20], Litonski [60], Klepaczko [44], Johnson y Cook [34]), que consisten en expresiones matemáticas sin ningún sentido físico que únicamente se ajustan a los datos experimentales. Se caracterizan por ser formulaciones simples, cuyas fórmulas son sencillas de calibrar y las convierten en idóneas para ser implementadas en códigos de elementos finitos u obtener valores rápidamente. Aunque estas formulaciones puramente fenomenológicas han demostrado ser válidas para realizar simulaciones en ordenador, muestran importantes limitaciones a la hora de describir correctamente el comportamiento del material cuando está sometido a grandes intervalos de condiciones de carga.
- **Formulaciones con sentido físico** (*descripciones constitutivas basadas en la física*), cuyos fundamentos surgen de la teoría de la termodinámica y de la cinemática de los deslizamientos (Zerilli y Armstrong [104], Nemat-Nasser y Li [73], Rusinek y Klepaczko [83], Voyiadjis y Almasri [99], Huang et al. [32], Cai et al. [13]). Comparadas con las descripciones puramente fenomenológicas, suelen tener un mayor número de constantes del material involucradas en sus ecuaciones y la determinación de las mismas es posible asumiendo que se cumplen ciertas condiciones físicamente posibles. En contraste con las anteriormente mencionadas, las formulaciones con sentido físico permiten una descripción del comportamiento de los materiales mucho más precisa bajo condiciones de carga en un rango muy amplio. Debido a la flexibilidad que poseen, los modelos basados en la física de los materiales son cada vez más interesantes en aplicaciones de ingeniería, como el mecanizado de alta velocidad, perforación, explosiones y crash-tests (Rusinek et al. [85]), ya que en dichos procesos el material se encuentra sometido a una amplia variedad de velocidades de deformación y temperaturas, así como a enormes deformaciones que no aparecen en otros procesos de la industria.

## 2.2. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

La deformación inelástica en sólidos cristalinos, macroscópicamente hablando, es resultado del movimiento de las dislocaciones atómicas moviéndose a través de la red cristalina. Este comportamiento es, por lo general, dependiente de la velocidad de deformación y de la temperatura. La clásica caracterización de la plasticidad, independientemente de la velocidad de deformación, es una idealización que en contadas ocasiones es aplicable (Nemat-Nasser y Li [68]). A elevadas velocidades de deformación, entra en juego la adiabaticidad del proceso, ya que no se puede convertir tanta energía plástica en térmica durante el poco tiempo que permite dichas velocidades de deformación, incrementándose así la temperatura del material de modo que cambia su estado tensional considerablemente. Es importante mencionar que los mecanismos de plasticidad están activados fundamentalmente por la deformación tangencial, es decir, debida únicamente a la tensión cortante.

Durante los ya mencionados movimientos de las dislocaciones, se pueden observar dos tipos de obstáculos que impiden el movimiento de dichas dislocaciones a través de la red cristalina. Estos obstáculos se denominan barreras de largo y corto alcance respectivamente (Kocks et al. [50], Voyiadjis y Almasri [99]). Los obstáculos de largo alcance se deben a la estructura del material y no pueden ser evitadas mediante la introducción de energía térmica en la red cristalina (Zerilli y Armstrong [104]). Estas barreras de largo alcance contribuyen al flujo de tensiones con una componente no activada térmicamente (también llamada tensión atermia). Por otra parte, los obstáculos de corto alcance pueden ser superados mediante energía térmica (Zerilli y Armstrong [104]) ya que ayuda al deslizamiento de las dislocaciones haciendo que decaiga la fuerza que dichos obstáculos ejercen en el caso de materiales FCC (En materiales BCC se reduce la fricción de los planos de la red cristalina). En cualquier caso, la energía de carácter térmico es capaz de reducir la tensión requerida para que las dislocaciones puedan superar este último tipo de obstáculos. Es por ello que el flujo de tensiones en un material se puede descomponer en tensión equivalente atermia  $\tau_{\mu}$  y en tensión equivalente térmica  $\tau^*$  empleando la teoría J2 (Zerilli y Armstrong [104], Follansbee y Kocks [24], Voyiadjis y Almasri [99]). De este modo, se puede representar la tensión como:

$$\tau = \tau_{\mu} + \tau^* \quad \text{Ec. 2-1}$$

Mediante el factor de Taylor ( $M$ ), haciendo uso de la plasticidad Huber-Mises, la Ec. 2-1 puede representarse empleando términos de tensión equivalente, que se empleará preferentemente a partir de este punto.

$$\sigma_{eq} = \tau \cdot M \quad \text{Ec. 2-2}$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{\mu} + \bar{\sigma}^* \quad \text{Ec. 2-3}$$

Siendo el factor de Taylor igual a (Rosenberg y Piehler [82]):

$$M = \frac{d\gamma}{d\varepsilon} \quad \text{Ec. 2-4}$$

Una muestra de cómo evolucionan las componentes de la tensión en función de la temperatura se puede observar en la Figura 2.1. Se puede comprobar cómo a bajas

temperaturas el flujo de tensión decae rápidamente al aumentar la temperatura. En esta región, la tensión se ve influida tanto por la componente térmica como por la atermia. La siguiente región es principalmente atermia, por lo que el flujo de tensiones no se ve afectado significativamente por cambios en la temperatura. A temperaturas muy elevadas, la tensión vuelve a decrecer al aumentar la temperatura.

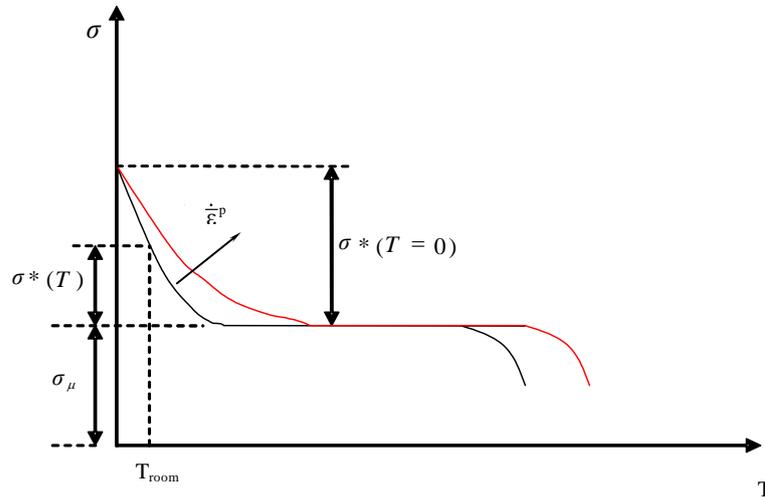


Figura 2.1 - Descomposición de la tensión macroscópica frente a la temperatura

Sin embargo, y teniendo en cuenta las consideraciones mencionadas, no todos los metales presentan las tres regiones aquí descritas (Voyiadjis y Almasri [99]). Por lo tanto, la definición (y por ende la contribución a la tensión global) de las componentes térmica y atermia de la tensión, se puede decir que dependen de la estructura cristalina del material, siendo las causas principales de esta dependencia la existencia de simetrías en la red cristalina, la naturaleza de los núcleos de dislocación y los planos de deslizamiento disponibles para esta red (Lennon y Ramesh [57]). En el caso de materiales FCC, la componente térmica de la tensión se encarga de superar los bosques de dislocaciones mediante dislocaciones individuales (Voyiadjis y Abed [98]) y depende tanto de la velocidad de deformación, como de la temperatura y de la deformación  $\sigma^* = \sigma^*(\bar{\epsilon}^p, \dot{\epsilon}^p, T)$  (Zerilli y Armstrong [104], Nemat-Nasser y Li [73]). Por otra parte, los metales FCC muestran un gran endurecimiento por deformación debido a un incremento de la interacción de dislocaciones al aumentar la deformación del material. El endurecimiento por deformación se muestra fuertemente afectado por la temperatura y la velocidad de deformación, mientras que el límite elástico apenas varía de unas condiciones a otras, como se puede observar en la Figura 2.2.

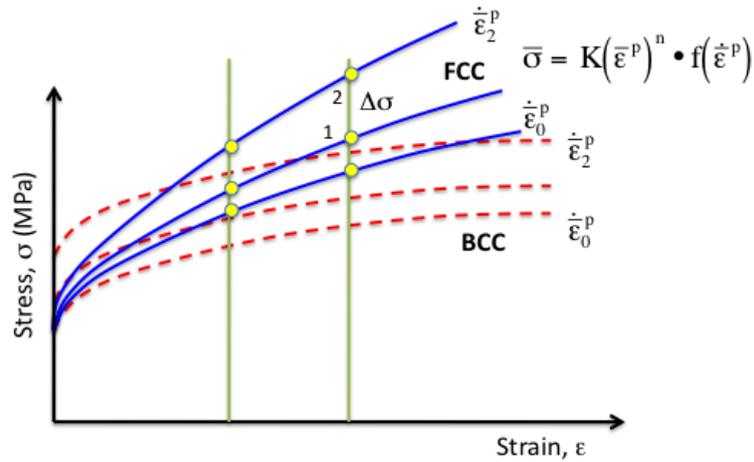


Figura 2.2 - Dependencia de la tensión con la velocidad de deformación para materiales BCC y FCC

En la Figura 2.2 se puede observar también que en materiales BCC el endurecimiento por deformación no varía al cambiar la velocidad de deformación o la temperatura. Esto es debido a que el endurecimiento por deformación se debe principalmente a la superación de obstáculos de largo alcance, como pueden ser los bordes de grano, los bosques de dislocaciones de campo lejano y otros elementos microestructurales con influencia de largo alcance (Nemat-Nasser y Li [73]). En cuanto a los procesos activados térmicamente en metales BCC, éstos se encargan de superar los bosques de Peierls, y por tanto, puede decirse que la componente térmica del flujo de tensiones  $\sigma^*$  es independiente de la deformación plástica (Zerilli y Armstrong [104], Rusinek y Klepaczko [83]). El límite elástico de este tipo de materiales depende en gran medida de la temperatura y la velocidad de deformación.

En consonancia con estas afirmaciones, el volumen térmicamente activado (VTA), definido en la Ec. 2-5, decrece con la deformación para la mayoría de metales FCC (Zerilli y Armstrong [104]) y es independiente de la deformación en BCC.

$$V^* \simeq kT \left. \frac{\partial \ln(\dot{\epsilon}^p)}{\partial \bar{\sigma}^*} \right|_T = kT \Psi_T \quad \text{con} \begin{cases} \Psi(\dot{\epsilon}^p)|_T & \text{para BCC} \\ \Psi(\bar{\epsilon}^p, \dot{\epsilon}^p)|_T & \text{para FCC} \end{cases} \quad \text{Ec. 2-5}$$

Siendo  $k$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura absoluta (en Kelvin).

Es evidente que son necesarias varias formulaciones para describir adecuadamente estos dos comportamientos que han de ser identificados mediante el análisis experimental en amplios rangos de deformación y velocidad de deformación (así como de temperatura). En este proyecto de fin de carrera se formulará una descripción constitutiva para determinar el comportamiento termoviscoplastico de los materiales FCC, por lo que será necesario hacer análisis a distintas deformaciones y velocidades de deformación.

## 2.3. MODELO DE VOYIADJIS Y ABED

### 2.3.1. INTRODUCCIÓN

El comportamiento termoviscoplastico de los metales puede ser determinado mediante la investigación de los procesos dinámicos que involucran a las dislocaciones de sus cristales, que se generan, se mueven y se acumulan durante la deformación no elástica. A su vez, las características más importantes que deberían servir como elementos constitutivos de una teoría apropiada para la plasticidad de los metales son el movimiento, multiplicación e interacción de estas dislocaciones. Orowan [76] reconoció la deformación plástica como un proceso dinámico sugiriendo que la velocidad de deformación plástica tangencial que se puede obtener por el movimiento de las dislocaciones con una velocidad media  $v$  tal que:

$$\dot{\gamma}^p = b\rho_m v \quad \text{Ec. 2-6}$$

Donde  $\rho_m$  es la densidad de dislocaciones móviles y  $b$  es el vector de Burgers.

Una descripción teórica de la elasticidad debería tratar de relacionar el comportamiento de la deformación macroscópica con las propiedades intrínsecas del material deformado así como las condiciones de deformación impuestas desde el exterior. En la escala macroscópica, el flujo plástico de los materiales cristalinos es controlado por la generación, movimiento e interacción entre dislocaciones. De esta manera la descripción constitutiva debe, en principio, enlazar toda la jerarquía de escalas de longitudes, empezando desde la determinación de las propiedades de una sola dislocación en escala atómica hasta la caracterización de las propiedades macroscópicas del material. En muchos casos las conclusiones sobre el comportamiento de la deformación macroscópica pueden ser obtenidos mediante investigación de la dependencia de ella de la temperatura y la velocidad de deformación del proceso, considerando las propiedades de dislocaciones aisladas (Zaiser et al. [101]). Para relacionar la velocidad de deformación plástica tangencial con el tensor de velocidad de deformación plástica en la macroescala, se postula la Ec. 2-7 (Bammann y Aifantis [5]):

$$\varepsilon_{ij}^p = \dot{\gamma}^p M_{ij} \quad \text{Ec. 2-7}$$

Donde  $M_{ij}$  es el tensor simétrico de orientación de Schmidt, definido en la Ec. 2-8.

$$M_{ij} = \frac{1}{2}(n_i \otimes v_j + v_i \otimes n_j) \quad \text{Ec. 2-8}$$

Donde  $\hat{n}$  denota el vector unitario perpendicular al plano de deslizamiento y  $\hat{v}$  el vector unitario en el plano de deslizamiento. La ecuación Ec. 2-7 indica que los procesos de escalado (una dislocación se monta sobre otra) han sido despreciados, y que se asume incompresibilidad plástica ya que el tensor de orientación  $\dot{M}_{ij}$  es cero.

Además, la variación del tensor de Schmidt se puede ignorar, bien por considerar que la plasticidad a nivel macroscópico incorpora un gran número de granos orientados de maneras distintas en cada punto del sólido continuo y por tanto se asume un valor medio, o bien por ser el producto de dos términos de primer orden (Aifantis [1], Bammann y Aifantis [5]).

Sustituyendo la Ec. 2-6 en la Ec. 2-7, la velocidad de deformación equivalente puede ser definida macroscópicamente en términos de la densidad de dislocaciones móviles y la velocidad de dichas dislocaciones como indica la Ec. 2-9.

$$\dot{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} = \bar{m} b \rho_m v \quad \text{Ec. 2-9}$$

Donde  $\bar{m} = (2M_{ij}M_{ij}/3)^{1/2}$  puede ser interpretado como el factor de orientación de Schmidt. Es interesante observar cómo la movilidad  $v$  y la concentración de dislocaciones  $\rho_m$  crecen al aumentar las fuerzas externas (tensiones). Nadgornyi [67] demostró que se puede (y usualmente se debe) emplear la tasa de aparición de dislocaciones de la misma manera que se usa la velocidad de las mismas si se considera la deformación plástica cuantitativamente. Consecuentemente, el significado de las magnitudes definidas en la ecuación Ec. 2-9 debe ser reinterpretado. Voyiadjis y Abed [98] emplearon este concepto en sus modelos constitutivos previos para metales BCC y FCC. Para este modelo, sólo se considera la velocidad de las dislocaciones, y mejor que considerar la tasa de aparición de dislocaciones ( $\partial\rho/\partial t$ ), se considerará la variación de la densidad de dislocaciones con la deformación plástica ( $\partial\rho/\partial\epsilon_p$ ). De este modo se considera la acumulación de densidad de dislocaciones desde su valor inicial hasta el límite, que vendrá dado por cierto nivel que se considerará de saturación.

El proceso de acumulación de densidad de dislocaciones durante la deformación plástica fue investigada extensivamente por muchos autores (Klepaczko [44], Kubin y Estrin [53], Bammann [7] y Barlat et al. [9]). Klepaczko [44] mostró que el crecimiento de la densidad de dislocaciones es prácticamente lineal con respecto a la deformación en la primera fase del proceso de endurecimiento por deformación, independientemente de la temperatura. Esto además viene seguido por una “recombinación” de dislocaciones que se asume proporcional a la probabilidad de que las dislocaciones se encuentren unas con otras. Basándose en esta hipótesis, se asumirá la relación Ec. 2-10 de la evolución de la densidad total de dislocaciones como válida (Klepaczko [44]):

$$\frac{d\rho}{d\epsilon_p} = M - k_a(\rho - \rho_i) \quad \text{Ec. 2-10}$$

Donde  $M = 1/bl$  es el factor de multiplicación,  $l$  es el camino libre medio de las dislocaciones,  $\rho_i$  es la densidad de dislocaciones inicial que aparece en el material debido al proceso de fabricación o debido a la naturaleza, y  $k_a$  es el factor de aniquilación de dislocaciones, que puede depender de la temperatura y de la velocidad de deformación. Klepaczko y Rezaig [48] mostraron que para aceros comunes,  $M$  y  $k_a$  pueden ser asumidos constantes a velocidades no demasiado altas y hasta temperaturas en las que los mecanismos de aniquilación (recuperación) comienzan a ser intensos. De cualquier manera, hay que recordar que al comenzar la saturación del material, la pendiente  $\partial\rho/\partial\epsilon_p$  se acerca a 0, lo que lleva a concluir que la densidad de dislocaciones en la saturación  $\rho_s$  es:

$$\rho_s = \rho_i + \frac{M}{k_a} \quad \text{Ec. 2-11}$$

La densidad de dislocaciones móviles está relacionada con la densidad total de dislocaciones mediante la relación lineal ( $\rho_m = f\rho$ ), donde la fracción  $f \leq 1$  varía con la densidad total  $\rho$  y con la temperatura (Kelly y Gillis [41], Sackett et al. [87]). En la práctica, se muestra que un valor constante de  $f$  provee resultados satisfactorios (cuantitativamente) para la mayoría de metales (Klepaczko y Rezaig [48]). En este modelo, la fracción  $f$  representa únicamente la parte de la densidad de dislocaciones móviles que se ve afectada por la temperatura mediante la ecuación de Orowan (Ec. 2-6 o Ec. 2-9).

Kubin y Estrin [53] propusieron el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (Ec. 2-12) para describir la evolución de la densidad de dislocaciones de los bosques  $\rho_f$  y las móviles  $\rho_m$  con la deformación plástica empleado los conceptos mostrados previamente en este apartado:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_m}{d\varepsilon_p} &= \frac{\lambda_1}{b^2} - \lambda_2\rho_m - \frac{\lambda_3}{b}\rho_f^{1/2} \\ \frac{d\rho_f}{d\varepsilon_p} &= \lambda_2\rho_m + \frac{\lambda_3}{b}\rho_f^{1/2} - \lambda_4\rho_f \end{aligned} \quad \text{Ec. 2-12}$$

Donde las constantes  $\lambda_i$  están relacionadas con la multiplicidad de las dislocaciones móviles ( $\lambda_1$ ), la aniquilación y captura que sufren entre sí ( $\lambda_2$ ), su inmovilización debida a la interacción con los bosques de dislocaciones ( $\lambda_3$ ) y la recuperación/restauración dinámica ( $\lambda_4$ ).

Se asume que las dislocaciones se encuentran en un potencial periódico, y que la velocidad media de las dislocaciones  $v$  se determina mediante la probabilidad termodinámica de conseguir suficiente energía (temperatura, la cual se denominará  $T$ ), para sobrepasar los picos del potencial. En palabras más sencillas, esta velocidad se determina mediante la activación térmica que permite superar los que son obstáculos locales para la movilidad de las dislocaciones. Existen diversas expresiones para definir la velocidad térmicamente activada de movimiento de las dislocaciones (Stein y Low [90], Gillis y Gilman [27], Li [58] y Hirth y Nix [29]). Se empleará para la velocidad de las dislocaciones la Ec. 2-13 (Bammann y Aifantis [6]):

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{G}{kT}\right) \quad \text{Ec. 2-13}$$

Donde  $k$  es la constante de Boltzmann,  $T$  es la temperatura absoluta y  $G$  representa la energía libre de activación de Gibbs. La velocidad de referencia  $v_0$  representa el valor pico en el que la temperatura alcanza el punto de fusión del material. Se define mediante  $v_0 = d/t_w$ , donde  $t_w$  representa el tiempo que una dislocación tarda en sortear un obstáculo y  $d$  es la distancia media que recorre la dislocación entre dos obstáculos consecutivos. La energía libre de activación es dependiente del esfuerzo a cortante, pero también puede depender de la estructura interna. Kocks et al. [50] propusieron la Ec. 2-14, que relaciona la energía de activación  $G$  con el flujo de tensiones térmico  $\sigma_{th}$ :

$$G = G_0 \left(1 - \left(\frac{\sigma_{th}}{\hat{\sigma}}\right)^p\right)^q \quad \text{Ec. 2-14}$$

Donde  $G_0$  es la energía de Gibbs de referencia,  $\hat{\sigma}$  es la tensión umbral, a partir de la cual las dislocaciones pueden superar las barreras/obstáculos sin la ayuda de la activación térmica ( $\sigma_{th} = \hat{\sigma}$  cuando  $G = 0$ ), y  $p$  y  $q$  son constantes que definirán la forma de los obstáculos de corto alcance. De acuerdo con Kocks [49], el valor típico para  $q$  es 3/2 y para  $p$  los valores más comunes son 1/2 y 2/3. Ambos parámetros determinan la forma del obstáculo.

Sustituyendo la Ec. 2-10 para la evolución de la densidad de dislocaciones (tras integrar convenientemente la ecuación) y la Ec. 2-13 para la velocidad de las dislocaciones en la Ec. 2-9, y haciendo uso a la vez de la Ec. 2-14, se obtiene una relación general de la tensión térmica en materiales policristalinos (metales), y queda definida de la siguiente manera:

$$\sigma_{th} = \hat{\sigma} \left[ 1 - \left( \beta_1 (\varepsilon_p) T - \beta_2 T \ln \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_{po}^i} \right)^{1/q} \right]^{1/p} \quad \text{Ec. 2-15}$$

Donde  $\dot{\varepsilon}_{po}^i$  representa la velocidad de deformación plástica de referencia en la etapa inicial, en la que está relacionada con la densidad de dislocaciones móviles inicial. Su orden de magnitud puede estar entre  $10^6$  y  $10^9 s^{-1}$ , lo que caracteriza el valor más alto de velocidad de deformación que un material puede sufrir relacionada con la velocidad de referencia (la más alta) de las dislocaciones móviles  $v_0$  como se muestra en la Ec. 2-16. Las ecuaciones Ec. 2-17, Ec. 2-18 y Ec. 2-19 definen algunos de los parámetros de la Ec. 2-15.

$$\dot{\varepsilon}_{po}^i = \bar{m} b v_0 \rho_{mi} \quad \text{Ec. 2-16}$$

$$\beta_1 = \frac{k}{G_0} \ln \left( 1 + C_1 (1 - \exp(-k_a \varepsilon_p)) \right) \quad \text{Ec. 2-17}$$

$$\beta_2 = \frac{k}{G_0} \quad \text{Ec. 2-18}$$

$$C_1 = f \frac{M}{k_a \rho_{mi}} \quad \text{Ec. 2-19}$$

Merece la pena mencionar que  $\beta_1$  no es constante y que no siempre aumenta al aumentar la deformación plástica. Su valor, sin embargo, alcanza el máximo cuando la parte móvil de la densidad de dislocaciones total alcanza la saturación ( $\rho_m = \rho_{ms}$ ), lo cual tiene lugar a elevadas deformaciones. Por otro lado,  $\beta_1$  se hace más pequeña al acercarse a 0 la deformación plástica y, en consecuencia, el flujo plástico de tensiones pertenece completamente al límite elástico. En este apartado, la fracción  $f$ , que representa la parte móvil de la densidad total de dislocaciones, se asume como constante con el fin de simplificar el proceso de determinación de parámetros del modelo. Por otro lado, se consideran únicamente los valores medios de los parámetros  $M$  y  $k_a$  (Kubin y Estrin [53]).

Para entender cuantitativamente el comportamiento de los metales bajo deformación, se necesita una descripción constitutiva que considere la base física de la microestructura del material en cuestión, así como los datos experimentales bajo deformación plástica que dotan de credibilidad a los resultados que pueda proveer el modelo. Sin embargo, deformar un metal más allá de su límite elástico activará y moverá dislocaciones a través de la red cristalina. Como consecuencia, dos tipos de obstáculos que tratan de prevenir el movimiento de las

dislocaciones pueden ser encontrados en la red cristalina: obstáculos de corto y de largo alcance. Los obstáculos de corto alcance son debidos a la captura de dislocaciones, que pueden ser superadas mediante la introducción de energía térmica a través de la red cristalina. Por otra parte, los obstáculos de largo alcance son debidos a la estructura del material y no pueden ser superados mediante la introducción de energía térmica en la red cristalina. Por lo tanto, el flujo de tensiones en cualquier tipo de metal ( $\sigma = (3\sigma_{ij}\sigma_{ij}/2)^{1/2}$  de tipo Von Mises) se puede descomponer en dos componentes principales: la tensión atermia  $\sigma_a$  y la tensión térmica  $\sigma_{th}$ .

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_{th}$$

*Ec. 2-20*

La descomposición aditiva del flujo de tensiones ha sido probado experimentalmente y usado por diversos autores (ver por ejemplo Zerilli y Armstrong [104], Nemat-Nasser e Isaacs [71] y Nemat-Nasser et al. [69]).

### 2.3.2. MODELO CONSTITUTIVO

Basándose en su estructura cristalina, los metales puede ser clasificados en tres grandes grupos, cúbico centrada en el cuerpo (BCC por sus siglas en inglés), cúbico centrada en las caras (FCC por sus siglas en inglés) y hexagonal compacta (HCP por sus siglas en inglés). La estructura cristalina y la distribución de los átomos dentro de la red juegan un papel crucial en el control de la generación y movimiento de las dislocaciones durante la deformación plástica del material. Cada tipo de metal tiene su propio comportamiento ligado a la velocidad de deformación y la temperatura. En este apartado se presenta un modelo de flujo de tensiones plásticas empleando el principio de activación térmica combinado con observaciones experimentales publicadas por otros autores. En el modelo de Voyiadjis y Abed no se tiene en cuenta el papel de la interacción de las dislocaciones, y las temperaturas y velocidades de deformación son consideradas en un rango de valores en los que no aparece daño por deformación dinámica.

Hay que mencionar antes de nada que el flujo de tensiones a una temperatura  $T$  dada, es proporcional al módulo a cortante  $\mu$ . Es también necesario tener  $G$  proporcional a  $\mu$  ( $G \propto \mu b^3$ ) para que la energía y el trabajo de activación debido a las fuerzas aplicadas durante el evento de activación sean independientes de las propiedades del material (Kocks [49]). Zerilli y Armstrong [104] relacionaron a una temperatura de 0 Kelvin la tensión térmica  $\sigma_o$  con la energía libre de Gibbs  $G_o$  de referencia y el área de activación de las dislocaciones  $A_o$  como indica la Ec. 2-21:

$$\sigma_o = \frac{mG_o}{A_o b} \quad \text{Ec. 2-21}$$

Donde  $b$  es la magnitud el vector de Burgers y  $m$  es el factor de Taylor, ya mencionado, que relaciona la tensión a cortante con la tensión normal ( $\sigma = \tau \cdot m$ ). Empleando la Ec. 2-21 con la adecuada relación proporcional entre la energía libre de Gibbs de referencia y el módulo a cortante, el parámetro  $\hat{\sigma}$  puede relacionarse con estructura interna independiente de la deformación como aparece en la Ec. 2-22:

$$\hat{\sigma} = m\alpha_o\mu_o b^2/A_o \quad \text{Ec. 2-22}$$

Donde  $\alpha_o$  es una constante que representa la fracción del módulo a cortante que contribuye a la energía de activación, ambos la temperatura de 0 Kelvin.

Para la mayoría de los metales una componente de la tensión adicional  $Y_a$  se emplea, y es independiente de la deformación plástica y la temperatura, además de estar relacionada con la microestructura interna. Esta componente se define como el producto de la tensión microestructural y la inversa de la raíz cuadrada del diámetro medio de los granos. Klepaczko [26] propuso una definición para la tensión microestructural relacionándola con el módulo a cortante y la magnitud del vector de Burgers, mediante la Ec. 2-23:

$$Y_a = \alpha_1\mu \left( \frac{b}{D_g} \right)^{1/2} \quad \text{Ec. 2-23}$$

Donde  $\alpha_1$  es una constante en que representa la contribución de este mecanismo a la tensión aterna.

En el caso de materiales FCC, como el cobre o el aluminio, los mecanismos de activación térmica están dominados y controlados por la aparición y evolución de cierta estructura heterogénea de dislocaciones móviles, así como de las interacciones de las dislocaciones en el largo alcance (bosques). Basándose en esto, la activación térmica depende en gran medida de la deformación plástica, es decir, un aumento de temperatura supone una gran disminución de la tensión del material en metales FCC, que sufren gran endurecimiento por deformación. Ciertas observaciones experimentales validan la dependencia de la tensión en la deformación plástica, la velocidad de deformación y la temperatura para la mayoría de metales FCC (Nemat-Nasser y Li [73], Tanner et al. [92], Lennon y Ramesh [57]). Esto quiere decir que para cierta velocidad de deformación y diferentes temperaturas, la gráfica de tensión frente a la deformación mostrará curvas que empiezan aproximadamente en el mismo punto (el límite elástico) y cada curva se endurece de manera distinta, dependiendo de la temperatura a la que se encuentre el material, como se puede apreciar en la Figura 2.3.

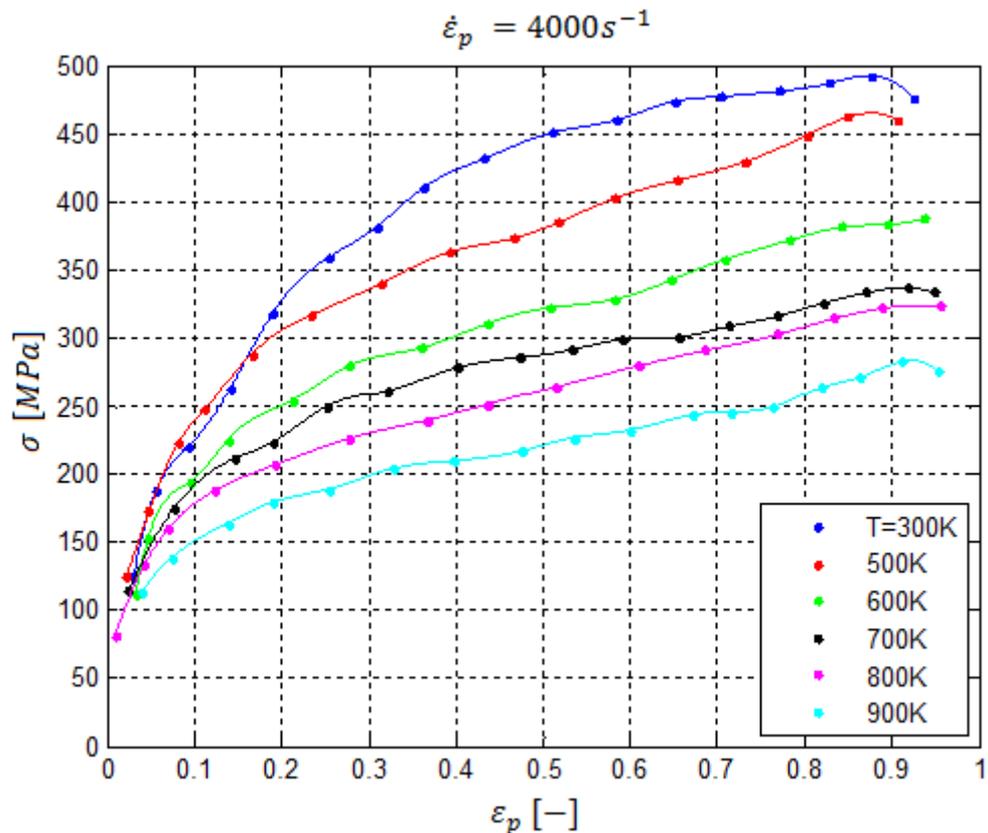


Figura 2.3 - Datos experimentales a distintas temperaturas y velocidad de deformación  $4000s^{-1}$  para cobre OFHC

Se puede observar que el endurecimiento por deformación es mayor cuanto menor es la temperatura del material. El efecto de la densidad de dislocaciones móviles se introduce en el flujo de tensiones mediante la ecuación de Orowan (Ec. 2-6), es decir, el parámetro  $\beta_1$  juega un papel importante en la caracterización del efecto del movimiento de dislocaciones en la tensión térmica durante el proceso de deformación plástica. Adicionalmente para el análisis de

activación térmica, el efecto de los mecanismos de intersección de dislocaciones (móviles y bosques) sobre el flujo de tensiones puede ser sugerido de la siguiente manera. Cuando los patrones de dislocación (por ejemplo una celda) se forman, las fuentes de dislocaciones móviles son muy numerosas en la pared de la entidad. Tras la deformación, las dislocaciones tienden a ser atrapadas en la siguiente pared de celda, formando un bosque de dislocaciones. Desde ese momento la introducción de energía térmica facilitará que las dislocaciones superen este tipo de obstáculos y, en consecuencia, proveerán endurecimiento al flujo de tensiones térmico.

Basándose en esto, la distancia  $d$  entre intersecciones de dislocaciones y consecuentemente en el volumen de activación, juegan un papel crucial adicional a la hora de determinar la formulación apropiada que introduzca el efecto de la deformación plástica en la componente térmica del flujo de tensiones en el material. Por lo tanto el volumen de activación  $V$  puede relacionarse con la distancia entre intersecciones de dislocaciones mediante la Ec. 2-24 (Zerilli y Armstrong [104], Voyiadjis y Abed [98]):

$$V = Ab = db^2/2 \quad \text{Ec. 2-24}$$

Donde  $A$  es el área de activación. Gracio [28] postuló que en el cobre, cuando se incrementa la deformación plástica, el camino libre de las dislocaciones decrece y consecuentemente la distancia entre la intersección de dislocaciones también. La densidad de dislocaciones del bosque y la deformación plástica están relacionadas con la distancia  $d$  a través de la Ec. 2-25 (Kubin y Estrin [53]):

$$d \sim 1/\varepsilon_p^{1/2} \quad \text{y} \quad \rho_f \sim 1/d^2 \quad \text{Ec. 2-25}$$

El flujo de tensiones en los múltiples planos de deslizamiento para metales FCC a una temperatura igual a 0 Kelvin para cualquier valor de deformación está relacionado con la densidad de dislocaciones y con la deformación mediante la relación que proponen diversos autores (ver por ejemplo Bell [11]).

$$\sigma_o \approx \sigma'_o \left( \frac{b}{d} \right) \approx \sigma''_o \varepsilon_p^n \quad \text{Ec. 2-26}$$

Comparando la Ec. 2-26 con la Ec. 2-15 para el caso de temperatura  $T = 0$  Kelvin y empleando la Ec. 2-24 y la Ec. 2-25, el área de activación  $A_0$  para metales FCC, determinada por la intersección de dislocaciones, es proporcional a la inversa de la raíz de la deformación plástica del siguiente modo (Zerilli y Armstrong [104]):

$$A_0 = A'_0 \varepsilon_p^{-1/2} \quad \text{Ec. 2-27}$$

La Ec. 2-27 muestra claramente que el área de activación disminuye a medida que la deformación plástica dirección, lo que indica que el valor máximo del área de activación se alcanza al iniciarse la deformación plástica ( $\varepsilon_p = 0$ ). El area de activación inicial, sin embargo, es una cantidad finita, al contrario de lo que la Ec. 2-27 indica, ya que para una deformación plástica nula, esta ecuación indica que el área de activación inicial se hace infinita. Es necesario por tanto añadir un término a esta expresión (Ec. 2-28).

$$A_0^{-1} = A_0'^{-1} + A_0''^{-1} \varepsilon_p^{1/2} \quad \text{Ec. 2-28}$$

Sustituyendo la Ec. 2-28 en la Ec. 2-21 y sabiendo que  $\hat{\sigma} = \sigma_o$  a  $T = 0 K$ , la componente térmica de la ecuación constitutiva de Voyiadjis y Abed incorporará la temperatura, la velocidad de deformación y la deformación plástica. Por otro lado, la componente atermia del flujo de tensiones es independiente de la deformación y se refiere al límite elástico. Usando la descomposición provista por la Ec. 2-20, la tensión en materiales FCC puede ajustarse según la expresión:

$$\sigma = Y_a + (\tilde{B} \varepsilon_p^{1/2} + Y_d) \left[ 1 - \left( \beta_1(\varepsilon_p) T - \beta_2 T \ln \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_{po}^i} \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{Ec. 2-29}$$

Donde los parámetros  $Y_a$  y  $\beta_i$  son los mismos que se definieron previamente, y el parámetro de endurecimiento por deformación  $\tilde{B}$  responde a la forma:

$$\tilde{B} = m \alpha_o \mu_o b^2 / A_o'' \quad \text{Ec. 2-30}$$

Puede observarse en la Ec. 2-29 que para una deformación dada, la tensión térmica, dada por el término de la derecha, es siempre positivo (de lo contrario no sería posible efectuar la potencia). Los valores de  $p$  y  $q$  estarán en un rango como el mencionado previamente. Además, no aparece dependencia de la temperatura o la velocidad de deformación en el límite elástico, dado que  $Y_a$  es constante.

La modificación de la energía térmica de activación propuesta en la Ec. 2-28 nos lleva a introducir una componente adicional en el flujo de tensiones térmico, incorporando el efecto de arrastre de electrones y fonones durante el movimiento de las dislocaciones del material. Este fenómeno aparece habitualmente en materiales FCC y HCP en regiones en las que la velocidad de deformación es muy alta, pero la deformación plástica muy baja (Jassby y Vreeland [33], Zerilli y Armstrong [105]). Un examen minucioso de la Ec. 2-29 revela que para deformaciones plásticas casi nulas ( $\varepsilon_p \rightarrow 0$ ), la tensión térmica se aproxima a:

$$\sigma_{th} \rightarrow Y_d \left[ 1 + \left( \beta_2 T \ln \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_{po}^i} \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} = Y_d \left[ 1 - \left( \frac{k}{G_o} T \ln \frac{\dot{\varepsilon}_{po}^i}{\dot{\varepsilon}_p} \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{Ec. 2-31}$$

Donde el valor del parámetro  $Y_d$  puede considerarse el resultado de la tensión térmica a la velocidad de referencia  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_o$  y/o temperatura de 0 Kelvin  $T = 0$  (Ec. 2-32).

$$Y_d = m \alpha_o \mu_o b^2 / A_o' \quad \text{Ec. 2-32}$$

Es obvio que la tensión térmica dada por la Ec. 2-31 decrece a medida que aumenta la temperatura, así como se incrementa con la velocidad de deformación. Este comportamiento coincide con los resultados experimentales y las observaciones que se puedan encontrar en la literatura (Vreeland y Jassby [100], Follansbee et al. [25], Nemat-Nasser y Li [73], Nemat-Nasser et al. [70]). En referencia a este hecho, Armstrong et al. [5] han observado que el gran

aumento de la tensión a elevadas velocidades de deformación viene dado por un fuerte decrecimiento del área de activación, incluso acercándose a dimensiones atómicas, lo que indica la gran reducción que sufre el espacio entre dislocaciones, llevando esto a un aumento de la densidad de dislocaciones.

El factor de endurecimiento por deformación  $\tilde{B}\varepsilon_p^n$  propuesto en la Ec. 2-29 puede ser redefinido mediante una expresión más física, que tenga en cuenta la relación entre el área de activación y la densidad de dislocaciones de bosque empleando la Ec. 2-24 y la Ec. 2-25:

$$A_o = \frac{bd}{2} \simeq \tilde{m}b\rho_f^{-1/2} \quad \text{Ec. 2-33}$$

Donde  $\tilde{m}$  es una constante y la variación de la densidad de dislocaciones de bosque con el endurecimiento plástico puede definirse como en la Ec. 2-34 haciendo uso de la Ec. 2-10:

$$\rho_f = \rho_{fi} + \bar{f} \frac{M}{k_a} (1 - \exp(-k_a \varepsilon_p)) \quad \text{Ec. 2-34}$$

Donde  $\bar{f}$  indica la fracción de densidad de dislocaciones correspondiente a la densidad de dislocaciones de bosque. Sustituyendo la Ec. 2-33 en la Ec. 2-22 y empleando la Ec. 2-34, el flujo de tensiones plástico en metales FCC puede definirse alternativamente como en la Ec. 2-35.

$$\sigma = Y_a + \left( \hat{Y}_d + \hat{B} (1 - \exp(-k_a \varepsilon_p)) \right)^{\frac{1}{2}} \times \left[ 1 - \left( \beta_1 (\varepsilon_p) T - \beta_2 T \ln \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_{p0}^i} \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{Ec. 2-35}$$

Donde el factor de endurecimiento  $\hat{B}$  y el parámetro de la tensión térmica de referencia  $\hat{Y}_d$  siguen las relaciones mostradas en la Ec. 2-36 y la Ec. 2-37:

$$\hat{B} = \hat{m} \alpha_o \mu_o b \sqrt{\bar{f} \frac{M}{k_a}} \quad \text{Ec. 2-36}$$

$$\hat{Y}_d = \hat{m} \alpha_o \mu_o b \sqrt{\rho_{fi}} \quad \text{Ec. 2-37}$$

Donde  $\hat{m} = m/\tilde{m}$  es constante. El flujo de tensiones en materiales FCC estará determinado por la Ec. 2-29, con un factor de endurecimiento por deformación de carácter potencial, o bien por la Ec. 2-35, que incluye una interpretación más física del endurecimiento. Ambas expresiones pueden servir para determinar el comportamiento del material, pero como se mencionó al principio de este proyecto, se prefiere optar por las formulaciones con mayor sentido físico, anteponiéndolas a las de carácter fenomenológico.

La expresión Ec. 2-35, sirve igualmente para procesos isotermos o adiabáticos. Para el caso de deformación isoterma, la temperatura  $T$  (que valdrá la temperatura inicial del ensayo,  $T_o$ )

permanece constante durante la deformación plástica. En el caso de deformación adiabática, el calor en el interior del material aumenta debido al aumento de la deformación plástica (energía plástica) y consecuentemente la temperatura  $T$  se incrementará asumiendo que cierta fracción de la energía plástica se convierte en calor. A continuación se muestra la expresión matemática para una nueva temperatura asumiendo propiedades termodinámica del material constantes:

$$T = T_o + \frac{\xi}{c_p \rho} \int_0^{\epsilon_p} \sigma d\epsilon_p \quad \text{Ec. 2-38}$$

Donde  $\rho$  es la densidad del material y  $c_p$  es el calor específico a presión constante.  $\xi$  es el coeficiente de Quinney-Taylor, de valor experimental y habitualmente 0.9. En este trabajo, se propone que el valor del coeficiente de Quinney-Taylor tome un valor nulo para velocidades de deformación menores que  $10s^{-1}$  y el valor que tenga para deformaciones superiores a ese valor. Esto es debido a que a velocidades de deformación bajas, el material tiene suficiente tiempo para liberar la energía de deformación a la atmósfera, mientras que a elevadas velocidades no hay suficiente tiempo para que esto suceda. También se puede proponer que el valor del coeficiente de Quinney-Taylor sea variable con la deformación plástica (Kapoor y Nemat-Nasser [37]).

Una vez se ha definido la ecuación fundamental del modelo, se puede proceder al estudio de los parámetros propuestos por los autores y los resultados que el modelo proporciona.

### 2.3.3. RESULTADOS: APLICACIÓN Y COMPARACIÓN

Como se menciona en el apartado 1.3, se emplearán datos experimentales para el cobre OFHC. Los valores de parámetros físicos empleados aparecen en la Tabla 2-1:

<b>Parámetros físicos</b>	<b>Cobre OFHC</b>
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	8960
$c_p$ [J/kgK]	383
$\xi$ [-]	0.9

Tabla 2-1 - Parámetros físicos para el cobre OFHC

Para la Ec. 2-35, los valores de los parámetros propuestos por los autores son:

<b>Parámetros del modelo</b>	<b>Cobre OFHC</b>
$Y_a$ [MPa]	25
$\hat{B}$ [MPa]	1175
$\hat{Y}_a$ [MPa]	50
$k_a$ [-]	0.9
$C_1$ [-]	40
$\beta_2$ [K <sup>-1</sup> ]	0.0000351
$\dot{\epsilon}_{po}^i$ [s <sup>-1</sup> ]	$6.97 \times 10^6$
$q$ [-]	3/2
$p$ [-]	1/2

Tabla 2-2 - Parámetros del modelo de Voyiadjis y Abed, Ec

Una vez se tienen los parámetros del modelo, se puede proceder a la comparación del mismo con los resultados experimentales (Nemat-Nasser y Li [73]):

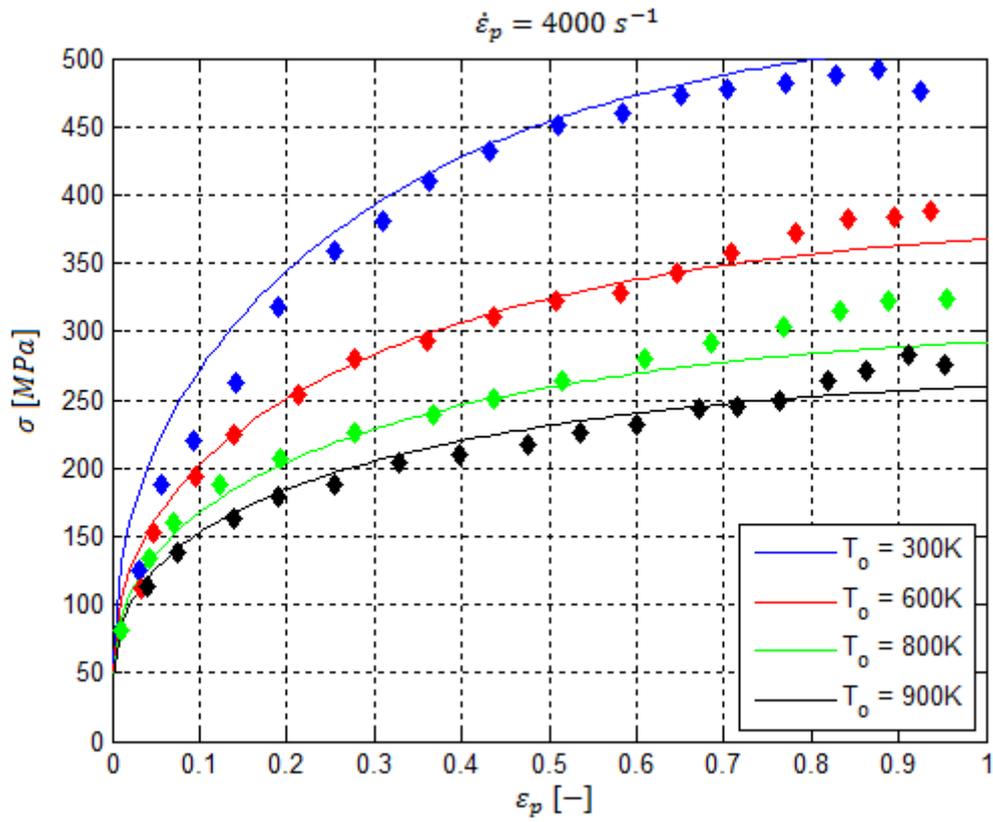


Figura 2.4 - Comparación del modelo de Voyiadjis y Abed con datos experimentales a una velocidad de deformación de  $4000\text{s}^{-1}$  y varias temperaturas. Los valores que propone el modelo están representados con una línea continua. Los datos experimentales se muestran con diamantes, del mismo color que la línea que trata de representar sus valores.

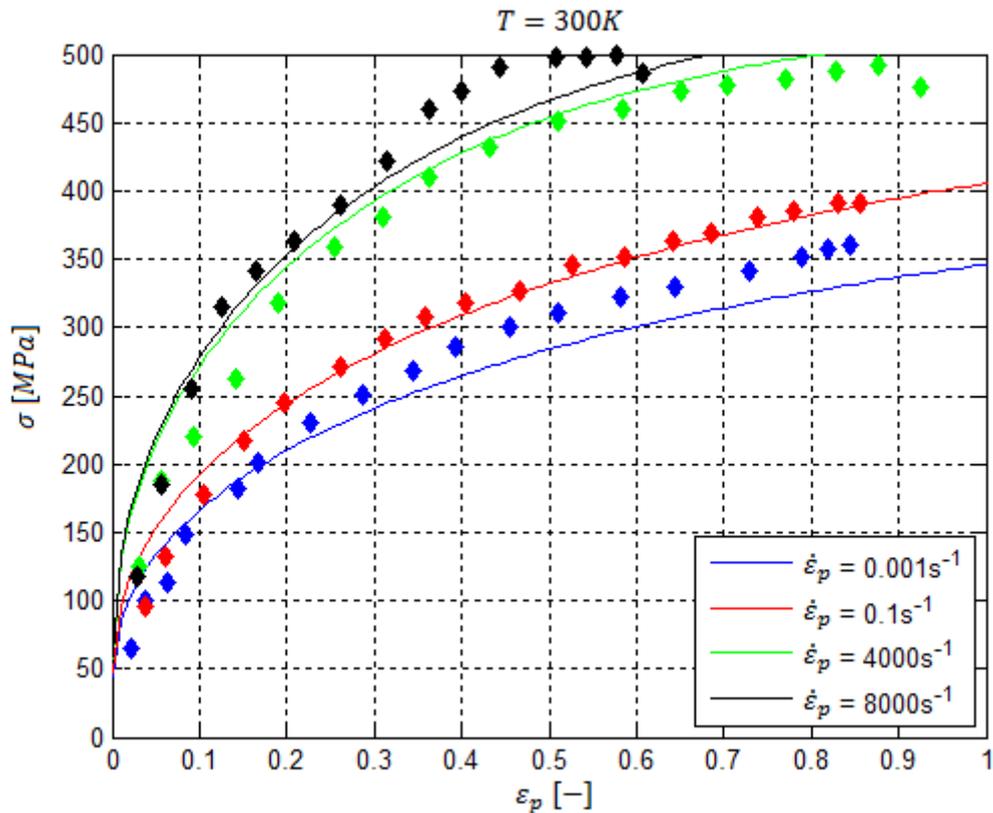


Figura 2.5 - Comparación del modelo de Voyiadjis y Abed con datos experimentales a temperatura inicial  $T_0$  de 300K y varias velocidades de deformación.

En las Figuras Figura 2.4 y Figura 2.5 se observan resultados que se aproximan mucho a los obtenidos experimentalmente. A velocidades de deformación muy bajas y muy altas los resultados del modelo no son tan cercanos como en otros casos. En el caso de velocidades de deformación muy elevadas, aparece el fenómeno conocido como arrastre viscoso, que hace que aumente la tensión más rápidamente a elevadas deformaciones. En este modelo no se tiene en cuenta el fenómeno de arrastre viscoso. Para valores muy altos de la deformación también puede aparecer daño por excesiva deformación en el material, haciendo que la tensión aumente un poco más aún.

Para la Figura 2.5, puede ser interesante representar los datos en tres dimensiones, incluyendo en uno de los ejes la velocidad de deformación. Esta representación se hará considerando que el proceso es isoterma (Figura 2.6), adiabático (Figura 2.7) y por último considerando que el proceso es isoterma hasta  $\dot{\epsilon}_p = 10s^{-1}$  y adiabático a velocidades superiores a ésta (Figura 2.8).

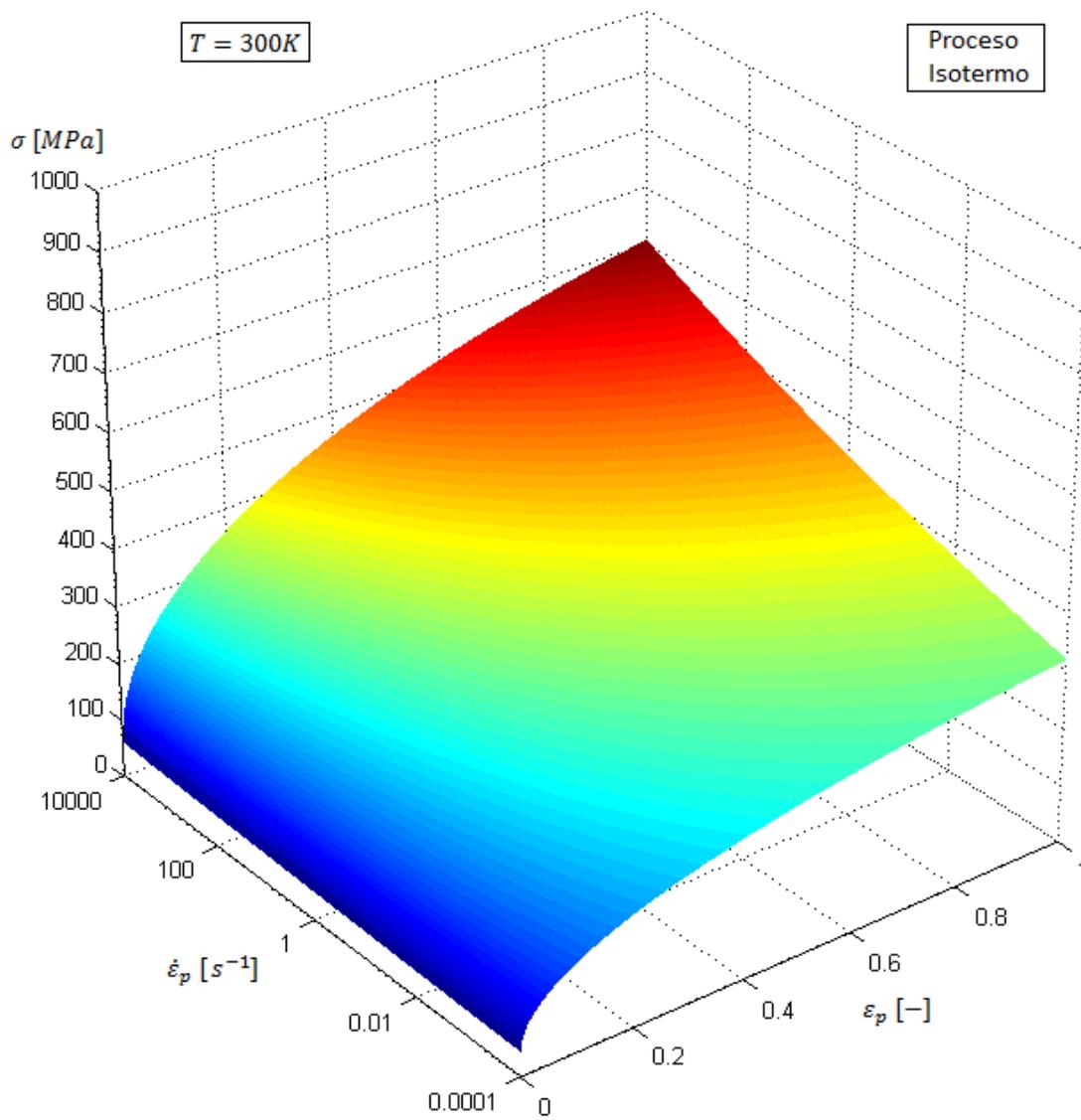


Figura 2.6 - Modelo Voyiadjis y Abed. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso isotermo. Material: Cobre OFHC.

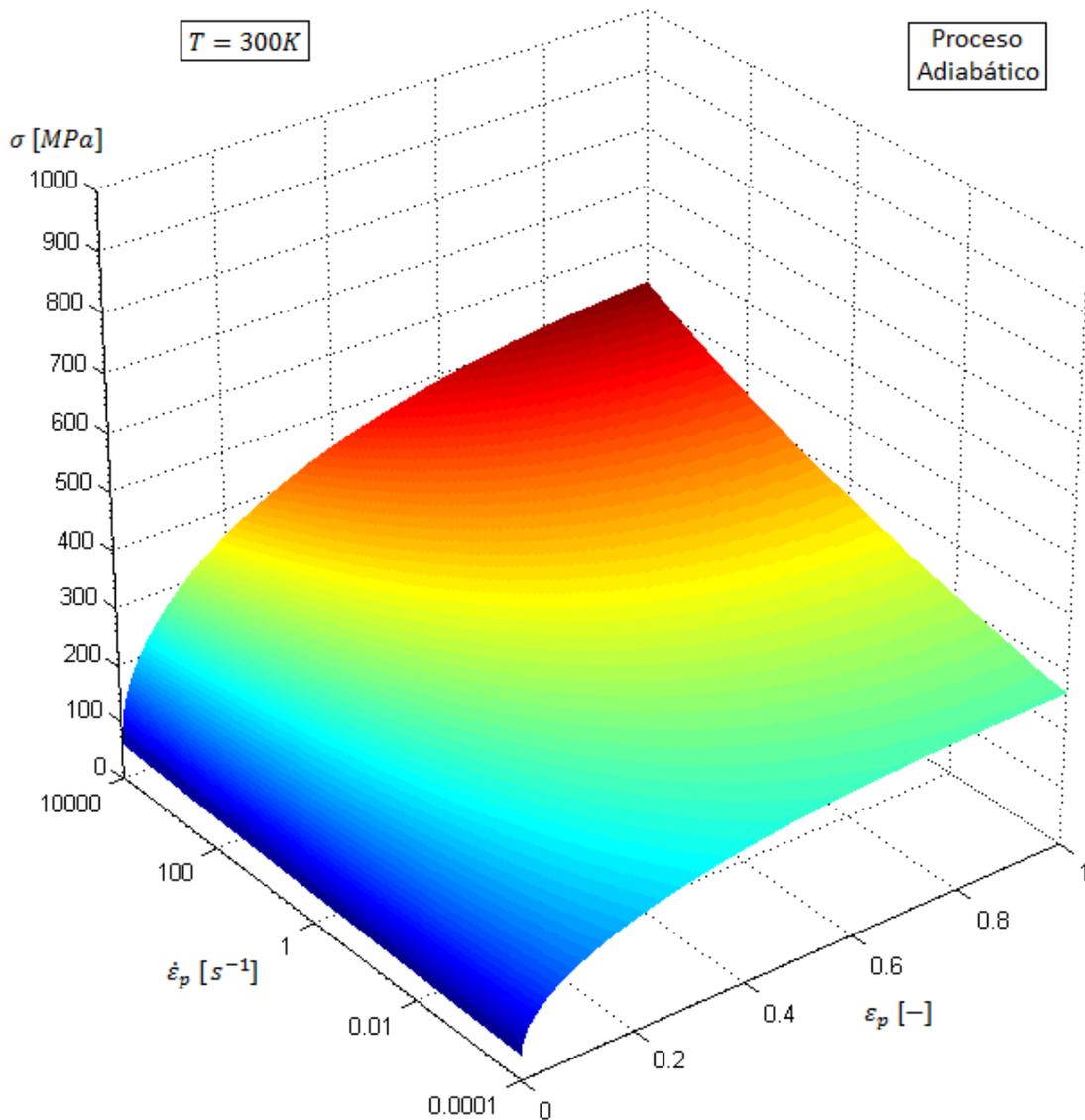


Figura 2.7 - Modelo Voyiadjis y Abed. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso adiabático. Material: Cobre OFHC.

Se observa que en el proceso adiabático (Figura 2.7) las tensiones son menores que para el proceso isoterma (Figura 2.6). Esto es debido a que el aumento de temperatura que conlleva el proceso isoterma tiene como consecuencia directa una disminución de la componente térmica de la tensión, tal y como se puede deducir de la Ec. 2-15, en la que al aumentar la temperatura, crece el término elevado a  $1/q$ , haciendo que disminuya la tensión térmica.

$$\sigma_{th} = \hat{\sigma} \left[ 1 - \left( \beta_1(\epsilon_p) T - \beta_2 T \ln \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_{po}^i} \right)^{1/q} \right]^{1/p} \quad \text{Ec. 2-15'}$$

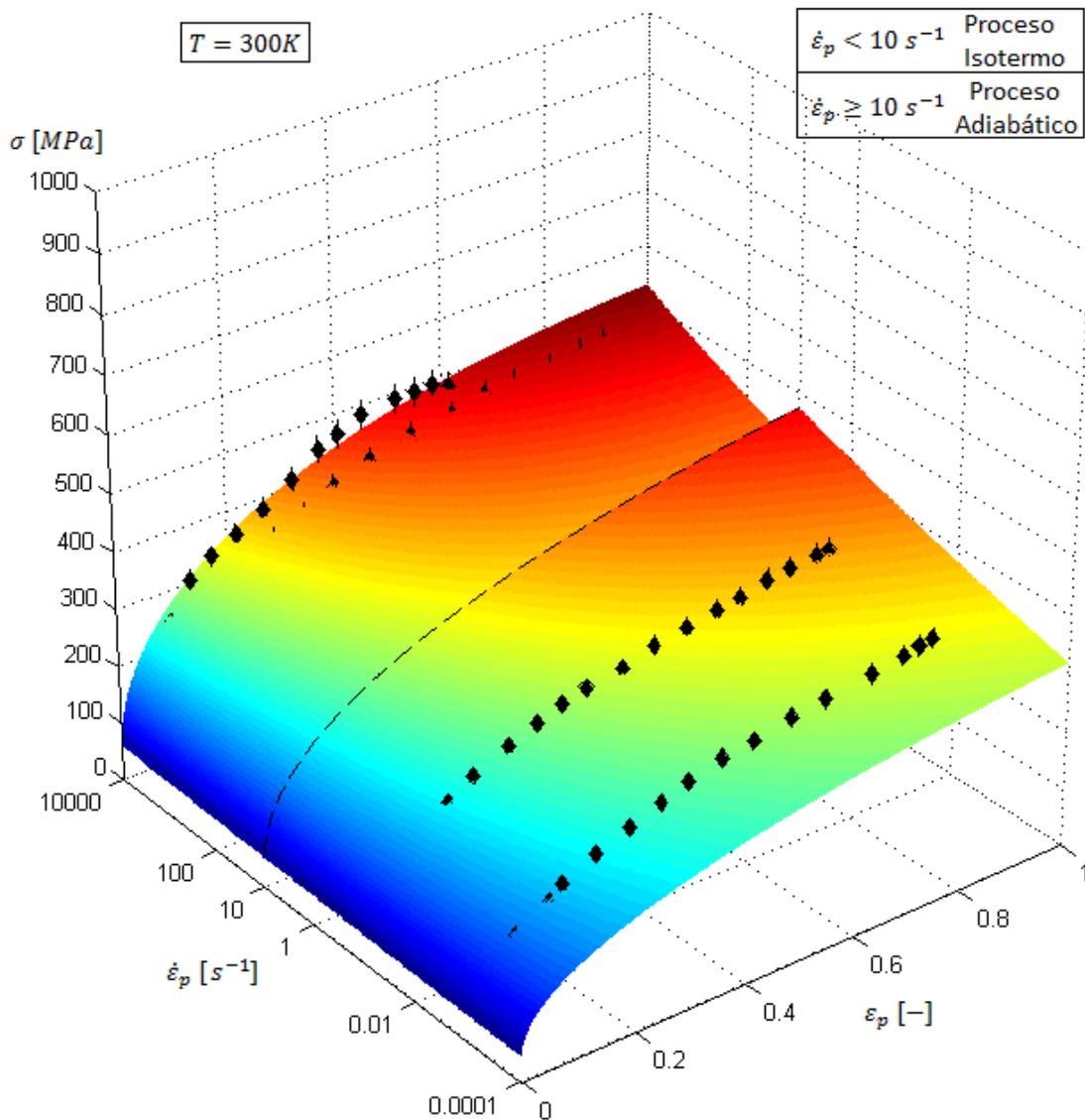


Figura 2.8 - Modelo Voyiadjis y Abed. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso mixto. Se muestran además los resultados experimentales marcados con diamantes negros, con un error del  $\pm 5\%$  en la tensión. Material: Cobre OFHC.

En esta última figura se observa que los resultados experimentales se ajustan bastante bien al modelo, como se pudo comprobar en la Figura 2.5. El salto en la tensión que se observa es causado por la decisión de considerar que el proceso es adiabático a velocidades de deformación superiores a  $10s^{-1}$ , por eso se proponía para la Ec. 2-38 un coeficiente de Quinney-Taylor dependiente de la deformación y la velocidad de deformación.

Es interesante observar en cualquiera de las tres últimas figuras que al aumentar la velocidad de deformación, se aumenta el endurecimiento por deformación, mientras que la para tensión inicial (límite de elasticidad del material) no se observa relación práctica con la velocidad de deformación.

También es posible obtener una gráfica tensión - deformación - temperatura inicial, fijando la velocidad de deformación del proceso, mostrando la representación tridimensional de la

Figura 2.4. Para una velocidad de deformación de  $4000s^{-1}$  se obtienen los siguientes resultados:

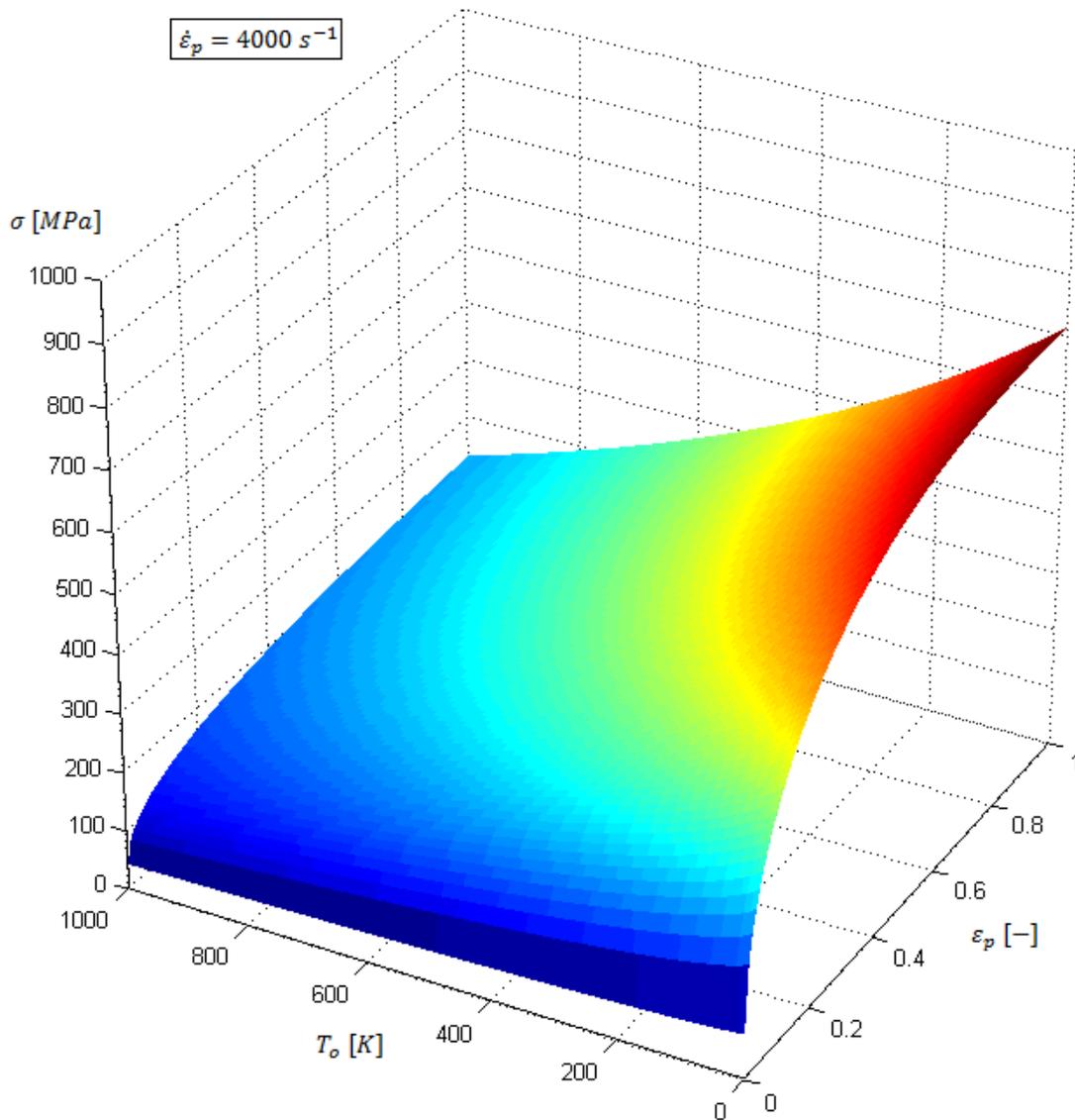


Figura 2.9 - Modelo Voyiadjis y Abed. Tensión-Deformación-Temperatura inicial a velocidad de deformación  $4000s^{-1}$  (Proceso adiabático). Material: Cobre OFHC.

En esta gráfica queda patente la disminución del endurecimiento por deformación al aumentar la temperatura inicial del material. Esta disminución es menos acusada en procesos adiabáticos (recordemos que se consideran adiabáticos si  $\dot{\epsilon}_p \geq 10s^{-1}$ ), como es el caso de la Figura 2.9, debido a que cuanto más deformado está el material, más temperatura final tiene, por lo que la curva  $\sigma$  vs  $T$  en  $\epsilon_p = 1$  es más suave que para un proceso isotermo. A elevadas temperaturas el efecto del incremento debido a adiabaticidad deja de tener tanta importancia y es el efecto de la velocidad de deformación el que predomina. Por ello, es de esperar que para un proceso isotermo (a velocidades de deformación considerablemente bajas) se tengan tensiones mayores para temperaturas iniciales bajas (ya no hay incremento de temperatura), pero tensiones menores para velocidades altas (el incremento de temperatura del adiabático

no es tan importante como la tensión que aporta una velocidad de deformación elevada). La Figura 2.10 muestra la curva tensión - deformación - temperatura inicial para una velocidad de deformación de  $0.1 \text{ s}^{-1}$ .

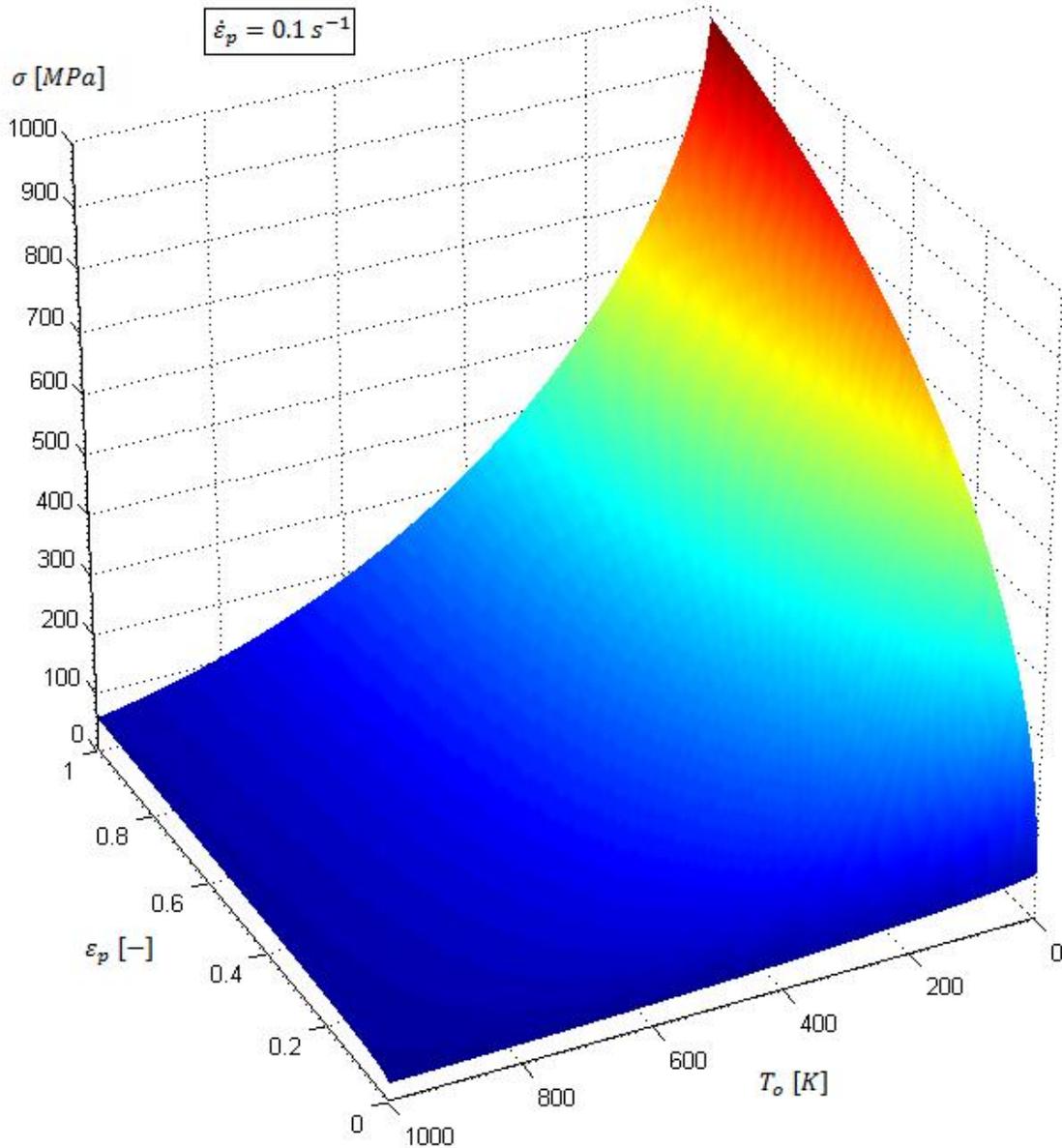


Figura 2.10 - Modelo Voyiadjis y Abed. Tensión-Deformación-Temperatura inicial a velocidad de deformación  $0.1 \text{ s}^{-1}$  (Proceso isoterma). Material: Cobre OFHC.

El comportamiento del material es el que se había predicho. Tensiones muy elevadas a temperaturas bajas (no hay incremento de temperatura que rebaje la tensión al deformarse el material) y tensiones muy bajas a elevadas temperaturas (hay muy poca velocidad de deformación, lo que no aporta demasiada tensión al material, y las elevadas temperaturas rebajan mucho el flujo de tensiones). En este caso la temperatura inicial y final del proceso coinciden.

#### ***2.3.4. CONCLUSIÓN DEL MODELO DE VOYIADJIS Y ABED***

Este modelo está basado en el concepto de la energía térmica de activación, así como en los mecanismos de interacción de dislocaciones. El modelo emplea la evolución de la densidad de dislocaciones como función de la deformación plástica para poder calcular el endurecimiento por deformación y es capaz de simular procesos adiabáticos e isotermos para diversos rangos de temperatura y velocidades de deformación. Los resultados obtenidos son muy similares a los experimentales para el caso de cobre OFHC, material FCC, en el que la tensión térmica es altamente dependiente de la deformación plástica, debido a que los mecanismos de interacción de dislocaciones dominan el proceso de activación térmica.

Este modelo junto a los dos siguientes servirá de gran ayuda y se emplearán muchos de los conceptos presentados a la hora de desarrollar un nuevo modelo de ecuaciones constitutivas para materiales FCC.

## 2.4. MODELO DE CAI, NIU, MA Y SHI (CAI et al.).

---

### 2.4.1. INTRODUCCIÓN

La motivación y objetivos de estos autores es la misma que la que se tiene en este proyecto de fin de carrera. Este modelo, al proponer una formulación con sentido físico (como la que se busca obtener en este proyecto), estudia el deslizamiento de las dislocaciones, empleándolo junto al mecanismo de activación térmica. Como se ha mencionado previamente, el mecanismo de activación térmica es sensible a la temperatura, y por otra parte, la deformación plástica a elevadas velocidades puede causar incrementos de temperatura en el interior del material (por la aparición de cierta adiabaticidad durante el proceso). Por lo tanto, se puede afirmar que los efectos de la temperatura del material y la velocidad de deformación a la que es sometido están emparejados y han de considerarse unidos para el estudio del comportamiento de materiales bajo condiciones de carga diferentes.

Para el desarrollo del modelo de Cai et al., se emplearon fundamentalmente dos fuentes: Zerilli y Armstrong [104] (Modelo **Z-A**) y Follansbee y Kocks [24] (Modelo **MTS** - Mechanical Threshold Stress). Ambos modelos están basados en el mecanismo de activación térmica, y se han empleado para la elaboración de otros muchos modelos (Cheng et al. [17], Nemat-Nasser et al. [74]).

Por norma general, un incremento en la velocidad de deformación del material unido a bajas temperaturas puede incrementar la resistencia a la deformación plástica, es decir, producen un aumento del flujo de tensiones en el material. Debido a esto, Zener y Hollomon [102] propusieron un parámetro  $Z = \dot{\epsilon} \exp(Q/kT)$  que tuviera en cuenta el emparejamiento entre la velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}$  y la temperatura  $T$  en el flujo de tensiones  $\sigma(\epsilon, Z)$ , siendo  $Q$  la energía de activación y  $k$  la constante de Boltzmann. Sin embargo, este parámetro sólo funciona en un rango limitado de temperaturas y velocidades, y no es válido a la hora de describir el efecto de la temperatura en la tensión (Zerilli [103], Armstrong y Walley [4]). Para obtener una relación más razonable entre la temperatura y la velocidad de deformación, los modelos **Z-A** y **MTS** proponen modificaciones en la energía térmica de activación. El modelo **Z-A** tiene en cuenta dicha modificación añadiendo el "volumen de activación medio" dependiente de la temperatura. El modelo **MTS** propone una modificación en la energía de activación mediante la inclusión de la dependencia del módulo a cortante con respecto a la temperatura. Adicionalmente, Nemat-Nasser y Li [73] y Cheng et al. [17], hicieron su aporte considerando la influencia de la temperatura en el camino libre medio de las dislocaciones.

Este modelo establece una relación entre los modelos **Z-A** y **MTS** para obtener una relación constitutiva que permita reproducir el comportamiento del material bajo condiciones de carga en un amplio rango de valores. Se describirá el perfil de los obstáculos de carácter térmico para la densidad de dislocaciones y la influencia del volumen de activación térmica en la tensión térmica. Combinando la expresión del nuevo modelo con la teoría de activación térmica, se podrá describir de manera razonable el comportamiento de los materiales FCC (se emplean de nuevo datos experimentales de cobre OFHC).

Haciendo uso de la Ec. 2-9 (Orowan [77] + Plasticidad Huber-Mises):

$$\dot{\epsilon}_p = b\rho_m \bar{v} \quad \text{Ec. 2-9'}$$

Se omite el factor de orientación de Schmidt  $\bar{m}$  que sirve únicamente para convertir deformación tangencial en deformación normal, por simplicidad.

Johnston y Gilman [35] propusieron la Ec. 2-39 para la velocidad de las dislocaciones:

$$v = A\sigma^m \exp(-Q/kT) = A\sigma^m Z/\dot{\epsilon}_p \quad \text{Ec. 2-39}$$

Siendo  $A$  y  $Q$  parámetros del material y  $Z$  el parámetro propuesto por Zener y Hollomon [102]. Combinando la Ec. 2-9 y la Ec. 2-39, se llega a:

$$\sigma = (Ab\rho_m)^{-1/m} Z^{1/m} \quad \text{Ec. 2-40}$$

Lo que lleva a concluir que  $\sigma \propto \dot{\epsilon}_p^{1/m}$  (Relación potencial entre la velocidad de deformación y la tensión del material).

Otra manera de expresar la velocidad media de propagación de las dislocaciones tiene estructura de Arrhenius (Kocks y Mecking [51]):

$$v = v_o \exp[-G(\sigma_{th})/kT] \quad \text{Ec. 2-41}$$

Donde  $v_o = v_o l$  representa el valor máximo de la velocidad de deslizamiento de las dislocaciones, siendo  $l$  el camino libre medio del movimiento de las dislocaciones y  $v_o$  la frecuencia necesaria para que las dislocaciones superen las barreras térmicas.  $G(\sigma_{th})$  es la energía de activación en función de la componente térmica de la tensión ( $\sigma_{th} = \sigma - \sigma_a$ ). La tensión atermia  $\sigma_a$  corresponde a la resistencia inducida por la red cristalina, y la resistencia opuesta por los obstáculos de largo alcance (bordes de grano y/o bosques de dislocaciones). Dos expresiones para  $G(\sigma_{th})$  fueron propuestas por Zerilli y Armstrong [104] y Kocks et al. [50], respectivamente, y fueron empleadas en el desarrollo de los modelos **Z-A** y **MTS**.

Suponiendo que las dislocaciones sufren gradualmente la activación térmica que les permite superar los obstáculos térmicos, Zerilli y Armstrong [104] (Modelo **Z-A**) propusieron la Ec. 2-42 para la energía de activación:

$$G(\sigma_{th}) = G_o - \int_0^{\sigma_{th}} V^*(\sigma) d\sigma = G_o - V\sigma_{th} \quad \text{Ec. 2-42}$$

Donde  $V^*(\sigma) \equiv -\partial G(\sigma_{th})/\partial \sigma_{th}$  es el volumen de activación y  $V = (1/\sigma_{th}) \int_0^{\sigma_{th}} V^*(\sigma) d\sigma$  es el volumen medio térmicamente activado. La energía de activación de referencia  $G_o = \int_0^{\hat{\sigma}} V^*(\sigma) d\sigma$  y el umbral de tensión  $\hat{\sigma}$  representan la resistencia/fortaleza de los obstáculos térmicos. La variación del volumen de activación  $V^*$  con la tensión térmica  $\sigma_{th}$  y la temperatura  $T$  han sido abordados ya por varios autores (Hoge y Mukherjee [30], Kataoka y Yamada [38], Lee y Chen [55], Klassen et al. [42], Kazantzis et al. [40]).

Sustituyendo las ecuaciones Ec. 2-41 y Ec. 2-42 en la Ec. 2-9', tomando una expresión del tipo Arrhenius para el volumen de activación ( $V = V_o \exp(\beta_o T)$ ) y asumiendo que  $|(kT/G_o) \ln(\dot{\epsilon}_p/\dot{\epsilon}_o)| \ll 1$ , Zerilli y Armstrong [104] propusieron:

$$\sigma_{th} = \frac{G_o}{V_o} \exp \left[ - \left( \beta_o - \frac{k}{G_o} \ln \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_o} \right) T \right] \quad \text{Ec. 2-43}$$

Siendo  $\dot{\epsilon}_o = b \rho_m v_o$ , y  $V_o$  el volumen de activación a una temperatura de 0 Kelvin. Para las redes cristalinas de materiales FCC, el valor de  $V_o$  es proporcional a la inversa de la raíz cuadrada de la densidad de dislocaciones  $V_o \propto 1/\sqrt{\rho}$ , y aproximadamente proporcional a la deformación plástica  $\epsilon$  (Johnston y Gilman [35]).

La ecuación Ec. 2-43 puede ser reescrita como:

$$\sigma_{th} = f(T) \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_o} \right)^{\frac{kT}{G_o}} \quad \text{Ec. 2-43'}$$

Donde  $f(T) = (G_o/V_o) \cdot \exp(-\beta_o T)$ . El modelo **Z-A** predice una relación entre la tensión térmica  $\sigma_{th}$  y la velocidad de deformación plástica  $\dot{\epsilon}_p$  del tipo potencial, con un exponente  $kT/G_o$  que depende de la temperatura. Como se había supuesto previamente que  $|(kT/G_o) \ln(\dot{\epsilon}_p/\dot{\epsilon}_o)| \ll 1$ , también se puede reescribir la Ec. 2-43 como:

$$\sigma_{th} = f(T) \left[ 1 + \left( \frac{kT}{G_o} \right) \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_o} \right) \right] \quad \text{Ec. 2-44}$$

La Ec. 2-44 proporciona una relación lineal entre la tensión térmica  $\sigma_{th}$  y el logaritmo neperiano de la velocidad de deformación plástica  $\ln \dot{\epsilon}_p$ .

Kocks et al. (1975) propusieron una relación fenomenológica para  $G(\sigma_{th})$ :

$$G(\sigma_{th}) = G_o \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{th}}{\hat{\sigma}} \right)^p \right]^q \quad \text{Ec. 2-45}$$

Donde el exponente  $q$  tiene un valor en el intervalo  $1 \leq q \leq 2$  y  $p$  es menor que 1.

Basándose en la Ec. 2-45, Follansbee y Kocks [24], desarrollaron el modelo **MTS**. Esta ecuación ha sido posteriormente empleada por diversos autores en modelos de comportamiento de materiales (Nemat-Nasser et al. [74], Kapoor y Nemat-Nasser [36], Meyers et al. [65], Banerjee y Bhawalkar [8]), con diferentes valores de  $p$  y  $q$  para describir la energía térmica de activación  $G(\sigma_{th})$ .

Sustituyendo la Ec. 2-41 y la Ec. 2-45 en la Ec. 2-9', obtenemos la expresión para la tensión térmica:

$$\sigma_{th} = \hat{\sigma} \left\{ 1 - \left[ - \left( \frac{kT}{G_o} \right) \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_o} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \quad \text{Ec. 2-46}$$

Si se tomara  $p = 1$  y  $q = 1$ , la Ec. 2-46 proporciona una relación lineal entre  $\sigma_{th}$  y  $\ln \dot{\epsilon}_p$ , relación que ha sido empleada varias veces por otros autores. Cuando  $|(kT/G_o) \ln(\dot{\epsilon}_p/\dot{\epsilon}_o)| \ll 1$ , y  $q = 1$ , la Ec. 2-46 predice una relación del tipo potencial  $\sigma_{th} = f(T)(\dot{\epsilon}_p/\dot{\epsilon}_o)^{kT/(pG_o)}$ , que es similar a la relación propuesta por el modelo **Z-A**.

Las dependencias respecto a la temperatura de  $\hat{\sigma}$  y  $G_o$  se han modificado para dar como resultado las relaciones  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_o(\mu/\mu_o)$  y  $G_o = \mu b^3 g_o$ , debido a la consideración hecha por Kocks [49] del módulo a cortante dependiente de la temperatura. Como consecuencia, se asume  $\mu(T) = \mu_o \exp(-\beta_o T)$ , y, despreciando el efecto de la temperatura sobre  $G_o$ , la expresión potencial del modelo **MTS** con  $p = 1$  es igual al modelo **Z-A**.

Es importante advertir que aunque las expresiones de forma potencial de ambos modelos son similares, éstas derivan de diferentes consideraciones en cuanto a las dependencias respecto a la temperatura. En el modelo **Z-A**, el modificador que incluye la temperatura,  $f(T)$ , viene del volumen de activación medio, mientras que en el modelo **MTS**, la modificación debida a la temperatura en  $\hat{\sigma}$  es debida a la introducción del módulo a cortante dependiente de la temperatura.

A partir de la energía de activación, definida en las ecuaciones Ec. 2-42 y Ec. 2-45, se puede observar que  $G(\sigma_{th}) = G_o$  cuando se cumple que  $\sigma_{th} = 0$ . Esta igualdad corresponde físicamente al límite inferior del rango de velocidades de deformación para el que la deformación está dominada por la activación térmica (a partir de esa velocidad de deformación, comenzará a existir tensión térmica no nula):

$$\dot{\epsilon}_{min} = \dot{\epsilon}_o \exp\left(-\frac{G_o}{kT}\right) \quad \text{Ec. 2-47}$$

Las relaciones obtenidas para los modelos **Z-A** y **MTS** se han realizado asumiendo que  $\dot{\epsilon}_p \gg \dot{\epsilon}_{min}$ , es decir, ambos modelos no son demasiado precisos en casos en los que la velocidad de deformación plástica  $\dot{\epsilon}_p$  se aproxime a este mínimo  $\dot{\epsilon}_{min}$ . Adicionalmente, la variación del volumen térmicamente activado (o volumen térmico de activación)  $V^*$  con la tensión térmica  $\sigma_{th}$  y la temperatura  $T$  varía también respecto a lo obtenido experimentalmente. El modelo propuesto por Cai et al., pretende corregir estos defectos, proponiendo finalmente una relación entre la tensión y la deformación, la velocidad de deformación y la temperatura.

### 2.4.2. MODELO CONSTITUTIVO

Basándose en la recopilación de datos experimentales, Armstrong [2], [3], propuso una expresión para definir la dependencia del volumen de activación  $V^*$  con la tensión térmica  $\sigma_{th}$ :

$$V^*(\sigma_{th}) = A\sigma_{th}^{-m} \quad \text{Ec. 2-48}$$

Empleando el método de mínimos cuadrados en los datos recopilados por Armstrong, se determina un valor de  $m = 1.0213$ . Esto indica que el volumen de activación es casi proporcional a la inversa de la tensión térmica  $V^* \propto \sigma_{th}^{-1}$ . Como el volumen de activación está definido por la expresión  $V^* \equiv -\partial G(\sigma_{th})/\partial \sigma_{th}$ , la función  $G(\sigma_{th})$  ha de tener forma logarítmica. Se propone la Ec. 2-49 para la energía de activación:

$$G(\sigma_{th}) = G_o \left\{ 1 - \frac{\ln \left[ 1 + q \left( \frac{\sigma_{th}}{\hat{\sigma}} \right)^p \right]}{\ln[1 + q]} \right\} \quad \text{Ec. 2-49}$$

Que es una modificación de la expresión de Kocks (Ec. 2-45).

El valor de  $G(\sigma_{th})$  depende de los parámetros  $p$  y  $q$ , siendo  $q > 0$  y  $0 < p \leq 1$ . Variando los parámetros  $p$  y  $q$ , la relación entre  $G(\sigma_{th})$  y  $\sigma_{th}$  en la Ec. 2-49 puede ser comparable a la existente en la Ec. 2-45: Cuando  $q(\sigma_{th}/\hat{\sigma})^p \gg 1$ , la Ec. 2-49 presenta una relación lineal entre  $G(\sigma_{th})$  y  $\ln \sigma_{th}$ .

Sustituyendo la Ec. 2-41 y la Ec. 2-49 en la Ec. 2-9', la tensión térmica  $\sigma_{th}$  puede ser calculada:

$$\sigma_{th} = \hat{\sigma} \left[ (q^{-1} + 1) \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_o} \right)^{\frac{kT}{G_o} \ln(1+q)} - q^{-1} \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{Ec. 2-50}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_{th} = q^{-1/p} \hat{\sigma} \left[ (1 + q)^{1 - \frac{kT}{G_o} \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}_o}{\dot{\epsilon}_p} \right)} - 1 \right]^{\frac{1}{p}}$$

De la Ec. 2-50 se deduce que cuando  $\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_{min}$  se obtiene  $\sigma_{th} = 0$ , lo que indica que el modelo es consistente con la teoría de la activación térmica.

Para un valor de  $p = 1$ , la Ec. 2-50 describe una relación potencial entre  $\sigma_{th}$  y  $\dot{\epsilon}_p$ , con un exponente igual a  $kT/G_o \cdot \ln(1 + q)$ , lo que coincide con el modelo **MTS** en la Ec. 2-46 si escogemos  $q = 1$  y asumiendo  $\dot{\epsilon}_p \gg \dot{\epsilon}_{min}$ . La introducción del término  $q^{-1}$  aporta la posibilidad de aplicar el modelo en  $\dot{\epsilon}_p \sim \dot{\epsilon}_{min}$ . Tomando  $p = 1$  y  $q \ll 1$ , considerando que  $\ln(1 + q) \approx q$ , la Ec. 2-50 puede simplificarse hasta convertirse en una relación lineal entre  $\sigma_{th}$  y  $\ln \dot{\epsilon}$ :

$$\sigma_{th} = \hat{\sigma} \left[ 1 + \left( \frac{kT}{G_o} \right) \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_o} \right) \right] \quad \text{Ec. 2-51}$$

Las relaciones potencial y lineal obtenidas son dos formas concretas de presentar el modelo, escogiendo diferentes valores para los parámetros del mismo. Es importante destacar que en este modelo nuevo no es necesario realizar la asunción  $\dot{\epsilon}_p \gg \dot{\epsilon}_{min}$ , por lo que la Ec. 2-50 podrá ser empleada en casos más generales.

Para una velocidad de deformación dada, cuando la temperatura alcanza un valor crítico  $T_c = (G_o/k) \ln(\dot{\epsilon}_o/\dot{\epsilon}_p)$ , el valor de la tensión térmica  $\sigma_{th}$  es 0, y cuando la temperatura supera al valor crítico,  $T > T_c$ , la tensión térmica valdrá también 0. De esta manera, la Ec. 2-50 puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\sigma_{th} = \hat{\sigma} \left\langle (q^{-1} + 1) \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_o} \right)^{(kT/G_o) \ln(1+q)} - q^{-1} \right\rangle^{1/p} \quad \text{Ec. 2-52}$$

Siendo  $\langle \cdot \rangle$  el operador de McCauley, tal que  $\langle x \rangle = x$  si  $x \geq 0$  y  $\langle x \rangle = 0$  si  $x < 0$ .

En cuanto al volumen térmicamente activado,  $V^* \equiv -\partial G(\sigma_{th})/\partial \sigma_{th}$ , se puede calcular éste a partir de la Ec. 2-49:

$$V^*(\sigma_{th}) = pq \left( \frac{G_o}{\hat{\sigma}} \right) \frac{\left( \frac{\sigma_{th}}{\hat{\sigma}} \right)^{p-1}}{\left[ 1 + q \left( \frac{\sigma_{th}}{\hat{\sigma}} \right)^p \right] \ln(1+q)} \quad \text{Ec. 2-53}$$

Mientras que la Ec. 2-45 y la Ec. 2-46 (Kocks) indica:

$$V^*(\sigma_{th}) = pq \left( \frac{G_o}{\hat{\sigma}} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{th}}{\hat{\sigma}} \right)^p \right]^{q-1} \left( \frac{\sigma_{th}}{\hat{\sigma}} \right)^{p-1} \quad \text{Ec. 2-54}$$

Para valores  $\sigma_{th}/\hat{\sigma} \ll 1$ , ambas ecuaciones indican que  $V^*(\sigma_{th}) \propto (\sigma_{th}/\hat{\sigma})^{p-1}$ . Para  $\sigma_{th} = \hat{\sigma}$ , el modelo de Kocks (Ec. 2-54) indica que  $V^*(\sigma_{th}) = 0$ , es decir, que las dislocaciones se pueden mover a través del material sin ningún tipo de obstáculo de naturaleza térmica. En contraposición, el modelo de Cai et al. prevé un pequeño volumen de activación, indicando que existirán obstáculos de origen térmico incluso cuando  $\sigma_{th} = \hat{\sigma}$ .

Como ya se ha mencionado, los resultados experimentales  $V^*(\sigma_{th}) \propto \sigma_{th}^{-1}$  corresponden a  $q = 1$  y  $p \rightarrow 0$  en el modelo de Kocks (Ec. 2-54), y  $q \gg 1$  en el modelo de Cai (Ec. 2-53). Con el fin de hallar la dependencia del flujo de tensiones en función de la velocidad de deformación y la temperatura, se toman valores de  $p = 1/2$  o  $2/3$  (como se mencionó en el modelo de Voyiadjis y Abed, y más arriba en el modelo **MTS** (Nemat-Nasser y Kapoor [72])). Por lo tanto, el volumen de activación calculado por el modelo **MTS** en la Ec. 2-54 llevarán a resultados distintos a la relación  $V^*(\sigma_{th}) \propto \sigma_{th}^{-1}$ . En el modelo actual de Cai, la restricción en los valores de  $p$  y  $q$  es más débil, por lo que la variación del volumen de activación con la tensión térmica puede ser mejor descrita.

Kocks et al. [50], Kolluru y Baligheid [52], Kazantzis et al. [39] y algunos otros autores han empleado la expresión  $V^* = mkT/\sigma_{th}$  para describir los efectos de la tensión térmica y la temperatura en el volumen de activación. Si se emplea  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_o(\mu/\mu_o)$  y  $G_o = \mu b^3 g_o$ , como sugirió Kocks [49], el volumen de activación estimado tanto por la Ec. 2-53 como por la Ec.

2-54, siempre incrementa su valor al hacerlo  $\mu$ , para cualquier valor de  $p$  y  $q$ . Como el valor de  $\mu$  decrece a medida que aumenta la temperatura, el valor de  $V^*$  decrecerá al aumentar la temperatura. Esta afirmación va en contradicción con la expresión  $V^* = mkT/\sigma_{th}$ , en la que al aumentar la temperatura, aumenta el volumen de activación. Por lo tanto, emplear  $G_o = \mu_o b^3 g_o$  en lugar de  $G_o = \mu b^3 g_o$  es más conveniente, unido a  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_o(\mu/\mu_o)$  para que las ecuaciones Ec. 2-53 y Ec. 2-54 representen correctamente la evolución del volumen de activación  $V^*$  con la temperatura.

En cuanto el endurecimiento por deformación, éste no sólo depende de la velocidad de deformación y la temperatura cómo se mostró en la Ec. 2-52, sino que también depende de la deformación plástica  $\varepsilon_p$ . La deformación plástica se incluye en el endurecimiento por deformación mediante los tres siguientes mecanismos.

**1.** En primer lugar, la deformación plástica afecta a la tensión aterna  $\sigma_a$ . Ludwik [62] y Hollomon [31], sugirieron una ecuación del tipo potencial  $\sigma_a = \sigma_{ao} + c\varepsilon_p^n$ . Para relacionar el efecto, donde  $\sigma_{ao}$ ,  $c$  y  $n$ , son parámetros del material. A pesar de todas las aplicaciones que tiene esta relación, también tiene ciertas carencias como mostraron Ludwigso [61] y Bowen y Partridge [12].

Para proporcionar una descripción más apropiada para  $\sigma_a$ , Taylor [96] atribuyó los efectos de la deformación plástica sobre  $\sigma_a$  a las interacciones entre la densidad de dislocaciones y las densidades de bosque, proponiendo la Ec. 2-55:

$$\sigma_a = \sigma_{ao} + \alpha\mu\sqrt{\rho} \quad \text{Ec. 2-55}$$

Donde  $\sigma_{ao}$  y  $\mu$  son parámetros del modelo. La dependencia de  $\sigma_{ao}$  en el tamaño medio de grano  $d$ , puede ser expresada mediante la igualdad:  $\sigma_{ao} = \sigma_o + k_{HP}d^{-1/2}$ , siendo  $\sigma_o$  y  $k_{HP}$  parámetros del material (Zerilli y Armstrong [104]).

La evolución de la tensión aterna con la deformación plástica,  $\sigma_a(\varepsilon_p)$ , puede expresarse en función de la Ec. 2-55 una vez se tenga la relación entre  $\varepsilon_p$  y  $\rho$ . Kocks y Mecking [51] y Zerilli [103] propusieron una ecuación muy similar a la Ec. 2-10:

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon_p} = \frac{1}{b\Lambda} - \kappa\rho \quad \text{Ec. 2-56}$$

Se suele tomar  $b$  y  $\Lambda$  como constantes. Integrando esta ecuación con respecto a  $\varepsilon_p$ , se obtiene:

$$\rho = \rho_s - (\rho_s - \rho_o) \exp(-\kappa\varepsilon_p) \quad \text{Ec. 2-57}$$

Donde  $\rho_o$  y  $\rho_s = 1/b\kappa\Lambda$  son la densidad de dislocaciones inicial y la densidad de dislocaciones en la saturación, respectivamente. La dependencia de  $\kappa$  y  $\Lambda$  con la temperatura y la velocidad de deformación no se tiene en cuenta en este modelo, pero sí se hará en el modelo que se desarrolla en este proyecto de fin de carrera, así como en otros modelos más complejos (Mecking et al [64], Cuitino et al. [21], Stainier et al. [89], Zerilli [103]).

2. En segundo lugar, la deformación plástica afecta al volumen de activación medio a  $0K$  ( $V_o$  en el modelo **Z-A** o el umbral de tensión  $\hat{\sigma}$  en el **MTS**). Como  $G_o \sim V_o \hat{\sigma}$ , un valor constante de  $G_o$  supone que  $\hat{\sigma} \propto V_o^{-1}$ . Haciendo uso de  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_o(\mu/\mu_o)$ , se deduce que  $\hat{\sigma} \propto \mu V_o^{-1}$ , mostrando la conexión existente entre los parámetros de activación térmica en los modelos **Z-A** y **MTS** (Recordemos que el primero hacía uso del volumen de activación y el segundo empleaba el módulo a cortante para introducir el efecto de la temperatura).

3. Por último, la deformación plástica afecta a la densidad de dislocaciones móviles  $\rho_m$ , y puede llevar a un cambio significativo de  $\dot{\epsilon}_o$  en las ecuaciones Ec. 2-43 y Ec. 2-46, como describieron Voyiadjis y Abed [98] y Voyiadjis y Almasri [99]. Este mecanismo físico se convierte en una fuerte ligadura entre los efectos de la deformación y la velocidad de deformación en el flujo de tensiones, haciendo el modelo constitutivo más complicado. Por esta razón, la mayoría de autores prefiere emplear el valor de  $\dot{\epsilon}_o$  constante (Nemat-Nasser e Isaacs [71], Nemat-Nasser y Li [73], Cheng et al. [17]).

Para este modelo se asume que la densidad de dislocaciones inicial  $\rho_o$  es 0 y siguiendo el criterio del modelo **Z-A**, se puede deducir de las ecuaciones Ec. 2-52, Ec. 2-55 y Ec. 2-56 la ecuación que define la tensión en este modelo, Ec. 2-58.

$$\sigma = c_1 + \mu \sqrt{1 - e^{-c_2 \epsilon_p}} (c_3 + c_4 \left( (1 + q) \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_o} \right)^{c_5 T} - 1 \right)^{1/p}) \quad \text{Ec. 2-58}$$

En la que  $c_i$  son parámetros del modelo. El valor de  $\dot{\epsilon}_o$  es independiente de la deformación plástica  $\epsilon_p$ , y la sensibilidad a la velocidad de deformación  $\phi = \partial \sigma / \partial \ln \dot{\epsilon}_p$  crece al crecer la deformación plástica (es decir, a mayor deformación, mayor sensibilidad a la velocidad de deformación).

En este modelo es posible considerar el incremento de temperatura a elevadas velocidades, dado por la Ec. 2-38. Por cuestiones prácticas, también se considerará en este modelo que el proceso comienza a ser adiabático a velocidades iguales o superiores a  $10s^{-1}$ .

A velocidades de deformación excesivamente elevadas, otros mecanismos entran en juego (arrastre viscoso, daño por deformación dinámica...), pero en ninguno de los modelos que se presentan en este proyecto se tendrán en cuenta.

### 2.4.3. RESULTADOS: APLICACIÓN Y COMPARACIÓN

De nuevo se emplearán datos experimentales de cobre OFHC. Los valores de parámetros físicos empleados aparecen en la Tabla 2-3:

<b>Parámetros físicos</b>	<b>Cobre OFHC</b>
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	8940
$\xi$ [-]	0.95

Tabla 2-3 - Modelo de Cai et al. - Parámetros físicos del modelo

Para calcular el calor específico del cobre, los autores proponen una expresión función de la temperatura del material (Lide [59]), por lo que ciertas velocidades de deformación afectarán también a este valor de forma indirecta:

$$c_p(T) = 425 \cdot [1 - 0.4 \cdot \exp(-0.047 \cdot T)] \frac{J}{kgK} \quad \text{Ec. 2-59}$$

Siempre que la temperatura venga dada en Kelvin.

Para la Ec. 2-58, los valores de los parámetros propuestos por los autores son:

<b>Parámetros del modelo</b>	<b>Cobre OFHC</b>
$\mu_o$ [Pa]	$4.8956 \times 10^{10}$
$\beta_o$ [K <sup>-1</sup> ]	$0.40061 \times 10^{-3}$
$c_1$ [Pa]	$2 \times 10^7$
$c_2$ [-]	1.5
$c_3$ [-]	$3 \times 10^{-4}$
$c_4$ [-]	$1.4 \times 10^{-5}$
$c_5$ [K <sup>-1</sup> ]	$2.6 \times 10^{-5}$
$\dot{\epsilon}_o$ [s <sup>-1</sup> ]	$4.6 \times 10^9$
$q$ [-]	35
$p$ [-]	1/2

Tabla 2-4 - Parámetros del modelo de Cai et al. para la Ec. 2-58

A continuación se procede a comprobar los resultados del modelo con los datos experimentales (Nemat-Nasser y Li [73]):

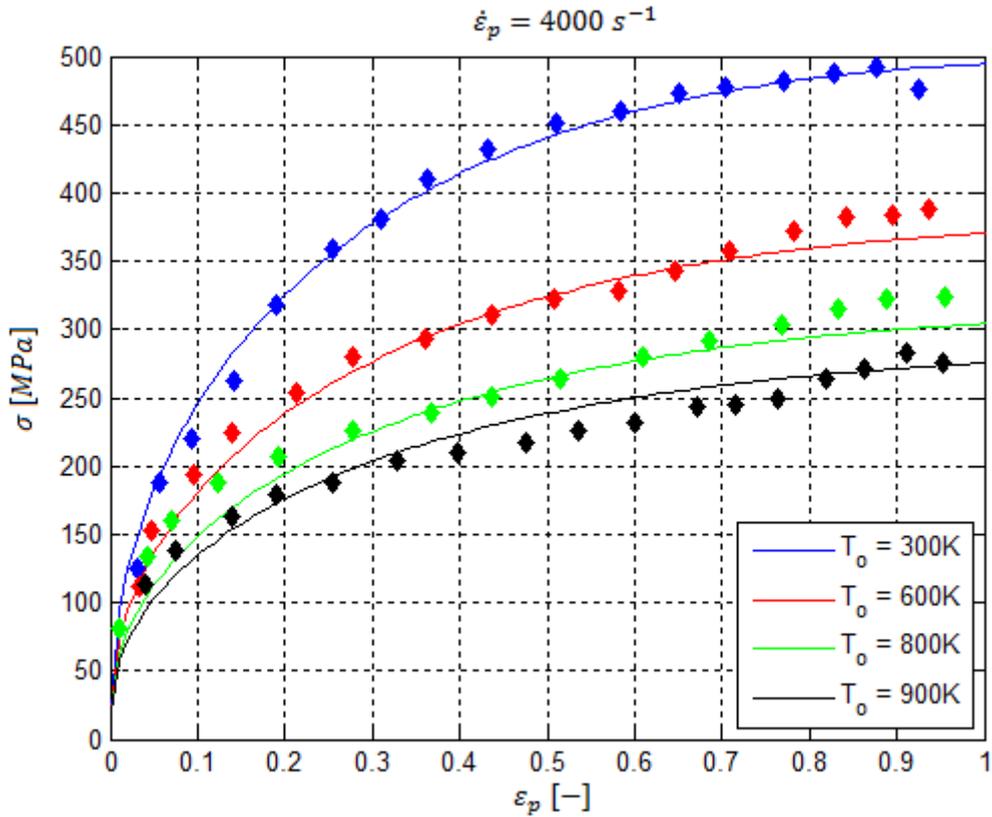


Figura 2.11 - Comparación del modelo de Cai, Niu, Ma y Shi con datos experimentales a una velocidad de deformación de  $4000\text{s}^{-1}$  y varias temperaturas. Los valores que propone el modelo están representados con una línea continua. Los datos experimentales se muestran con diamantes, del mismo color que la línea que trata de representar sus valores.

Este modelo, para esta velocidad de deformación y estas temperaturas, parece ajustarse algo mejor a los resultados propuestos por el modelo de Voyiadjis y Abed. Pero es necesario analizar más datos antes de proclamar que este modelo es más fiable (en cuanto a la representación de datos experimentales se refiere).

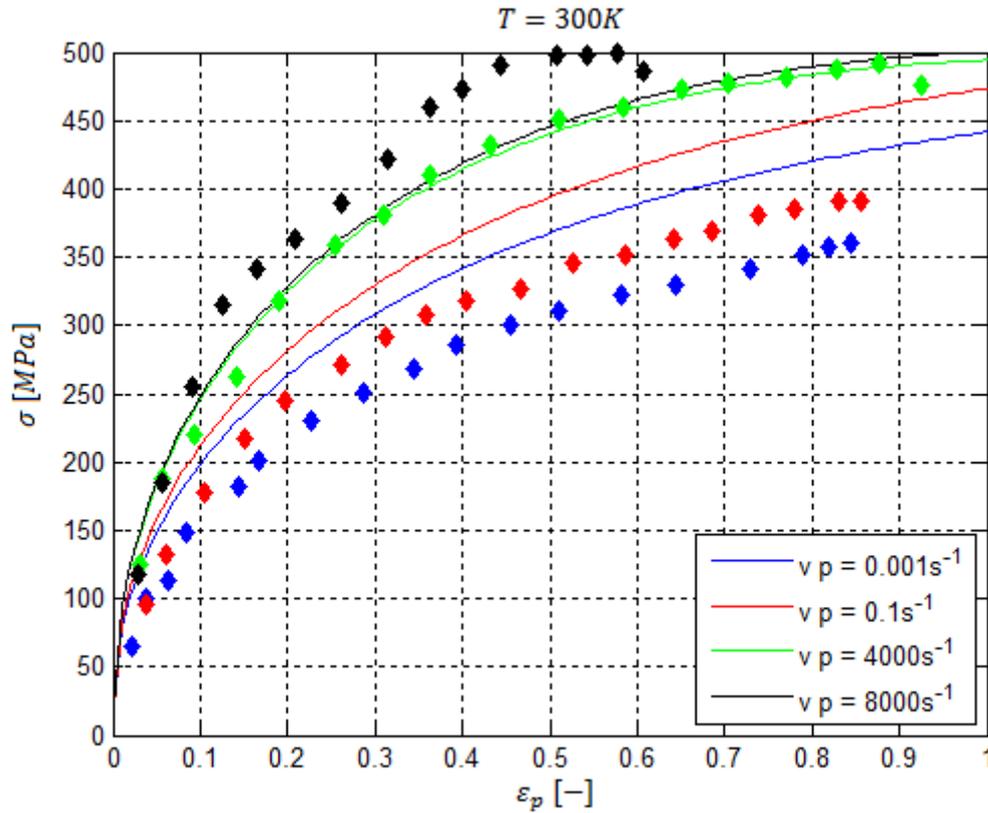


Figura 2.12 - Comparación del modelo de Cai, Niu, Ma y Shi con datos experimentales a temperatura inicial  $T_0$  de 300K y varias velocidades de deformación.

Se puede observar que a velocidades de deformación bajas el modelo predice tensiones mucho mayores que los resultados experimentales, mientras que a  $4000s^{-1}$ , los resultados son muy fiables. No sucede lo mismo a velocidades de  $8000s^{-1}$ , para la cual se subestima la tensión que sufre el material. Esto puede ser debido a que se está llevando el modelo a límites para los que no está preparado, pero los autores no mencionan nada al respecto.

Será interesante comprobar, tal y como se hizo para el modelo de Voyiadjis y Abed, la variación del flujo de tensiones en función de la deformación y la velocidad de deformación, para proceso isoterma (Figura 2.13), adiabático (Figura 2.14) y mixto (Figura 2.15), dependiendo el tipo de proceso exclusivamente en la velocidad, o definición que se haga para considerar el proceso. Como esta condición se puede variar libremente, se presentan los tres resultados.

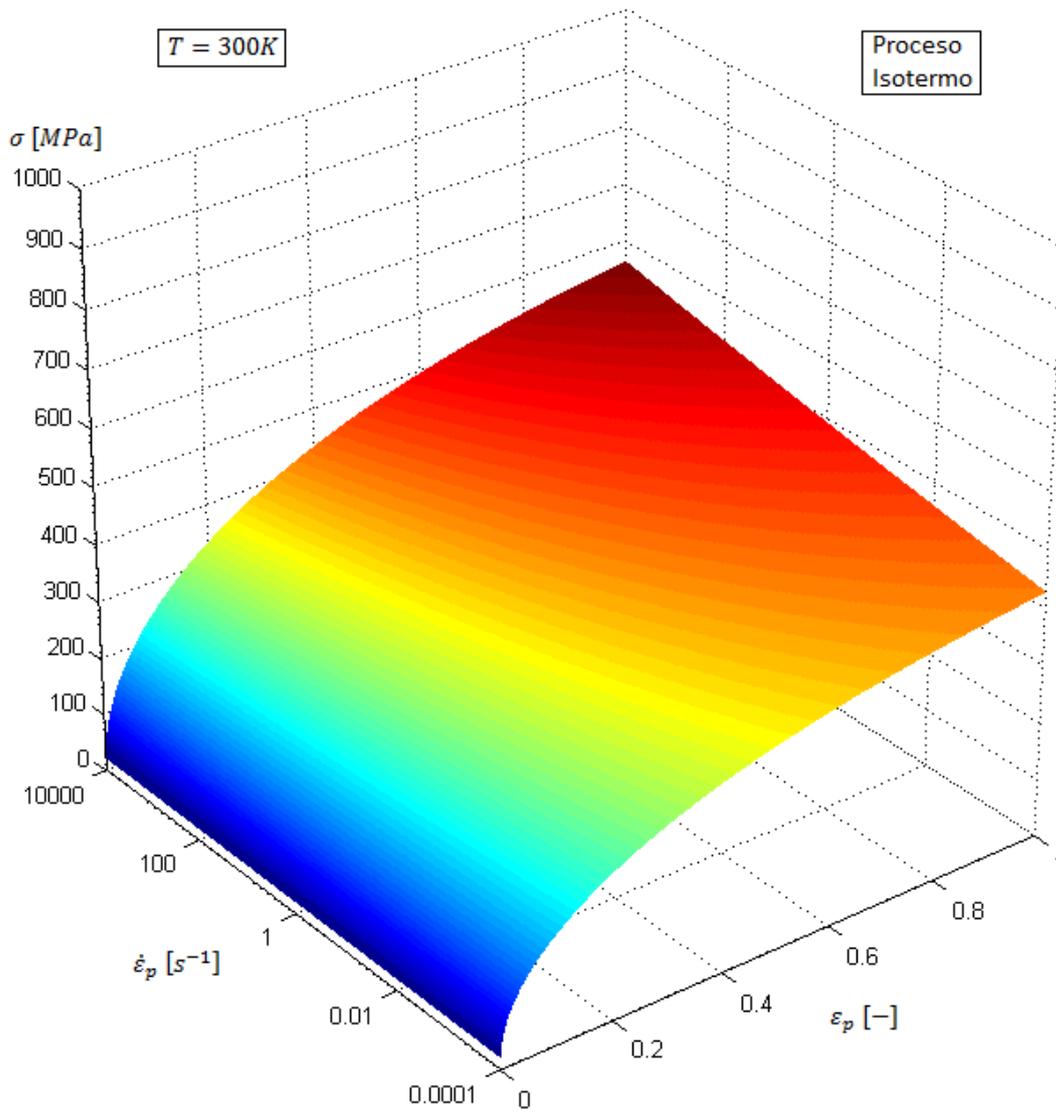


Figura 2.13 - Modelo Cai, Niu, Ma y Shi. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso isotermo. Material: Cobre OFHC.

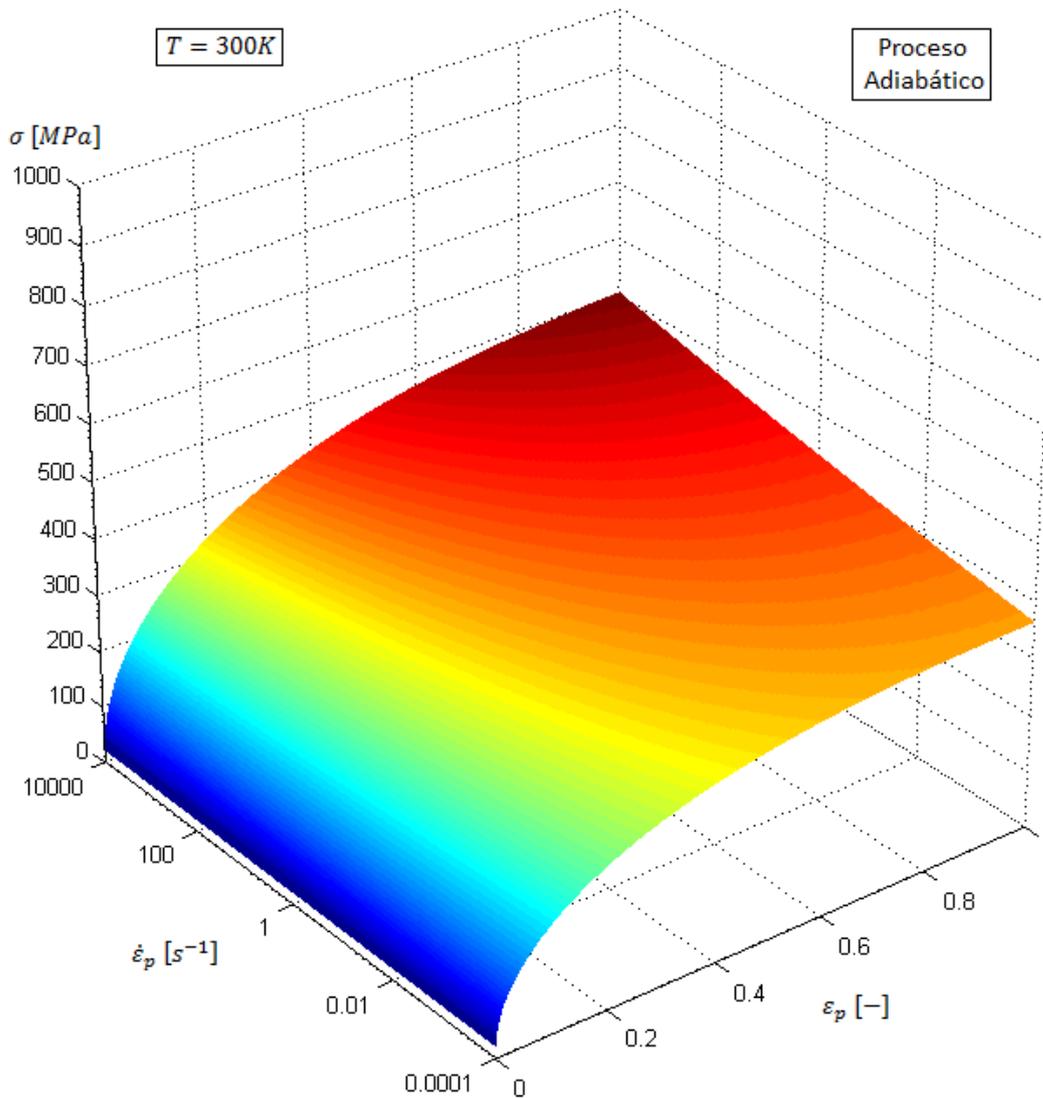


Figura 2.14 - Modelo Cai, Niu, Ma y Shi. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso adiabático. Material: Cobre OFHC.

En este modelo también se observan diferencias entre ambos resultados, sobre todo a elevadas velocidades de deformación y elevadas deformaciones. En ambas figuras se observa la sensibilidad a la velocidad de deformación para deformaciones altas, aunque en ninguno de los dos casos es tan importante como en el modelo de Voyiadjis y Abed.

Se comprobará por último la dependencia haciendo que el proceso cambie de isoterma a adiabático a partir de velocidades de deformación mayores que  $10s^{-1}$ .

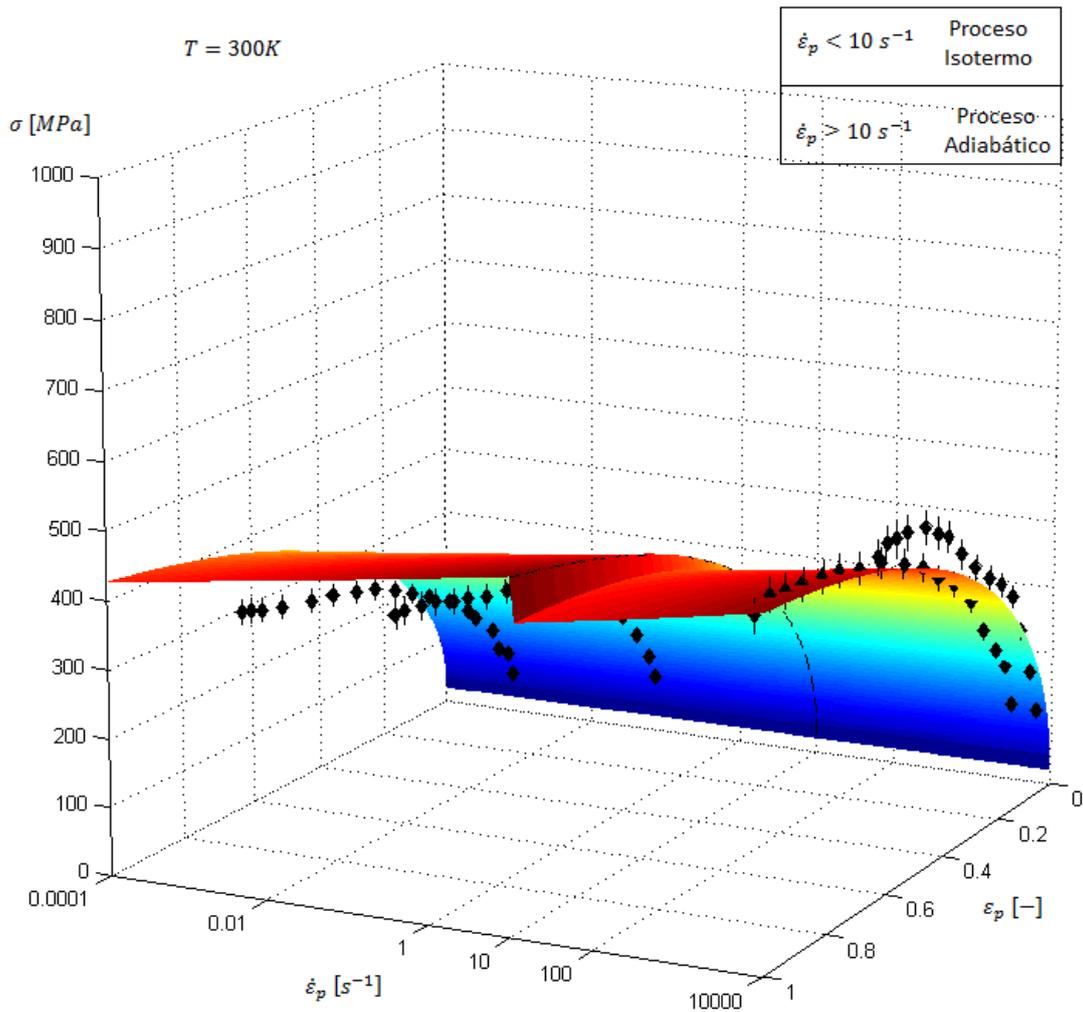


Figura 2.15 - Modelo Cai, Niu, Ma y Shi. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso mixto. Se muestran además los resultados experimentales marcados con diamantes negros, con un error del  $\pm 5\%$  en la tensión. Material: Cobre OFHC.

En la Figura 2.15 se observa el mismo efecto que en la Figura 2.12. Los únicos datos que coinciden correctamente a 300K son los de  $\dot{\epsilon}_p = 4000 \text{ s}^{-1}$ . Se observa también que en el proceso adiabático la sensibilidad a la velocidad de deformación es mayor, tal y como predice la Ec. 2-58.

También será útil obtener la representación tridimensional de la Figura 2.11, en la que los datos experimentales sí coinciden con lo que el modelo predice.

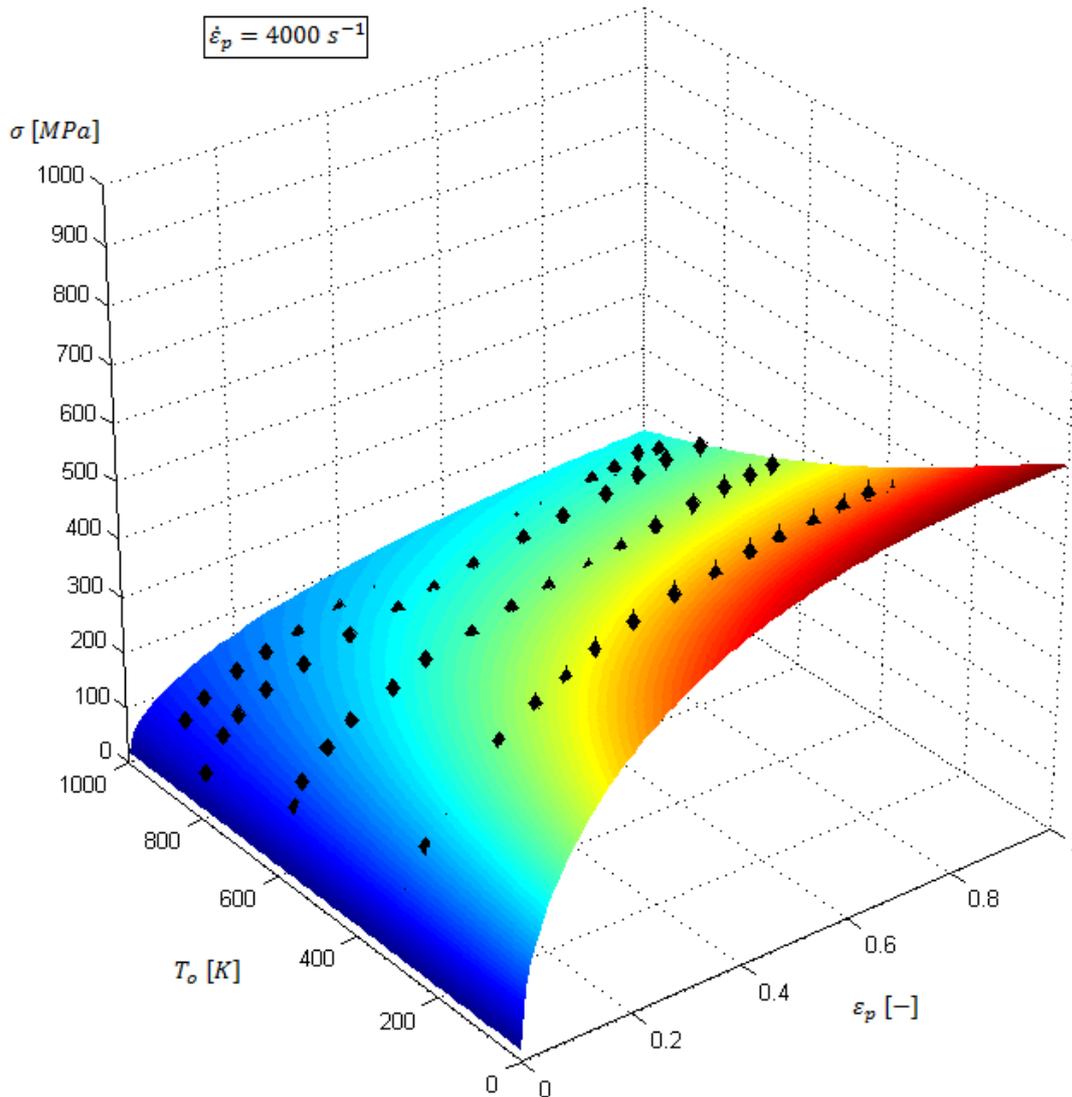


Figura 2.16 - Modelo Cai, Niu, Ma y Shi. Tensión-Deformación-Temperatura inicial a velocidad de deformación  $4000\text{s}^{-1}$  (Proceso adiabático). Material: Cobre OFHC.

El comportamiento de este modelo es muy similar al de Voyiadjis y Abed, y tiene muy buena sintonía con los datos experimentales.

Para el caso de proceso isoterma ( $\dot{\epsilon}_p = 0.1\text{s}^{-1}$ ), se predice un comportamiento similar al que tenía el modelo de Voyiadjis y Abed, con tensiones muy bajas a altas temperaturas y tensiones muy altas a bajas temperaturas.

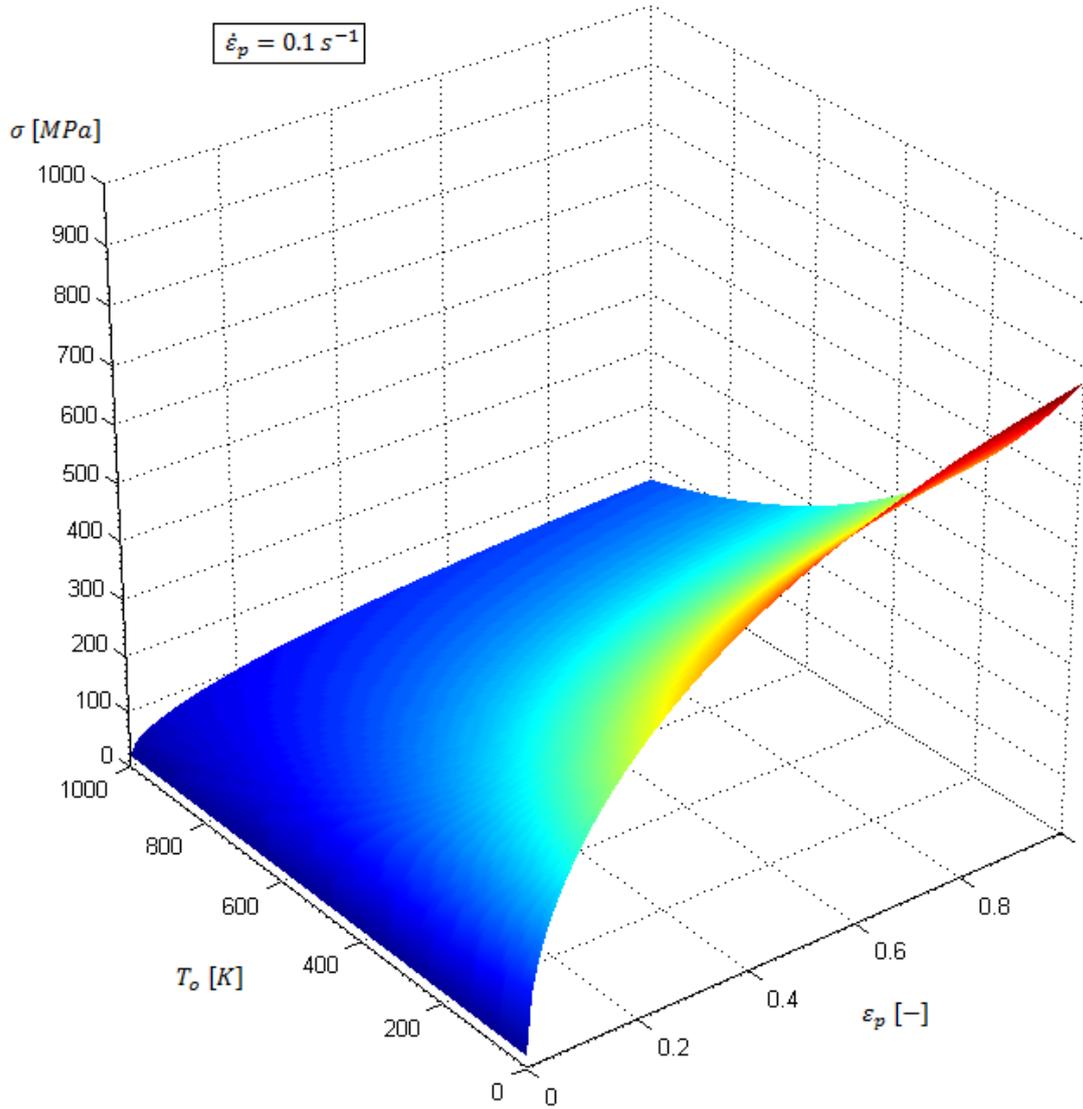


Figura 2.17 - Modelo Cai, Niu, Ma y Shi. Tensión-Deformación-Temperatura inicial a velocidad de deformación  $0.1\text{s}^{-1}$  (Proceso isoterma). Material: Cobre OFHC.

El comportamiento a una velocidad de deformación baja difiere ligeramente respecto al modelo de Voyiadjis y Abed, sobre todo para temperaturas bajas, en las que la tensión no llega a ser tan alta, pero ambos modelos presentan relaciones similares, aunque como se ha visto antes, a bajas velocidades de deformación el modelo de Cai et al. no presenta resultados tan fiables.

#### 2.4.4. CONCLUSIÓN DEL MODELO DE CAI, NIU, MA Y SHI

En este modelo, se ha propuesto una ecuación para expresar la energía de activación de los obstáculos térmicos y a partir de ahí desarrollar una relación constitutiva que describa un comportamiento dependiente de la velocidad de deformación y la temperatura. Este modelo tiene en común con el modelo **MTS** la descripción de la energía de activación y comparte con el modelo **Z-A** el acoplamiento de la temperatura y la velocidad de deformación.

Aunque los resultados de a velocidades de deformación lejos de  $4000s^{-1}$  no son fiables, el modelo puede servir de base, ya que aporta conceptos nuevos basándose y combinando dos modelos previos que parten de conceptos diferentes, algo similar a lo que se hace en este proyecto de fin de carrera. Además, los resultados obtenidos a  $\dot{\epsilon}_p = 4000s^{-1}$  son bastante buenos a todas las temperaturas ensayadas, por lo que aunque tenga validez limitada, puede ser muy útil.

## 2.5. MODELO DE NEMAT-NASSER Y LI

---

### 2.5.1. INTRODUCCIÓN

Las teorías clásicas en las que la tensión es independiente de la temperatura, son idealizaciones sin practicidad alguna, ya que los experimentos han demostrado que esto no es de esa manera. La deformación plástica en sólidos cristalinos es, en general, dependiente de la temperatura y la velocidad de deformación como ya se ha mostrado anteriormente, y esta dependencia es mucho más palpable a elevadas velocidades de deformación, en las que los procesos adiabáticos que tienen lugar producen cambios significativos en la temperatura del material.

En las aproximaciones fenomenológicas en las que la tensión es dependiente de la velocidad de deformación, la velocidad de deformación plástica  $\dot{\epsilon}_p$ , se expresa como función de la tensión  $\sigma$ , la temperatura  $T$  y algunas variables internas que tratan de representar el histórico cargas termomecánicas sobre el material. En muchos modelos, la deformación plástica acumulada  $\epsilon_p$  se emplea como única variable que representa dicho histórico de cargas (como la deformación plástica no es una variable -termodinámica- de estado, es mejor emplear la densidad de dislocaciones, pero no es tan fácilmente medible), pero sin embargo, esta representación está muy limitada, hasta el punto de llegar a basarse en modelos constitutivos como los que aquí se presentan, pero empleando datos experimentales en valores cercanos a los de aplicabilidad del modelo fenomenológico.

En los casos que se presentan en este proyecto, se trata de estudiar los "micromecanismos" subyacentes en la respuesta ante deformación plástica de un material, pero es inevitable tener que realizar simplificaciones de algún tipo. Incluso estos modelos necesitan datos experimentales para ajustar algún parámetro que no es medible característica del material (como sí sería la distancia interatómica, la magnitud del vector de Burgers, la temperatura de fusión...). Para metales que se deforman esencialmente debido al movimiento de las dislocaciones y su acumulación, se han desarrollado muchos modelos basados en la teoría de la activación térmica para velocidades moderadas ( $< 10^4 s^{-1}$ ), y la interpretación del arrastre de dislocaciones/arrastre viscoso para velocidades muy elevadas.

El movimiento de las dislocaciones a través de las redes cristalinas de las aleaciones metálicas es un fenómeno realmente complejo, y no puede ser explicado mediante expresiones matemáticas simples, lo que se trata de evitar con los modelos aquí propuestos.

Para el caso de la modelación de las tensiones en cobre OFHC, se emplea el concepto de movimiento de dislocaciones y las barreras que éstas deben superar para obtener finalmente una relación general que incluyan algunos parámetros constitutivos cuyo valor podrá ser obtenido a partir de datos experimentales. Cuantos menos parámetros queden libres, mejor será la relación entre los datos experimentales y las predicciones teóricas, aunque el orden de magnitud de algunos parámetros puede ser estimado sabiendo lo que representan estos parámetros físicamente.

### 2.5.2. MODELO CONSTITUTIVO

El flujo de tensiones plásticas en el rango de temperaturas y velocidades de deformación en las que no intervienen ni la difusión atómica ni el arrastre, sucede básicamente debido al movimiento de las dislocaciones. El flujo de tensiones  $\sigma$ , por lo tanto, se define básicamente como la resistencia que opone el material a sufrir este proceso. El movimiento de las dislocaciones se ve impedido, como ya se ha mencionado, por obstáculos de corto y largo alcance. Los obstáculos de corto alcance se superan mediante activación térmica, y la resistencia impuesta por los de largo alcance es independiente de la temperatura (aterma). Los obstáculos de corto alcance incluyen las tensiones de Peierls (sólo en metales BCC), defectos puntuales como huecos o intersticios, otras dislocaciones que colisionen con el plano de deslizamiento de las dislocaciones, así como elementos provenientes de aleaciones o sustitución de átomos. Los obstáculos de largo alcance incluirán bordes de grano, bosques de dislocaciones y otros elementos microestructurales con influencia en el campo lejano, como ya se ha mencionado en apartados anteriores.

El flujo de tensiones  $\sigma$ , puede expresarse por lo tanto como  $\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, T) = \sigma_a(\varepsilon_p) + \sigma^*(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, T)$ , donde  $\sigma_a$  y  $\sigma^*$ , son las componentes atermia y térmica de la resistencia al movimiento de las dislocaciones respectivamente. La componente térmica  $\sigma^*$  es decreciente al aumentar la temperatura  $T$ , y creciente al aumentar la velocidad de deformación  $\dot{\varepsilon}_p$ . La componente atermia  $\sigma_a$  crecerá al incrementarse la acumulación de dislocaciones (al crecer la deformación plástica  $\varepsilon_p$ ), ya que el campo elástico de dicha acumulación dificulta mucho el movimiento de las mismas. Aunque la acumulación de dislocaciones no depende directamente de la temperatura, el campo elástico se ve afectado por ella de dos maneras: (1) A través de la variación del módulo elástico con la temperatura y (2) a través del efecto del histórico de temperaturas en la densidad de los bosques de dislocaciones. A temperaturas suficientemente elevadas se produce un recocido del material, lo que homogeniza la superficie haciendo que la densidad de dislocaciones se reduzca y por lo tanto, disminuya la tensión del campo elástico. Será por tanto necesario tener en cuenta este efecto para que el modelo responda correctamente a temperaturas elevadas. La componente atermia es independiente de la velocidad de deformación, a pesar de que ésta afecte a la temperatura y por lo tanto a la densidad de dislocaciones actual.

De nuevo, hacemos uso de la Ec. 2-9 (omitiendo el factor de orientación de Schmidt  $\bar{m}$ ) para definir la velocidad de deformación en función de la densidad de dislocaciones, la velocidad media de las mismas y el vector de Burgers:

$$\dot{\varepsilon}_p = b\rho_m\bar{v} \quad \text{Ec. 2-9'}$$

En la que se puede reemplazar la velocidad media de las dislocaciones  $\bar{v}$  por:

$$\bar{v} = d\omega_o \exp\left(-\frac{\Delta G}{kT}\right) \quad \text{Ec. 2-13'}$$

Siendo  $d$  la distancia media entre dislocaciones móviles,  $\Delta G$  la energía necesaria para superar el obstáculo mediante activación térmica,  $\omega_o$  es la frecuencia de los intentos por superar dicho obstáculo,  $T$  la temperatura y  $k$  la constante de Boltzmann.

Combinando las ecuaciones Ec. 2-9' y Ec. 2-13', se llega a:

$$\dot{\epsilon}_p = bd\rho_m\omega_o \exp\left(-\frac{\Delta G}{kT}\right) = \dot{\epsilon}_r \exp\left(-\frac{\Delta G}{kT}\right) \quad \text{Ec. 2-60}$$

$$\dot{\epsilon}_r = bd\rho_m\omega_o$$

Ahora falta expresar la barrera energética  $\Delta G$  como función de la tensión térmica  $\sigma^* = \sigma - \sigma_a$  y la temperatura  $T$ .

Considerando una relación de tipo potencial entre la tensión térmica y la energía de activación  $\Delta G$ :

$$\Delta G = G_o \left[ 1 - \left( \frac{\sigma^*(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p, T)}{\hat{\sigma}} \right)^p \right]^q$$

$$G_o = \hat{\sigma} b \lambda l \quad \text{Ec. 2-45'}$$

$$\hat{\sigma} = \sigma^*(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p, T = 0)$$

Donde  $\lambda$  y  $l = d$  son la anchura media efectiva de los obstáculos y la distancia entre dislocaciones respectivamente, y además se cumple que  $0 < p \leq 1$  y  $1 \leq q \leq 2$ . Como mostraron Kocks et al. [50], todas las formas de los obstáculos pueden ser modeladas mediante la correcta elección de los valores de  $p$  y  $q$ . Empleando los valores de Nemat-Nasser e Isaacs [71], se tomarán  $p = 2/3$  y  $q = 2$ .

Efecto de la acumulación de dislocaciones:

En la Ec. 2-45',  $\hat{\sigma}$  es la tensión a partir de la cual las dislocaciones no necesitan el aporte extra que supone la tensión térmica (activación) para superar los obstáculos. A la vista de la expresión  $G_o = \hat{\sigma} b \lambda l$ , se deduce que  $\hat{\sigma}$  es inversamente proporcional a la distancia media que separa las dislocaciones  $l$ , por lo que dependerá de la densidad de dislocaciones también. Esta última relación es una de las principales diferencias entre materiales FCC y BCC.

De las ecuaciones Ec. 2-60 y Ec. 2-45' se puede deducir:

$$\sigma^*(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p, T) = \hat{\sigma} \left[ 1 - \left( -\frac{kT}{G_o} \ln \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_r} \right)^{1/q} \right]^{1/p} \quad \text{Ec. 2-61}$$

cuando  $T \leq T_c$  y valdrá 0 si  $T > T_c$

Se verá más adelante que  $\dot{\epsilon}_r$  depende de la deformación plástica cuando las dislocaciones actúan como obstáculos unas de otras; y el valor de  $T_c$  será mostrado, que es la temperatura crítica, a partir de la cual las dislocaciones pueden superar los obstáculos por su propia

temperatura (energía de activación térmica). Cuando las dislocaciones actúan como obstáculos, la temperatura crítica dependerá de la deformación plástica (más que de la deformación, depende de la densidad de dislocaciones) y de la velocidad de deformación.

La expresión  $G_o = \hat{\sigma} b \lambda l$  indica que:

$$\hat{\sigma} = \frac{G_o}{V^*} = \frac{G_o}{b \lambda l} \quad \text{Ec. 2-62}$$

En la Ec. 2-62,  $b$  es una constante y  $\lambda$  depende del perfil del obstáculo. La distancia  $l$ , depende directamente de la densidad de dislocaciones, y por tanto en el histórico de deformaciones, siempre y cuando las dislocaciones que intersequen con los planos de deslizamiento de las dislocaciones móviles supongan realmente un obstáculo para el movimiento de éstas últimas. Para las barreras de Peierls,  $\lambda$  y  $l$  son dimensiones de la red cristalina. Los cristales FCC necesitan muy poca energía para superar las barreras de Peierls (menos de  $0.2 eV$ ), por lo que este mecanismo sólo afectará al comportamiento del material cuando la temperatura sea extremadamente baja, ya que dicha cantidad de energía no supone una cantidad importante cuando se alcanza cierta temperatura en el material. En materiales FCC lo que supone un gran obstáculo son aquellas dislocaciones que cortan con los planos de deslizamiento por los cuales se desplazan las dislocaciones móviles.

La separación media entre estas dislocaciones  $l$ , así como la distancia media  $d$  que una dislocación móvil recorre hasta encontrar otro obstáculo, son prácticamente iguales, ya que simbolizan un concepto muy similar cuando los obstáculos principales que encuentra una dislocación móvil son otras dislocaciones. Estas distancias estarán, por lo tanto, relacionadas con la densidad de dislocaciones del material, Ec. 2-63.

$$l = d \simeq \rho^{-1/2} \quad \text{Ec. 2-63}$$

En general, la densidad de dislocaciones actual no está directamente relacionada con la deformación plástica acumulada  $\epsilon_p$ , que es resultado del movimiento de las dislocaciones móviles a lo largo de todo el historial de flujo plástico en el material. En realidad, incluso después de haber sufrido grandes deformaciones, a temperaturas considerablemente elevadas, la densidad de dislocaciones  $\rho$  puede ser incluso pequeña, debido al proceso de recocido del material que tiene lugar a elevadas temperaturas. Verdaderamente deberán tenerse en cuenta los históricos de deformación y la temperatura para estimar la densidad media del material, así como la separación media entre dislocaciones  $l$ .

En este caso, se considera un modelo empírico simple, asumiendo que la separación media entre dislocaciones es una función decreciente con la deformación plástica acumulada y creciente al aumentar la temperatura ( $\downarrow T \vee \uparrow \epsilon_p \Rightarrow \downarrow l$ ), Ec. 2-64.

$$l = d = \frac{l_o}{f(\epsilon_p, T)}, \quad f(\epsilon_p, T) > 0, \quad f(0, T_o) = 1 \quad \text{Ec. 2-64}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p} \geq 0 \quad \frac{\partial f}{\partial T} \leq 0$$

$T_o$  es la temperatura inicial, y  $l_o$  es la distancia inicial existente entre dislocaciones. Como muestra, se puede considerar

$$l = \frac{l_o}{1 + a(T)\varepsilon_p^{n_o}}, \quad a(T), n_o \geq 0, \quad \frac{\partial a}{\partial T} \leq 0 \quad \text{Ec. 2-65}$$

Con un valor constante para la función  $a$ , se llega una expresión de endurecimiento por deformación similar a la propuesta por Johnson y Cook [34]. Aquí aparecen  $a(T)$  y  $n_o$  como parámetros constitutivos que se pueden ajustar, con un valor de  $n_o$  entre 0 y 1, y una función  $a(T)$  cuya estructura es necesaria ajustar mediante calibración experimental. Debido a que el endurecimiento está asociado a una disminución de la distancia entre dislocaciones, la función  $a(T)$  se considerará mayor o igual que 0. Además, como la densidad de dislocaciones debe disminuir al aumentar la temperatura,  $a(T)$  debe ser una función que disminuya con un aumento de temperatura (para hacer que  $l$  crezca y por tanto  $\rho$  disminuya). Para aplicaciones en cobre OFHC, la función  $a(T)$  puede tener esta estructura, Ec. 2-66.

$$a(T) = a_o \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_m} \right)^2 \right] \quad \text{Ec. 2-66}$$

Siendo  $T_m \simeq 1350K$  la temperatura de fusión del cobre, y  $a_o$  dependiente de la separación inicial entre dislocaciones. Para muestras de material recocido, el valor de  $a_o$  debería ser mayor que en materiales no tratados, ya que en materiales recocidos la densidad de dislocaciones inicial es mucho menor y por tanto la separación media inicial entre dislocaciones es bastante mayor. Se puede considerar para muestras sometidas al proceso de recocido que  $a_o = 20$ , mientras que  $a_o = 1.8$  para piezas sin tratar (estos valores coinciden con los experimentos realizados por Nemat-Nasser y Li [73]).

Observando las ecuaciones Ec. 2-63, Ec. 2-64 y Ec. 2-65, con  $a(T)$  según la Ec. 2-66, se esperaría obtener un valor de  $n_o = 1/2$ , lo que además se ajusta bien a los datos experimentales:

$$l = \frac{l_o}{1 + a(T)\varepsilon_p^{1/2}} \quad \text{Ec. 2-67}$$

Haciendo uso de la Ec. 2-64 en la Ec. 2-62, se obtiene:

$$\hat{\sigma} = \sigma_o f(\varepsilon_p, T), \quad \sigma_o = \frac{G_o}{b\lambda l_o} \quad \text{Ec. 2-68}$$

Se puede observar que  $\sigma_o$  es inversamente proporcional a la longitud inicial existente entre dislocaciones, siendo por tanto menor en muestras sometidas a recocido que en las muestras de material sin tratar ( $\sigma_o = 46MPa$  en muestras recocidas y  $\sigma_o = 400MPa$  en muestras sin tratamiento térmico). Por el momento, los únicos parámetros constitutivos que toman valores

diferentes en función del tratamiento térmico son  $\sigma_o$  y  $\alpha_o$ . El resto de parámetros es igual en ambos casos para temperaturas de 77K a 1100K, velocidades de  $10^{-3}$  a  $8000s^{-1}$  y deformaciones de hasta 1 (100%).

A partir de la Ec. 2-60, se observa que  $\dot{\epsilon}_r$  para dislocaciones que actúan como obstáculos, también depende de la densidad de dislocaciones, ya que es proporcional a la separación media entre dislocaciones  $d = l$ . Se puede asumir por tanto:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\dot{\epsilon}_o}{f(\epsilon_p, T)}, \quad \dot{\epsilon}_o = b\rho_m\omega_o l_o \quad \text{Ec. 2-69}$$

La Ec. 2-69 se puede expresar, dividiendo por la velocidad de deformación que sufre el material y tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad como:

$$\ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_r}\right) = \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_o}\right) + \ln f(\epsilon_p, T) \quad \text{Ec. 2-70}$$

Combinando las ecuaciones Ec. 2-68 y Ec. 2-70 y teniendo en cuenta la Ec. 2-63, la componente térmica de la tensión  $\sigma^*$ , cuando las dislocaciones suponen un obstáculo para el movimiento de las dislocaciones móviles, se obtiene la Ec. 2-71.

$$\sigma^*(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p, T) = \sigma_o \cdot f(\epsilon_p, T) \cdot \left\{ 1 - \left[ -\frac{kT}{G_o} \left( \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_o}\right) + \ln f(\epsilon_p, T) \right) \right]^{1/q} \right\}^{1/p} \quad \text{Ec. 2-71}$$

La Ec. 2-71 se cumplirá siempre y cuando  $T \leq T_c$ . En caso contrario, el efecto que causan las dislocaciones como obstáculo es despreciable frente a la energía que aporta la temperatura por sí misma, por lo que  $\sigma^* = 0$  cuando  $T > T_c$ . Es por esto que el término encerrado entre llaves debería llevar aplicado el operador de McCauley ( $\langle x \rangle = x$  si  $x \geq 0$  y  $\langle x \rangle = 0$  si  $x < 0$ ). La temperatura crítica dependerá de la deformación plástica y la velocidad de deformación, de modo que cuando  $T = T_c$ ,  $\left[ -\frac{kT_c}{G_o} \left( \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_o}\right) + \ln f(\epsilon_p, T_c) \right) \right] = 1$ :

$$T_c = -\frac{G_o}{k} \left( \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_o}\right) + \ln f(\epsilon_p, T_c) \right)^{-1} \quad \text{Ec. 2-72}$$

Efecto de los obstáculos de largo alcance:

Una vez se conoce el efecto en la componente térmica de la tensión,  $\sigma^*$ , se procede a indagar la componente atermia de la tensión  $\sigma_a$ , que representa la resistencia al movimiento de las dislocaciones debida a los bosques de dislocaciones, bordes de grano y defectos (inclusiones, huecos, intersticios...). Una dislocación móvil debe superar esta barrera de potencial a través de la aplicación de cierta tensión a cortante (que estamos traduciendo a tensión equivalente de Von Mises mediante el tensor de Taylor. Esto fue propuesto por el mismo Taylor [96], que descubrió que el endurecimiento por deformación puede ser resultado de la interacción entre dislocaciones que no intersecan entre sí. Este tipo de consideraciones sugieren que la tensión atermia debe tomarse como función de la deformación plástica  $\varepsilon_p$  (aunque, como se ha dicho previamente, sería más recomendable tener en cuenta la densidad de dislocaciones que permite tomar en cuenta el histórico de deformaciones y la temperatura) y del tamaño medio de los granos  $d_G$ , amén de otros parámetros que representen heterogeneidades microestructurales. Basándose en esto, es razonable proponer:

$$\sigma_a = g(\varepsilon_p, d_G, \dots) \cdot \sigma_a^o \quad \text{Ec. 2-73}$$

Donde  $\sigma_a^o$  tiene dimensiones de tensión y  $g(\varepsilon_p, d_G, \dots)$  representa la afección de las heterogeneidades en función de los parámetros mencionados. Por ejemplo, puede asumirse:

$$\sigma_a = \left( a_1 + \varepsilon_p^{n_1} + k_o d_G^{-1/2} \right) \cdot \sigma_a^o \quad \text{Ec. 2-74}$$

Donde  $a_1$ ,  $n_1$  y  $k_o$  son constantes. En la Ec. 2-74 se tiene la relación propuesta por Zerilli y Armstrong [104] si se toma el valor  $n_1 = 1/2$ .

Ecuaciones finales del modelo:

De las ecuaciones Ec. 2-71 y Ec. 2-73, se obtiene la ecuación constitutiva final, Ec. 2-75:

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, T) = & \sigma_o \cdot f(\varepsilon_p, T) \cdot \\ & \cdot \left\{ 1 - \left[ -\frac{kT}{G_o} \left( \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_o} \right) + \ln f(\varepsilon_p, T) \right) \right]^{1/q} \right\}^{1/p} + \\ & + \sigma_a^o \cdot g(\varepsilon_p, d_G, \dots) \end{aligned} \quad \text{Ec. 2-75}$$

Siempre que  $T \leq T_c$ , ya que para  $T > T_c$  la tensión efectiva (térmica) desaparece y sólo se tiene en cuenta la tensión interna (atermia), por lo que la tensión vendrá dada por la Ec. 2-73.

Como se comentó previamente, se establecen los valores  $q = 2$  y  $p = 2/3$ , y se escoge la expresión  $f(\varepsilon_p, T) = 1 + a(T)\varepsilon_p^{1/2}$ , donde  $a(T)$  viene dada por la Ec. 2-66. Finalmente, se desprecia el efecto de los bordes de grano ( $d_G \rightarrow \infty$ ) quedando el valor de la tensión atermia igual a  $\sigma_a = \sigma_a^o \cdot \varepsilon_p^{n_1}$ . Por tanto, la ecuación final queda reducida a la expresión Ec. 2-76.

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, T) = & \sigma_o \cdot (1 + a(T)\varepsilon_p^{1/2}) \cdot \\ & \cdot \left\{ 1 - \left[ -\frac{kT}{G_o} \left( \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_o}\right) + \ln(1 + a(T)\varepsilon_p^{1/2}) \right) \right]^{1/q} \right\}^{1/p} + \\ & + \sigma_a^o \cdot \varepsilon_p^{n_1} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2-76}$$

Siempre que se cumpla  $T \leq T_c$ , como se ha visto anteriormente.

### 2.5.3. RESULTADOS: APLICACIÓN Y COMPARACIÓN

La Tabla 2-5 muestra los valores de los parámetros del modelo.

<b>Parámetros del modelo</b>	<b>Cobre OFHC</b>
$\sigma_o$ [MPa]	46
$k/G_o$ [K <sup>-1</sup> ]	$4.9 \times 10^{-5}$
$\dot{\epsilon}_o$ [s <sup>-1</sup> ]	$2 \times 10^{10}$
$a_o$	20
$T_m$ [K]	1350
$p$ [-]	2/3
$q$ [-]	2
$\sigma_a^o$ [MPa]	220
$n_1$ [-]	0.3

Tabla 2-5 - Parámetros del modelo de Nemat-Nasser y Li para la Ec. 2-76

También se hará uso en este modelo de la Ec. 2-38 para tener en cuenta el incremento de temperatura en procesos adiabáticos. Los parámetros aparecen en la Tabla 2-6:

<b>Parámetros físicos</b>	<b>Cobre OFHC</b>
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	8969
$c_p$ [J/kgK]	385
$\xi$ [-]	0.9

Tabla 2-6 - Parámetros físicos para Cobre OFHC según el modelo de Nemat-Nasser y Li.

Una vez se tienen los parámetros del modelo, así como la ecuación constitutiva del mismo, se puede proceder al análisis del modelo frente a datos experimentales, al igual que se hizo para los dos modelos anteriormente estudiados.

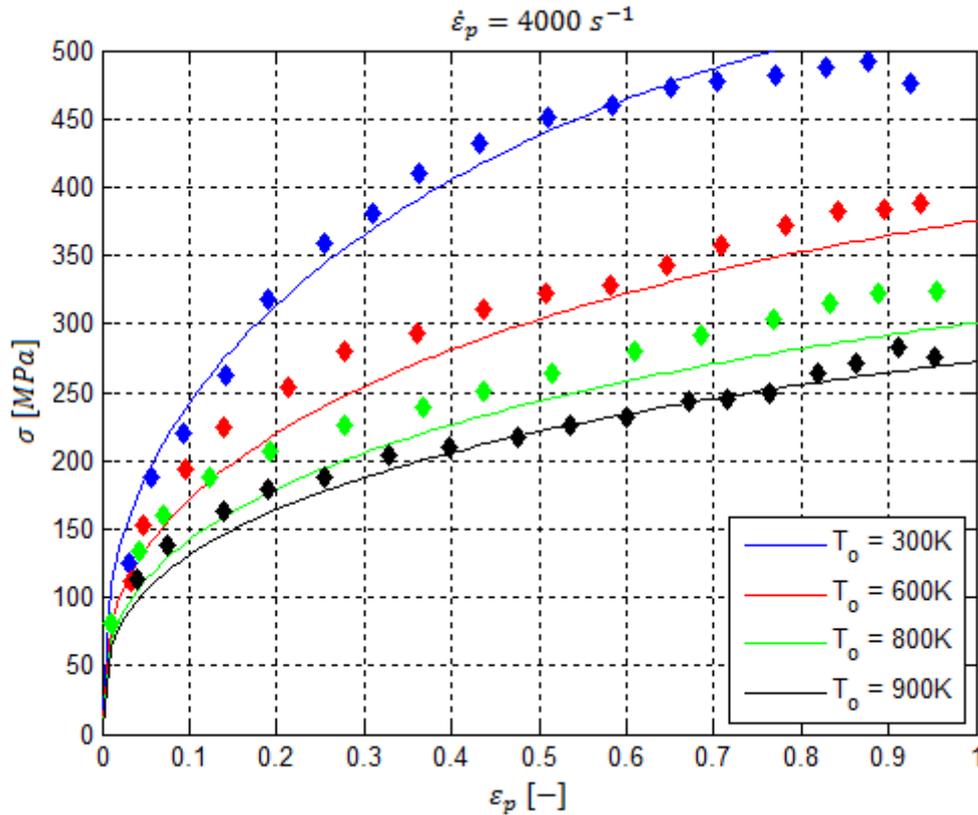


Figura 2.18 - Comparación del modelo de Nemat-Nasser y Li con datos experimentales a una velocidad de deformación de  $4000\text{s}^{-1}$  y varias temperaturas. Los valores que propone el modelo están representados con una línea continua. Los datos experimentales se muestran con diamantes del mismo color que la línea que trata de representarlos.

Los resultados se aproximan bastante bien a los datos experimentales, salvo alguna ligera desviación, que se puede salvar sabiendo que los datos experimentales suelen tener entre un 5 y un 10% de error.

Para distintas velocidades y una temperatura inicial  $T_0 = 300\text{K}$ , los resultados obtenidos son:

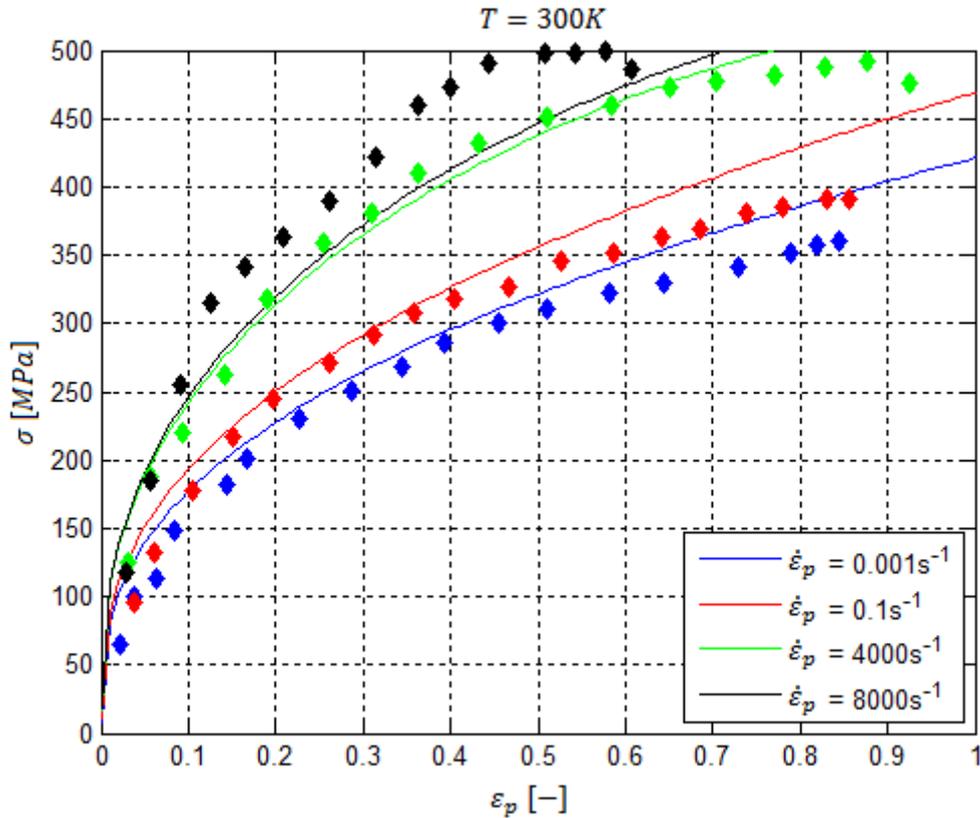


Figura 2.19 - Comparación del modelo de Nemat-Nasser y Li con datos experimentales a temperatura inicial  $T_0$  de 300K y varias velocidades de deformación.

Los datos se ajustan bastante mejor que en el caso de Cai et al., pero a velocidades muy elevadas no se aproximan demasiado bien a los resultados experimentales, aunque hay que tener en cuenta que los resultados experimentales cuentan con cierto error proveniente del instrumental de medida.

A continuación se muestra la evolución del flujo de tensiones en función de la velocidad de deformación y la propia deformación plástica, para los casos isoterma (Figura 2.20), adiabático (Figura 2.21) y mixto (Figura 2.22). En el último caso se superpondrán también los datos experimentales, que permitirán obtener una comparación similar a la vista en la Figura 2.19.

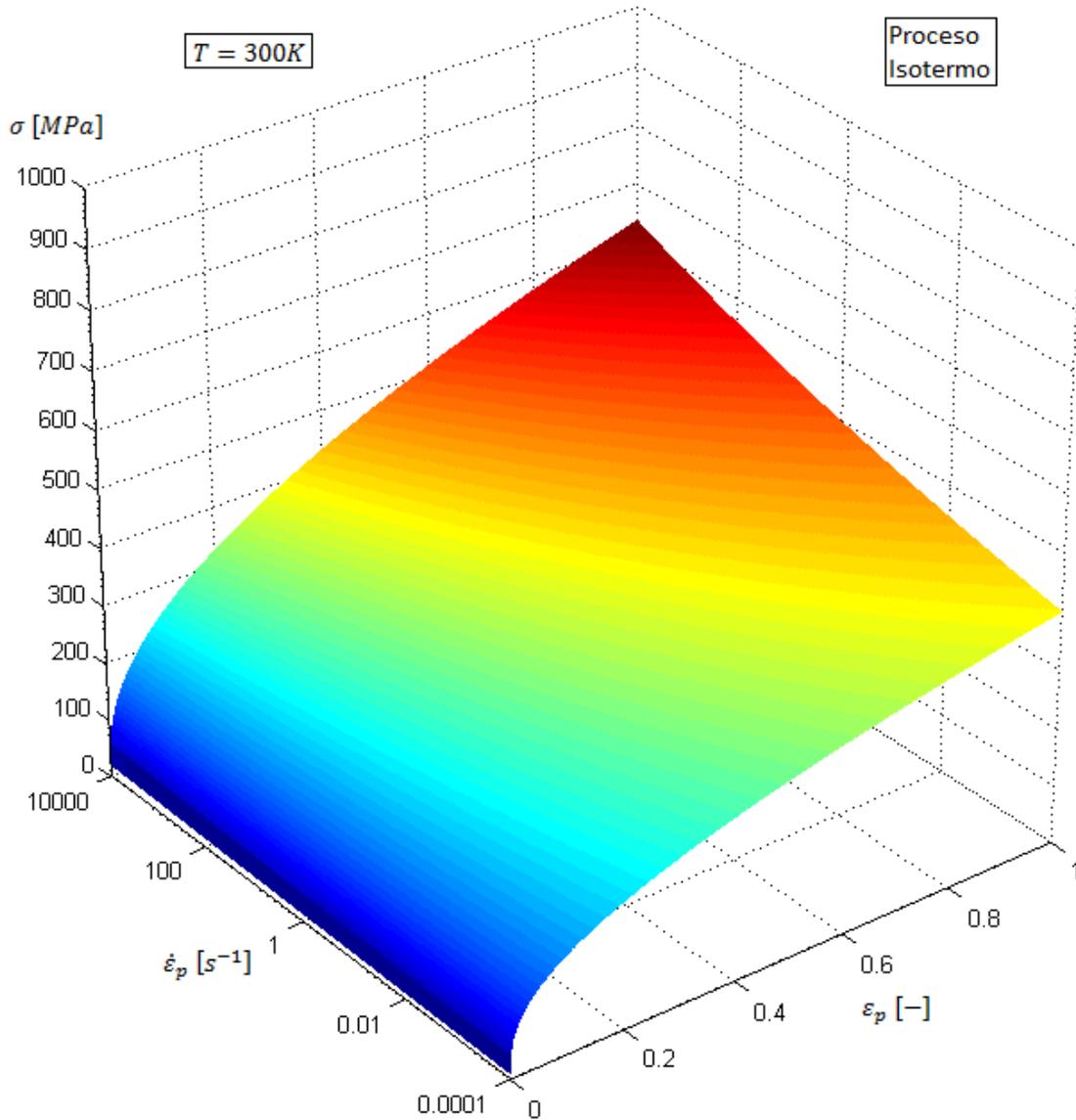


Figura 2.20 - Modelo Nemat-Nasser y Li. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso isotermo. Material: Cobre OFHC.

Se puede apreciar el efecto de la velocidad de deformación en la tensión debida al endurecimiento por deformación, que es creciente al aumentar la velocidad.

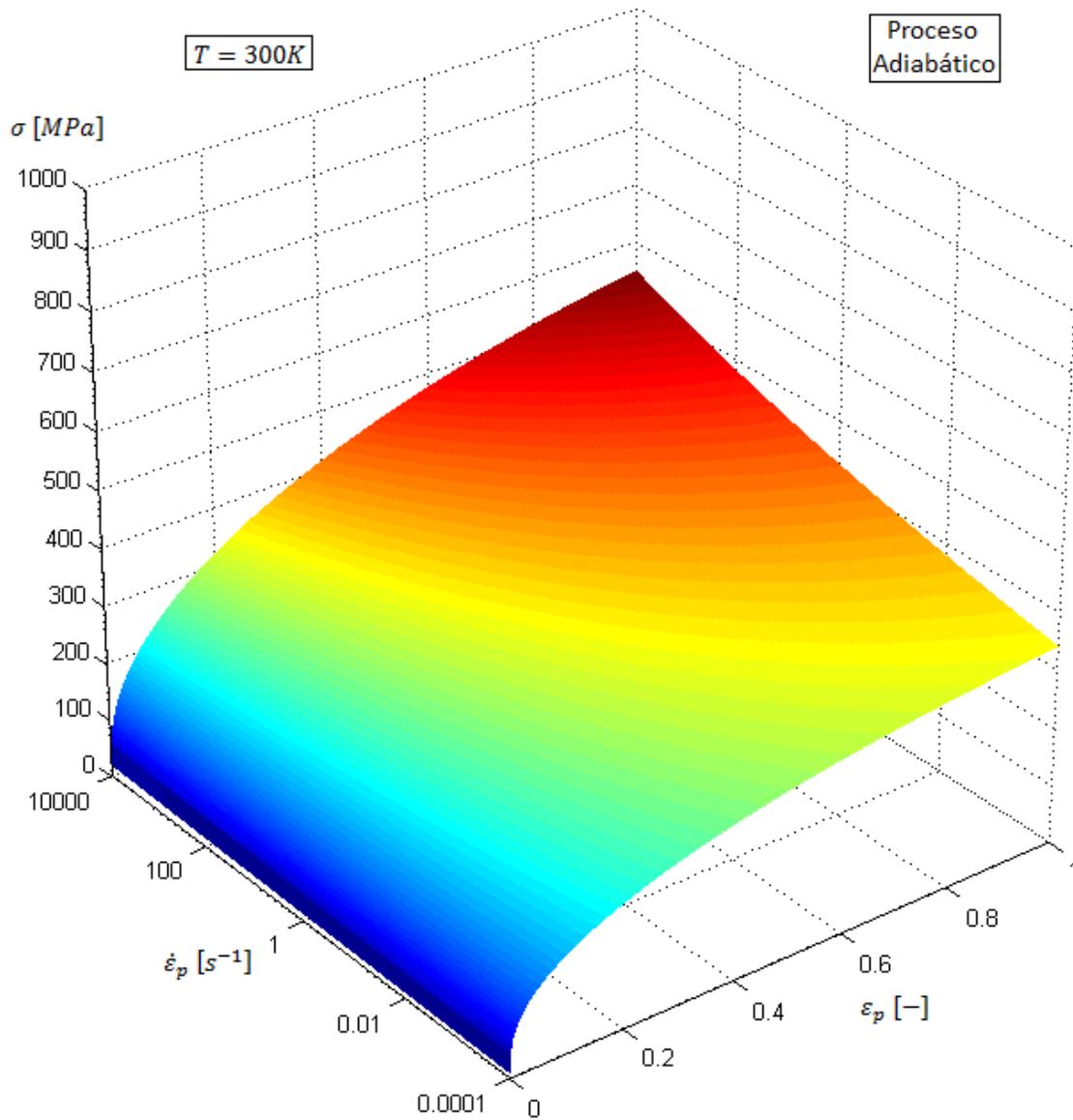


Figura 2.21 - Modelo Nemat-Nasser y Li. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso adiabático. Material: Cobre OFHC.

En el caso de proceso adiabático (Figura 2.21) las tensiones son ligeramente menores debido al incremento de temperatura que tiene lugar.

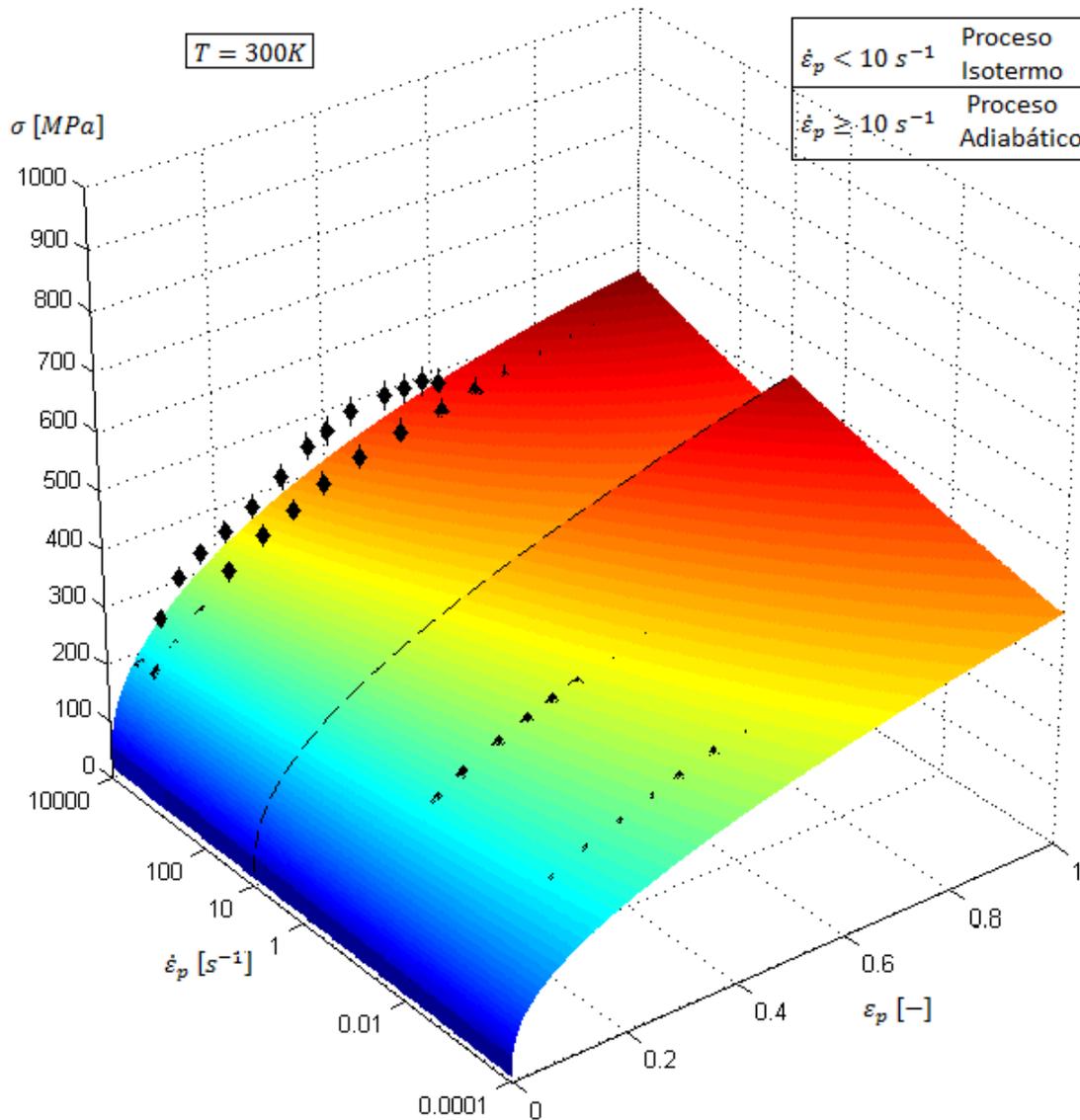


Figura 2.22 - Modelo Nemat-Nasser y Li. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso mixto. Se muestran además los resultados experimentales marcados con diamantes negros, con un error del  $\pm 5\%$  en la tensión. Material: Cobre OFHC.

Se observa de nuevo que muchos de los datos experimentales coinciden con los previstos por el modelo, pero a elevadas velocidades de deformación ( $8000 \text{ s}^{-1}$ ) no se aproximan demasiado bien. El salto en la tensión a  $\dot{\epsilon}_p = 10 \text{ s}^{-1}$  sigue produciéndose, y tendrá lugar en todos los modelos si se considera el cambio de proceso isotermo a adiabático de repente. La solución sería un factor de Quinney-Taylor variable con la velocidad, que tuviera en cuenta poco a poco la acumulación de energía.

A continuación se analizará la variación de la tensión en función de la deformación plástica y la temperatura inicial para los casos de proceso isotermo y adiabático, como se hizo en los casos anteriores (Figura 2.23 y Figura 2.24).

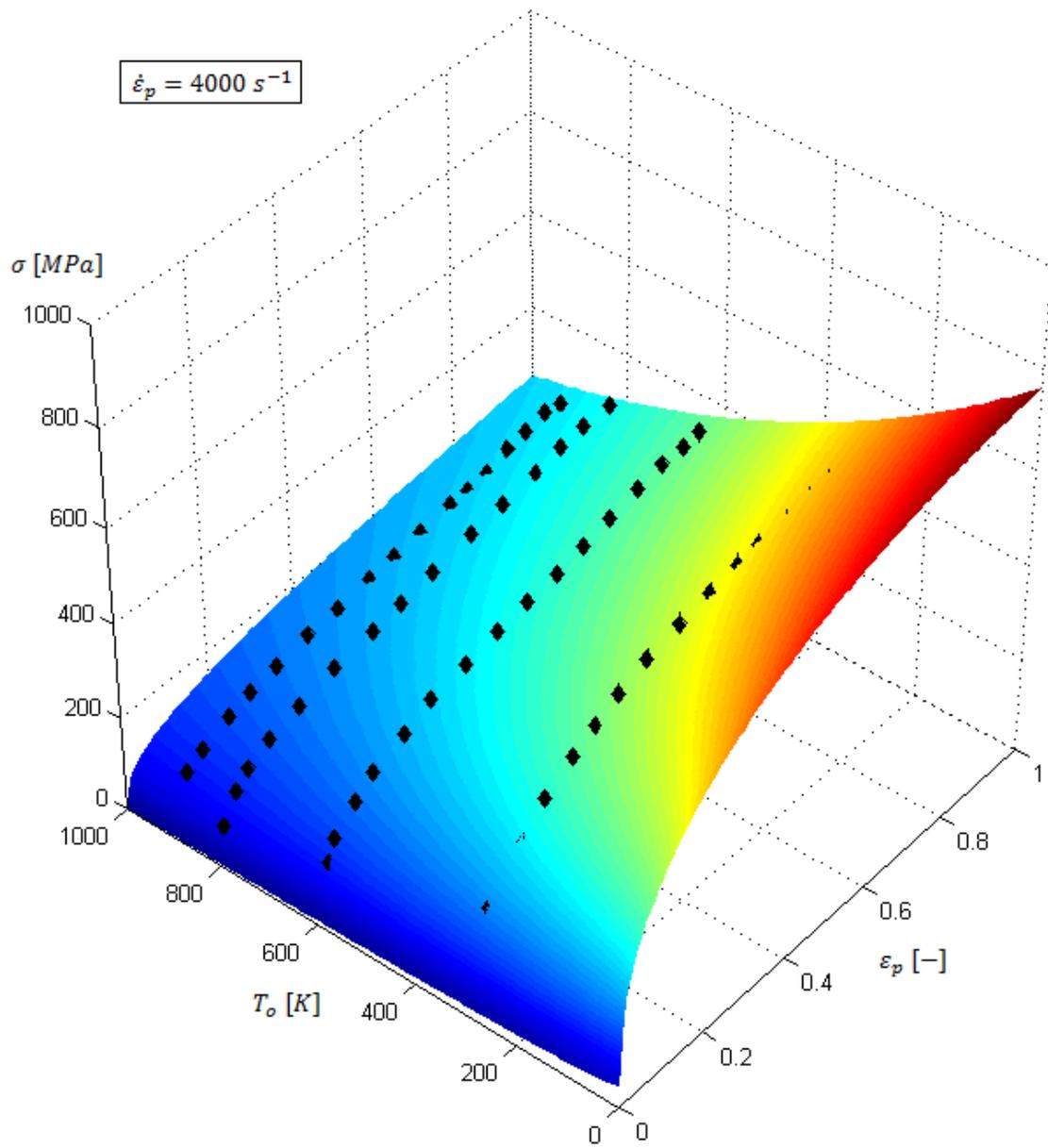


Figura 2.23 - Modelo Nemat-Nasser y Li. Tensión-Deformación-Temperatura inicial a velocidad de deformación  $4000\text{s}^{-1}$  (Proceso adiabático). Material: Cobre OFHC.

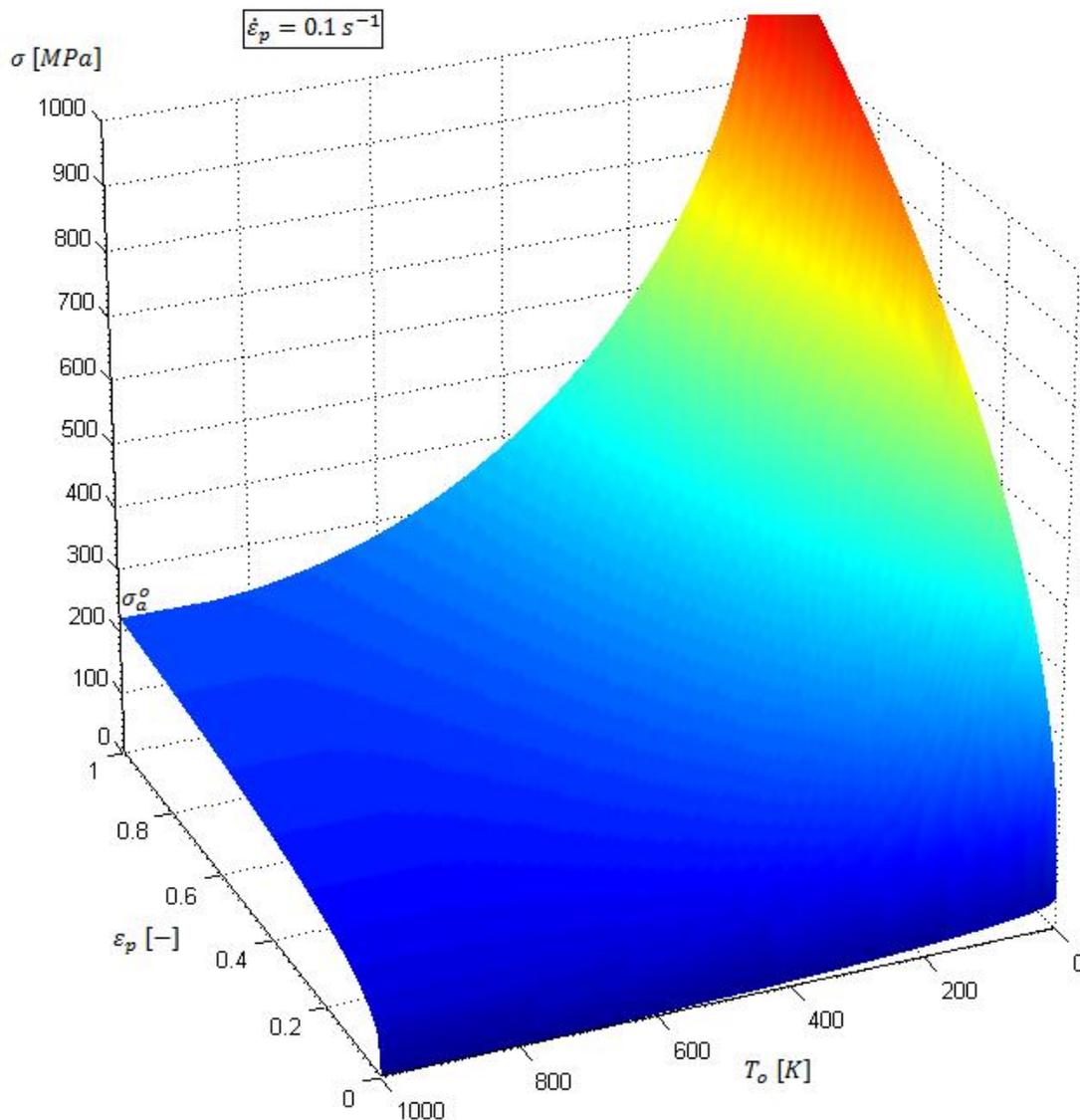


Figura 2.24 - Modelo Nemat-Nasser y Li. Tensión-Deformación-Temperatura inicial a velocidad de deformación  $0.1 \text{ s}^{-1}$  (Proceso isoterma). Material: Cobre OFHC.

Un análisis de la temperatura crítica también puede ser útil, para comprender cómo evoluciona este parámetro, que hará que al aumentar la temperatura disminuya el flujo de tensiones en el material, ya que la componente efectiva o térmica de la tensión se reducirá cada vez más cuanto más cerca esté la temperatura de su valor crítico. La expresión de la temperatura crítica viene dada por la Ec. 2-72, en la que se sustituye  $f(\epsilon_p, T) = 1 + a(T)\epsilon_p^{1/2}$ , estando  $a(T)$  definida en la Ec. 2-66.

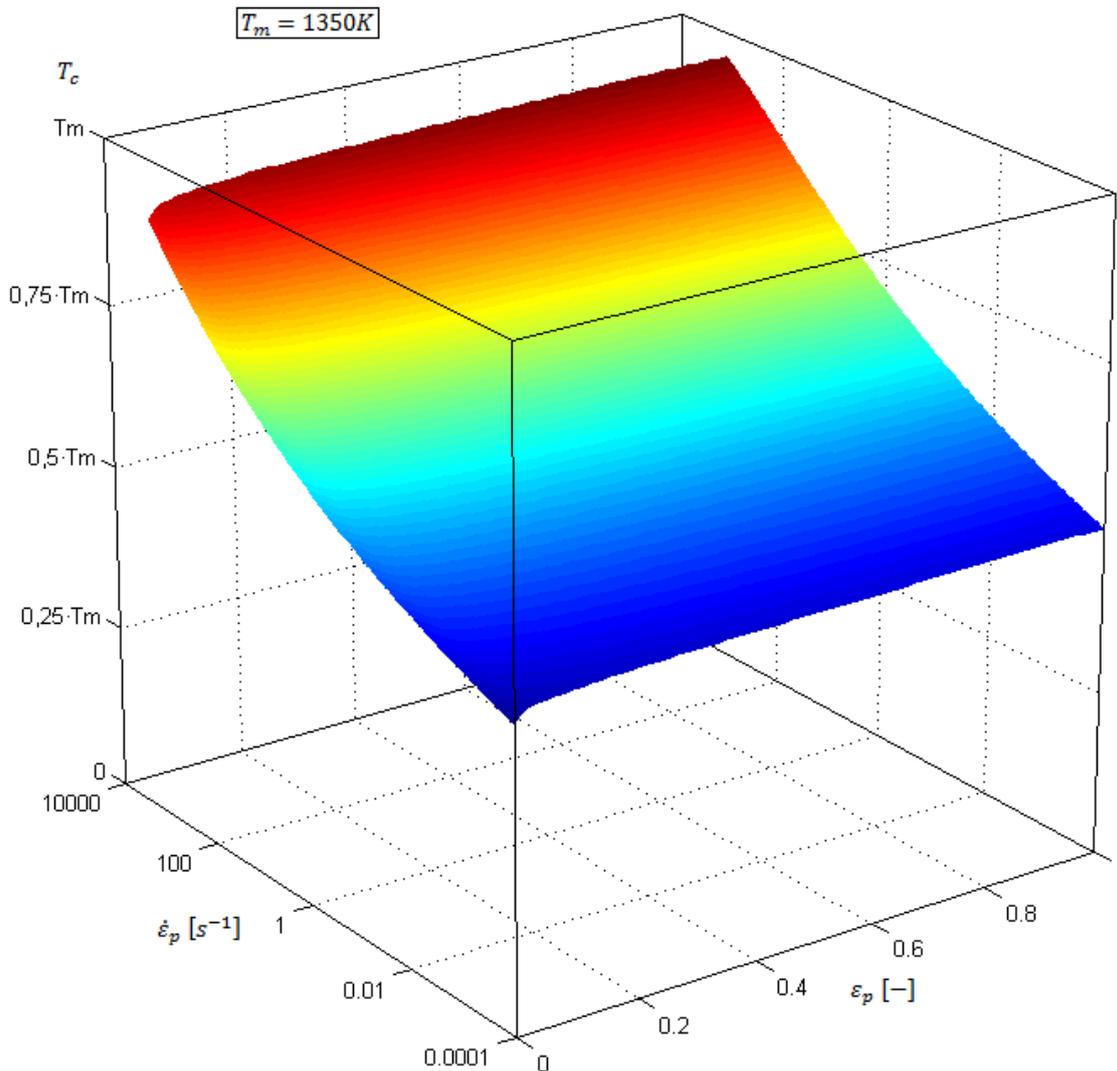


Figura 2.25 - Temperatura crítica en función de la deformación y velocidad de deformación plástica para el modelo de Nemat-Nasser y Li.

Se observa que la deformación plástica tiene mucha menos influencia en la temperatura crítica que la velocidad de deformación. También se puede observar que a una velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}_p = 0.1 s^{-1}$ , la temperatura crítica es de alrededor de  $0.63 \cdot T_m = 850K$ , lo que explica por qué en la Figura 2.24 la tensión vale exactamente  $\sigma_a^0 = 220MPa$  a partir de aproximadamente  $850K$ , mientras que en la Figura 2.23 no se llega a alcanzar ese valor dado que para  $\dot{\epsilon}_p = 4000 s^{-1}$ , la temperatura crítica supera los  $0.75 \cdot T_m \approx 1000K$ , que es la temperatura más alta representada en la Figura 2.23.

#### ***2.5.4. CONCLUSIÓN DEL MODELO DE NEMAT-NASSER Y LI***

El modelo propuesto por Nemat-Nasser y Li ofrece resultados aceptables al compararlos con los datos obtenidos experimentalmente.

Este modelo, aunque propone emplear la densidad de dislocaciones en lugar de la deformación plástica, emplea el valor de la distancia media entre obstáculos/dislocaciones (ya se ha visto que son conceptos equivalentes) y además tiene en cuenta que se produce un recocido del material a elevadas temperaturas. También se introduce el concepto de temperatura crítica a partir de la cual no existirá componente térmica de la tensión.

Este modelo también servirá de apoyo para construir un modelo nuevo basado en la densidad de dislocaciones tal y como proponen estos autores.



### 3. DESARROLLO DE UN NUEVO MODELO CONSTITUTIVO

---

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

Se han estudiado tres modelos diferentes que tratan de simular el comportamiento de los metales FCC, en los que se proponen diferentes relaciones constitutivas que emplean distintas hipótesis para desarrollarse. Se ha comprobado que el estudio del concepto de la energía térmica de activación, así como la dinámica de dislocaciones está presente en todos ellos, por lo que el modelo que aquí se propone también estará basado en estos conceptos que representan una realidad física. Este modelo en concreto, se basará en el estudio de la evolución estructural (evolución de la densidad de dislocaciones), como ya hicieron antes Mecking y Kocks [63].

La fortaleza de los modelos constitutivos basados en la descripción del movimiento de las dislocaciones reside en la precisión de los resultados que proporcionan. Adicionalmente, este tipo de estudios es capaz de describir el efecto de los históricos de temperatura y/o velocidad de deformación que haya sufrido el material (Klepaczko [46], Klepaczko y Rezaig [48], Tanimura y Duffy [91]). Además este tipo de modelos permiten entender el fallo ante cargas dinámicas de los materiales, proceso controlado por las dislocaciones (Campagne et al [14]).

A continuación se procederá al desarrollo del modelo constitutivo en cuestión, basándose en las dislocaciones presentes en el material. La bondad del modelo residirá en el concepto de una variable interna de estado (la densidad media de las dislocaciones), que definirá la evolución estructural del material durante el proceso de deformación plástica. La formulación, como las tres estudiadas con más detalle previamente, se basa en la descomposición aditiva del flujo de tensiones en dos componentes: la componente térmica, a la cual denominaremos efectiva, y la componente atherma, denominada interna. La componente interna representa el comportamiento athermo, independiente de la deformación plástica. La tensión efectiva representa la componente correspondiente a la activación térmica, dependiente también de la velocidad de deformación, así como de la deformación plástica que sufre el material. La tensión total se define teniendo en cuenta la relación entre velocidad de deformación y temperatura, y define la evolución estructural del material durante los procesos de deformación.

## 3.2. FORMULACIÓN DEL MODELO CONSTITUTIVO

La formulación de este modelo constitutivo está basada en tres suposiciones bien establecidas:

- La deformación plástica debida a cortante es el modo fundamental de deformación de metales en procesos plásticos.
- Los micromecanismos de baja temperatura involucrados en la plasticidad dinámica suceden habitualmente en el rango  $0 \leq T \leq T_m/2$ , donde  $T_m$  es la temperatura de fusión del material. Este límite será, por tanto, el del modelo propuesto.
- La tensión total se puede descomponer aditivamente en dos términos que representan la tensión interna (aterma) y la efectiva (térmica), Ec. 3-1.

$$\tau = \tau_\mu + \tau^* \quad \text{Ec. 3-1}$$

Asumiendo plasticidad de Huber-Mises, se puede convertir la Ec. 3-1 en la Ec. 3-2 mediante el factor de Taylor:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_\mu + \bar{\sigma}^* \quad \text{Ec. 3-2}$$

La definición de cada una de las dos componentes se muestra a continuación.

### 3.2.1. TENSIÓN INTERNA

En materiales FCC, se puede asumir que la tensión interna  $\bar{\sigma}_\mu$  representa la tensión necesaria para transmitir el flujo plástico a través de los granos policristalinos del material (Zerilli y Armstrong [104]). De acuerdo con varios autores (Rusinek et al. [84], Voyiadjis y Abed [98], Voyiadjis y Almasri [99]), esto permite dar una definición para la tensión interna  $\bar{\sigma}_\mu$  independiente de la deformación plástica:

$$\bar{\sigma}_\mu = \alpha_1 \cdot E(T) \cdot \left(\frac{b}{D}\right)^{1/2} \quad \text{Ec. 3-3}$$

Donde  $\alpha_1$  es una constante del material,  $b$  el valor de la magnitud del vector de Burgers,  $D$  el tamaño de grano medio y  $E(T)$  es el módulo de elasticidad dependiente de la temperatura (Klepaczko [45]), cuya expresión viene dada por la Ec. 3-4. La Ec. 3-3 es similar en forma a la propuesta por Voyiadjis y Abed [98] (Ec. 2-23).

$$E(T) = E_o \left\{ 1 - \frac{T}{T_m} \exp \left[ \theta^* \left( 1 - \frac{T_m}{T} \right) \right] \right\} \quad T > 0 \quad \text{Ec. 3-4}$$

En la cual  $E_o$  es el módulo de Young a  $T = 0K$ ,  $T_m$  la temperatura de fusión del material y  $\theta^*$  es la temperatura homóloga *característica* del material y vale alrededor de 0.9 (Rusinek et al. [85]).

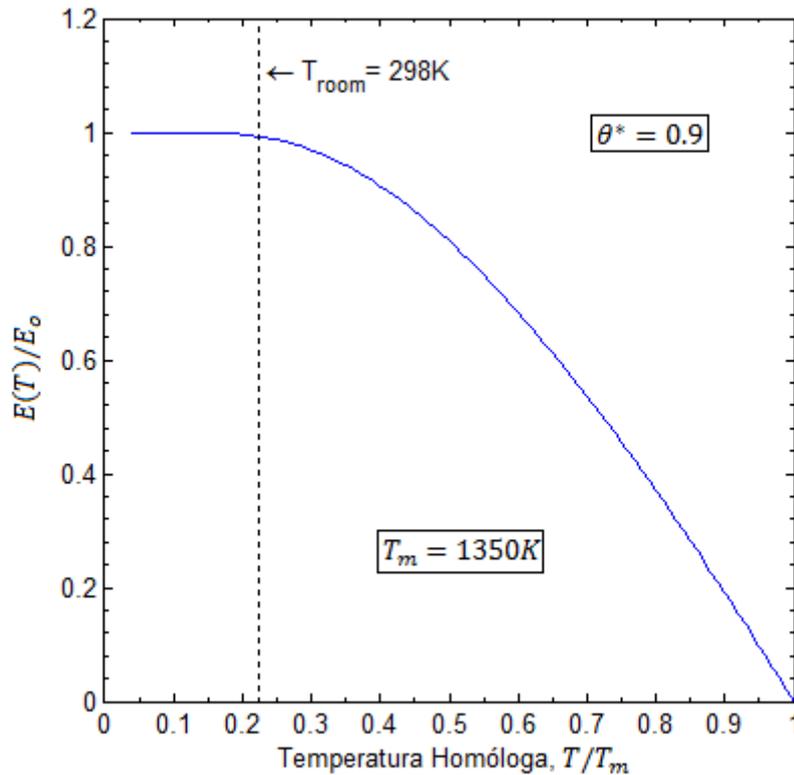


Figura 3.1 - Evolución de la relación de los módulos de elasticidad en función de la temperatura.

Hay que mencionar que en este modelo tampoco se tendrán en cuenta efectos de arrastre viscoso, y por lo tanto, la máxima velocidad de deformación que admite este modelo constitutivo se ve limitada por la velocidad a la que empieza a ser palpable el efecto del mecanismo de arrastre. De acuerdo con varios autores (Huang et al. (2009), Kumar et al. (1968)) la velocidad máxima de aplicabilidad del modelo estará en torno a  $\dot{\epsilon}_p^{max} \simeq 10^3 \sim 10^4 \text{s}^{-1}$ .

### 3.2.2. TENSIÓN EFECTIVA

En metales FCC se supone, como ya se ha visto, que el mecanismo que controla el flujo plástico es la superación de obstáculos por parte de las dislocaciones. Es por ello que la tensión efectiva será función de la estructura (deformación plástica). Para llegar a una definición aceptable de la tensión efectiva, se seguirán los siguientes pasos:

La energía libre de activación  $\Delta G(\sigma^*)$  está ligada a la velocidad de deformación mediante una expresión de tipo Arrhenius, como se vio en las ecuaciones Ec. 2-13 y Ec. 2-41:

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_r \cdot \exp\left(-\frac{\Delta G(\sigma^*)}{kT}\right) \quad \text{Ec. 3-5}$$

Donde  $\dot{\epsilon}_r$  es el factor de frecuencia, también llamado preexponencial (ver Ec. 2-13' en el modelo de Nemat-Nasser y Li) y  $k$  es la constante de Boltzmann.

Por otra parte, la relación entre la energía libre de activación  $\Delta G(\sigma^*)$  y la componente térmicamente activada de la tensión  $\sigma^*$ , se toma de Kocks et al. [50], como se hizo en la Ec.

2-45. Esta expresión fenomenológica se ha empleado en otros modelos anteriormente (Nemat-Nasser y Li [73], Gao y Zhang [26], Uenishi y Teodosiu [97]), Ec. 3-6.

$$\Delta G(\sigma^*) = G_o \left[ 1 - \left( \frac{\sigma^*}{\hat{\sigma}^*} \right)^p \right]^q \quad \text{Ec. 3-6}$$

Como ya se ha mencionado,  $G_o$  es la energía necesaria para superar el obstáculo sin ayuda de tensión externa y  $\hat{\sigma}^*$  es la tensión térmica umbral que es dependiente de la estructura en materiales FCC. Los parámetros  $p$  y  $q$  son constantes que definen el perfil del obstáculo medio que las dislocaciones han de superar. En este modelo se empleará  $q = 1$  (Uenishi y Teodosiu [97]) y el valor de  $p$  se tratará como si de una constante del material se tratase, y que determina la sensibilidad a la temperatura y a la velocidad de deformación de la tensión.

Combinando la Ec. 3-5 con la Ec. 3-6, se obtiene la descripción de la componente térmicamente activada de la tensión  $\sigma^*$  según la Ec. 3-7.

$$\sigma^* = \hat{\sigma}^* \left\langle 1 - \frac{kT}{G_o} \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}_r}{\dot{\epsilon}_p} \right) \right\rangle^{1/p} \quad \text{Ec. 3-7}$$

Siendo  $\langle \cdot \rangle$  el operador de McCauley, definido como  $\langle x \rangle = x$  si  $x \geq 0$  y  $\langle x \rangle = 0$  si  $x < 0$ .

Para simplificar (Rusinek y Klepaczko [83]), se puede sustituir el término  $kT/G_o$  por  $D_1 T/T_m$ , donde  $D_1$  es una constante adimensional, proporcional a  $\ln(10)$  para convertir de logaritmo natural a decimal, y  $T_m$  se añade para mantener la adimensionalidad del término. El resultado de esta conversión se muestra en la Ec. 3-8.

$$\sigma^* = \hat{\sigma}^* \left\langle 1 - D_1 \frac{T}{T_m} \log \left( \frac{\dot{\epsilon}_r}{\dot{\epsilon}_p} \right) \right\rangle^{1/p} \quad \text{Ec. 3-8}$$

El siguiente paso permitirá particularizar la Ec. 3-8 para materiales FCC, haciendo uso de las referencias. De acuerdo con varios autores (Klepaczko [46], Nemat-Nasser y Li [73]), en la Ec. 3-8, la tensión térmica umbral  $\hat{\sigma}^*$  y el factor de frecuencia  $\dot{\epsilon}_r$  deben tener en cuenta la dependencia de la tensión efectiva en la deformación plástica. Más tarde se proporcionará un procedimiento novedoso para calibrar esta dependencia.

De acuerdo con Nemat-Nasser y Li [73], la tensión térmica umbral puede definirse según la Ec. 2-62:

$$\hat{\sigma}^* = M \cdot \frac{G_o}{V^*} \quad \text{Ec. 3-9}$$

Donde  $M$  es el factor de Taylor (no incluido en la Ec. 2-62 por simplicidad) y  $V^*$  es el volumen de activación, que está relacionado con la distancia que las dislocaciones recorren antes de encontrar un obstáculo  $d$ , mediante la Ec. 2-24 (Voyiadjis y Abed [98]):

$$V^* = A \cdot b = d \cdot \frac{b^2}{2} \quad \text{Ec. 3-10}$$

Siendo  $A$  el área de activación y  $b$  la magnitud del vector de Burgers.

Por otro lado, de acuerdo con Follansbee y Kocks [24], de su modelo **MTS**:

$$G_o = \mu(T)b^3\alpha_{2i} \quad \text{Ec. 3-11}$$

Siendo  $\alpha_{2i}$  una constante del material y  $\mu(T)$  el módulo de elasticidad a cortante dependiente de la temperatura. Combinando las ecuaciones Ec. 3-9 y Ec. 3-11, se obtiene la Ec. 3-12.

$$\hat{\sigma}^* = M\mu(T) \cdot \frac{\alpha_{2i}b^3}{V^*} \quad \text{Ec. 3-12}$$

Sustituyendo en la Ec. 3-12 la Ec. 3-10:

$$\hat{\sigma}^* = E(T) \cdot \frac{\alpha_2 b}{d} \quad \text{Ec. 3-13}$$

Donde  $\alpha_2 = 2\alpha_{2i}$  y  $E(T) = M\mu(T)$ , tal y como se definió en la Ec. 3-4.

La distancia media entre obstáculos  $d$ , depende del tipo de obstáculo. En el caso de materiales FCC, los obstáculos de corto alcance (aquellos que pueden superarse mediante ayuda térmica) se identifican con dislocaciones que intersecan con el plano de deslizamiento de las dislocaciones móviles (Zerilli y Armstrong [104]). En ese caso, y siguiendo lo propuesto por Nemat-Nasser y Li [73], la distancia media entre obstáculos  $d$  es equivalente a la separación media entre dislocaciones  $l$ . El valor de  $l$  es función de la densidad media actual de dislocaciones totales  $\rho$ .

De acuerdo con diversos autores, se deduce la Ec. 3-14:

$$d = l \simeq \rho^{-1/2} \propto \frac{1}{\Psi(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p)} \quad \text{Ec. 3-14}$$

Esta expresión aproxima la separación media  $l$  a la inversa de la raíz cuadrada de la densidad de dislocaciones actual  $\rho$  (Estrin [22], Kocks y Mecking [51], Kubin y Estrin [53], Nemat-Nasser y Li [73]). Además, la raíz cuadrada de la densidad puede suponerse proporcional (la constante de proporcionalidad se hallará después) a una función adimensional dependiente de la deformación y la velocidad de deformación,  $\Psi(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p)$  (de acuerdo con los experimentos realizados, en materiales FCC esta función es independiente de la temperatura). Haciendo uso de la Ec. 3-14 en la Ec. 3-13, aparece la expresión de Taylor [95]:

$$\hat{\sigma}^* = \alpha_2 \cdot E(T) \cdot b \cdot \rho^{1/2} \quad \text{Ec. 3-15}$$

Llegado este punto, se necesita determinar una expresión que tenga en cuenta el proceso de acumulación de la densidad de dislocaciones al deformarse el material, es decir, como función de la deformación plástica. Para ello se usará la expresión empleada por Klepaczko [46], empleada en el modelo de Voyiadjis y Abed, en la Ec. 2-10, con la salvedad de que el factor de aniquilación de dislocaciones, será ahora dependiente de la velocidad de deformación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \bar{\epsilon}_p} = M_{II} - k_a(\dot{\bar{\epsilon}}_p) \cdot (\rho - \rho_0) \quad \text{Ec. 3-16}$$

Donde  $M_{II}$  es el factor de multiplicación de aparición de dislocaciones, que puede ser considerado constante (Voyiadjis y Abed [98]),  $\rho_0$  es la densidad de dislocaciones inicial y  $k_a(\dot{\bar{\epsilon}}_p)$  es el factor de aniquilación de dislocaciones, dependiente de la velocidad de deformación. Este factor indica que cuantas más dislocaciones haya en el material, menor va a ser el crecimiento de la densidad de dislocaciones al deformar el material, es decir, la existencia de este factor  $k_a(\dot{\bar{\epsilon}}_p) > 0$  indica que la densidad de dislocaciones puede saturarse. Este factor está definido por una expresión fenomenológica que simplifica la que propusieron Klepaczko y Rezaig [48] al no tener la Ec. 3-17 en cuenta la temperatura.

$$k_a(\dot{\bar{\epsilon}}_p) = k_o \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_p}{\dot{\bar{\epsilon}}_{ao}} \right)^{-2m_o} \quad \text{Ec. 3-17}$$

Donde  $k_o$  es el factor de aniquilación de referencia,  $\dot{\bar{\epsilon}}_{ao} = 2 \times 10^{10} s^{-1}$  (Nemat-Nasser y Li [73]) y  $m_o$  es la sensibilidad debida a la aniquilación de defectos. Esta expresión indica que la aniquilación de dislocaciones disminuye al aumentar la velocidad de deformación, lo que coincide con observaciones experimentales (Meyers et al. [66]). A continuación se muestra la evolución del factor de aniquilación de dislocaciones en función de la velocidad de deformación (Figura 3.2).

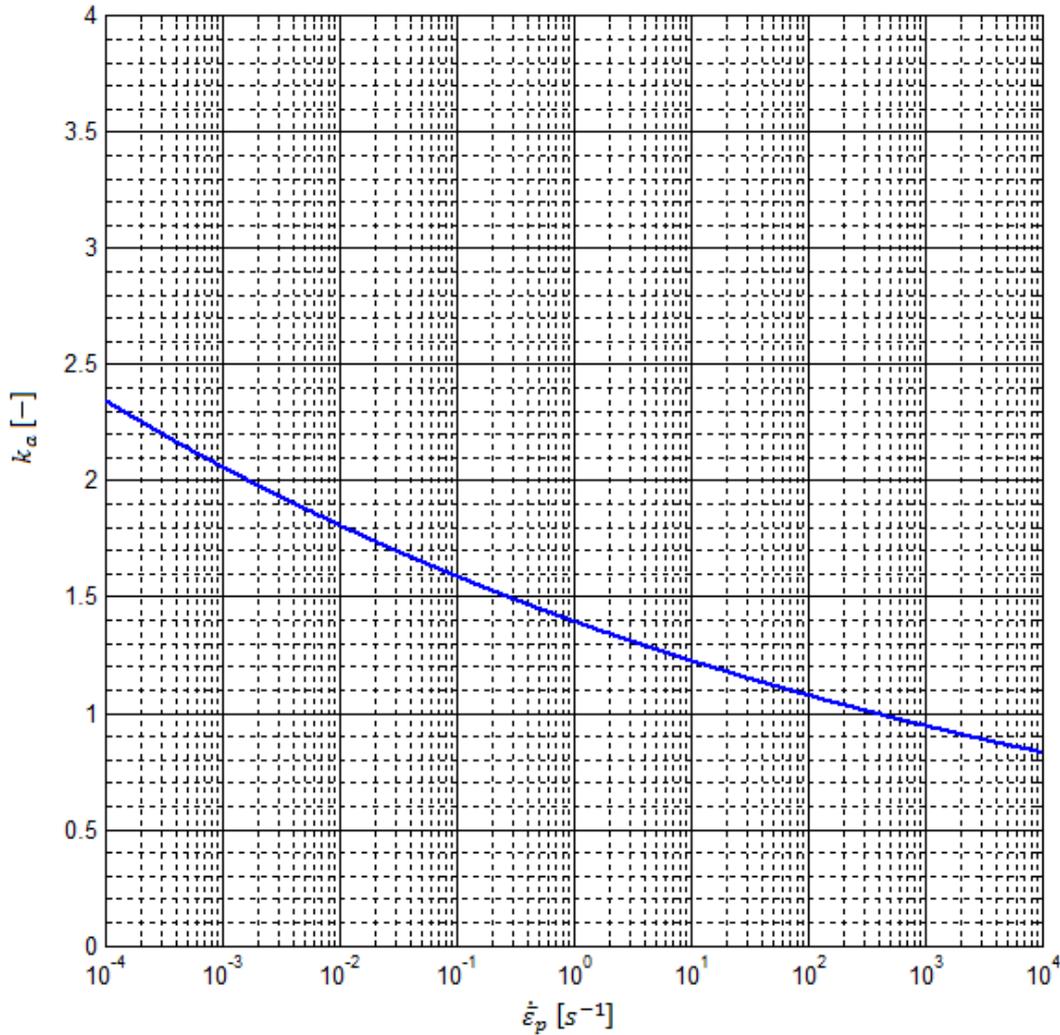


Figura 3.2 - Factor de aniquilación de dislocaciones frente a velocidad de deformación.  $k_o=0.366$ ,  $m_o=0.0282$ .

También se podrían haber postulado variaciones de  $M_{II}$  con la velocidad de deformación y de  $k_a$  con la temperatura, como los propuestos por Klepaczko [45].

Integrando la Ec. 3-16, se obtiene la solución a la ecuación diferencial, que proporciona una expresión para la densidad de dislocaciones, según la Ec. 3-18.

$$\rho = \rho_o + \frac{M_{II}}{k_a(\dot{\epsilon}_p)} \cdot \{1 - \exp[-k_a(\dot{\epsilon}_p) \cdot \bar{\epsilon}_p]\} \quad \text{Ec. 3-18}$$

Se observa que la densidad de dislocaciones crece con la deformación plástica y la velocidad de deformación, como se muestra en la Figura 3.3, obtenida una vez se ha desarrollado el modelo por completo y a una temperatura inicial fija:

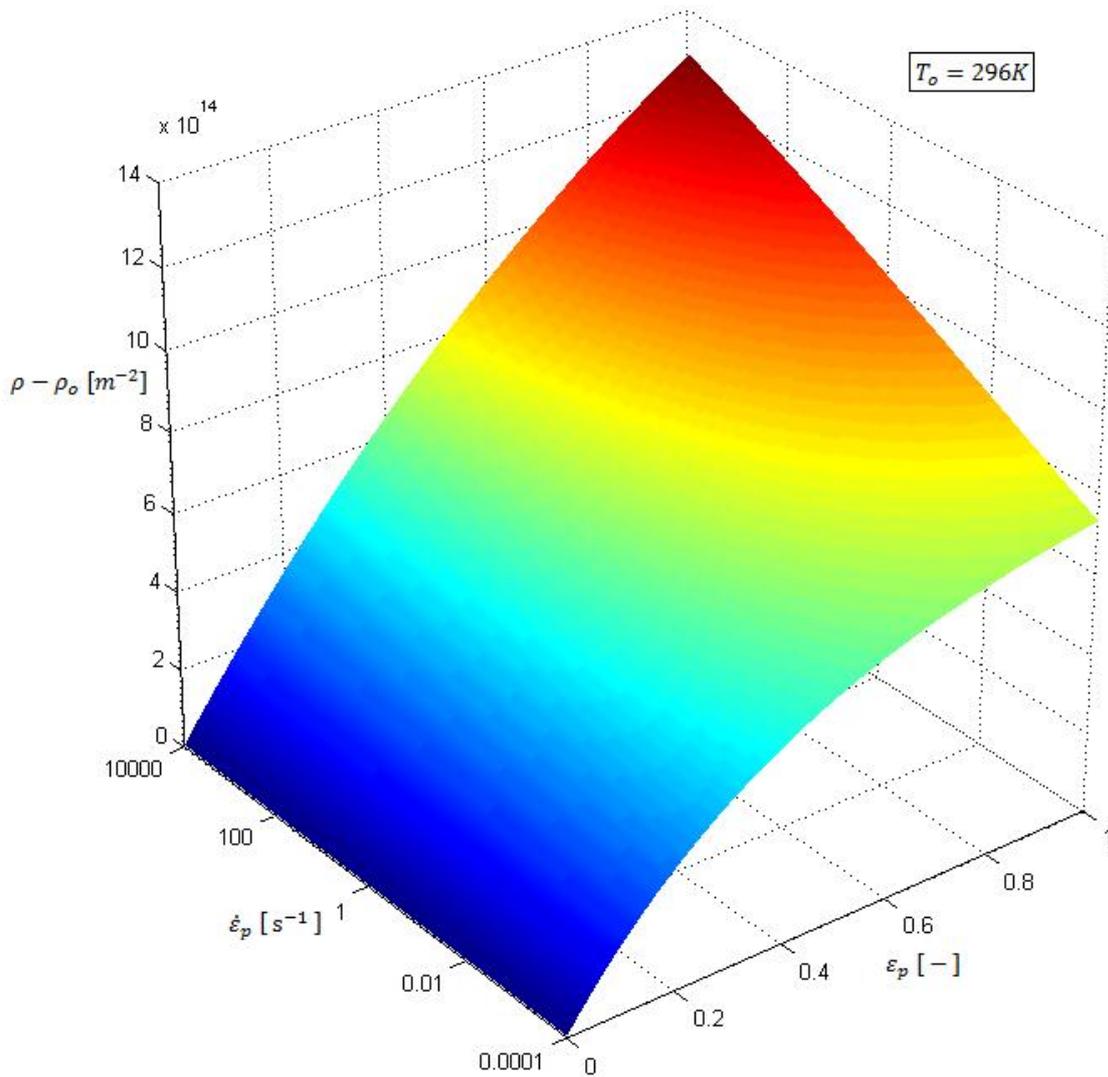


Figura 3.3 - Evolución de la densidad de dislocaciones en función de la deformación y la velocidad de deformación, a temperatura inicial de 296K. Material: Cobre OFHC.

Se puede observar que para deformación plástica  $\bar{\epsilon}_p = 0$ , la densidad de dislocaciones toma el valor inicial, independientemente de la velocidad de deformación. A medida que aumenta la deformación, aumenta la densidad de dislocaciones (lo cual además de tener sentido, coincide con la Ec. 3-18). Al crecer la velocidad de deformación, para un mismo valor de deformación plástica, la densidad de dislocaciones aumenta. Esto es debido a que el factor de aniquilación de dislocaciones disminuye al aumentar la velocidad de deformación, y que la inversa del factor de aniquilación de dislocaciones decrece más rápidamente que la exponencial de su opuesta. Tiene sentido que al aumentar la velocidad de deformación aumente la densidad de dislocaciones, ya que éstas no tienen tiempo de reordenarse y aparecen más súbitamente cuanto mayor sea la velocidad de deformación. También afecta más el cambio de velocidad cuanto más deformado se encuentre el material. Esto es debido a que en la expresión de  $\partial\rho/\partial\bar{\epsilon}_p$ , aparece restando el factor de aniquilación, esto es, cuantas más dislocaciones haya en un momento dado, más afectará un cambio en la velocidad. A continuación se analizará la evolución de la derivada de la densidad de dislocaciones respecto a la deformación y la velocidad, ya que permitirá observar el efecto del factor de aniquilación de dislocaciones.

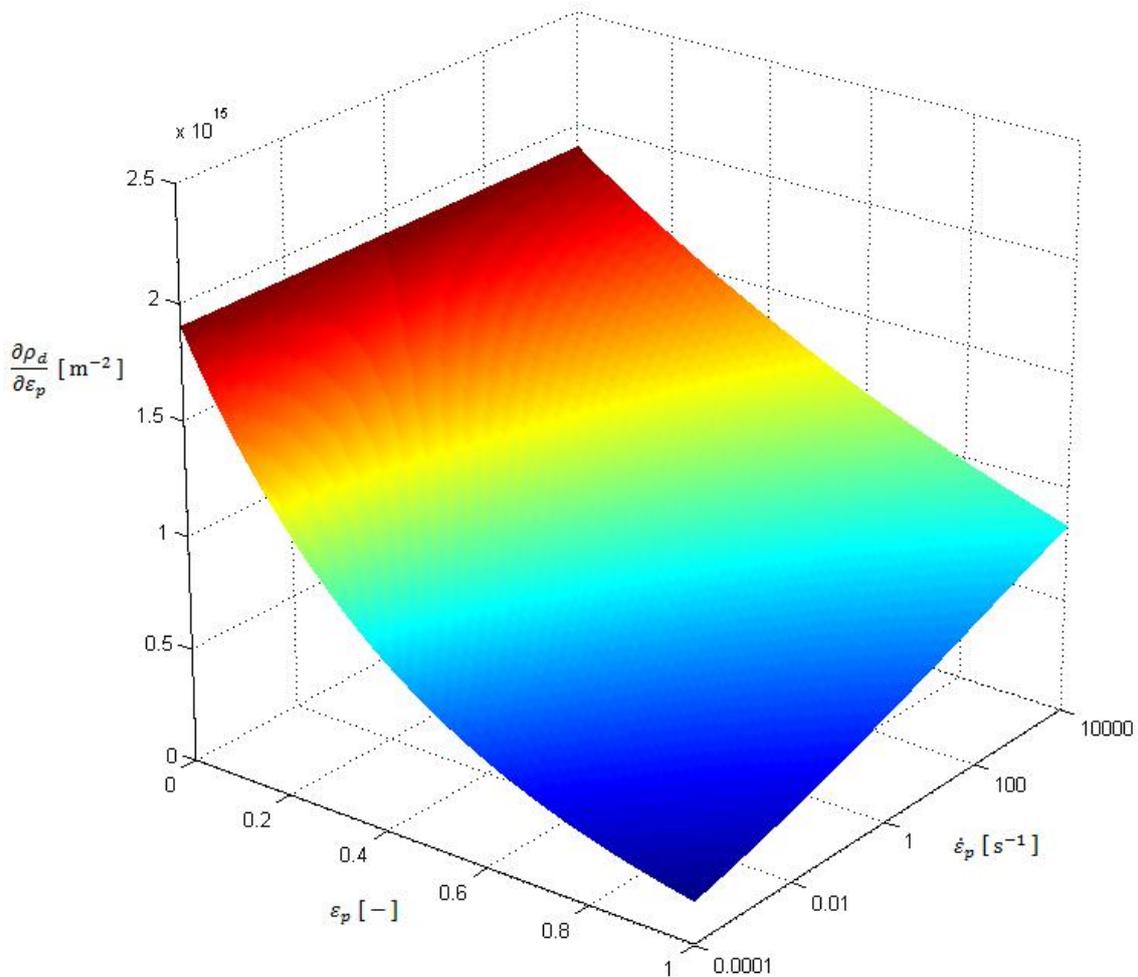


Figura 3.4 - Derivada de la densidad de dislocaciones respecto a la deformación plástica, frente a deformación plástica y velocidad de deformación a  $T_0 = 296K$ . Material: Cobre OFHC.

Se puede comprobar que para una misma velocidad, la derivada de la densidad de dislocaciones disminuye al aumentar la deformación, debido a que cuantas más dislocaciones existen, más difícil es crear dislocaciones nuevas (el material "se satura" y no admite más dislocaciones). Esto es patente también en la Figura 3.3 a velocidades bajas. A deformación plástica  $\bar{\varepsilon}_p = 0$ , no se aprecia cambio en la derivada, como es lógico, ya que la densidad de dislocaciones toma su valor inicial y cambia paulatinamente al crecer la deformación. A deformación constante, se observa un ligero crecimiento de la derivada al aumentar la velocidad de deformación, lo que indica que cuanto más rápido sea el proceso de deformación, más rápido se crean las dislocaciones (o más dislocaciones se crean, ambos puntos de vista son válidos). Hay que recordar que el primer análisis de esta figura indicaba que cuanto más se haya deformado el material, más costoso será crear dislocaciones, por lo que a bajas velocidades se alcanzará un cierto valor de la derivada para valores de deformación menores que para un proceso que transcurre a velocidades de deformación mayores.

Ambas superficies se han obtenido mediante la utilización de sus respectivas expresiones, pero se podría haber obtenido una a partir de la otra empleando discretización y realizando el

proceso correspondiente (derivación o integración en la malla de discretización) y el resultado habría sido exactamente el mismo.

De la Ec. 3-18 se obtiene la constante de proporcionalidad que se mencionaba previamente, que resulta ser  $\rho_0^{-1/2}$  y la función  $\Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p)$  toma la siguiente forma, dada por la Ec. 3-19:

$$\Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} = \left(1 + \frac{M_{II}}{\rho_0 k_a(\dot{\epsilon}_p)} \{1 - \exp[-k_a(\dot{\epsilon}_p) \cdot \bar{\epsilon}_p]\}\right)^{1/2} \quad \text{Ec. 3-19}$$

La función  $\Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p)$  tendrá una forma similar (salvando el exponente 1/2) a la superficie  $\rho - \rho_0$ , por lo que será creciente con la deformación plástica y la velocidad de deformación.

Esta función también puede representarse en términos de la distancia media entre dislocaciones  $l$  y el valor inicial de esta distancia  $l_0$ , ya que  $l \approx \rho^{-1/2}$  y  $l_0 \approx \rho_0^{-1/2}$ :

$$\Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p) = \frac{l_0}{l} \quad \text{Ec. 3-20}$$

A continuación, se puede proseguir con el desarrollo de la tensión térmica umbral sustituyendo la Ec. 3-19 en la Ec. 3-15:

$$\hat{\sigma}^* = \alpha_2 \cdot E(T) \cdot b \cdot \rho_0^{1/2} \cdot \Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p) \quad \text{Ec. 3-21}$$

Haciendo uso de la Ec. 3-21 en la Ec. 3-8, se obtiene la Ec. 3-22:

$$\bar{\sigma}^*(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p, T) = \alpha_2 \cdot E(T) \cdot b \cdot \rho_0^{1/2} \cdot \Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p) \cdot \left(1 - D_1 \frac{T}{T_m} \log\left(\frac{\dot{\epsilon}_r}{\dot{\epsilon}_p}\right)\right)^{1/p} \quad \text{Ec. 3-22}$$

En la Ec. 3-23 se procede a definir el valor del factor de frecuencia  $\dot{\epsilon}_r$  haciendo uso de la ecuación de Orowan [76] (Ec. 2-60).

$$\dot{\epsilon}_r(\rho_m) = b d \rho_m \varpi \quad \text{Ec. 3-23}$$

Donde  $\rho_m$  es la densidad de dislocaciones móviles y  $\varpi$  es la frecuencia de los intentos que efectúan las dislocaciones móviles por superar el obstáculo.

En el caso de metales FCC, cuando las propias dislocaciones actúan como obstáculo de otras dislocaciones, el factor de frecuencia debería ser dependiente de la densidad de dislocaciones (Nemat-Nasser y Li [73]). En este caso, y para continuar con la formulación que se ha propuesto, se expresará  $\dot{\epsilon}_r$  como sigue:

$$\dot{\epsilon}_r(\rho_m) = \frac{\dot{\epsilon}_o(\rho_m)}{\Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p)} \quad \text{Ec. 3-24}$$

$$\dot{\epsilon}_o(\rho_m) = b \cdot l_0 \cdot \rho_m \cdot \varpi = \text{cte} \quad \text{Ec. 3-25}$$

Siendo  $\dot{\epsilon}_o(\rho_m)$  el factor de frecuencia de referencia, considerado constante en esta formulación.  $\dot{\epsilon}_o(\rho_m) = 2 \times 10^{10} s^{-1}$  (Nemat-Nasser y Li [73]).

Ya que se ha asumido la densidad de dislocaciones  $\rho$  como variable interna de estado, la densidad de las dislocaciones móviles  $\rho_m$  será una fracción de la densidad de dislocaciones total:  $\rho_m = f \cdot \rho$ , tomando  $f$  como constante para simplificar, ya que un valor constante proporciona resultados satisfactorios (Klepaczko y Rezaig [48]).

$$\dot{\epsilon}_o(\rho_m) = b \cdot l_o \cdot f \cdot \rho \cdot \varpi = 2 \times 10^{10} s^{-1} \quad \text{Ec. 3-26}$$

Haciendo uso de la expresión de  $\dot{\epsilon}_r(\rho_m)$  en la expresión  $\log(\dot{\epsilon}_r/\dot{\epsilon}_p)$  se obtiene la Ec. 3-27.

$$\log\left(\frac{\dot{\epsilon}_r}{\dot{\epsilon}_p}\right) = \log\left(\frac{\dot{\epsilon}_o}{\dot{\epsilon}_p}\right) - \log[\Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p)] \quad \text{Ec. 3-27}$$

Sustituyendo en la Ec. 3-22 se obtiene la expresión final de la tensión efectiva  $\bar{\sigma}^*$ , Ec. 3-28.

$$\bar{\sigma}^*(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p, T) = \alpha_2 \cdot E(T) \cdot b \cdot \rho_o^{1/2} \cdot \Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p) \cdot \left\langle \left\langle 1 - D_1 \frac{T}{T_m} \cdot \left[ \log\left(\frac{\dot{\epsilon}_o}{\dot{\epsilon}_p}\right) - \log[\Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p)] \right] \right\rangle \right\rangle^{1/p} \quad \text{Ec. 3-28}$$

En esta expresión, la función  $\Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p)$  representa la influencia de la deformación plástica en la sensibilidad a la velocidad de deformación del material, teniendo en cuenta la aniquilación y creación de dislocaciones al tener lugar el proceso de flujo plástico.

En el caso de condiciones adiabáticas, se tendrá en cuenta al igual que en los otros modelos el incremento de temperatura producido por este hecho, lo que dará lugar a un reblandecimiento del material al incrementarse la temperatura. Esta expresión proviene de un simple balance de energía, al que se le aplica un coeficiente (coeficiente de Quinney-Taylor  $\xi$ ) que corrige el balance para concordar con datos experimentales, como ya se ha visto en los otros modelos estudiados.

$$\Delta T(\bar{\epsilon}_p, \bar{\sigma}) = \frac{\xi}{\rho_{mat} c_p} \int_0^{\bar{\epsilon}_p} \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p, T) d\bar{\epsilon}_p \quad \text{Ec. 3-29}$$

La transición de isoterma a adiabático se supondrá a partir de  $\dot{\epsilon}_p = 10s^{-1}$ , de acuerdo con las observaciones experimentales y cálculos aportados por Oussouaddi y Klepaczko [78] y Rusinek et al. [86].

La ecuación final del modelo queda como se presenta a continuación (Ec. 3-30):

$$\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}_p, \dot{\bar{\epsilon}}_p, T) = \alpha_1 \cdot E(T) \cdot \left(\frac{b}{D}\right)^{1/2} + \alpha_2 \cdot E(T) \cdot b \cdot \rho_o^{1/2} \cdot \Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\bar{\epsilon}}_p) \cdot \left\langle 1 - D_1 \frac{T}{T_m} \cdot \left\langle \log\left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}_o}{\dot{\bar{\epsilon}}_p}\right) - \log[\Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\bar{\epsilon}}_p)] \right\rangle \right\rangle^{1/p}$$

Ec. 3-30

Donde:

$$E(T) = E_o \left\{ 1 - \frac{T}{T_m} \exp\left[\theta^* \left(1 - \frac{T_m}{T}\right)\right] \right\} \quad T > 0$$

Ec. 3-4'

Y

$$\Psi(\bar{\epsilon}_p, \dot{\bar{\epsilon}}_p) = \left( 1 + \frac{M_{II}}{\rho_o k_a(\dot{\bar{\epsilon}}_p)} \{ 1 - \exp[-k_a(\dot{\bar{\epsilon}}_p) \cdot \bar{\epsilon}_p] \} \right)^{1/2}$$

Ec. 3-19'

### 3.3. PARÁMETROS DE REFERENCIA

Se conocen de otros autores ciertos parámetros de referencia del modelo, que no será necesario ajustar.

<b>Parámetros del modelo</b>	<b>Cobre OFHC</b>	<b>Referencia</b>
$E_o [MPa]$	$130 \times 10^3$	Nemat-Nasser y Li [73]
$c_p \left[ \frac{J}{kgK} \right]$	385	
$\xi [-]$	0.9	
$\rho_{mat} \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	8960	
$T_m [K]$	1340	
$b [m]$	$2.56 \times 10^{-10}$	
$\rho_o [m^{-2}]$	$5 \times 10^{12}$	
$D [m]$	$62 \times 10^{-6}$	
$\theta^* [-]$	0.9	
$\dot{\epsilon}_o [s^{-1}]$	$2 \times 10^{10}$	
$\dot{\epsilon}_{ao} [s^{-1}]$	$2 \times 10^{10}$	
$D_1 [-]$	0.134	

Tabla 3-1 - Parámetros conocidos del modelo propuesto

Los parámetros que ha sido necesario identificar a partir de datos experimentales se calculan en el Anexo 1 - Identificación de parámetros del modelo propuesto. La Tabla 3-2 muestra los resultados de dichos parámetros:

<b>Parámetros del modelo</b>	<b>Cobre OFHC</b>
$p [-]$	1.1
$\alpha_1 [-]$	0.0281
$\alpha_2 [-]$	0.607
$M_{II} [m^{-2}]$	$1.9 \times 10^{15}$
$m_o [-]$	0.0282
$k_o [-]$	0.366

Tabla 3-2 - Parámetros calculados para el modelo propuesto

Una vez se conocen todos los parámetros del modelo, se puede calcular el flujo de tensiones en cualquier caso, y comprobar la robustez del modelo frente a datos experimentales y frente a otros modelos ya propuestos previamente.

### 3.4. RESULTADOS Y VALIDACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

En primer lugar se analizará como se hizo con los modelos previamente estudiados el comportamiento del material a velocidad constante y varias temperaturas:

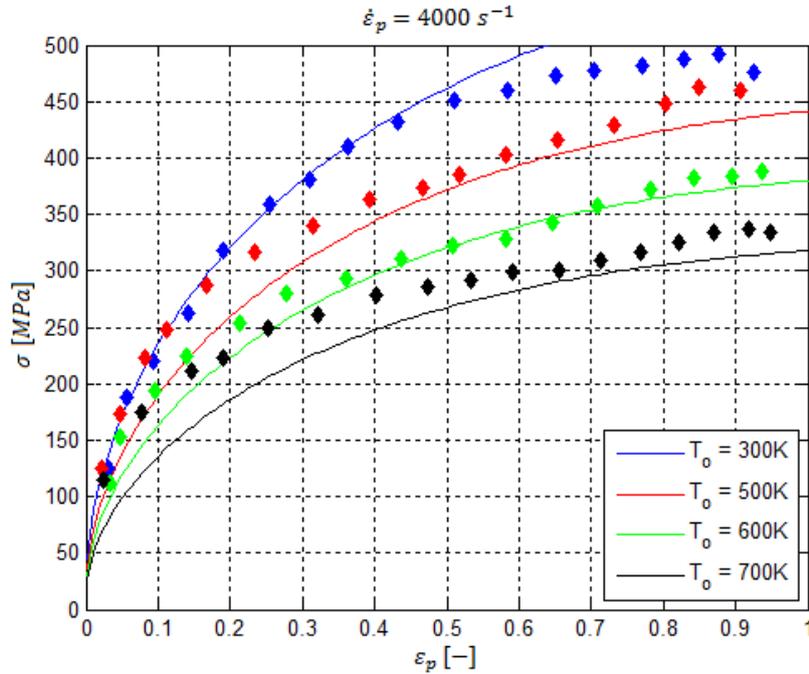


Figura 3.5 - Comparación del modelo propuesto con datos experimentales a una velocidad de deformación de  $4000\text{s}^{-1}$  y varias temperaturas. Los valores que propone el modelo están representados con una línea continua. Los datos experimentales se muestran con diamantes

Se puede observar en la Figura 3.5 que a  $T_o = 700\text{K}$  el modelo no se comporta demasiado bien, pero esto es debido a que se supera la temperatura límite del modelo, que es la mitad de la temperatura de fusión,  $T_{lim} = T_m/2 = 670\text{K}$ .

En la Figura 3.6 aparece la tensión frente a la deformación a varias velocidades de deformación con la temperatura inicial fija. Para velocidades mayores que  $10\text{s}^{-1}$  se tiene en cuenta el aumento de temperatura del material.

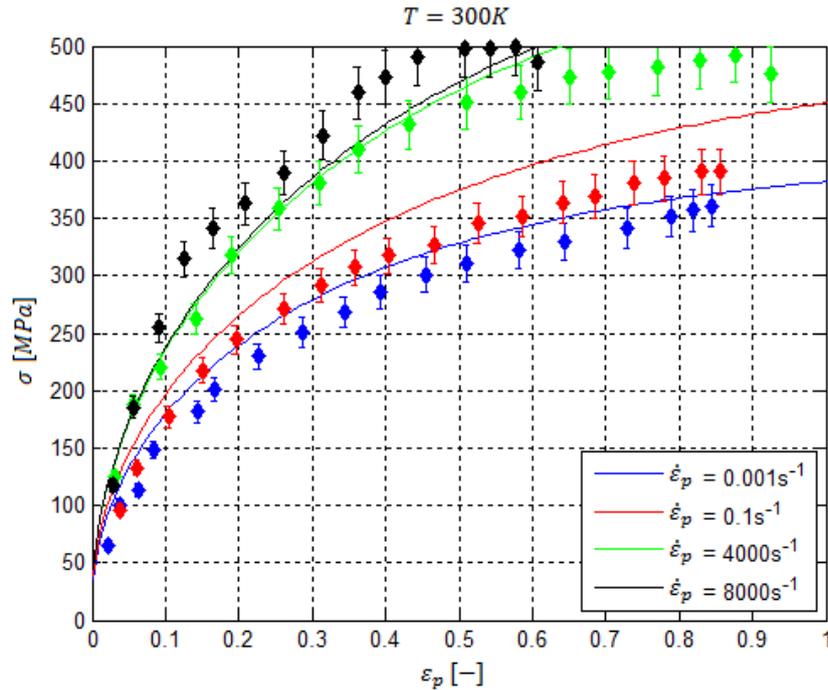


Figura 3.6 - Comparación del modelo propuesto con datos experimentales a temperatura inicial  $T_o$  de 300K y varias velocidades de deformación.

En este caso los resultados se ajustan considerablemente a los datos experimentales, que se representan con un error de  $\pm 5\%$ . Se puede observar para elevadas velocidades de deformación que a partir de cierto valor de la deformación, la tensión según los datos experimentales deja de crecer. Esto es debido a la saturación del material, es decir, a la acumulación de dislocaciones que impide que se sigan formando éstas haciendo que no se incremente la tensión en el material. Cuanto mayor es la velocidad de deformación, antes se alcanza dicho punto de saturación, como se vio en la Figura 3.3 y en la Figura 3.4.

A continuación se mostrará la evolución de la tensión frente a la deformación plástica y la velocidad de deformación para proceso isoterma (Figura 3.7), adiabático (Figura 3.8) y mixto, según sea la velocidad mayor o menor que  $10s^{-1}$ , en cuyo caso se considerará que el proceso es adiabático o isoterma respectivamente (Figura 3.9 y Figura 3.10).

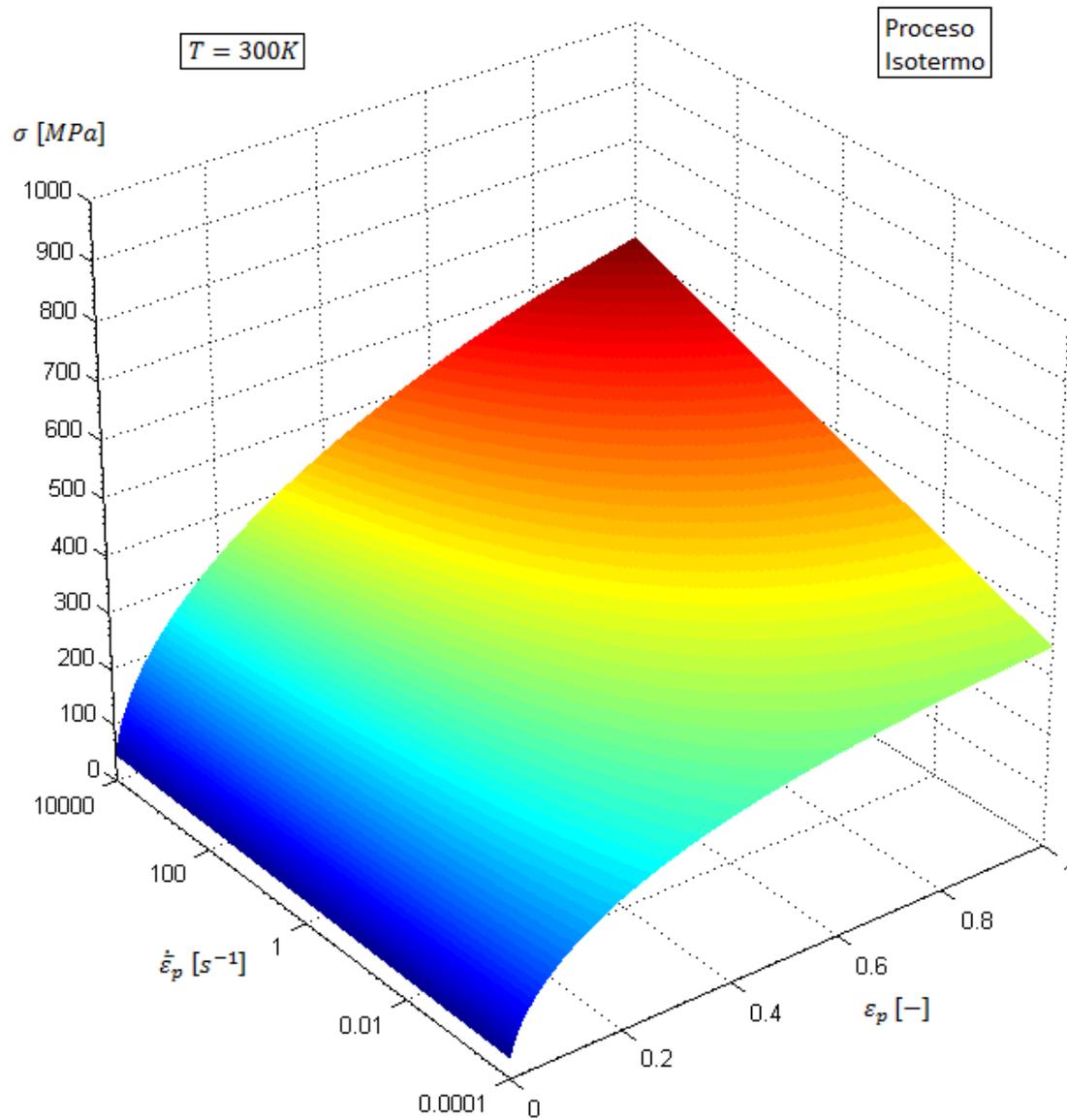


Figura 3.7 - Modelo propuesto. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso isotermo. Material: Cobre OFHC.

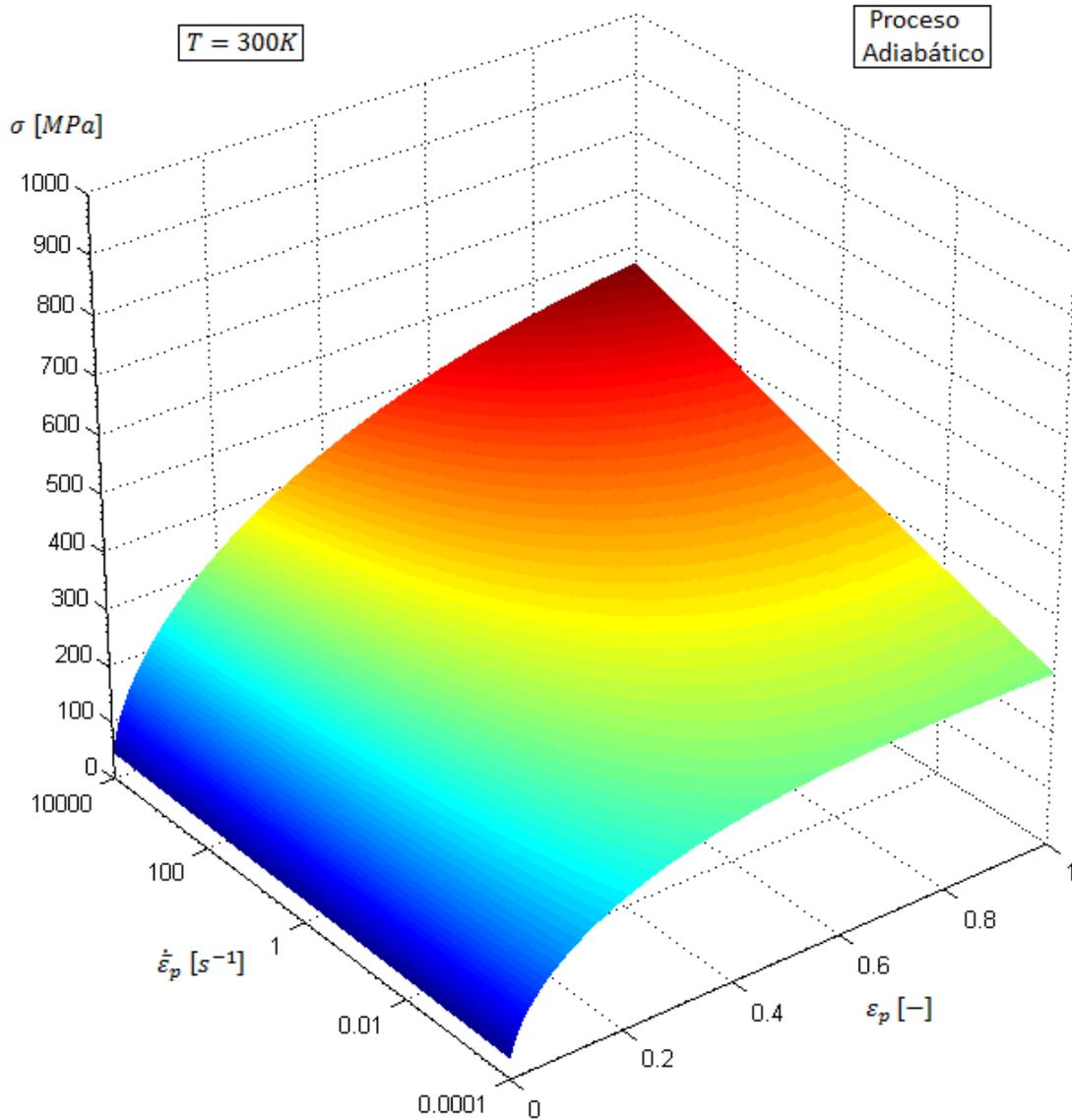


Figura 3.8 - Modelo propuesto. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso adiabático. Material: Cobre OFHC.

Se observa que los resultados proporcionados por el modelo para proceso adiabático son ligeramente inferiores a los proporcionados para el proceso isoterma. Esto es debido al reblandecimiento del material al elevarse la temperatura y es más patente cuanto más deformado se encuentre el material, ya que la cantidad de energía plástica transformada en energía térmica es mayor al aumentar la deformación.

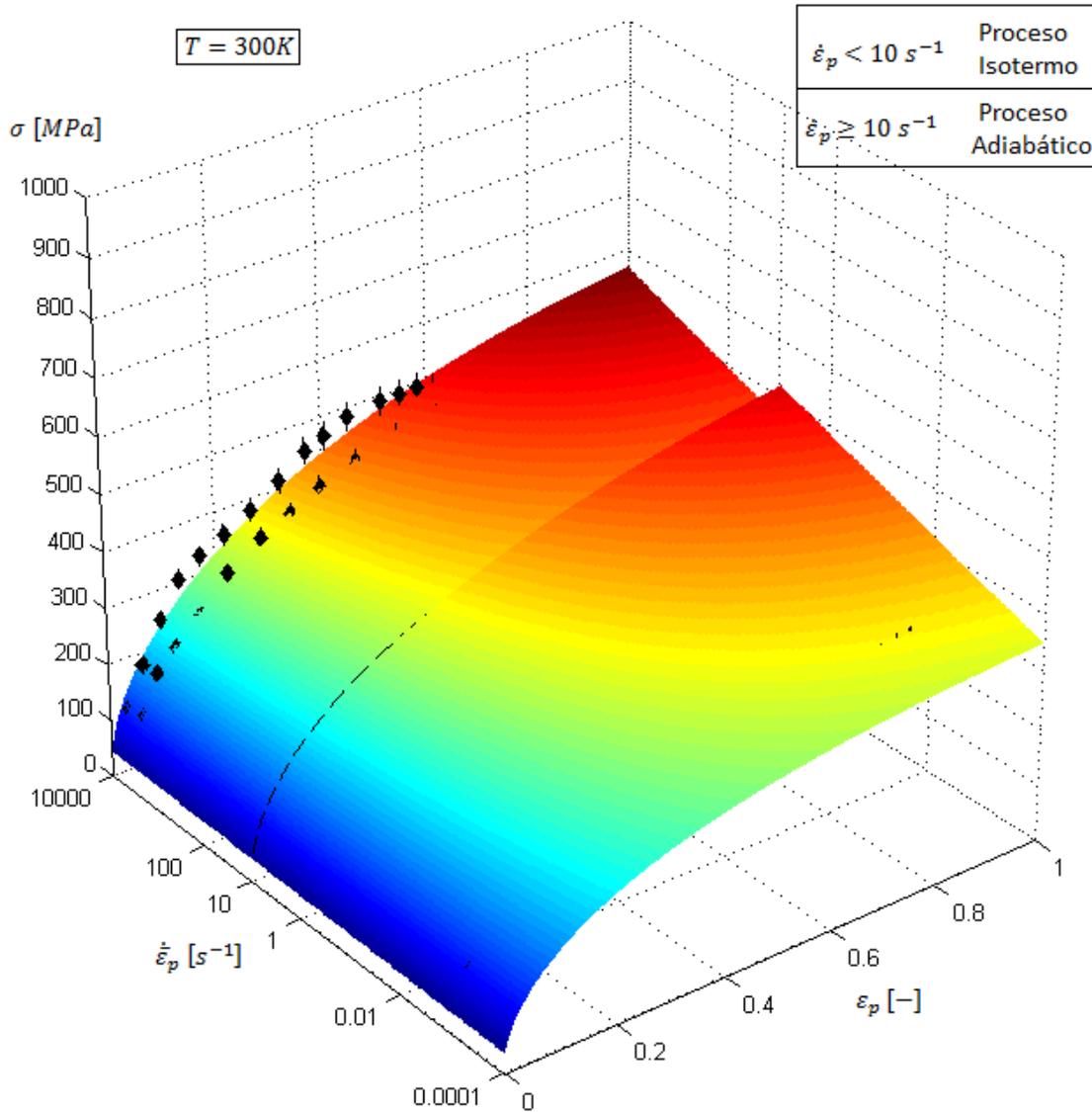


Figura 3.9 - Modelo propuesto. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso mixto. Se muestran además los resultados experimentales marcados con diamantes negros, con un error del  $\pm 5\%$  en la tensión. Material: Cobre OFHC.

Dado que el modelo sobreestima para ciertas velocidades la tensión, se mostrará la misma gráfica desde otro ángulo que permita ver los datos experimentales, que, como se vio en la Figura 3.6, se aproximan bastante a lo predicho por el modelo. Se observa en las tres últimas gráficas (Figura 3.7, Figura 3.8 y Figura 3.9) que a deformaciones muy pequeñas la diferencia de velocidad de deformación no supone una variación importante de la tensión. Por el contrario, a elevadas deformaciones, la sensibilidad a la velocidad de deformación es importante. Estas variaciones de tensión debidas a la velocidad de deformación se estudiarán más adelante.

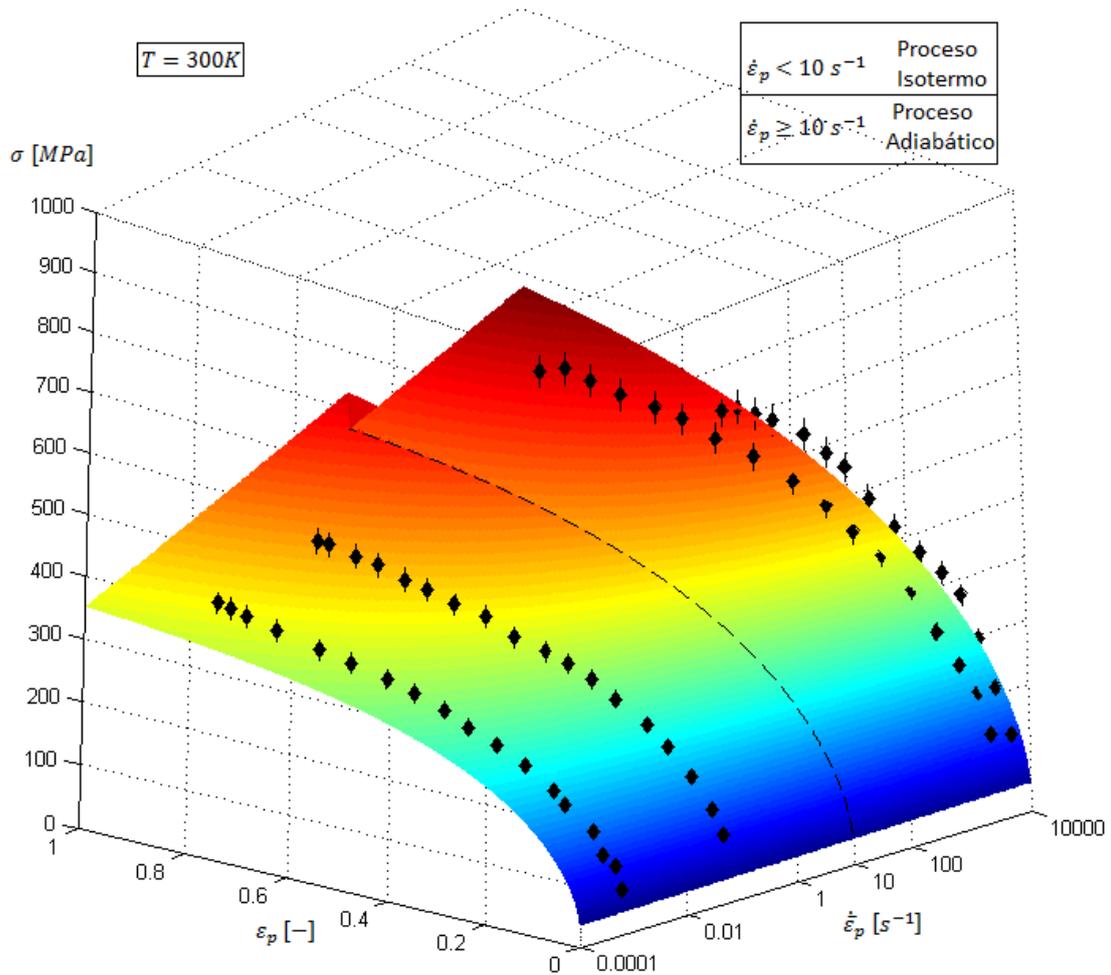


Figura 3.10 - Modelo propuesto. Tensión-Deformación-Velocidad a temperatura inicial de 300K, proceso mixto. Se muestran además los resultados experimentales marcados con diamantes negros, con un error del  $\pm 5\%$  en la tensión. Material: Cobre OFHC.

En estas dos últimas figuras (Figura 3.9 y Figura 3.10), se puede observar el salto en la tensión a  $\dot{\epsilon}_p = 10s^{-1}$ , dado que a esa velocidad se considera el incremento de temperatura producido por la adiabaticidad del proceso.

Un análisis de la influencia de la temperatura inicial también puede resultar útil.

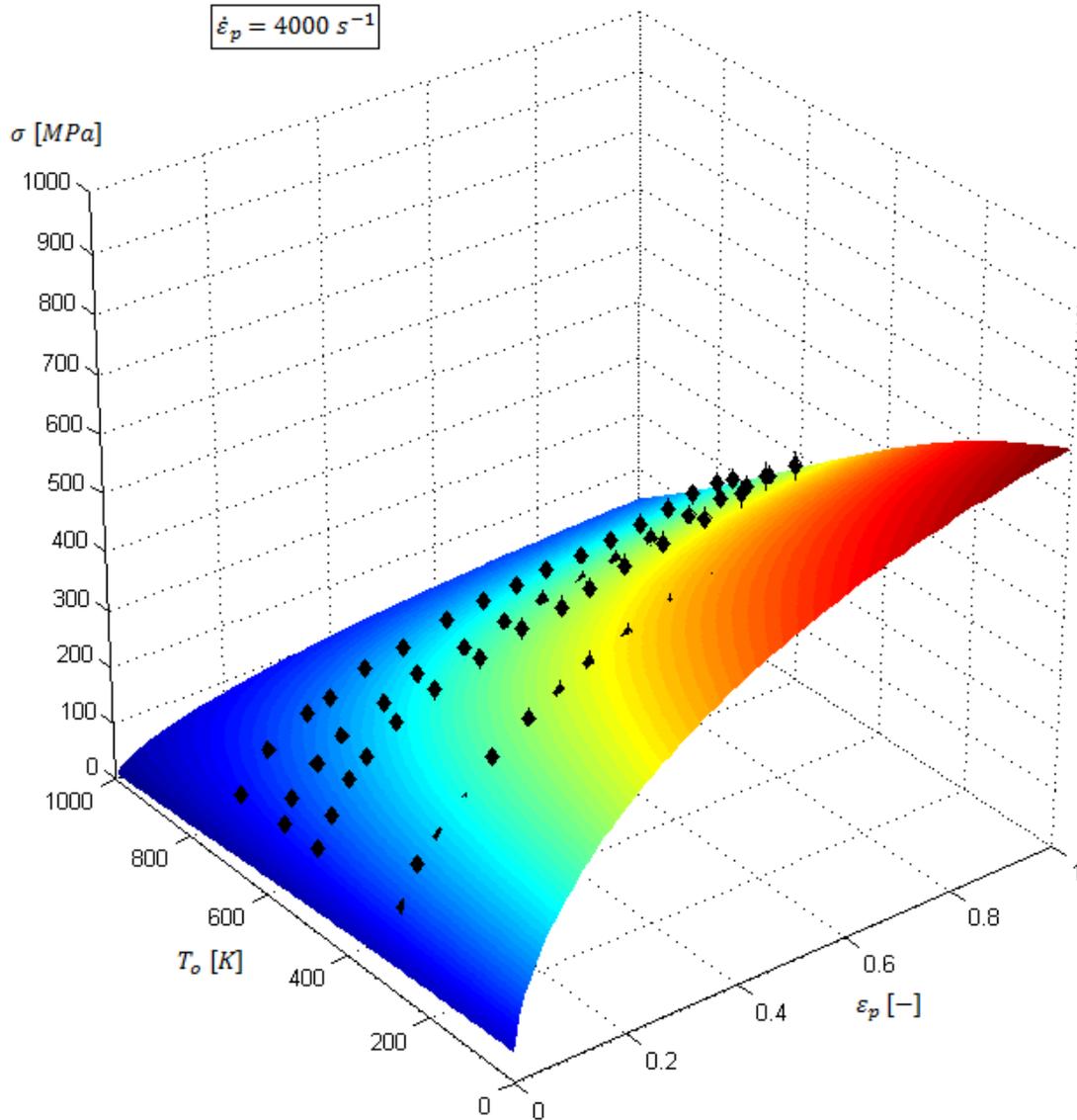


Figura 3.11 - Modelo propuesto. Tensión-Deformación-Temperatura inicial a velocidad de deformación  $4000\text{s}^{-1}$  (Proceso adiabático). Material: Cobre OFHC.

En la Figura 3.11 se observa el efecto de la temperatura sobre el flujo de tensiones en un proceso adiabático. Los resultados experimentales coinciden bastante bien, pero a partir de  $T = 670\text{K}$  el modelo deja de ser aplicable, por lo que los resultados a partir de ese punto no tienen por qué coincidir, como pasa con la secuencia de datos experimentales a  $T = 700\text{K}$  (A lo que hay que sumar el incremento de temperatura debido a la deformación del material).

En un proceso isoterma, se observará que la temperatura afecta drásticamente al modelo, ya que se tiene en cuenta la variación del módulo de elasticidad del material, y que éste afecta directamente a las componentes interna y efectiva de la tensión (Figura 3.12).

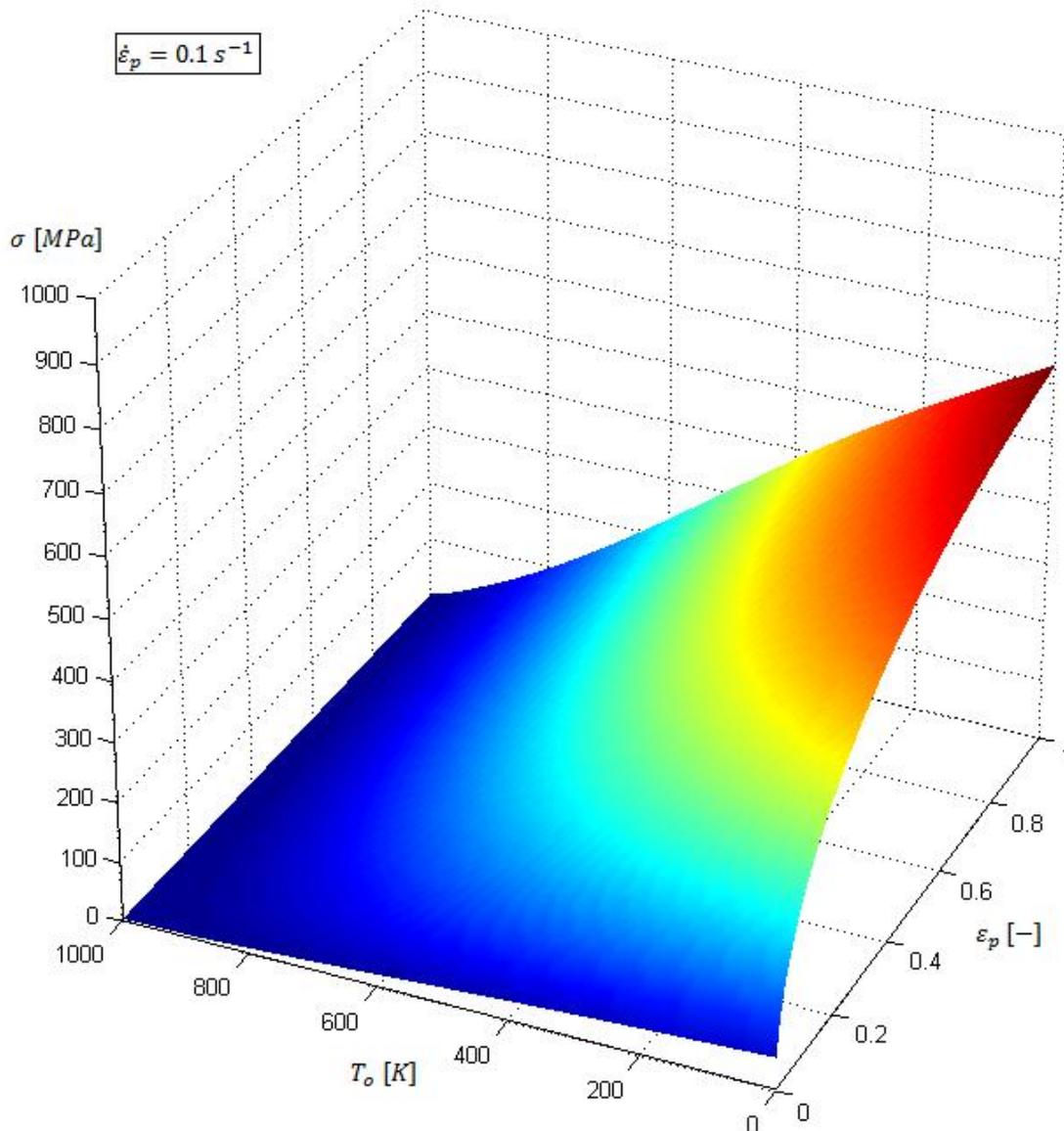


Figura 3.12 - Modelo propuesto. Tensión-Deformación-Temperatura inicial a velocidad de deformación  $0.1\text{s}^{-1}$  (Proceso isoterma). Material: Cobre OFHC.

Se observa en la Figura 3.12 porqué deja de tener validez el modelo a altas temperaturas. La disminución del módulo de elasticidad quedó patente en la Figura 3.1, y este efecto, sumado a la disminución de la tensión efectiva con la temperatura, hace que la tensión alcance valores demasiado pequeños. A cambio se consigue que a bajas temperaturas la tensión no llegue a tomar valores ridículamente elevados, como sucede con los otros modelos previamente estudiados.

En ambas figuras, se puede comprobar cómo afecta la temperatura a la tensión del límite elástico, que viene dada por las dos componentes de la tensión, cuyo valor disminuye al aumentar la temperatura. A deformaciones elevadas, la tensión se ve más afectada por la temperatura, tanto en el proceso isoterma como el adiabático, ya que el efecto de

disminución del límite elástico se ve amplificado al aumentar la densidad de dislocaciones en el material.

También el endurecimiento por deformación  $\theta = \partial\sigma/\partial\varepsilon_p$  se ve afectado de manera importante por la temperatura, observándose una disminución considerable del mismo al aumentar la primera.

Una gráfica similar a la Figura 3.11 puede observarse a continuación, en la que se muestran la evolución de la tensión proporcionada por el modelo a diferentes valores de deformación (Figura 3.13).

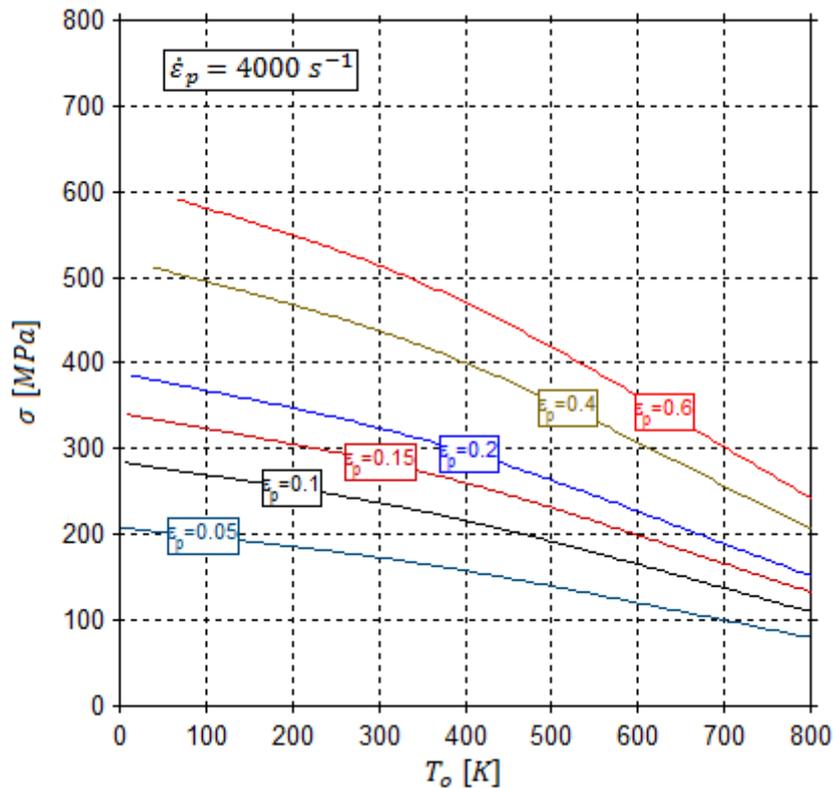


Figura 3.13 - Tensión-Temperatura inicial a diferentes valores de deformación plástica y velocidad de deformación  $4000\text{s}^{-1}$ .  
Material: Cobre OFHC.

En esta figura se observa perfectamente que el endurecimiento del material debido a la temperatura  $\nu = \partial\sigma/\partial T$  disminuye (es más negativo, aumentando así su importancia) al aumentar la deformación plástica.

En la Figura 3.14 se muestran resultados experimentales (Nemat-Nasser y Li [73]) comparados con las curvas anteriores, siendo patente la proximidad de los resultados experimentales con los que el modelo provee.

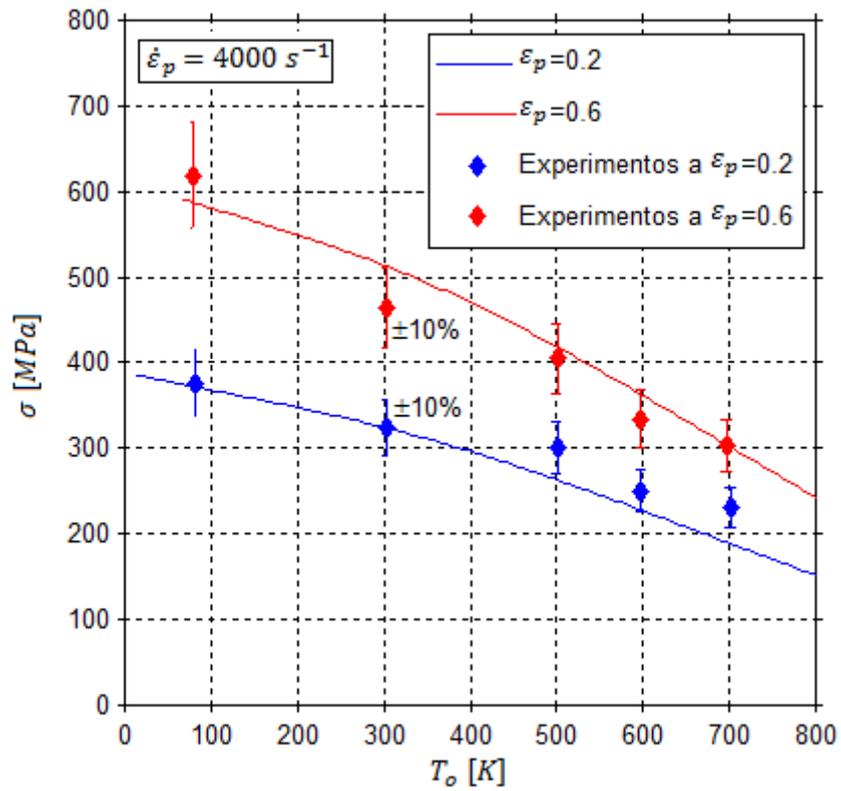


Figura 3.14 - Tensión - Temperatura inicial. Datos experimentales frente a resultados del modelo. Material: Cobre OFHC.

Esta figura puede ser representada tridimensionalmente, tal y como se hizo en la Figura 3.11, salvo que en esta ocasión se muestran los datos experimentales para deformaciones fijas  $\epsilon_p = 0.2$  y  $\epsilon_p = 0.6$ .

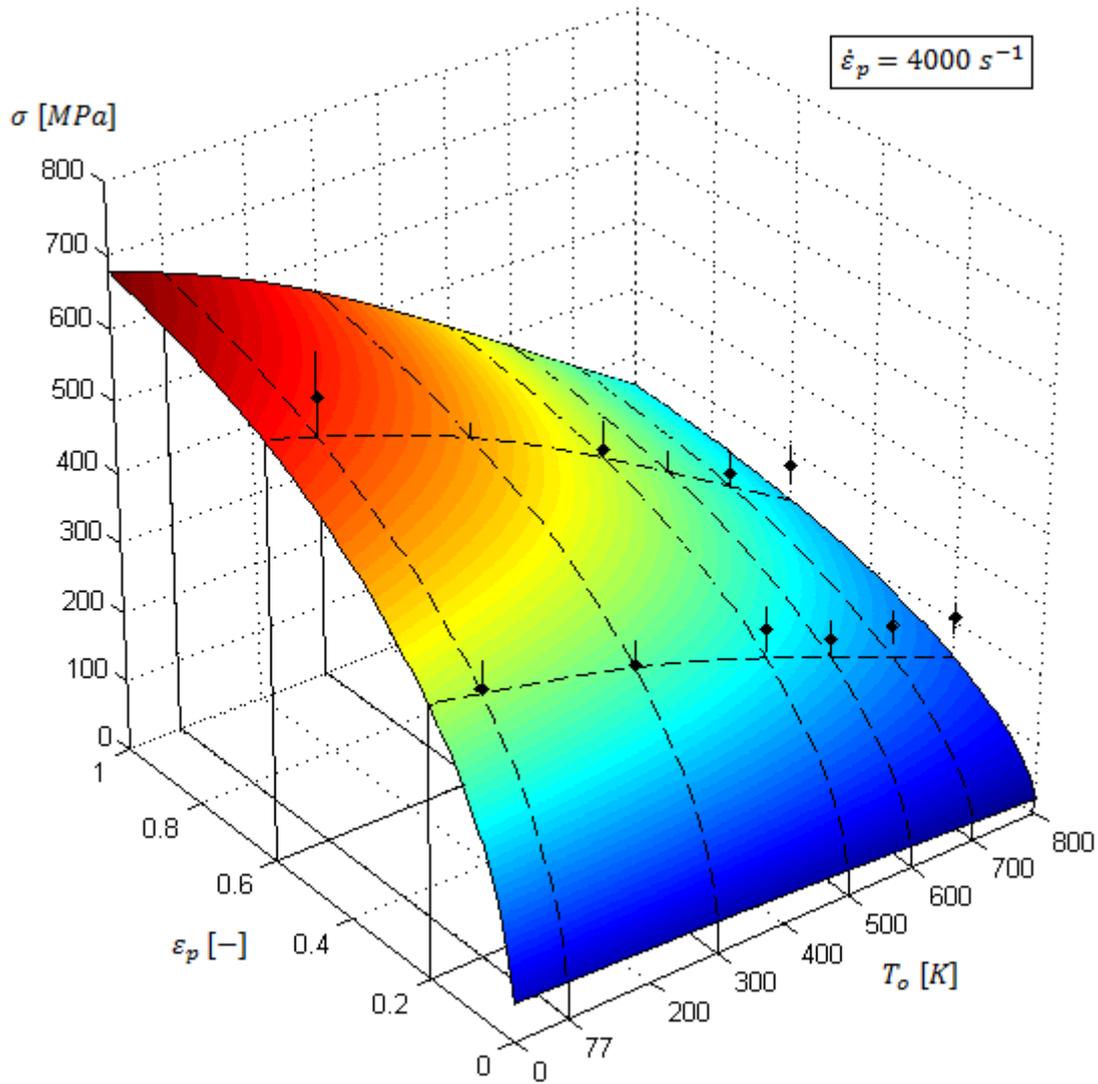


Figura 3.15. - Curva tensión-deformación-temperatura inicial a velocidad  $4000\text{s}^{-1}$  con datos experimentales a dos deformaciones fijas. Material: Cobre OFHC.

Para cargas cuasiestáticas ( $\dot{\epsilon}_p \approx 10^{-3}\text{s}^{-1}$ ), los autores Lennon y Ramesh [57] y Tanner y McDowell [93], proporcionan los siguientes resultados (Figura 3.16).

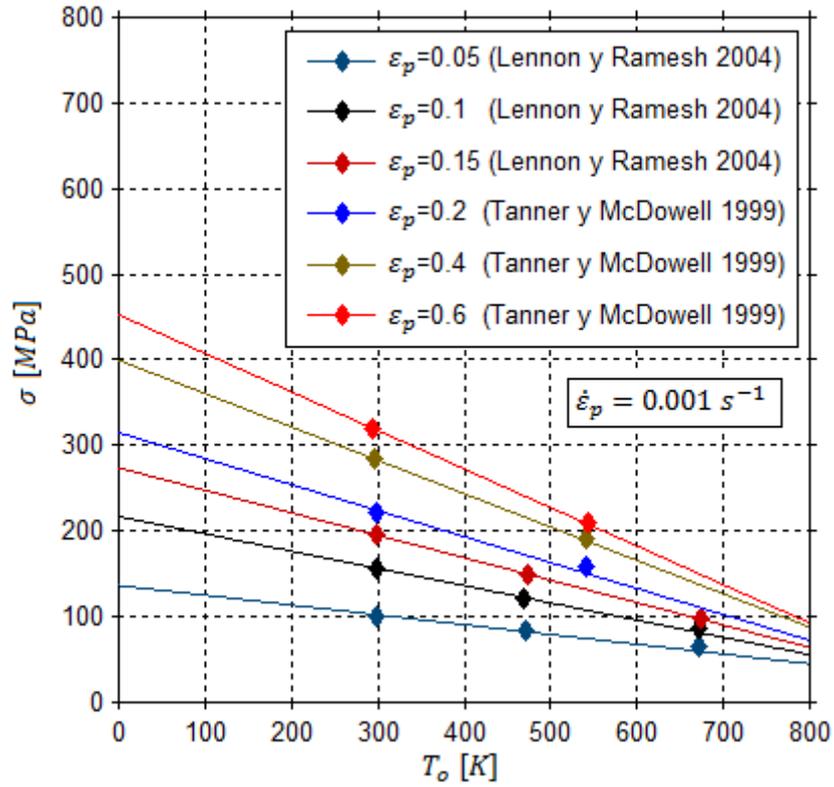


Figura 3.16 - Resultados experimentales de diversas fuentes

Se puede observar una relación muy bien definida entre la temperatura y la tensión para varios valores de deformación. Los datos sólo se muestran en un rango de temperaturas similar al del modelo propuesto. En la Figura 3.17 y la Figura 3.18 se muestran los resultados experimentales comparados con los proporcionados por el modelo.

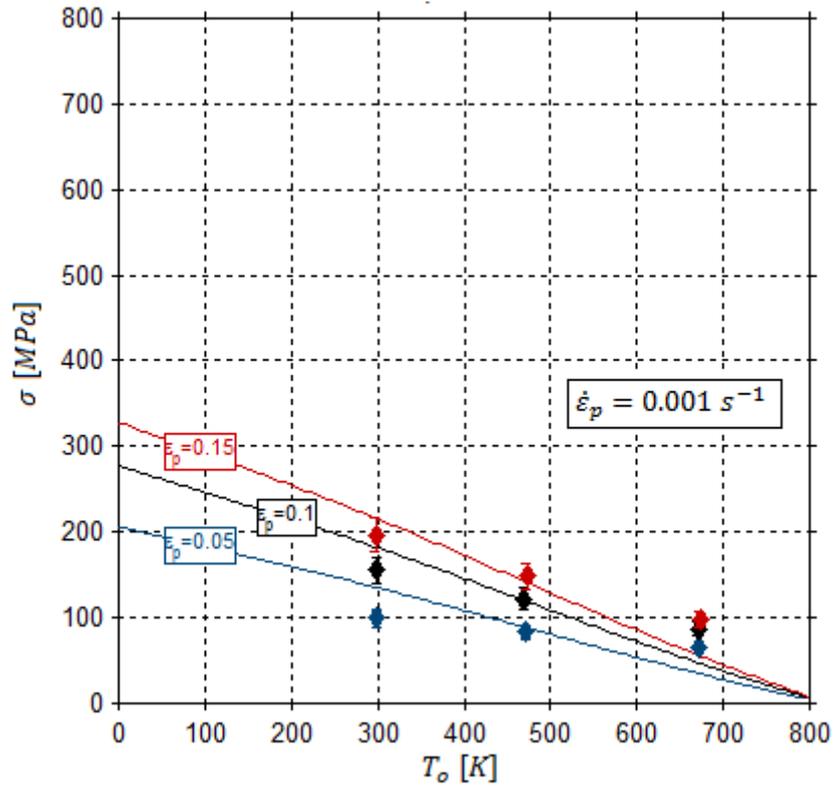


Figura 3.17 - Comparación del modelo propuesto y los datos experimentales (marcados con diamantes) de Lennon y Ramesh [57].

Los resultados se aproximan bastante a los datos experimentales, y siguen una tendencia lineal, como se propuso en la Figura 3.16.

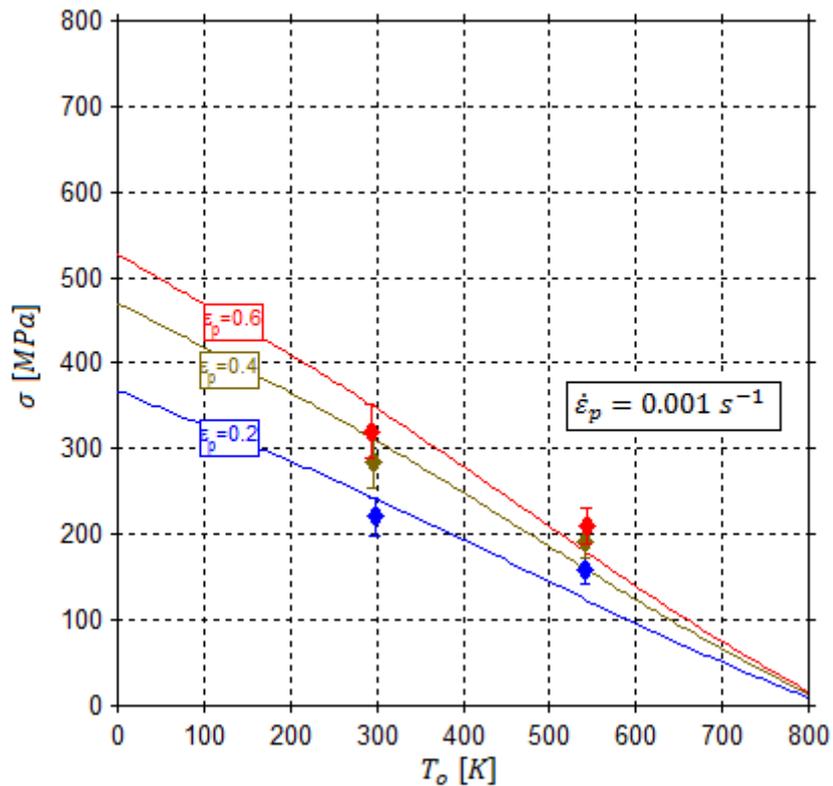


Figura 3.18 - Comparación del modelo propuesto y los datos experimentales (marcados con diamantes) de Tanner y McDowell [93].

En este caso los resultados y los datos también son bastante cercanos. También se cumple una relación lineal entre la tensión y la temperatura para deformaciones mayores.

Quizá en la Figura 3.17 y Figura 3.18, la pendiente sea ligeramente más acentuada de lo que sería deseable. Esto puede ser debido a la influencia negativa que tiene la temperatura en la tensión del material, que es especialmente destacable en este modelo.

Ambas gráficas pueden representarse en tres dimensiones, incluyendo la deformación plástica en el nuevo eje. Por razones de visibilidad se separarán de nuevo ambas gráficas, incluyendo cada una los datos experimentales de cada autor.

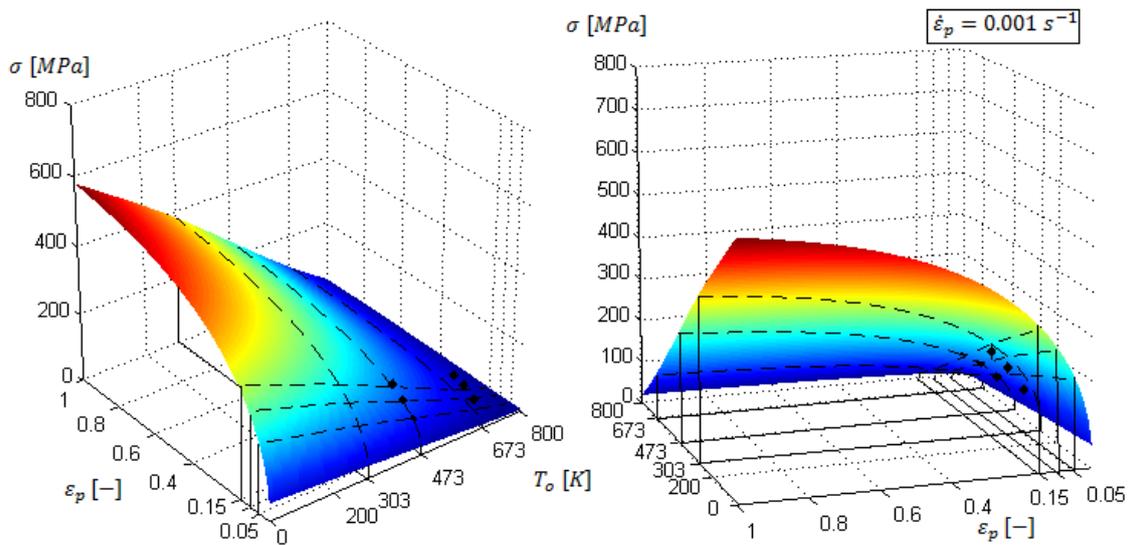


Figura 3.19 - Superficie tensión-deformación-temperatura inicial con datos experimentales de Lennon y Ramesh [57].

Se observa nuevamente cómo el modelo ofrece resultados muy cercanos a los experimentales, y también la relación prácticamente lineal entre la tensión y la temperatura a deformación constante.

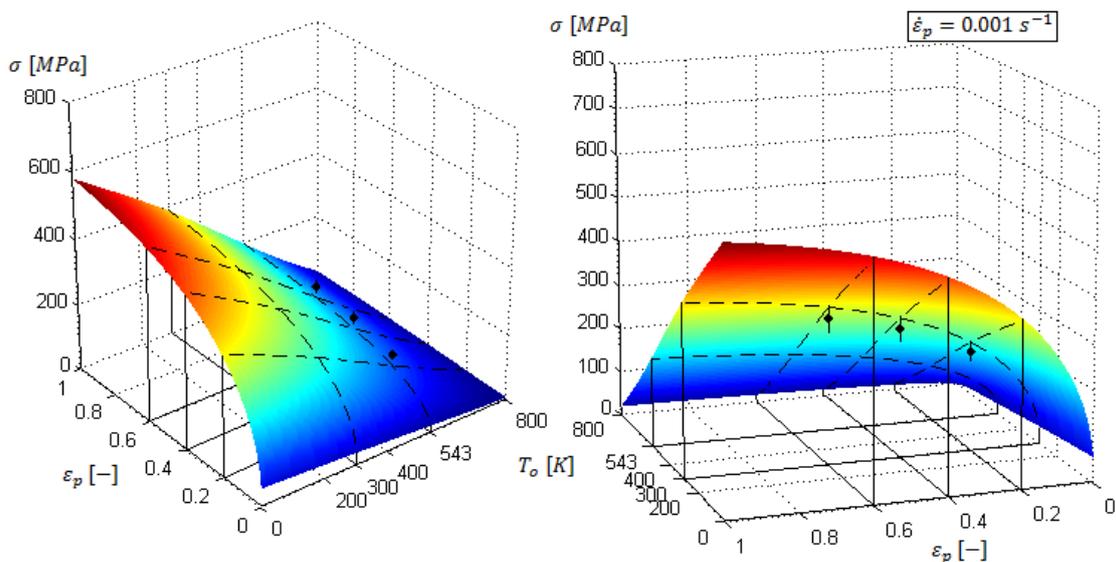


Figura 3.20 - Superficie tensión-deformación-temperatura inicial con datos experimentales de Tanner y McDowell [93].

De nuevo se observa la misma relación, y cierta similitud entre los resultados proporcionados por el modelo y los datos experimentales.

Habiendo analizado la relación entre la tensión, la temperatura y la velocidad de deformación, se procederá a estudiar el efecto de la velocidad de deformación sobre el flujo de tensiones. Para ello, se escogerán valores fijos de deformación y se analizará el comportamiento del material, amén de comparar los resultados con datos experimentales. El proceso es similar al realizado previamente con la temperatura, una indicación más de que en procesos de deformación plástica de metales, temperatura y velocidad de deformación están ligados.

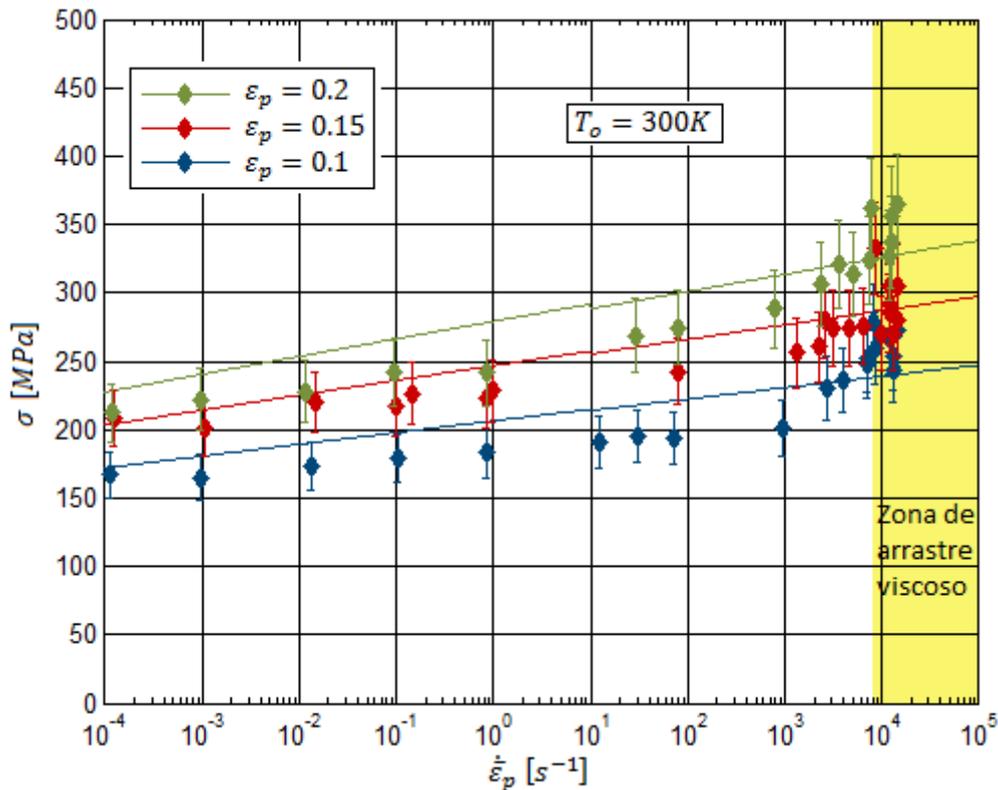


Figura 3.21 - Curvas tensión-velocidad de deformación para tres valores de deformación fija a una temperatura inicial de 300K. Adicionalmente se muestran datos experimentales (Follansbee [23], Nemat-Nasser y Li [73]) marcados con diamantes.

En la Figura 3.21 se observan los resultados obtenidos mediante el modelo en línea continua y los datos experimentales para tres valores diferentes de deformación y temperatura inicial fija  $T_0 = 300K$ . Se puede observar que el modelo y los datos experimentales están muy próximos y siguen la misma tendencia para todas las velocidades de deformación excepto para aquellas velocidades que superan los  $8000 s^{-1}$ , velocidad a partir de la cual se comienza a dar el ya citado arrastre viscoso, que hace que la tensión se eleve drásticamente. Es por ello que este modelo sólo opera en velocidades que estén comprendidas en el intervalo  $\dot{\epsilon}_p \in [10^{-4}, 8000]s^{-1}$ . La velocidad mínima puede ser cualquiera, pero a partir de  $10^{-3}s^{-1}$  se puede considerar que el proceso es cuasiestático (Rodríguez-Martínez y Rusinek [81]). También es observable en esta figura la transición de isoterma a adiabático que tiene lugar en  $\dot{\epsilon}_p = 10s^{-1}$ . A esa velocidad tiene lugar una pequeña disminución de la tensión (debida al

incremento de temperatura que se empieza a tener en cuenta), que es más pronunciada cuanto mayor es la deformación a la que tiene lugar.

A continuación se analizará el efecto combinado de temperatura inicial y velocidad de deformación plástica sobre la tensión para tres valores diferentes de deformación. Estas gráficas permitirán identificar la sensibilidad a la temperatura y a la velocidad de deformación a la vez, y, las tres en combinación, permitirán observar la influencia de estas dos magnitudes sobre el endurecimiento por deformación (Figura 3.22, Figura 3.23 y Figura 3.24).

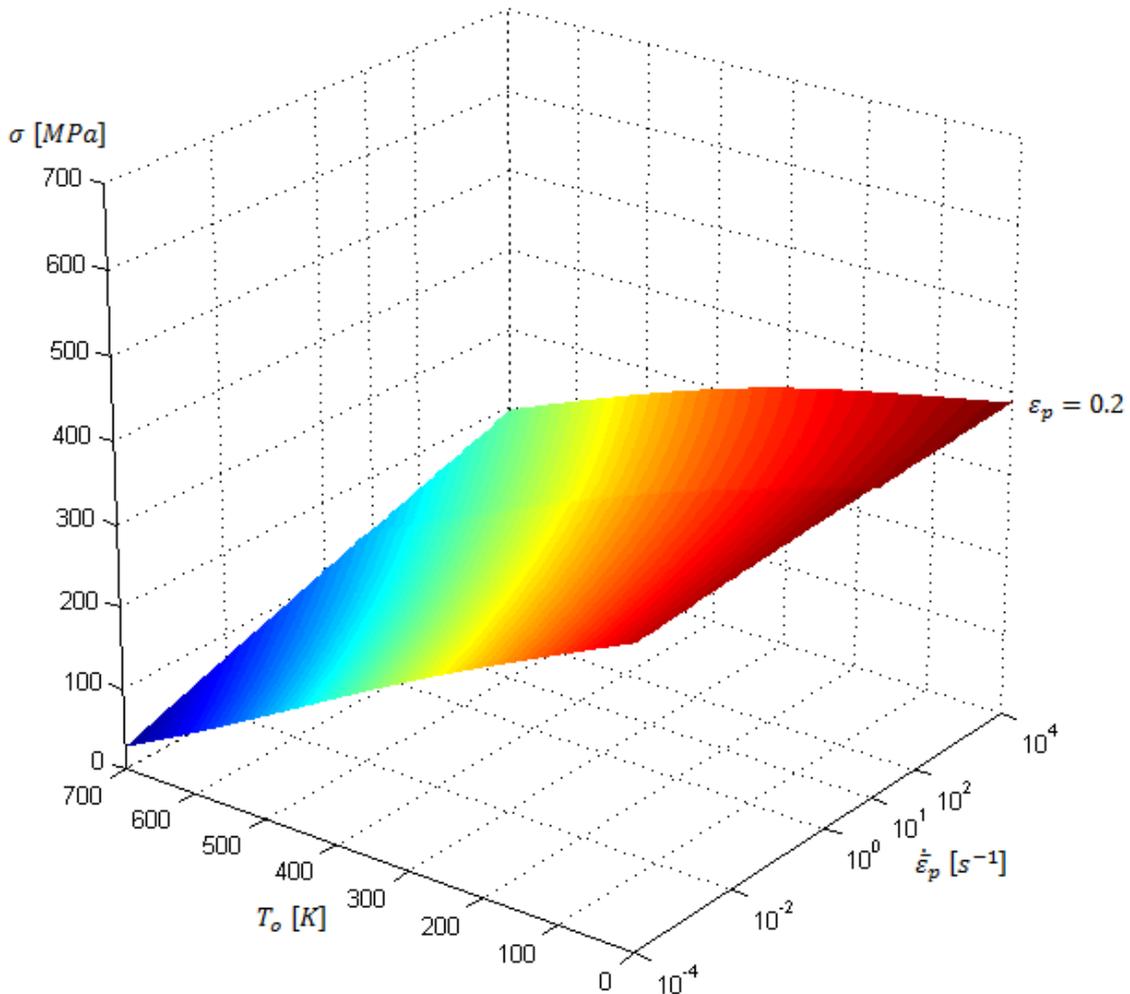


Figura 3.22 - Evolución del flujo de tensiones en función de la temperatura inicial y la velocidad de deformación para una deformación fija de 0.2.

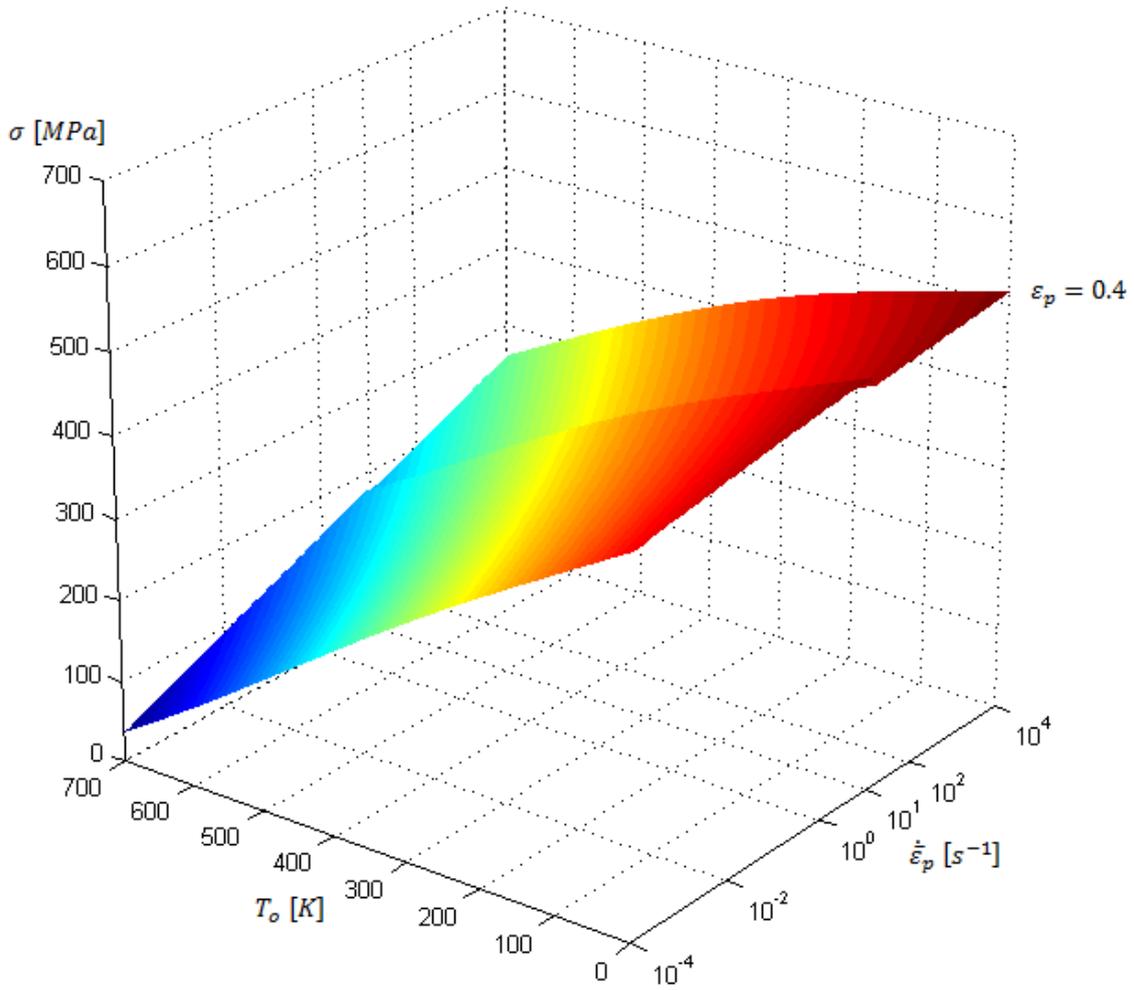


Figura 3.23 - Evolución del flujo de tensiones en función de la temperatura inicial y la velocidad de deformación para una deformación fija de 0.4.

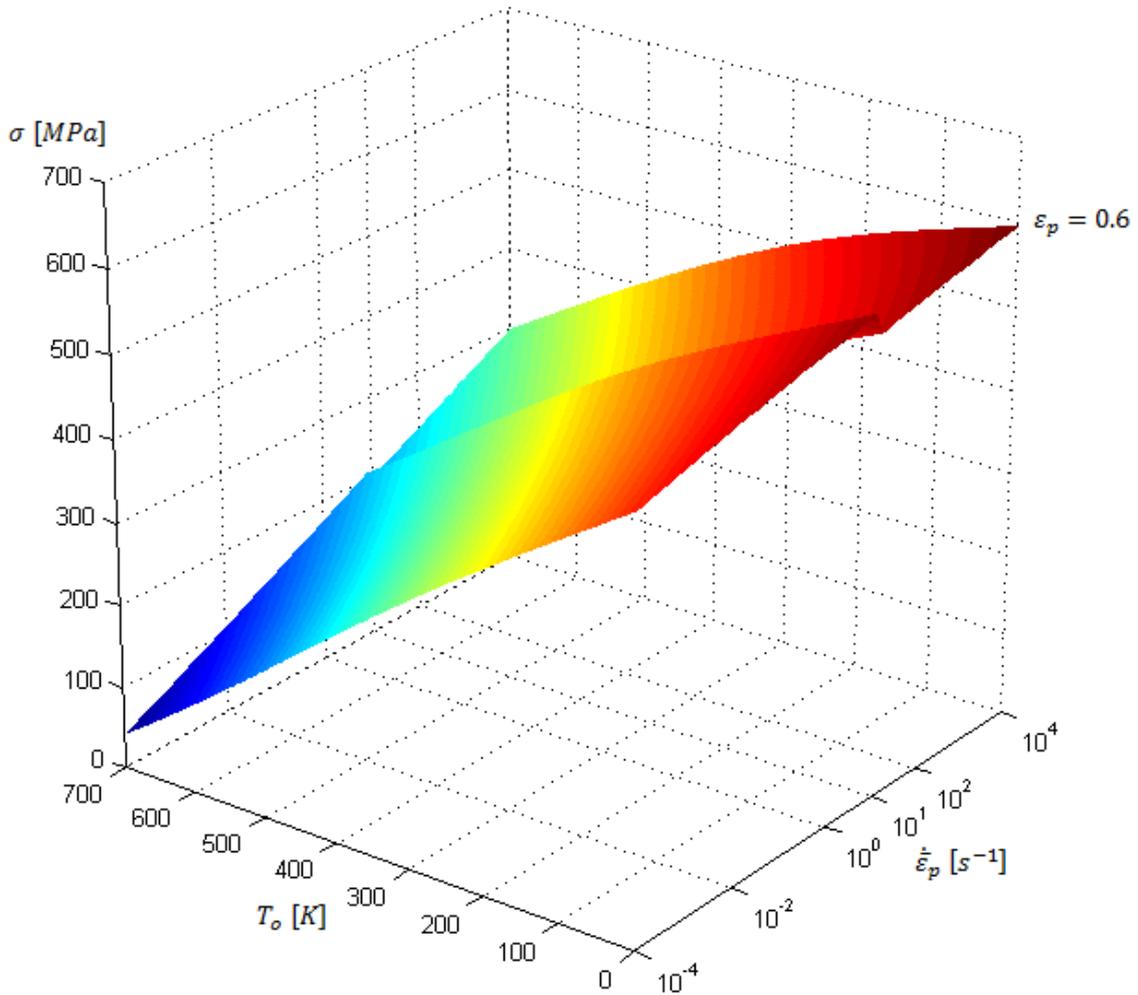


Figura 3.24 - Evolución del flujo de tensiones en función de la temperatura inicial y la velocidad de deformación para una deformación fija de 0.6.

En las tres últimas figuras se puede observar que la sensibilidad a la temperatura  $v = \partial\sigma/\partial T$  es mucho mayor (en valor absoluto) a velocidades bajas. Esto es debido a que a bajas velocidades el término térmico (Ec. 3-31) cobra mayor importancia a velocidades bajas:

$$\left\langle 1 - D_1 \left( \frac{T}{T_m} \right) \cdot \left\langle \log \left( \frac{\dot{\epsilon}_o}{\dot{\epsilon}_p} \right) - \log \left( \Psi(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p) \right) \right\rangle \right\rangle^{\frac{1}{p}} \quad \text{Ec. 3-31}$$

Es decir, si disminuye la velocidad de deformación, disminuye el valor de la función  $\Psi(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p)$ , que es creciente con la velocidad de deformación y aumenta el valor de  $\log(\dot{\epsilon}_o/\dot{\epsilon}_p)$ , aumentando el término que multiplica a  $(T/T_m)$ . Físicamente esto se puede interpretar como que la densidad de dislocaciones a velocidades muy bajas (deformación cuasiestática) se ve dominada por la temperatura, ya que al ser la velocidad tan baja, si sólo de ella dependiera el proceso, las dislocaciones tendrían tiempo suficiente para reordenarse, haciendo que no sea necesaria la aparición de nuevas dislocaciones. A elevadas velocidades, el movimiento de las dislocaciones comienza a verse afectado por esta magnitud también, y un aumento de

velocidad tiene el efecto contrario a un aumento de la temperatura (la primera causa un aumento en el flujo de tensiones, mientras que la segunda provoca una disminución), haciendo que se contrarresten y disminuyendo, por tanto, la sensibilidad a la temperatura  $v = \partial\sigma/\partial T$ .

En cuanto a la sensibilidad a la velocidad de deformación  $m = \partial\sigma/\partial \log \dot{\epsilon}_p$ , parece ser mayor cuanto mayor es la temperatura inicial. En la Ec. 3-31 está la respuesta: Cuanto mayor sea la temperatura, mayor será el factor que multiplica al término que incluye dependencia de la velocidad de deformación. La interpretación física indica que al ser la temperatura inicial muy elevada, las dislocaciones tienen energía suficiente para superar obstáculos y reordenarse, permitiendo que aparezcan más dislocaciones en cualquier momento. Por el contrario, a bajas temperaturas las dislocaciones no tienen energía para superar obstáculos ni capacidad para reordenarse, por lo que el efecto de la velocidad de deformación se emplea en aumentar la energía de las dislocaciones para superar los obstáculos que a elevadas temperaturas se superarían fácilmente. La falta de capacidad de reordenación de dislocaciones a bajas temperaturas será la causante de que el material no acepte más dislocaciones debido a otro efecto como puede ser la velocidad de deformación.

El endurecimiento por deformación  $\theta = \partial\sigma/\partial\epsilon_p$  se puede observar en estas tres figuras, pero no se puede aventurar nada acerca de cómo afectan temperatura y velocidad al estar las tres figuras separadas. Para ello se han empleado previamente las figuras Figura 3.7, Figura 3.8 y Figura 3.9 que permiten observar la influencia de la velocidad sobre el endurecimiento por deformación y la Figura 3.11 y Figura 3.12 para comprobar la influencia de la temperatura sobre el endurecimiento por acritud.

Adicionalmente, se compararán los resultados obtenidos mediante este modelo con los resultados obtenidos por los tres modelos introducidos previamente al propuesto, junto con datos experimentales. La comparación se efectuará a diferentes velocidades de deformación y temperaturas iniciales haciendo uso de curvas tensión-deformación.

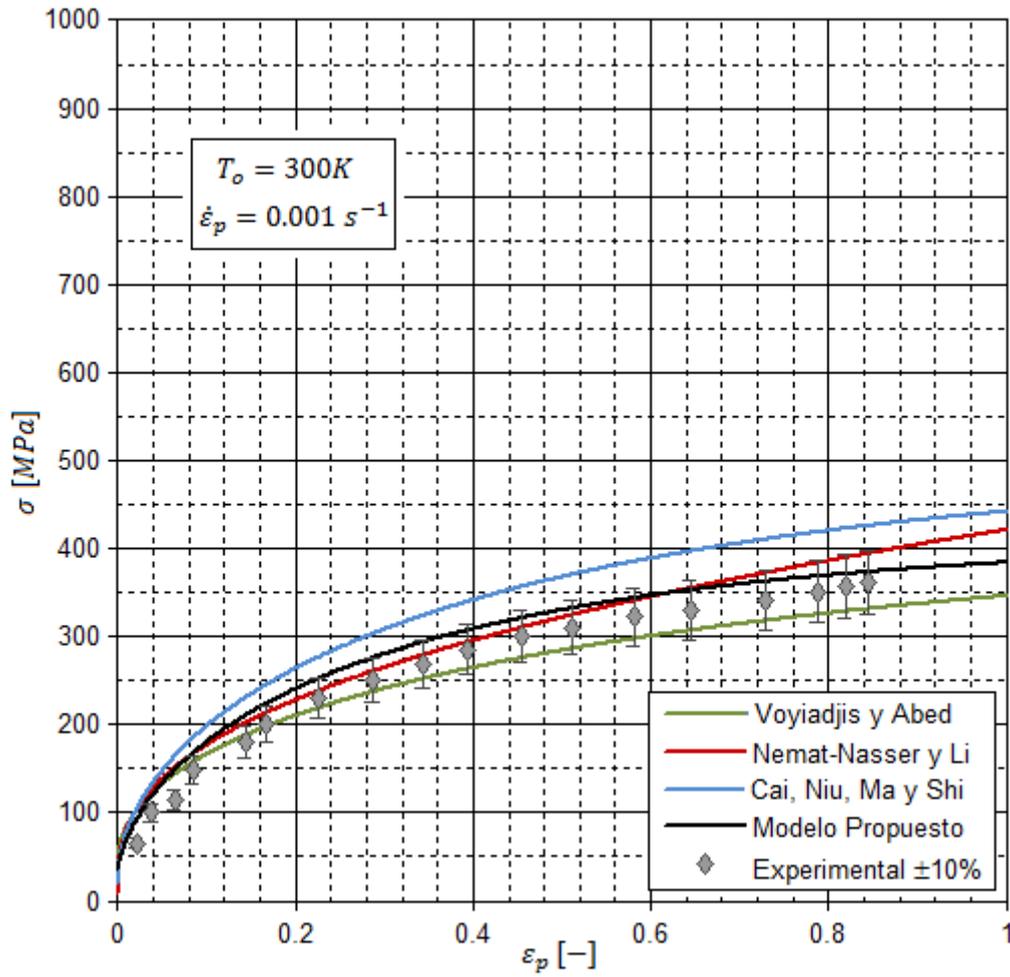


Figura 3.25 - Comparación de los cuatro modelos incluyendo datos experimentales. Temperatura inicial: 300K. Velocidad de deformación:  $0.001s^{-1}$ .

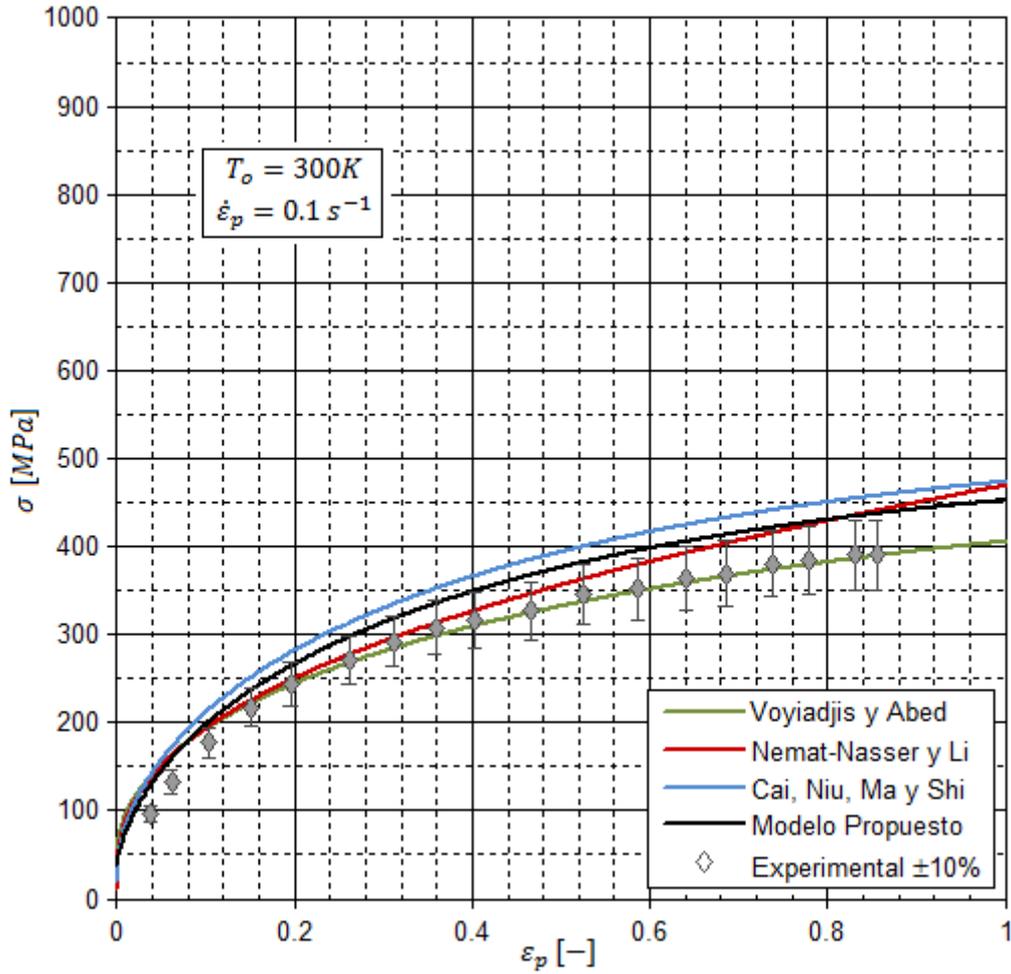


Figura 3.26 - Comparación de los cuatro modelos incluyendo datos experimentales. Temperatura inicial: 300K. Velocidad de deformación:  $0.1s^{-1}$ .

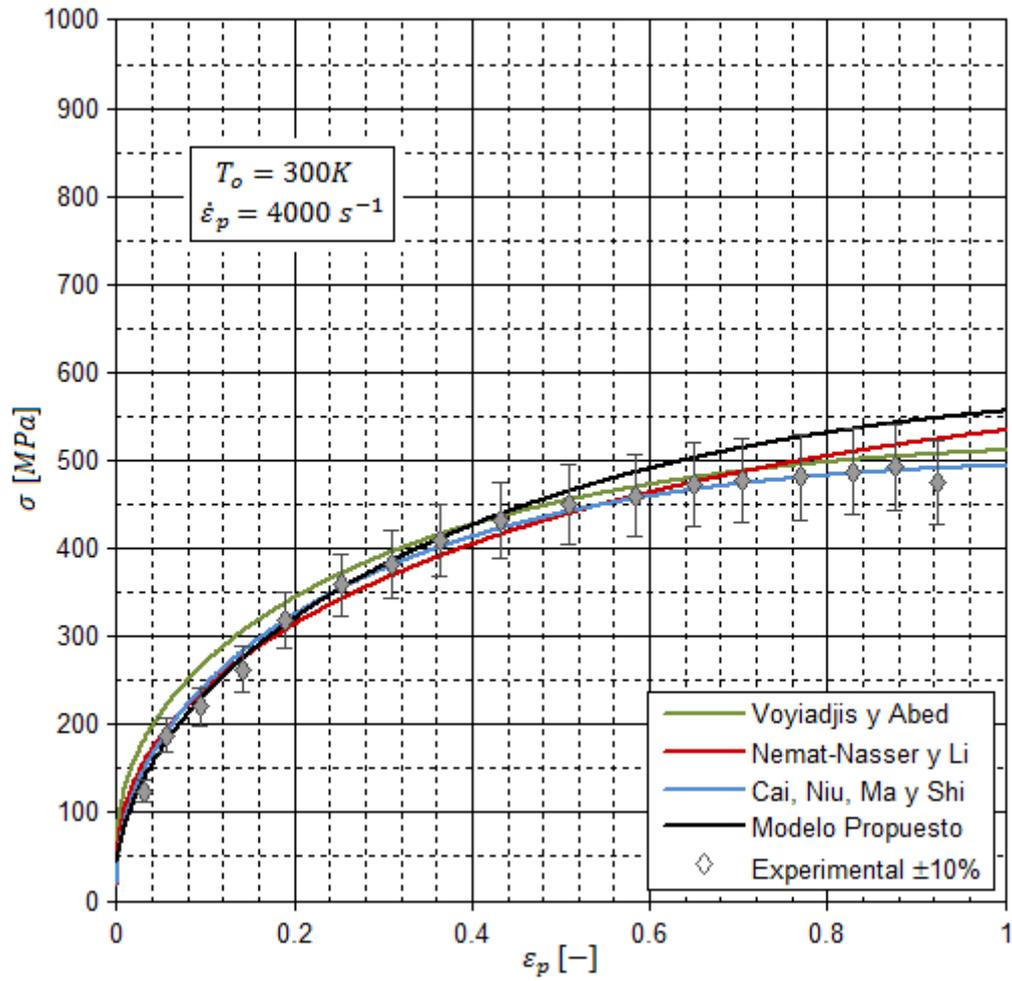


Figura 3.27 - Comparación de los cuatro modelos incluyendo datos experimentales. Temperatura inicial: 300K. Velocidad de deformación:  $4000s^{-1}$ .

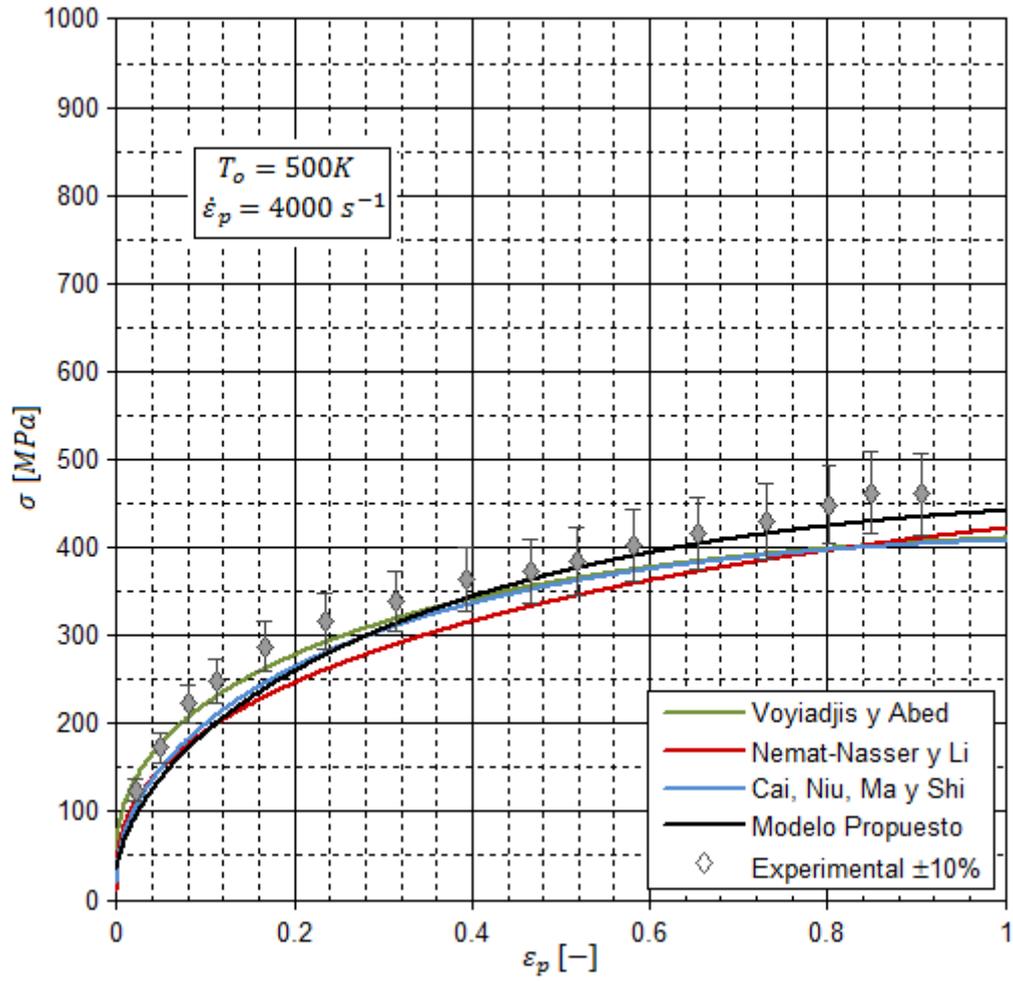


Figura 3.28- Comparación de los cuatro modelos incluyendo datos experimentales. Temperatura inicial: 500K. Velocidad de deformación:  $4000s^{-1}$ .

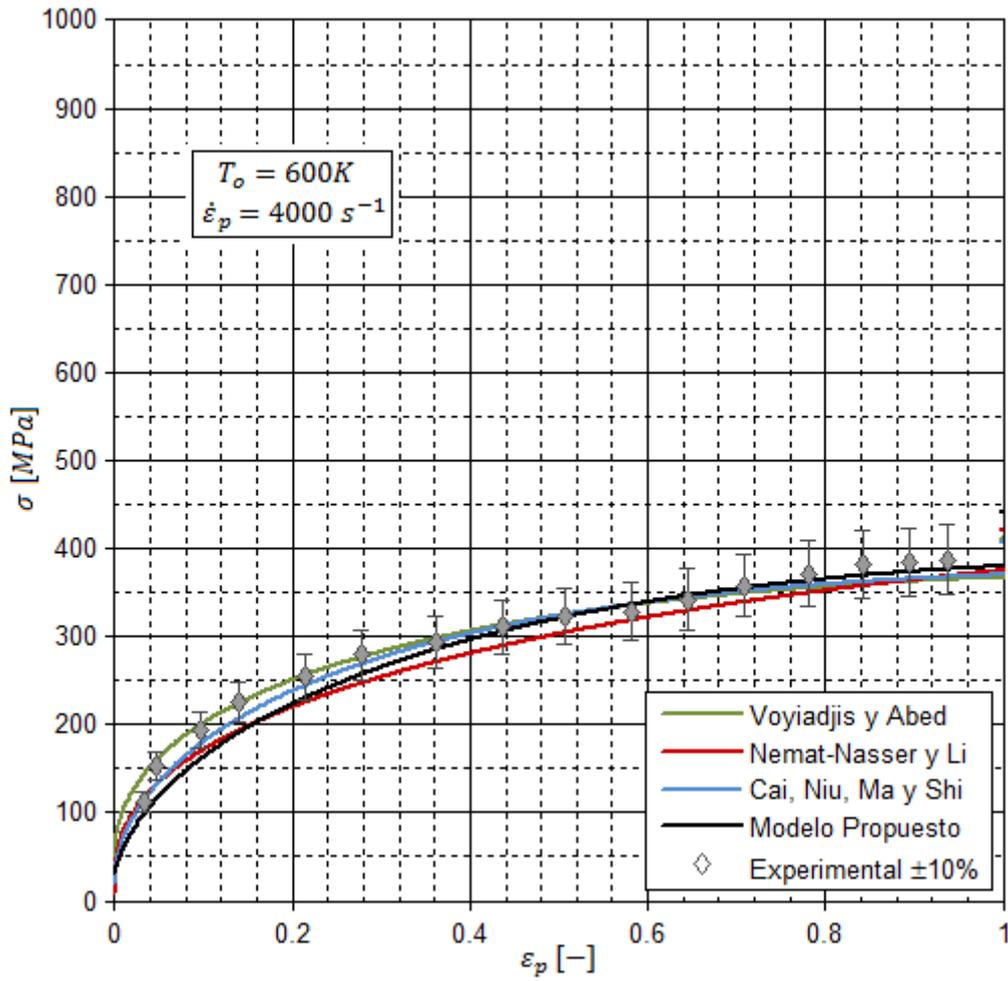


Figura 3.29- Comparación de los cuatro modelos incluyendo datos experimentales. Temperatura inicial: 600K. Velocidad de deformación:  $4000s^{-1}$ .

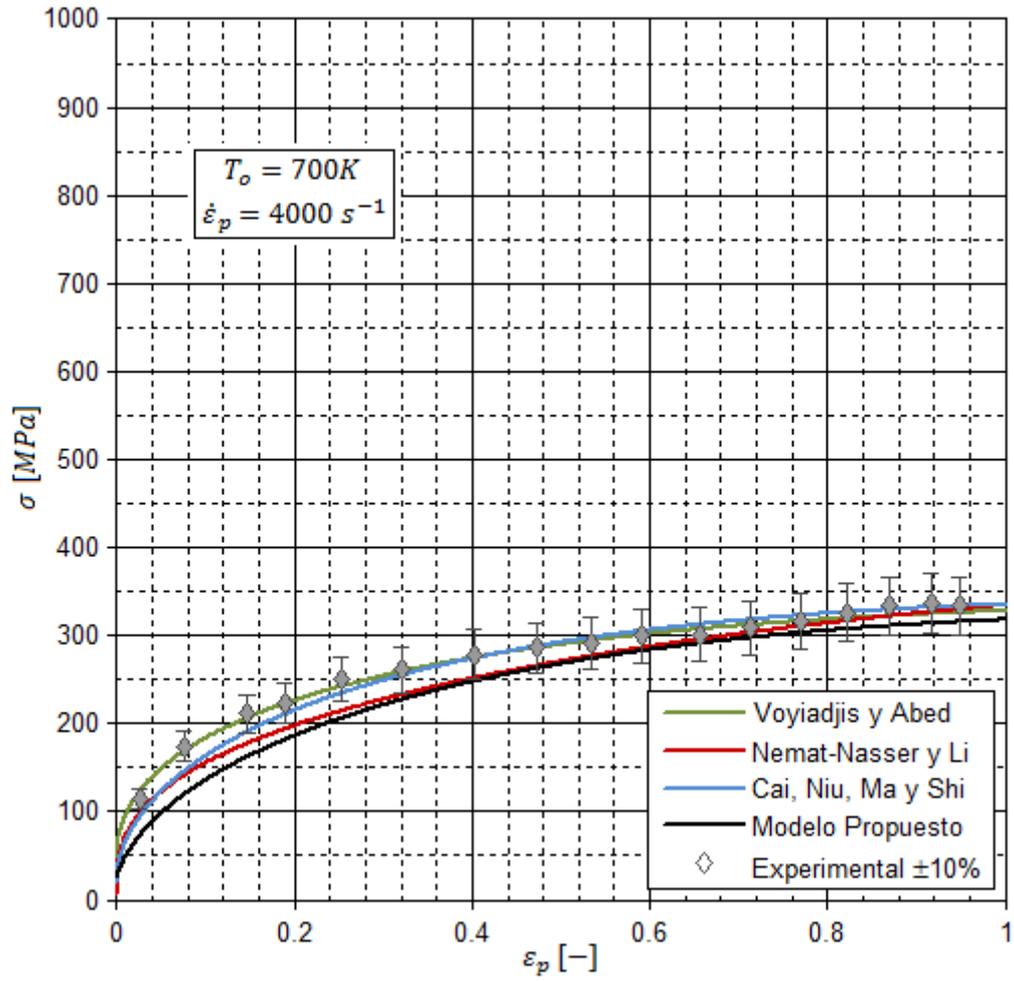


Figura 3.30- Comparación de los cuatro modelos incluyendo datos experimentales. Temperatura inicial: 700K. Velocidad de deformación:  $4000s^{-1}$ .

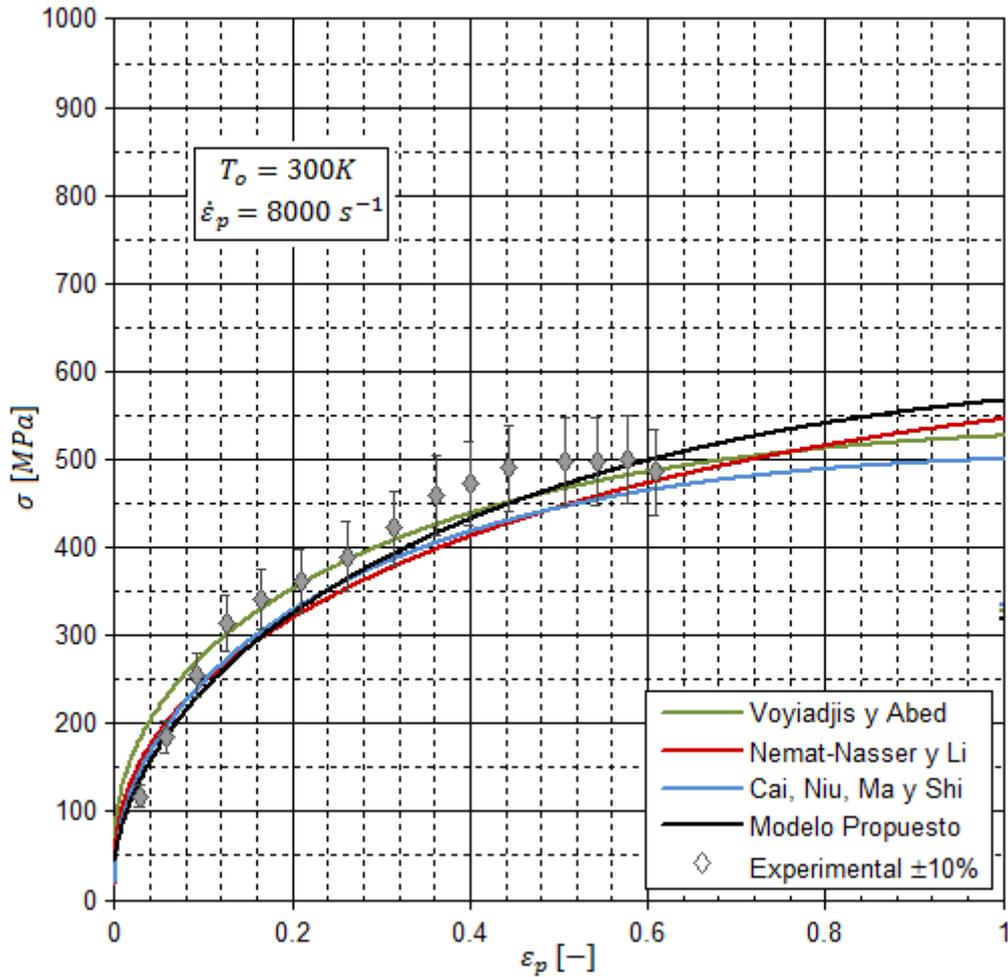


Figura 3.31- Comparación de los cuatro modelos incluyendo datos experimentales. Temperatura inicial: 300K. Velocidad de deformación:  $8000s^{-1}$ .

Se comprueba que el modelo propuesto (en negro) se ajusta bastante bien a los datos experimentales, y los resultados obtenidos se asemejan mucho a los resultados que proporcionan los otros tres modelos estudiados. Con estas comparaciones se da por finalizada la validación de los resultados del modelo, respaldada por el gran parecido entre todos los datos experimentales recabados, así como la similitud con modelos de ecuaciones constitutivas de otros autores.

### 3.5. EFECTO DE HISTÓRICOS DE VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN PLÁSTICA

Una vez que sea validado el modelo mediante la comparación con resultados experimentales, se procede a estudiar el efecto de la variación de la velocidad de deformación durante el propio proceso de deformación. Este modelo permite tener en cuenta los históricos de velocidad de deformación y temperatura gracias a que se está empleando la densidad de dislocaciones activamente en las ecuaciones del modelo, mediante la función  $\Psi(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p)$ . El estudio de históricos se ha realizado únicamente para la velocidad de deformación, ya que para realizar un proceso similar con la temperatura, la programación se complica enormemente, y el resultado final puede deducirse a partir del comportamiento que tenga el flujo de tensiones al variar la velocidad.

Los metales FCC se comportan de la siguiente manera. Cuando pasan de estar deformados a una velocidad baja hasta un proceso a velocidad más elevada, el flujo de tensiones aumenta súbitamente, pero queda siempre por debajo de la curva que tiene el comportamiento a la velocidad más alta (Klepaczko [45], [46], Rodríguez-Martínez y Rusinek [81]), como se muestra en la Figura 3.32. El proceso contrario (de velocidad alta a velocidad baja) es similar, pero el incremento súbito es negativo, y la curva del material quedará por encima de la de velocidad constante de valor inferior.

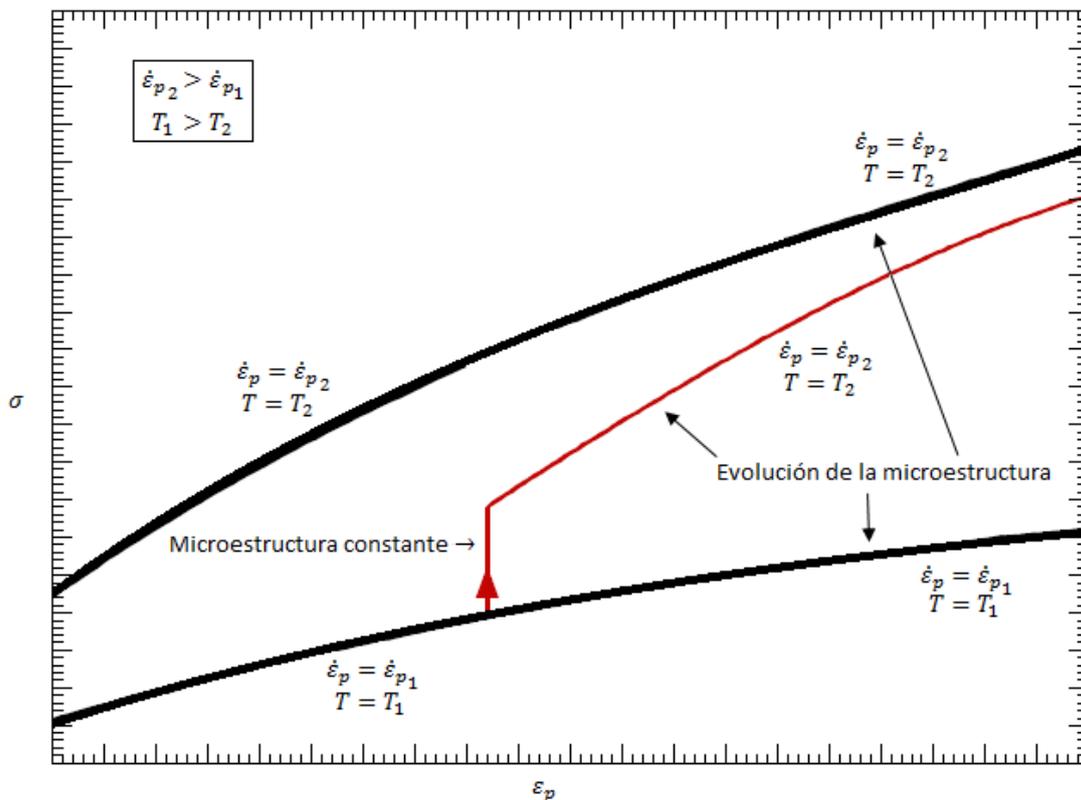


Figura 3.32 - Evolución del flujo de tensiones con la deformación al variar la velocidad de deformación o la temperatura.

Se puede observar que el endurecimiento por deformación se ve afectado por el histórico de velocidad de deformación, y aparece una sensibilidad instantánea a la variación de velocidad

de deformación (a microestructura constante). En el modelo propuesto se tendrá en cuenta este efecto gracias a que es posible calcular la derivada de la densidad de dislocaciones en cualquier momento. En un proceso de carga continua, a velocidad de deformación plástica constante, la derivada calculada a mano de la densidad de dislocaciones coincidirá en todo momento con la calculada matemáticamente, es decir:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta\varepsilon_p} \approx \frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon_p} = M_{II} - k_a(\dot{\varepsilon}_p) \cdot (\rho - \rho_o) \quad \text{Ec. 3-32}$$

Al variar la velocidad de deformación súbitamente, también lo hará la densidad de dislocaciones, por lo que hay que limitar el valor de la derivada respecto de la deformación plástica, calculando mediante la Ec. 3-34 la densidad de dislocaciones en el momento actual.

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta\varepsilon_p} = \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{\varepsilon_{p_i} - \varepsilon_{p_{i-1}}} \stackrel{\text{forzado}}{=} M_{II} - k_a(\dot{\varepsilon}_p) \cdot (\rho - \rho_o) \quad \text{Ec. 3-33}$$

La densidad de dislocaciones no es la que se habría calculado para la deformación y velocidad de deformación actuales, sino la que viene forzada por el valor de la derivada y la deformación plástica actual.

$$\rho_i \stackrel{\text{forzado}}{=} \rho_{i-1} + [M_{II} - k_a(\dot{\varepsilon}_p) \cdot (\rho - \rho_o)] \cdot (\varepsilon_{p_i} - \varepsilon_{p_{i-1}}) \quad \text{Ec. 3-34}$$

Donde  $i$  indica la iteración actual e  $i - 1$  indica la iteración anterior (método de las diferencias finitas, aproximando la derivada con orden 1).

El resultado obtenido mediante este método es el que aparece en la Figura 3.33 y la Figura 3.34.

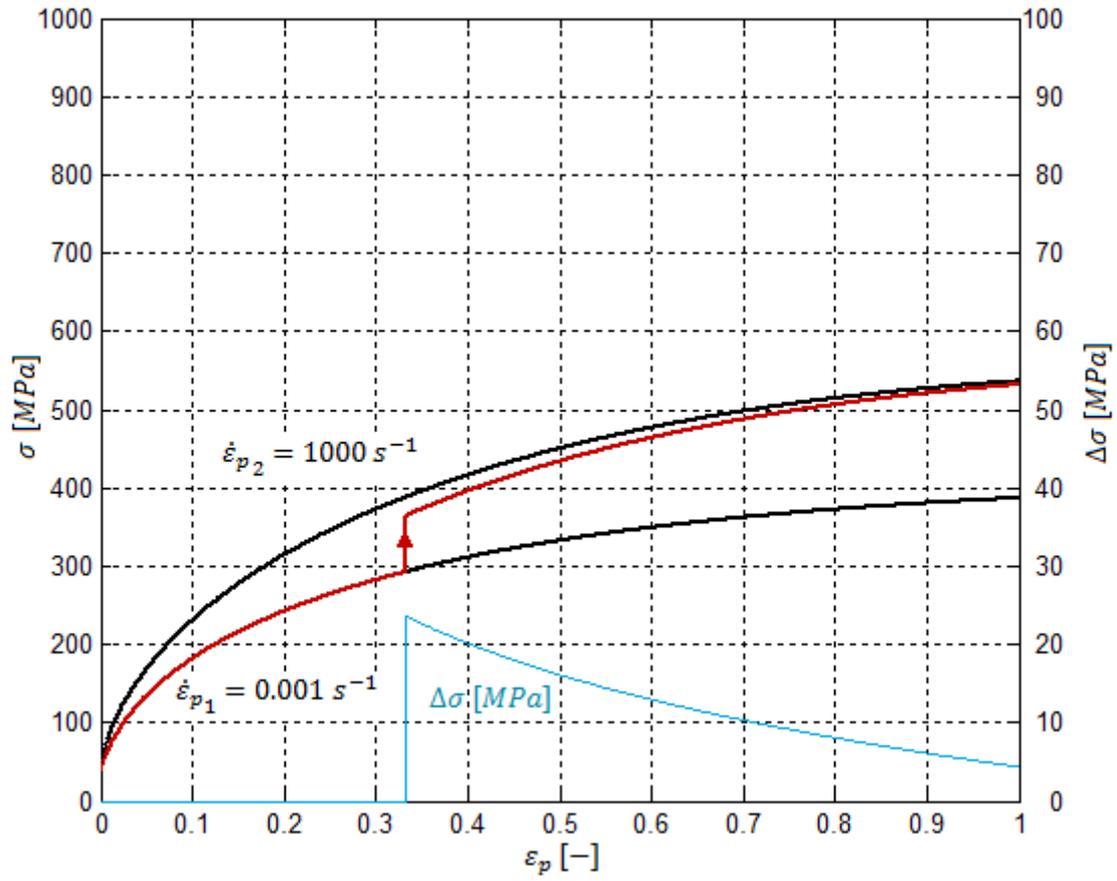


Figura 3.33 - Evolución del flujo de tensiones ante un cambio de velocidad desde  $0.001 \text{ s}^{-1}$  hasta  $1000 \text{ s}^{-1}$  en  $\epsilon_p = 0.33$

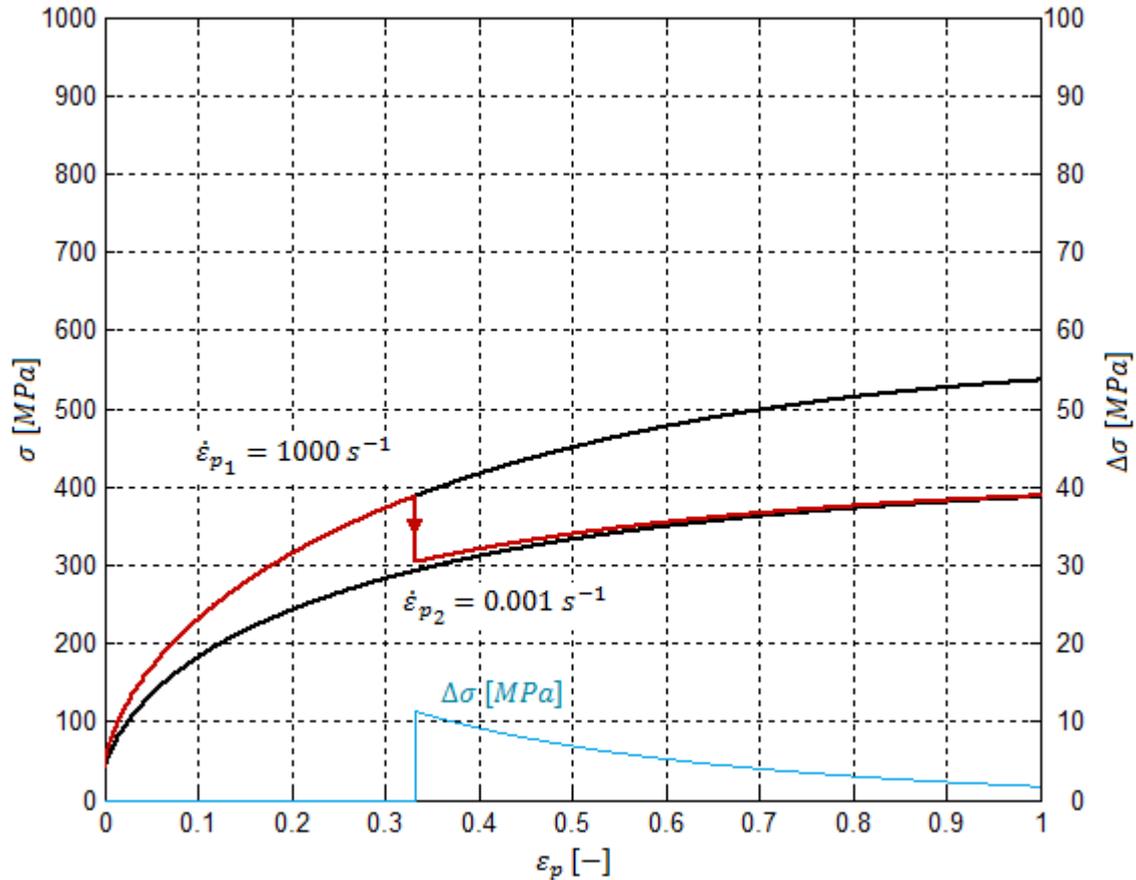


Figura 3.34 - Evolución del flujo de tensiones ante un cambio de velocidad desde  $1000\text{s}^{-1}$  hasta  $0.001\text{s}^{-1}$  en  $\epsilon_p=0.33$

Se puede observar en ambas figuras lo que se predecía en la Figura 3.32, pero de manera menos acentuada, ya que la Figura 3.32 es una representación a mano de lo que se esperaba hiciera el material. En ambas figuras se observa una línea azul, que indica la separación en MPa (eje de la derecha) respecto a la curva que hubiera seguido si su velocidad de deformación hubiera sido durante todo el proceso la correspondiente a dicha curva. Se puede comprobar cómo esta separación va reduciéndose al aumentar la deformación (el material se "olvida" del cambio en la velocidad de deformación), pero no puede anularse nunca ya que presenta una asíntota horizontal en 0.

Con estos resultados, pueden darse por concluidos el análisis y la validación del modelo propuesto, ya que tanto los resultados experimentales como los datos de otros modelos son muy similares a los resultados obtenidos y se pueden explicar físicamente todos los fenómenos que tienen lugar según el modelo propuesto.



## 4. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE TRABAJO

---

### 4.1. CONCLUSIONES

Del estudio realizado se pueden obtener las siguientes **conclusiones generales**.

- Este proyecto presenta el desarrollo y posterior análisis de un modelo constitutivo para metales FCC. La formulación propuesta divide el flujo de tensiones en tensión efectiva y tensión interna. La formulación de la tensión interna tiene en cuenta el efecto del tamaño del grano del material y es independiente de la deformación. La tensión efectiva se ha obtenido mediante el concepto de análisis de la activación térmica, y tiene en cuenta la deformación, la temperatura y la velocidad de deformación, así como la relación existente entre la temperatura y la velocidad de deformación. La tensión efectiva tiene, por tanto, marcado carácter térmico y se ha formulado de manera que es dependiente de la microestructura del material, ya que se tiene en cuenta la variación con la deformación de la densidad de dislocaciones, que se emplea en la formulación como variable interna de estado.
- Se ha encontrado en la literatura suficiente material que ha servido como guía para la proposición del nuevo modelo, así como los resultados experimentales con los que se ha ajustado y validado el modelo.
- En el Anexo 1 - Identificación de parámetros del modelo propuesto, se ha empleado un método para identificar los parámetros de la formulación descrita, a partir de los datos experimentales de cobre OFHC encontrados en la literatura.
- El modelo es capaz de representar correctamente todas las dependencias del flujo de tensiones (deformación, temperatura y velocidad de deformación), tal y como se ha podido comprobar en la comparación con los datos experimentales y los resultados que otros modelos del mismo tipo y para el mismo material proporcionan.

Por todo ello, se puede concluir que se han cumplido satisfactoriamente los objetivos marcados para este proyecto de fin de carrera, cuyo fin último era la obtención de una ecuación constitutiva capaz de modelar el flujo de tensiones en un material FCC bajo diferentes condiciones de carga.

Adicionalmente, también se pueden extraer **conclusiones particulares** acerca de los resultados obtenidos.

- El modelo propuesto es, junto al modelo de Voyiadjis y Abed, el que mejor representa la mayoría de los datos experimentales, aunque los otros dos modelos propuestos (Cai et al. y Nemat-Nasser y Li) también consiguen resultados muy buenos.
- El modelo de Cai et al., no responde adecuadamente a los datos experimentales cuando la velocidad de deformación es diferente a  $4000\text{s}^{-1}$ . El resto de modelos parece comportarse de manera más aproximada a los datos experimentales.
- El modelo propuesto es el único que tiene en cuenta el efecto de históricos, ya que contiene explícitamente la densidad de dislocaciones y su derivada respecto a la

deformación plástica. Esto es posible de tener en cuenta con una sola variable interna de estado mediante la limitación de la derivada de la densidad de dislocaciones respecto a la deformación plástica, ya que es la derivada la que indica cuánto puede crecer la densidad de dislocaciones al producirse un cambio en las condiciones de carga en cierto valor de la deformación.

- El modelo propuesto parece tener un rango más limitado en cuanto a temperaturas de trabajo (no así de velocidad de deformación), esta mejora se propondrá en las líneas de trabajo futuras.

#### **4.2.LÍNEAS FUTURAS DE TRABAJO**

Tras lo estudiado en este proyecto, las futuras líneas de trabajo deben ir encaminadas hacia tres grandes metas:

En primer lugar, se podría proponer una mejora al modelo aquí propuesto para aumentar el rango de temperaturas a las que trabaja, ya que los otros modelos estudiados operan con resultados aceptables en un rango más elevado. Esto puede ser importante para determinar el comportamiento del material a temperaturas muy elevadas, cercanas a la de fusión, como puede ser el mecanizado de alta velocidad, la perforación de pozos petrolíferos, la industria militar o la aeroespacial.

En segundo lugar, se propone el estudio del efecto de históricos de temperatura sobre el comportamiento del material. En este proyecto no se ha llevado a cabo por dificultades para implementarlo en el código de programación de las ecuaciones. También puede resultar interesante descomponer la densidad de dislocaciones en dos variables para realizar un modelo con dos variables internas de estado.

Finalmente, se convierte en objetivo fundamental la implementación de la formulación en algún código comercial de elementos finitos, ya que estos programas se emplean en muchos procesos industriales y proporcionan aplicaciones directas a cualquiera de los modelos aquí propuestos. Estos modelos no tendrían prácticamente utilidad si no se hace uso de ellos en los códigos de elementos finitos, salvo el avance en el conocimiento acerca de los materiales que proporcionan.

---

---

## ANEXO 1 - IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS DEL MODELO PROPUESTO

Para identificar el resto de parámetros del modelo, será necesario hacer uso de unos pocos datos experimentales. En primer lugar se procede a hallar el incremento del límite elástico del material por el hecho de variar la velocidad de deformación. El hecho de examinar el límite elástico del material, es debido a que la deformación plástica es nula  $\bar{\epsilon}_p = 0$ , lo que permitirá desechar ciertos términos haciendo que se simplifique el modelo en gran medida. Esto se hará para tres velocidades de deformación, siendo una de ellas de referencia  $\dot{\epsilon}_p = 10^{-3} s^{-1}$ . Los tres ensayos han de ser a la misma temperatura, por ejemplo  $T = 300K$ . Para omitir el término de tensión interna, ya que en los tres casos la temperatura es la misma, se podrá restar la tensión obtenida en un ensayo con la de referencia para saber cuánto vale la diferencia de tensión efectiva entre ambos casos:

$$\Delta\sigma \Big|_{\dot{\epsilon}_p=10^{-3}s^{-1} \rightarrow \dot{\epsilon}_p}^{T=300K, \bar{\epsilon}_p=0} = \bar{\sigma} \Big|_{\dot{\epsilon}_p}^{T=300K, \bar{\epsilon}_p=0} - \bar{\sigma} \Big|_{\dot{\epsilon}_p=10^{-3}s^{-1}}^{T=300K, \bar{\epsilon}_p=0} \quad \text{Ec. A1-1}$$

Como la tensión interna sólo depende de la temperatura y ambos procesos son a la misma temperatura, se obtiene:

$$\Delta\sigma \Big|_{\dot{\epsilon}_p=10^{-3}s^{-1} \rightarrow \dot{\epsilon}_p}^{T=300K, \bar{\epsilon}_p=0} = \bar{\sigma}^* \Big|_{\dot{\epsilon}_p}^{T=300K, \bar{\epsilon}_p=0} - \bar{\sigma}^* \Big|_{\dot{\epsilon}_p=10^{-3}s^{-1}}^{T=300K, \bar{\epsilon}_p=0} \quad \text{Ec. A1-2}$$

Donde

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^* \Big|_{\dot{\epsilon}_p}^{T=300K, \bar{\epsilon}_p=0} &= \alpha_2 \cdot E(300K) \cdot b \cdot \rho_o^{1/2} \cdot \Psi(0, \dot{\epsilon}_p) \cdot \\ &\cdot \left\langle 1 - D_1 \frac{300K}{T_m} \cdot \left\langle \log \left( \frac{\dot{\epsilon}_o}{\dot{\epsilon}_p} \right) - \log[\Psi(0, \dot{\epsilon}_p)] \right\rangle \right\rangle^{1/p} \end{aligned} \quad \text{Ec. A1-3}$$

Y

$$\Psi(0, \dot{\epsilon}_p) = \left( 1 + \frac{M_{II}}{\rho_o k_a(\dot{\epsilon}_p)} \{1 - \exp[-k_a(\dot{\epsilon}_p) \cdot 0]\} \right)^{1/2} = 1 \quad \text{Ec. A1-4}$$

De lo que se deduce:

$$\bar{\sigma}^* \Big|_{\dot{\epsilon}_p}^{T=300K, \bar{\epsilon}_p=0} = \alpha_2 \cdot E(300K) \cdot b \cdot \rho_o^{1/2} \cdot \left\langle 1 - D_1 \frac{300K}{T_m} \cdot \left\langle \log \left( \frac{\dot{\epsilon}_o}{\dot{\epsilon}_p} \right) \right\rangle \right\rangle^{1/p} \quad \text{Ec. A1-5}$$

De la Ec. A1-5 sólo se desconoce el valor de  $\alpha_2$  y  $p$ . Con dos ecuaciones, se podrá obtener el valor de estos dos parámetros. Volviendo a la Ec. A1-2 se pueden obtener ambas ecuaciones, ya que se tienen datos para tres velocidades de deformación

$$\Delta\sigma \Big|_{\substack{T=300K, \bar{\epsilon}_p=0 \\ \dot{\bar{\epsilon}}_p=10^{-3}s^{-1} \rightarrow \dot{\bar{\epsilon}}_p}} = \alpha_2 \cdot E(300K) \cdot b \cdot \rho_o^{1/2} \cdot \left( \left( \left( 1 - D_1 \frac{300K}{T_m} \cdot \left( \log \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_o}{\dot{\bar{\epsilon}}_p} \right) \right) \right) \right)^{1/p} - \left( 1 - D_1 \frac{300K}{T_m} \cdot \left( \log \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_o}{10^{-3}s^{-1}} \right) \right) \right)^{1/p} \right) \quad \text{Ec. A1-6}$$

Los datos experimentales proveen los resultados dados por la Tabla A1-1:

Deformación $\bar{\epsilon}_p$ [-]	Temperatura $T$ [K]	Velocidad de deformación $\dot{\bar{\epsilon}}_p$ [ $s^{-1}$ ]	Tensión $\bar{\sigma}$ [MPa]
0	300	$10^{-3}$	32.5
0	300	0.1	39.2
0	300	4000	53.4

Tabla A1-1 - Datos experimentales para calibrar  $\alpha_2$  y  $p$

Para obtener el valor de  $p$ , se dividirá la diferencia de tensiones para los dos casos, haciendo que desaparezca el término  $\alpha_2 \cdot E(300K) \cdot b \cdot \rho_o^{1/2}$  y reduciéndose así a una expresión que depende sólo de  $p$ .

$$\frac{\Delta\sigma \Big|_{\substack{T=300K, \bar{\epsilon}_p=0 \\ \dot{\bar{\epsilon}}_p=10^{-3}s^{-1} \rightarrow 0.1s^{-1}}}}{\Delta\sigma \Big|_{\substack{T=300K, \bar{\epsilon}_p=0 \\ \dot{\bar{\epsilon}}_p=10^{-3}s^{-1} \rightarrow 4000s^{-1}}}} = \frac{\left( \frac{\left( 1 - D_1 \frac{300K}{T_m} \cdot \left( \log \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_o}{0.1s^{-1}} \right) \right) \right) \right)^{1/p} - 1}{\left( 1 - D_1 \frac{300K}{T_m} \cdot \left( \log \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_o}{0.001s^{-1}} \right) \right) \right)^{1/p} - 1} \right)}{\left( \frac{\left( 1 - D_1 \frac{300K}{T_m} \cdot \left( \log \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_o}{4000s^{-1}} \right) \right) \right) \right)^{1/p} - 1}{\left( 1 - D_1 \frac{300K}{T_m} \cdot \left( \log \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_o}{0.001s^{-1}} \right) \right) \right)^{1/p} - 1} \right)} = \frac{y_1^{1/p} - 1}{y_2^{1/p} - 1} \quad \text{Ec. A1-7}$$

Se conocen todos los valores que aparecen en el interior del paréntesis, por lo que la ecuación es sencilla de resolver para  $p$ , mediante métodos numéricos:

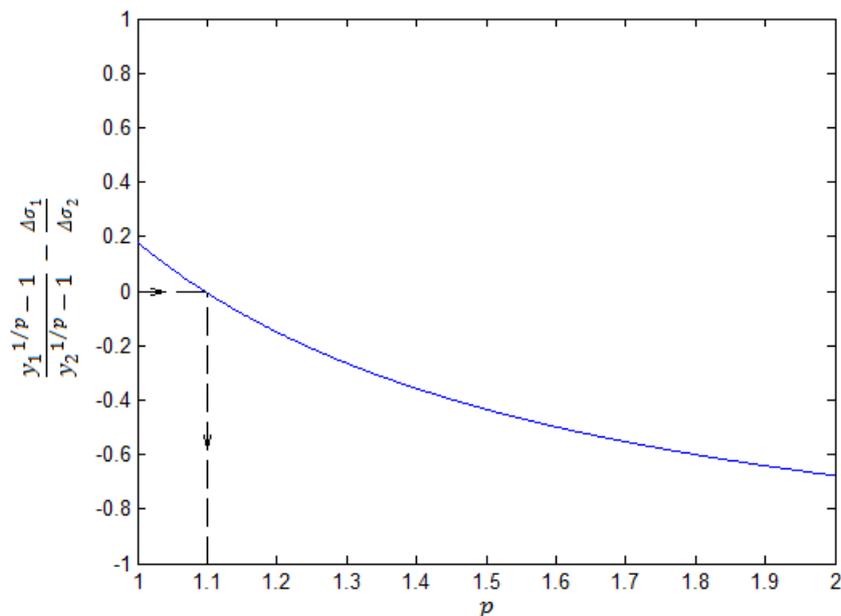


Figura A1.0.1 - Obtención del parámetro  $p$

Una vez se conoce el valor de  $p=1.1$ , se puede hallar el de  $\alpha_2$  aplicando el valor de  $p$  a cualquiera de las expresiones para  $\Delta\sigma_1$  o  $\Delta\sigma_2$  y despejando:

$$\Delta\sigma \Big|_{\substack{T=300K, \bar{\epsilon}_p=0 \\ \dot{\epsilon}_p=10^{-3}s^{-1} \rightarrow \dot{\epsilon}_p}} = \alpha_2 \cdot E(300K) \cdot b \cdot \rho_o^{1/2} \cdot \left( \left( 1 - D_1 \frac{300K}{T_m} \cdot \left\langle \log \left( \frac{\dot{\epsilon}_o}{\dot{\epsilon}_p} \right) \right\rangle \right)^{1/p} - \left( 1 - D_1 \frac{300K}{T_m} \cdot \left\langle \log \left( \frac{\dot{\epsilon}_o}{10^{-3}s^{-1}} \right) \right\rangle \right)^{1/p} \right)$$

Aplicando ambas expresiones obtenemos  $\alpha_2 = 0.607$  para  $\dot{\epsilon}_p = 0.1s^{-1}$  y  $\alpha_2 = 0.608$  para  $\dot{\epsilon}_p = 4000s^{-1}$ . Se tomará el valor medio de ambas,  $\alpha_2 = 0.6075$ .

Conocido el valor de  $\alpha_2$  y  $p$ , se puede calcular la tensión efectiva para cualquier punto con deformación  $\bar{\epsilon}_p = 0$ . Como también se conocen dos de los valores de tensión total equivalente en  $\bar{\epsilon}_p = 0$ . Sabiendo que  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_\mu + \bar{\sigma}^*$ , se puede hallar la tensión interna, y por lo tanto el valor de  $\alpha_1$ , que resulta ser  $\alpha_1 = 0.0281$ .

A continuación se propone aplicar toda la formulación propuesta a una curva tensión deformación a una temperatura  $T = 300K$  y velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}_p = 10^{-3}s^{-1}$ . Se escoge una velocidad de deformación pequeña para obviar el incremento de temperatura y facilitar el ajuste, ya que no es necesario incluir el término de variación de temperatura allí donde aparezca.

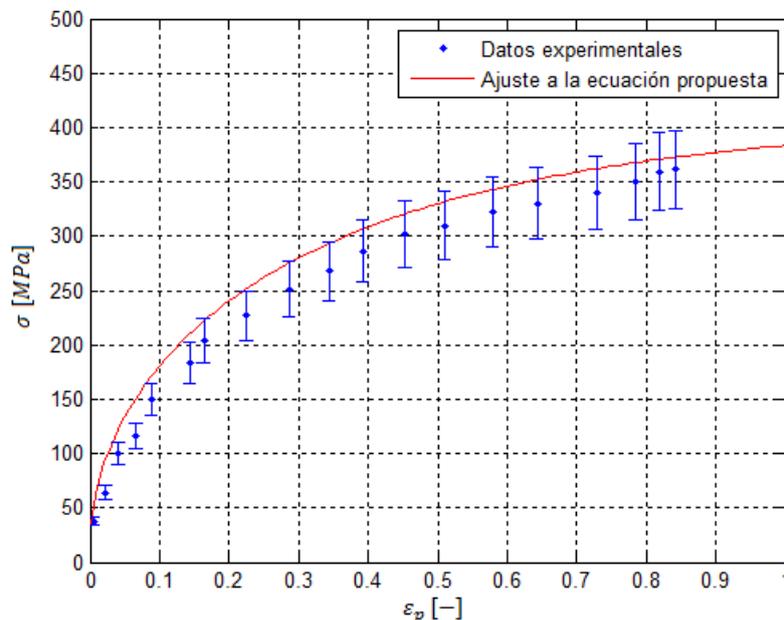


Figura A1.0.2 - Ajuste de la ecuación propuesta con los datos experimentales

El ajuste no parece ser demasiado bueno, pero es lo mejor que se puede obtener, dado que los dos parámetros que se están calculando ( $M_{II}$  y  $k_a(\dot{\epsilon}_p = 10^{-3}s^{-1})$ ) están bastante restringidos por la forma de la ecuación. Los valores obtenidos para estos parámetros son  $M_{II} = 1.9 \times 10^{15}m^{-2}$  y  $k_a(\dot{\epsilon}_p = 10^{-3}s^{-1}) = 2.059$ .

Haciendo lo mismo para otras dos velocidades de deformación, se pueden obtener los factores  $k_o$  y  $m_o$  que hacen variable a  $k_a$  con la velocidad de deformación.

Los valores obtenidos para  $k_a$  son:  $k_a(\dot{\varepsilon}_p = 0.1s^{-1}) = 1.588$  y  $k_a(\dot{\varepsilon}_p = 4000s^{-1}) = 0.8736$

Conocidos estos valores, se puede calcular el valor del parámetro  $m_o$ :

$$k_a(\dot{\varepsilon}_p) = k_o \left( \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_{a0}} \right)^{-2m_o} \quad \text{Ec. 3-17'}$$

Por lo que:

$$\frac{0.8736}{1.588} = \left( \frac{4000}{0.1} \right)^{-2m_o} \Rightarrow m_o = 0.0282 \quad \text{Ec. A1-8}$$

Una vez se conoce  $m_o$ , se puede calcular el valor de  $k_o$ , a partir de cualquiera de los puntos:

$$0.8736 = k_o \left( \frac{4000}{2 \times 10^{10}} \right)^{-2 \cdot 0.0282} \Rightarrow k_o = 0.366 \quad \text{Ec. A1-9}$$

---

**REFERENCIAS**

---

- [1] AIFANTIS, E.C. The physics of the plastic deformation, *International Journal of Plasticity*, 3, 211-247, 1987.
- [2] ARMSTRONG, R.W. Strength and strain rate sensitivity of nanopolycrystals, Li, J.C.M. (Ed.), *Mechanical Properties of nanocrystalline materials*, Pan Stanford Publishing Inc., Hackensack, NJ, 2009
- [3] ARMSTRONG, R.W. Thermal activation strain rate analysis (TASRA) for polycrystalline metals, *J. Sci. Ind. Res. India*, 32, 591-598, 1973
- [4] ARMSTRONG, R.W., WALLEY, S.M. High strain-rate properties of metals and alloys, *Int. Mater. Rev.* 53, 105-128, 2008
- [5] BAMMANN, D.J., AIFANTIS, E.C. A model for finite-deformation plasticity, *Acta Mechanica*, 69, 97-117, 1987.
- [6] BAMMANN, D.J., AIFANTIS, E.C. On a proposal of continuum with microstructure, *Acta Mechanica*, 45, 91-125, 1982
- [7] BAMMANN, D.J. A model of crystal plasticity containing a natural length scale, *Material Sciences and Engineering*, A309-310, 406-410, 2001
- [8] BANERJEE, B., BHAWALKAR, A.S. An extended Mechanical Threshold Stress plasticity model: Modeling 6061-T6 Aluminum alloy, *Journal of Mechanics Materials and Structures*, 3, 391-424, 2008
- [9] BARLAT, F., GLAZOV, M.V., BREM, J.C., LEGE, D.J. A simple model for dislocation behavior, strain and strain-rate hardening evolution in deforming aluminum alloys, *International Journal of Plasticity*, 18, 919-939, 2002
- [10] BASINSKI, Z.S. Thermally activated glide in FCC metals and its application to the theory of strain hardening, *Philosophical Magazine*, 4, 393-432, 1959
- [11] BELL, J.F. Crystal plasticity, *Philosophical Magazine*, 11, 1135-1145, 1965
- [12] BOWEN, A.W., PARTRIDGE, P.G. Limitations of Hollomon strain-hardening equation. *Journal of Physics*, 7, 969-978, 1974
- [13] CAI, M.C., NIU, L.S., MA, X.F., SHI, H.J. A constitutive description of the strain rate and temperature effects on the mechanical behavior of materials, *Mechanics of materials*, 2010
- [14] CAMPAGNE, L., DARIDON, L., AHZI, S. A physically based model for dynamic failure in ductile metals, *Mechanics of Materials*, 37, 8, 869-886, 2005
- [15] CAMPBELL, J.D. Dynamic plasticity: Macroscopic and microscopic aspects, *Materials Science and Engineering*, 12, 3-21, 1973
- [16] CAMPBELL, J.D., FERGUSON, W.G., The temperature and strain-rate dependence of the shear strength of mild steel, *Philosophical Magazine*, 81, 63-82, 1970
- [17] CHENG, J., NEMAT-NASSER, S., GUO, W. An unified constitutive model for strain-rate and temperature dependent behavior of Mo, *Mechanics of Materials*, 33, 603-616, 2001
- [18] CLIFTON, R. J. Dynamic plasticity. *Journal of Applied Mechanics* 50, 941-952, 1983
- [19] CONRAD, H. On the mechanism of yielding and flow in iron, *Journal of Iron and Steel Institute*, 198-364, 1961
- [20] COWPER, G.R., SYMONDS, P.S. Strain hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams, Report no. 28, Division of Applied Mechanics, Brown University, 1952
- [21] CUITINO, A.M., STAINIER, L., WANG, G., STRACHAN, A., CAGIN, T., GODDARD, W.A., ORTIZ, M. A multiscale approach for modeling crystalline solids, *Journal of Computation aided Materials Des.*, 8, 127-149, 2001

- [22] ESTRIN, Y. Dislocation theory based constitutive modeling: Foundations and applications, *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81, 33-39, 1998
- [23] FOLLANSBEE, P.S. High-strain-rate deformation of FCC metals and alloys, *Metallurgical applications of shock-wave and high-strain-rate phenomena*, 451-479, 1986
- [24] FOLLANSBEE, P.S., KOCKS, U.F. A constitutive description of the deformation of Cu-based on the use of the Mechanical Threshold Stress as an internal state variable, *Acta Metallica and Materialia*, 36, 81-93, 1988
- [25] FOLLANSBEE, P.S., REGAZZONI, G., KOCKS, U.F., Transition to drag-controlled deformation in Copper at high strain-rates, *Institute of Physics Conference Series*, 70, 71-80, 1984
- [26] GAO, C.Y., ZHANG, L.C. A constitutive model for dynamic plasticity of FCC metals, *Materials Science and Engineering*, A527, 3138-3143, 2010
- [27] GILLIS, P.P., GILMAN, J.J., Dynamical dislocation theory of crystal plasticity, *Journal of Applied Physics*, 36, 3370-3380, 1965
- [28] GRACIO, J.J. Effect of grain size on substructural evolution and plastic behavior of Copper, *Material Science and Engineering*, A118, 97-105, 1989
- [29] HIRTH, J.P., NIX, W.D. An analysis of the thermodynamics of dislocation glide, *Physica Status Solidi*, 35, 177-188, 1969
- [30] HOGE, K.G., MUKHERJEE, A.K. The temperature and strain rate dependence of the flow stress of Ta, *Journal of Material Science*, 12, 1666-1672, 1977
- [31] HOLLOWOMON, J.H. Tensile deformation, *Trans. Am. Min. Metal Engineering*, 162, 268-290, 1945
- [32] HUANG, M., RIVERA-DIAZ-DEL-CASTILLO, P.E.J., BOUAZIZ, O., VAN DER ZWAAG, S. A constitutive model for high-strain-rate deformation in FCC metals based on irreversible thermodynamics, *Mechanics of Materials*, 41, 982-988, 2009
- [33] JASSBY, K.M., VREELAND, T. An experimental study of mobility of edge dislocations in pure Copper single crystals, *Philosophical Magazine*, 21, 1147-115, 1970
- [34] JOHNSON, G.R., COOK, W.H, A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain-rates and high temperatures, *Proceedings of the Seventh International Symposium of Ballistics*, 541-547, 1983
- [35] JOHNSTON, W.G., GILMAN, J.J. Dislocation velocities, dislocations densities and plastic flow in LiF Crystals, *Journal of Applied Physics*, 30, 129-144, 1958
- [36] KAPOOR, R., NEMAT-NASSER, S. Comparison between high and low strain-rate deformation of Ta, *Metal and Material Trans*, A31, 815-823, 2000
- [37] KAPOOR, R., NEMAT-NASSER, S. Determination of temperature rise during high strain-rate deformation, *Mechanics of Materials*, 27, 1-12, 1998
- [38] KATAOKA, T., YAMADA, T. Solution hardening and softening in KCl-KBr single crystals at low temperature, *Journal of Physics*, 41, C6150-C6153, 1980
- [39] KAZANTZIS, A.V., AINDOW, M., JONES, I.P., TRIANTAFYLLIDIS, G.K., DE HOSSON, J.T.M. The mechanical properties and the deformation microstructures of the C15 Laves phase Cr<sub>2</sub>Nb at high temperatures, *Acta Materialia*, 55, 1873-1884, 2007
- [40] KAZANTZIS, A.V., AINDOW, M., TRIANTAFYLLIDIS, G.K., DE HOSSON, J.T.M. On the self-pinning character of synchro-shockley dislocations in a Laves phase during strain-rate cyclical compressions, *Scripta Materialia*, 59, 788-791, 2008
- [41] KELLY, J.M., GILLIS, P.P. Continuum descriptions of dislocations under stress reversals, *Journal of Applied Physics*, 45, 1091-1096, 1974
- [42] KLASSEN, R.J., DIAK, B.J., SAIMOTO, S. Origin of the depth dependence of the apparent activation volume in polycrystalline 99,999% Cu determined by displacement rate change micro-indentation, *Material Science and Engineering*, A297-301, 2004
- [43] KLEPACZKO, J.R. A general approach to rate sensitivity and constitutive modelling of FCC and BCC metals, impact: Effect of fast transient loading, *Rotterdam*, 3-35, 1998

- [44] KLEPACZKO, J.R. Modelling of structural evolution at medium and high strain-rates, FCC and BCC metals, *Constitutive Relations and Their Physical Basis*, Roskilde (Denmark), 387-395, 1987.
- [45] KLEPACZKO, J.R. Physical-state variable - The key to constitutive modeling in dynamic plasticity, *Nuclear Engineering and Design*, 127, 1,103-115,1991
- [46] KLEPACZKO, J.R. Thermally activated flow and strain rate history effects for some polycrystalline FCC metals, *Materials of Science and Engineering*, 18, 121-135, 1975
- [47] KLEPACZKO, J.R., DUFFY, J. History effects in polycrystalline BCC metals and steel subjected to rapid changes in strain-rate and temperature, *Arch. Mech*, 34, 419-436, 1982
- [48] KLEPACZKO, J.R., REZAIG, B. A numerical study of adiabatic shear bending in mild steel by dislocation mechanics based constitutive relations, *Mechanics of Materials*, 24, 125-139, 1996
- [49] KOCKS, U.F. Realistic constitutive relations for metal plasticity, *Material Science and Engineering*, A317, 181-187, 2001
- [50] KOCKS, U.F., ARGON, A.S., ASHBY, M.F. Thermodynamics and kinetics of slip, *Progress in Materials Science*, 19, Pergamon, Oxford, 1975
- [51] KOCKS, U.F., MECKING, H. Physics and phenomenology of strain hardening; the FCC case. *Progress in Material Science*, 48, 171-273, 2003
- [52] KOLLURU, D.V., BALIGIDAD, R.G., The compressive creep characteristics of two phase Fe3Al-0.5 wt. %C. *Material Science and Engineering*, A328, 58-61, 2002
- [53] KUBIN, L.P., ESTRIN, Y. Evolution for dislocation densities and the critical conditions for the Portevin-Le Chatelier effect, *Acta Metallurgical Materialia*, 38, 697-708, 1990
- [54] KUMAR, A., HAUSER, F.E., DORN, J.E. Viscous drag on dislocations in Al at high strain-rates, *Acta Metallurgica*, 9, 1189-1197, 1968
- [55] LEE, W.S., CHEN, T.H. Effects of strain-rate and temperature on dynamic mechanical behavior and microstructural evolution in Al-Sc alloy, *Material Science Technology Ser.*, 24, 1271-1282, 2008
- [56] LEE, W.S., CHEN, T.H. Plastic deformation and fracture characteristics of Hadfield steel subjected to high velocity impact loading, *Proc. Inst. Mech. Eng., C-J. Mech*, 216, 971-982, 2002
- [57] LENNON, A.M., RAMESH, K.T. The influence of crystal structure on the dynamic behavior of materials at high temperatures, *International Journal of Plasticity*, 20, 269-290, 2004
- [58] LI, J.C. Kinetics and dynamics in dislocation plasticity, *Dislocation Dynamics*, McGraw-Hill, 87-116, 1968
- [59] LIDE, D.R. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 87th edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 2007
- [60] LITONSKI, J. Plastic flow of a tube under adiabatic torsion, *Bull Polytechnic Academy of Science*, 25, 7-14, 1977
- [61] LUDWIGSO, D.C. Modified stress-strain relation for FCC metals and alloys, *Metal. Trans.*, 2, 2825-2828, 1971
- [62] LUDWIK, P. *Elemente der Technologischen Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1909
- [63] MECKING, H., KOCKS, U.F. Kinetics of flow and strain hardening, *Acta Metallurgica*, 29, 1865-1875, 1981
- [64] MECKING, H., NICKLAS, B., ZARUBOVA, N., KOCKS, U.F. A universal temperature scale for plastic flow, *Acta Metallurgical Materialia*, 34, 527-535, 1986
- [65] MEYERS, M.A., BENSON, D.J., VOHRINGER, O., KAD, B.K., XUE, Q., FU, H.H. Constitutive description of dynamic deformation: Physically-based mechanisms, *Material Science and Engineering*, A322, 194-216, 2002
- [66] MEYERS, M.A., GREGORY, F., KAD, B.K., SCHNEIDER, M.S., KALANTAR, D.H.,

- REMINGTON, B.A., RAVICHANDRAN, G., BOEHLI, T., WARK, J.S. Laser-induced shock compression of monocrystalline Copper: Characterization and analysis, *Acta Materialia*, 51, 1211-1228, 2003
- [67] NADGORNYYI, E.M. Dislocation dynamics and mechanical properties of crystals, *Progress in Materials Science*, 31, 473-510, 1988.
- [68] NEMAT-NASSER, S., LI, Y. Flow Stress of FCC Polycrystals with Application to OFHC Cu, *Acta Materialia*, 46, 565-577, 1998
- [69] NEMAT-NASSER, S., GUO, W., CHENG, J. Mechanical properties and deformation mechanisms of a commercially pure Titanium, *Acta Materialia*, 47, 3705-3720, 1999
- [70] NEMAT-NASSER, S., GUO, W., KIHIL, D. Thermomechanical response of Al-6XN stainless steel over a wide range of strain-rates and temperatures, *Journal of Mechanics and Physics Solids*, 49, 1823-1846, 2001
- [71] NEMAT-NASSER, S., ISAACS, J. Direct measurement of isothermal flow stress of metals at elevated temperatures and high strain-rates with application to Ta and Ta-W alloys, *Acta Metallurgica*, 45, 907-919, 1997
- [72] NEMAT-NASSER, S., KAPOOR, R. Deformation behavior of Ta and a Ta-W alloy, *International Journal of Plasticity*, 17, 1351-1366, 2001
- [73] NEMAT-NASSER, S., LI, Y. Flow Stress of FCC Polycrystals with Application to OFHC Cu, *Acta Materialia*, 46, 565-577, 1998
- [74] NEMAT-NASSER, S., NI, L., OKINAKA, T. A constitutive model for FCC crystals with application to polycrystalline OFHC Copper, *Mech.Mater*, 30, 325-341, 1998b
- [75] NEMAT-NASSER, S., NI, L., OKINAKA, T. A constitutive model for FCC crystals with application to polycrystalline OFHC Copper, *Mech.Mater*, 30, 325-341, 1998b
- [76] OROWAN, E. Discussion in Symposium on internal stresses in metals and alloys. Institute of Metals, London, 451, 1948.
- [77] OROWAN, E. Problems of plastic gliding, *Proc. Phys. Soc.*, 52, 8-22, 1940
- [78] OUSSOUADDI, O., KLEPACZKO, J.R. an analysis of transition from isothermal to adiabatic deformation in the case of a tube under torsion, *Journal of Physics IV*, C3-323, 1991
- [79] PERZYNA, P. Fundamental problems in viscoplasticity, Vol.9 New York: Academic Press, 243-377, 1966
- [80] REGAZZONI, G., KOCKS, U.F., FOLLANSBEE, P.S. Dislocation kinetics at high strain-rates, *Acta metallurgica*, 12, 2865-2875, 1987
- [81] RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, J.A., RUSINEK, A. Phenomenological physically-based constitutive modeling of BCC metals: Application to vanadium.
- [82] ROSENBERG, J.R., PIEHLER, R.H. Calculation of the Taylor factor and lattice rotations for bcc metals deforming by pencil glide, *Metallurgical and Materials Transactions B*, Vol. 2, 1, 257-259.
- [83] RUSINEK, A., KLEPACZKO, J.R. Shear testing of sheet steel at wide range of strain-rates and a constitutive relation with strain rate and temperature dependence of the flow stress, *International Journal of Plasticity*, 17, 87-115, 2001
- [84] RUSINEK, A., RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, J.A., ARIAS, Á. A thermo-viscoplastic constitutive model for FCC metals with application to OFHC Copper, *International Journal of Mechanical Sciences*, 52, 120-135, 2010
- [85] RUSINEK, A., RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, J.A., KLEPACZKO, J.R., PECHERSKI, R.B. Analysis of thermo-viscoplastic behavior of six high strength steels, *Journal of Materials Des.*, 30, 1748-1761, 2009
- [86] RUSINEK, A., ZAERA, R., KLEPACZKO, J.R. Constitutive relations in 3D for a wide range of strain-rates and temperature - application to mild steels, *International Journal of Solids and Structures*, 44, 5611-5634, 2007
- [87] SACKETT, S.J., KELLY, J.M., GILLIS, P.P. A probabilistic approach to polycrystalline

- plasticity, *Journal of Franklin Institute*, 304, 33-63, 1977
- [88] SEEGER, A. The mechanism of glide and work-hardening in FCC and HCP metal. *Dislocations and mechanical properties of crystal*, New York, Wiley.
- [89] STAINIER, L., CUITINO, A.M., ORTIZ, M. Multiscale modelling of hardening in BCC crystal plasticity, *Journal of Physics, IV France*, 105, 157-164, 2003
- [90] STEIN, D.L., LOW, J.R. Mobility of edge dislocations in silico-iron crystals, *Journal of Applied Physics*, 31, 362-369, 1960
- [91] TANIMURA, S., DUFFY, J. Strain-rate effects and temperature history effects for three different tempers of 4340VAR steel, *International Journal of Plasticity*, 2, 21-35, 1986
- [92] TANNER, A., MCGINTY, R., MCDOWELL, D. Modeling temperature and strain-rate history effects in OFHC Copper, *International Journal of Plasticity*, 15, 575-603, 1999
- [93] TANNER, A.B., MCDOWELL, D. Deformation, temperature and strain-rate sequence experiments on OFHC Cu, *International Journal of Plasticity*, 15, 4, 375-399, 1999
- [94] TAYLOR, G. thermally-activated deformation of BCC metals and alloys, *Progress in Materials Science*, 36, 29-61, 1992
- [95] TAYLOR, G.I. Plastic strain in metals, *Journal of Inst. Metals*, 62, 307-324, 1938
- [96] TAYLOR, G.I. The mechanism of plastic deformation of crystals. Part I. Theoretical, *Proc. Roy. Soc. London*, A145, 362-387, 1934
- [97] UENISHI, A., TEODOSIU, C. Constitutive modeling of the high strain-rate behavior of interstitial-free steel, *International Journal of Plasticity*, 20, 915-936, 2004
- [98] VOYIADJIS, G.Z., ABED, F.H. Microstructural based models for BCC and FCC metal with temperature and strain-rate dependency, *Mechanics of Materials*, 37, 355-378, 2005
- [99] VOYIADJIS, G.Z., ALMASRI, A.H. A physically based constitutive model for FCC metals with applications to dynamic hardness, *Mechanics of Materials*, 40, 549-563, 2008
- [100] VREELAND, T., JASSBY, K.M. Temperature dependent viscous-drag in close-packed metals, *Material Science and Engineering*, 7, 95-103, 1971
- [101] ZAISER, M., GLAZOV, M., LALLI, L.A., RICHMOND, O. On the relations between strain and strain-rate softening phenomena in some metallic materials: A computational study, *Journal of Computational Material Science*, 15, 35-49, 1999.
- [102] ZENER, C., HOLLOMON, J.H. Effect of strain-rate upon plastic flow of steel, *Journal of Applied Physics*, 15, 22-32, 1944
- [103] ZERILLI, F. Dislocation mechanics-based constitutive equations, *Metal. Mater. Trans.*, A35, 2547-2555, 2004
- [104] ZERILLI, F.J., ARMSTRONG, R.W., Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculation, *Journal of Applied Physics*, 5, 19816-1825, 1987
- [105] ZERILLI, F.J., ARMSTRONG, R.W., The effect of dislocation drag on the stress-strain behavior of FCC metals, *Acta Metallurgica and Materialia*, 40, 1803-1808, 1992