



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

**Departamento de Mecánica de Medios Continuos y
Teoría de Estructuras**

PROYECTO FIN DE CARRERA

**ANÁLISIS NUMÉRICO DE IMPACTOS DE
HIELO SOBRE PLACAS DE ALUMINIO**

Autor: Unai Gamboa Agorreta

Tutores: Dr. Jesús Pernas Sánchez

Dr. José Alfonso Artero Guerrero

Leganés, Septiembre de 2014

Agradecimientos.

Este proyecto está dedicado a un grupo reducido de personas sin los que no podría haber logrado este gran reto que es ser Ingeniero Industrial.

Quiero agradecer a Elena Magán el que me encauzara estos últimos tres años por el buen camino, unos años en los que no veía la luz al final del túnel y ella me ha ayudado a encontrarla. Sé que sin ella no habría peleado con tanta fuerza por conseguirlo, que sin ella no habría terminado lo que empecé en el verano de 2008; y que sin ella no podría haber empezado el proyecto de verdad importante, y empieza el día que defienda este documento.

Agradecer a mi familia, pero en particular a mis padres Martín y María Cruz, su apoyo incondicional en los seis años que me ha llevado alcanzar mi meta, por anteponer en todo momento mis necesidades a las suyas propias, y por ayudarme en los momentos de mayor apuro.

Agradecer a mi abuelo Martín, que me cuidara como a un Rey el tiempo que he estado escribiendo el documento, haciendo todo lo posible porque me sintiera bien.

Agradecer a mis amigos Pablo Pozo y Gaizka Subira “Nené”, el que me escucharan las historias que les contaba cuando me ponían piedras en el camino.

Agradecer a mis tutores Jesús Pernas y José Alfonso Artero su ayuda en la elaboración de este documento, y su atención en momentos en los que ni siquiera habíamos concertado una cita.

Agradecer a los profesores Carlos Navarro, Guillermo Robles, Francisco Antón Rivera y Javier Villa, que compartieran conmigo su capacidad docente, ayudándome a entender temas que sin ellos no habría sido posible.

Por último, a los genios Carlos y Julián por haberme enseñado cosas que algunos profesores no han sido capaces o no han querido ser capaces de enseñarme.

Por la Chaca y por mi abuelo,

por los dos



Resumen.

El diseño y construcción de los componentes estructurales son temas de gran relevancia dentro de la ingeniería aeroespacial ya que forman parte de elementos críticos dentro en una aeronave, debido a las características propias del entorno donde desarrollan su funcionalidad.

A estos elementos se les debe dotar de unos altos niveles de fiabilidad y de seguridad en su diseño. Consecuentemente, los ensayos experimentales y simulaciones numéricas de los materiales empleados en la construcción de los componentes resultan un aspecto de gran importancia en el sector; ya que permiten evaluar los posibles daños que puedan aparecer en la estructura, así como estudiar configuraciones que permitan reducirlos.

Dada la alta velocidad a la que viajan las aeronaves, un impacto de cualquier agente externo sobre su fuselaje puede dar lugar a fallos que pueden ser catastróficos para la integridad de la estructura.

Este documento pretende hacer un análisis de carácter numérico del impacto de un proyectil de hielo sobre una placa de aluminio, elemento que constituye alrededor del 20% del peso total de una aeronave de última generación; así como la influencia que tienen sobre dicho impacto algunos parámetros asociados tanto al proyectil como a la placa impactada.

En primer lugar, se ha validado el modelo numérico empleado en la simulación haciendo uso de datos experimentales que se reflejan en el artículo experimental realizado por la Agencia Aeroespacial Americana NASA en [4] en el año 1971.

Una vez validado el modelo, se pretende realizar una serie de modificaciones en el modelo con el objetivo de estudiar su influencia sobre el impacto. Las variaciones realizadas son las siguientes:

- I. Composición del aluminio de la placa impactada.
- II. Velocidad de impacto del proyectil.
- III. Espesor de la placa impactada.
- IV. Masa del proyectil, manteniendo la superficie de contacto idéntica.
- V. El volumen y la velocidad del proyectil, manteniendo su energía cinética constante.

Los resultados obtenidos en las diferentes simulaciones han permitido analizar y entender el comportamiento del impacto en determinadas condiciones específicas.

Abstract.

All structural components being part of an aircraft are considered critical elements, due to the natural requirements coming from the scenario where they are commonly deployed. Therefore, their design and construction are highly relevant issues within the scopes of aerospace engineering.

These types of elements must perform at very demanding security and reliability levels in terms of design. Consequently, experimental tests and numerical simulations of materials used in the construction of aircraft components become an added value to aeronautical industry, thus avoiding potential failures which could even become unrecoverable.

Due to the particularly high speed of most aerial platforms, any impact caused by an external agent in the fuselage may lead to critical situations, even catastrophic; that modern society hardly accepts and tolerates in most cases.

The main goal of this document is to analyze hail impact onto an aluminium plate. This material is around of a last generation aircraft weight. Furthermore, Also, it will also be analyze the influence of changing certain parameters associated to the projectile and the target.

As a first step, the simulation model must be validated, taking into account experimental test data [4] from a NASA paper published in 1971.

Once the model is assumed as correct, some changes will be introduced in the model in order to analyze their influence on the impact results. variations of determined impact parameters are given. Changes will be related to:

- I. Target's Aluminium alloy.
- II. Projectile's impacting speed.
- III. Target plate thickness.
- IV. Projectile mass, maintaining constant impacting area.
- V. Projectile volumen & speed, maintaining constant kinetic energy.

Obtained results will allow to analyze and understand the hail impact behaviour in certain conditions.

Índice General:

Agradecimientos	iii
Resumen	v
Abstract.....	vi
Índice General:	viii
Índice de Figuras:.....	ix
Índice de Gráficas:.....	xi
Índice de Tablas:.....	xiii
1. Introducción.....	3
1.1 Motivación.....	3
1.2 Objetivos.....	6
1.3 Antecedentes.....	6
1.4 Estructura del documento.....	8
2. Materiales empleados en la simulación.....	11
2.1 Introducción.....	11
2.2 Comportamiento mecánico del hielo.....	11
2.2.1 Introducción.....	11
2.2.2 Estructura cristalina del hielo.....	12
2.2.3 Propiedades elásticas del hielo.....	14
2.2.4 Resistencia mecánica del hielo.....	14
2.3 Comportamiento mecánico del Aluminio (Al).....	15
2.3.1 Introducción.....	15
2.3.2 Aleaciones de aluminio.....	16
3. Método de los Elementos Finitos (FEM).....	27
3.1 Introducción	27
3.1.1 Principio de los Trabajos Virtuales.....	28
3.1.2 Principio de la Energía Potencial Mínima	28
3.1.3 Discretización	29
3.1.4 Tipos de problemas.....	29
3.1.5 Ventajas del Método de los Elementos Finitos	30
3.1.6 Problemas no lineales	30
3.2 Formulación del Método de los Elementos Finitos	30
3.2.1 Discretización o mallado del dominio	30
3.2.2 Definición de funciones de forma.....	32
3.2.3 Campo de deformaciones	33

3.2.4	Deformaciones unitarias.....	33
3.2.5	Estado de tensiones. Ecuación constitutiva	35
3.2.6	Ecuación de equilibrio de un elemento.....	35
3.2.7	Ecuación de equilibrio del conjunto.....	37
3.2.8	Condiciones de contorno	37
3.3	Elasticidad tridimensional.....	38
3.3.1	Tipos de elementos.....	38
3.3.2	Formulación isoparamétrica	40
3.4	LS DYNA.....	43
3.4.1	Métodos numéricos empleados	44
4.	Validación del modelo empleado.....	51
4.1	Introducción	51
4.2	Geometría del ensayo	51
4.3	Condiciones de contorno en el ensayo	52
4.4	Descripción del modelo simulado	52
4.4.1	Modelo de placa.....	52
4.4.2	Modelo de proyectil.....	53
4.5	Validación del modelo	54
4.5.1	Modelo de material del hielo.....	55
4.5.2	Modelo de material del aluminio.....	56
4.5.3	Resultados ensayo experimental.....	58
4.5.4	Conclusiones	62
4.5.5	“Damping”	63
5.	Simulaciones de impacto de hielo	71
5.1	Introducción	71
5.2	Simulaciones.....	71
5.2.1	Variación en la composición del aluminio de la placa impactada.....	71
5.2.2	Variación de la velocidad inicial del proyectil.....	78
5.2.3	Variación del espesor de la placa.....	82
5.2.4	Variación de la masa del proyectil	87
5.2.5	Energía cinética del proyectil constante	92
6.	Conclusiones y trabajos futuros.....	101
6.1	Introducción	101
6.2	Conclusiones.....	101
6.3	Trabajos futuros.....	103

Índice de Figuras:

Figura 1.1: Impacto de aves (izqda.), impacto de granizo (dcha.).....	4
Figura 1.2: Materiales que utilizados en la fabricación con su distribución en peso de un Boeing 787	4
Figura 1.3: Hielo acumulado en el borde de ataque de un avión de hélices.....	5
Figura 1.4: Zona de impacto de un laminado de 4mm de espesor, impactada por un proyectil de 50mm de diámetro a 200m/s	7
Figura 2.1: Bloque natural de hielo de 4 toneladas en Islandia.....	11
Figura 2.2: Estructura hexagonal del hielo	13
Figura 2.3: Ensayo dureza Brinell.....	23
Figura 3.1: División del dominio V en subdominios.....	28
Figura 3.2: Discretización de una viga	29
Figura 3.3: Tipos de elementos en función de las dimensiones del problema.....	29
Figura 3.4: Mallado de un dominio V	31
Figura 3.5: Mallado y numeración de nodos y elementos de un dominio.....	32
Figura 3.6: Fuerzas aplicadas sobre un elemento	36
Figura 3.7: Elemento prisma rectangular con su sistema de coordenadas local.....	38
Figura 3.8: Numeración del elemento prisma rectangular con su sistema de coordenadas local.....	39
Figura 3.9: Elemento cuadrático de 20 nodos	39
Figura 3.10: Elemento cuadrático de 32 nodos.....	40
Figura 3.11: Fuerzas e superficie sobre un elemento tridimensional.....	43
Figura 3.12: Método Lagrangiano antes y después de sufrir deformación (2D).....	44
Figura 3.13: Método Lagrangiano antes y después de sufrir deformación (3D).....	45
Figura 3.14: Premallado con elementos tipo Shell (izqda.), relleno del premallado con 125.000 partículas (centro), relleno del premallado con 8.000 partículas (dcha.)	46
Figura 3.15: Mallado del método Euleriano.....	47
Figura 3.16: Comparativa de deformaciones en mallados	48
Figura 4.1: Geometría de la placa impactada en el ensayo experimental	51
Figura 4.2: Alzado con simplificación geométrica del ensayo experimental	52
Figura 4.3: Elemento tipo Shell (izqda.), y tipo Box-Solid (dcha.) empleados en la simulación.....	53
Figura 4.4: Modelo proyectil Lagrangiano (izqda.), modelo de proyectil SPH (dcha.)	54
Figura 4.5: Sistema de coordenadas empleado en la placa de aluminio.....	55
Figura 4.6: Secuencia de imágenes del impacto de una esfera de hielo	55

Figura 4.7: Comparativa de deformaciones en proyectiles a)Ensayo experimental, b)Lagrangiano, c) SPH	62
Figura 5.1: Superficie afectada por deformación plástica para las cuatro velocidades.....	81
Figura 5.2: Geometría de los elementos Box-Solid	83
Figura 5.3: Geometría de proyectil hemisférico empleado para la variación en la masa	88
Figura 5.4: Proyectil hemisférico de partículas SPH empleado para la variación en la masa	90
Figura 5.5: Representación gráfica de los 5 proyectiles del ensayo $E_k = cte$	93

Índice de Gráficas:

Gráfica 2.1: Carga a rotura de las principales aleaciones de aluminio	21
Gráfica 2.2: Límite elástico de las principales aleaciones de aluminio.....	22
Gráfica 4.1: Relación tensión deformación de la aleación 2014 T4	58
Gráfica 4.2: Perfil de desplazamientos obtenidos en el ensayo experimental	58
Gráfica 4.3: Perfil de desplazamientos obtenidos en la simulación.....	59
Gráfica 4.4: Comparativa del perfil de desplazamientos entre superficies superior e inferior con elementos Box-Solid.....	61
Gráfica 4.5: Variación del espesor en la placa empleando elementos Box-Solid.....	61
Gráfica 4.6: Evolución temporal del desplazamiento máximo de la placa	64
Gráfica 4.7: Perfil de desplazamientos final obtenido en la simulación.....	64
Gráfica 4.8: Curva escalón a introducir en la tarjeta “Damping”	65
Gráfica 4.9: Evolución temporal del desplazamiento máximo para diferentes valores del escalón.....	66
Gráfica 4.10: Evolución temporal del desplazamiento máximo para diferentes instantes de introducción del escalón.....	67
Gráfica 4.11: Curva definitiva a introducir en la tarjeta “Damping”	67
Gráfica 4.12: Perfil de desplazamientos en la simulaciones con y sin “Damping”	68
Gráfica 5.1: Relación tensión-deformación 2024 T351	73
Gráfica 5.2: Relación tensión-deformación 5754 H111.....	74
Gráfica 5.3: Perfil de desplazamientos de 2024 T351 y 5754 H111	74
Gráfica 5.4: Deformación plástica de 2024 T351 y 5754 H111.....	75
Gráfica 5.5: Relación tensión-deformación de las aleaciones apartado 5.2	76
Gráfica 5.6: Perfil de desplazamientos de las aleaciones apartado 5.2	77
Gráfica 5.8: Perfil de desplazamientos de la placa para las cuatro velocidades simuladas ..	79
Gráfica 5.9: Relación desplazamiento máximo-velocidad de impacto.....	79
Gráfica 5.10: Deformaciones plásticas en la placa para las cuatro velocidades simuladas..	80
Gráfica 5.11: Relación deformación plástica máxima-velocidad de impacto del proyectil..	81
Gráfica 5.12: Perfil de desplazamientos en la placa para los 5 espesores simulados a 192 m/s.....	83
Gráfica 5.13: Perfil de desplazamientos en la placa para los 5 espesores simulados a 240 m/s.....	84
Gráfica 5.14: Perfil de desplazamientos en la placa para los 5 espesores simulados a 288 m/s.....	84
Gráfica 5.15: Relación desplazamiento máximo-espesor de placa para las 3 velocidades de impacto	85
Gráfica 5.16: Evolución temporal de la energía cinética de la placa.....	86

Gráfica 5.17: Evolución temporal de la energía interna de la placa.....	86
Gráfica 5.18: Energías cinética e interna de la placa máximas como función del espesor ...	87
Gráfica 5.19: Perfil de desplazamientos para 5 masas diferentes del proyectil	89
Gráfica 5.20: Perfil de desplazamientos corregido para 5 masas diferentes del proyectil ..	91
Gráfica 5.21: Perfil de desplazamientos para proyectil esférico y hemisférico de igual masa	91
Gráfica 5.22: Relación desplazamiento máximo-masa de proyectil	92
Gráfica 5.23: Perfil de desplazamientos ensayo $E_{k1} = cte$	94
Gráfica 5.24: Perfil de desplazamientos ensayo $E_{k2} = cte$	95
Gráfica 5.25: Perfil de desplazamientos ensayo $E_{k3} = cte$	96
Gráfica 5.26: Relación desplazamiento máximo-energía cinética proyectil.....	97
Gráfica 5.27: Deformación plástica para $E_{k1} = cte$	98

Índice de Tablas:

Tabla 2.1: Códigos de los elementos predominantes en las aleaciones	16
Tabla 2.2: Composición química de la aleación 2014 T4	19
Tabla 2.3: Propiedades cualitativas de la aleación 2014 T4	20
Tabla 2.4: Propiedades resistentes de las principales aleaciones de aluminio.....	21
Tabla 2.5: Dureza Brinell (HB) de las principales aleaciones de aluminio	24
Tabla 4.1: Propiedades del hielo empleadas en la simulación.....	56
Tabla 4.2: Constantes de la aleación 2014 T4 como material Johnson-Cook	57
Tabla 4.3: Constantes de la aleación 2014 T4 como material Johnson-Cook calculadas	57
Tabla 4.4: Desplazamiento máximo y error relativo en simulaciones SPH-Shell y SPH-BoxSolid	60
Tabla 5.1: Constantes de las aleaciones como materiales Johnson-Cook.....	72
Tabla 5.2: Propiedades de las aleaciones a introducir en la tarjeta de materiales.....	72
Tabla 5.3: Velocidad y masa con igualdad de energía cinética de proyectil $Ek1$	93
Tabla 5.4: Velocidad y masa con igualdad de energía cinética de proyectil $Ek2, Ek3$	95
Tabla 5.5: Energías y desplazamientos máximos asociados.....	96

Capítulo 1

1. Introducción.

1.1 Motivación.

La naturaleza de los impactos es tan amplia y diversa, que resulta imposible hacer un estudio de todos ellos, sin embargo se pueden citar algunos ejemplos en los que sucede este fenómeno:

- Transporte de alta velocidad, tanto en plataformas aéreas (aeronaves y vehículos espaciales), donde se pueden alcanzar velocidades supersónicas; como terrestres (trenes de alta velocidad tipo Shinkansen o “Tren Bala” japonés, el TGV francés; el AVE español, el Railjet austriaco, el Pendolino italiano,... y otros), donde se pueden alcanzar velocidades superiores a los 350 Km/h.
- Protecciones balísticas tanto civiles como militares, incluyendo los vehículos acorazados, blindajes para vehículos civiles, chalecos antibalas, y otros dispositivos de seguridad para uso personal o colectivo.
- Uso y manipulación de explosivos, tanto para aplicaciones civiles (minería a cielo abierto e ingeniería civil), como policiales y militares; incluyendo la balística de fragmentación.
- Bienes industriales, civiles o personales sujetos al riesgo a deflagraciones accidentales que causen fragmentación y proyección de elementos sólidos en su entorno.
- Elementos estructurales de índole diversa desplegados en zonas del planeta afectadas por fenómenos meteorológicos adversos de gran energía y capacidad destructiva como huracanes, terremotos, tsunamis,...

En la industria aeroespacial, los fallos en los elementos estructurales que componen cualquier aeronave pueden tener consecuencias desastrosas. El fallo puede estar provocado por el impacto a gran velocidad de un agente externo sobre cualquier componente de la aeronave.

En el caso que atañe a este documento, es el impacto sobre aeronaves el que resulta de interés para este estudio. Debido a las diferentes condiciones de altitud que envuelven estos vehículos, existen numerosos agentes externos con los que puede impactar una aeronave como se muestra en la figura 1.1:

- Elementos pertenecientes a otras aeronaves que han sido desprendidos.
- Aves, particularmente en maniobras a baja cota como aterrizaje o despegue.
- Meteoritos y basura espacial.
- Granizo derivado de las condiciones meteorológicas.
- Fragmentos provenientes de una explosión en el motor.



Figura 1.1: Impacto de aves (izqda.), impacto de granizo (dcha.).

Es este último tipo de impacto por hielo o granizo que se pretende estudiar mediante un modelo de simulación numérica.

Dadas estas circunstancias, los materiales estructurales empleados en la construcción de aeronaves deben reunir altas cualidades de resistencia, además de la ligereza que se les presupone debido a la aplicación en la que deben ser empleados. De esta manera, no son muchos los materiales que reúnen estas dos características. La estructura de un avión por ejemplo, consta de materiales compuestos, titanio, acero y aluminio, tal y como se puede observar en la figura 1.2:

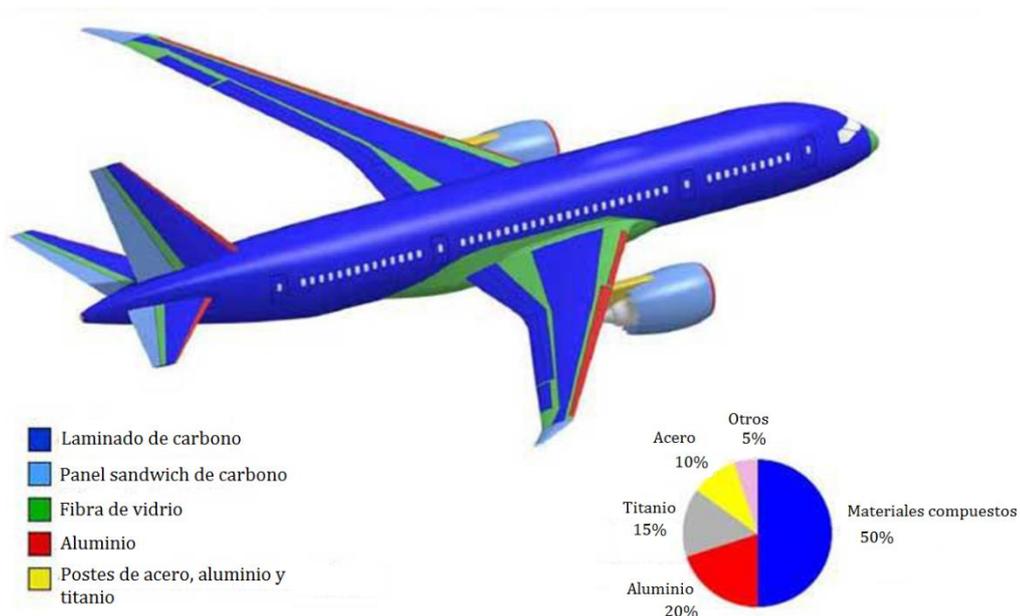


Figura 1.2: Materiales que utilizados en la fabricación con su distribución en peso de un Boeing 787.

Como se puede observar en dicha figura, la mitad de los componentes del avión son materiales compuestos, materiales que han tenido un gran auge en las últimas

décadas. El siguiente elemento más utilizado es el aluminio, formando parte del 20% de los materiales empleados en la fabricación de este avión.

Como se puede observar en la figura 1.2, el aluminio juega un papel importante en su estructura; ya que es el material elegido para conformar los bordes de ataque o secciones frontales fundamentales para la navegabilidad de la aeronave como las alas, el timón, los estabilizadores de cola y las turbinas propulsoras.

Aparte de los impactos citados, el hielo puede acumularse en turbinas y hélices al adherirse a la superficie de sus álabes o palas, llegando a acumularse alcanzando volúmenes que tras un posterior desprendimiento, pueden resultar catastróficos. La siguiente figura representa este problema en la pala de una aeronave.



Figura 1.3: Hielo acumulado en el borde de ataque de un avión de hélices.

Con el objetivo de paliar este problema, la industria aeronáutica está trabajando en diseños de aeronaves de nueva generación en las que se emplean turbinas de rotor abierto ubicadas en la parte posterior de la cola de la aeronave; consiguiendo así, que de producirse esta acumulación de hielo sobre la superficie de la hélice, el desprendimiento no afecte de manera tan directa a la propia aeronave, o al menos sus consecuencias sean menos nocivas, ya que de impactar sobre ella, lo haría en zonas menos críticas.

1.2 Objetivos.

El principal objetivo de este proyecto es el estudio del impacto de hielo contra placas de aluminio. Para ello, se ha realizado una simulación numérica que permita analizar el impacto, así como la influencia que tienen sobre el mismo una serie de parámetros asociados. De esta manera, se pretenden obtener una serie de resultados con los que se pueda ayudar a entender el comportamiento de los materiales ante el impacto, sin la necesidad de realizar una simulación numérica o un ensayo experimental, ahorrando posibles costes potenciales y acelerando el proceso de toma de decisiones.

Para poder cumplir los objetivos propuestos, se han llevado a cabo las siguientes tareas:

- Creación de un modelo numérico capaz de reproducir el ensayo experimental.
- Validación de un modelo que asemeje dicho comportamiento.
- Variación de parámetros de impacto en la simulación.
- Análisis y obtención de soluciones.

1.3 Antecedentes.

En este apartado se pretende reflejar en el documento los experimentos y simulaciones realizadas por otros autores que se han realizado con anterioridad, y en los que se fundamenta este proyecto, y con los que poder aseverar la validez del modelo numérico empleado.

A mediados de la década de los 80 surgieron los primeros modelos de comportamiento de hielo. En 1986 Nadreau y Michael propusieron un modelo elástico hasta la rotura de material [1]; modelo que define una superficie de rotura como función de los invariantes del tensor de tensiones y del tensor desviador del tensor de tensiones.

Años más tarde, Kim en 1999 [2], propuso un modelo elastoplástico para el hielo, con el objetivo de definir su comportamiento a altas velocidades de deformación. Este modelo no distingue entre la diferencia de comportamiento del hielo a compresión y tracción, ni la sensibilidad a la velocidad de deformación de forma que el modelo queda limitado en gran medida.

En 2005, M.Anghileri, F.Invernizzi, y M.Mascheroni [3], realizaron una simulación numérica del impacto de hielo sobre placas de aluminio. Para ello siguieron una metodología similar a la realizada en el presente proyecto. Se modelizó el impacto mediante tres métodos de simulación diferentes: Lagrangiano, SPH y ALE. Discutiendo la conveniencia de cada método y haciendo uso de los resultados reflejados en la nota técnica de la NASA [4], para la validación de los modelos empleados en la simulación. Posteriormente, realizaron simulaciones del impacto del proyectil sobre una turbina de avión, haciendo uso del método adecuado.

En 2013, Jesús Pernas Sánchez realizó su tesis [5], en la que se realizó un ensayo experimental en el que se impactó una esfera de hielo sobre un laminado carbono/epoxy, además de la correspondiente simulación numérica en la que se desarrolló un modelo numérico para la simulación del impacto.



Figura 1.4: Zona de impacto de un laminado de 4mm de espesor, impactada por un proyectil de 50mm de diámetro a 200m/s.

El motivo de realización de esta tesis es idéntico al del presente documento, haciendo uso de un estudio para otro tipo de materiales compuestos empleados en la fabricación de aeronaves.

1.4 Estructura del documento.

El proyecto desarrollado está compuesto de seis capítulos, la bibliografía y referencias usadas a lo largo del mismo, y un anexo con la tarjeta de LS DYNA del modelo validado en el capítulo 4. El presente capítulo trata de hacer una introducción general en la problemática de los impactos de hielo, Capítulo 1.

En el Capítulo 2, se presenta la documentación e información relativa a los materiales empleados que se han utilizado en la simulación, el hielo y el aluminio.

En el Capítulo 3, se ha tratado de aportar información teórica acerca del Método de los Elementos Finitos y las ventajas que este aporta. Así como una breve descripción de las propiedades de los métodos empleados en capítulos posteriores.

En el Capítulo 4, se desarrolla el modelo numérico de forma que se termine por concluir el método más adecuado para reproducir con fidelidad el impacto del hielo sobre una placa de aluminio.

En el Capítulo 5, se han introducido diversas variaciones en los parámetros de impacto con el objeto de estudiar cómo estas afectan al comportamiento mecánico del propio impacto.

En el Capítulo 6, se expresan las principales conclusiones obtenidas a lo largo del documento, así como posibles trabajos futuros a realizar en esta línea de trabajo.

Capítulo 2

2. Materiales empleados en la simulación.

2.1 Introducción.

En este capítulo, se tratará de describir el hielo y el aluminio empleados en la simulación numérica, a través de su microestructura, sus propiedades y su comportamiento mecánico.

Así se podrán utilizar diferentes propiedades con el objetivo de validar el modelo de simulación y ahondar en la materia mediante variaciones en diferentes parámetros de la simulación. Más adelante en el documento se profundizará en ello.

2.2 Comportamiento mecánico del hielo.

2.2.1 Introducción.

El agua es el elemento más abundante en nuestro planeta y, esencial para la vida, cubre aproximadamente el 71% de la corteza terrestre. Es por esto que es ampliamente utilizada en la industria. Gracias a ello, existe un amplio conocimiento acerca del comportamiento de la misma, sus propiedades y aplicaciones.

El “hielo” es el agua congelada, o agua en estado sólido. Es uno de los 3 estados naturales del agua que ésta adopta según las condiciones ambientales de presión y temperatura.



Figura 2.1: Bloque natural de hielo de 4 toneladas en Islandia.

En este documento, se modelará numéricamente el hielo, se realizará una descripción acerca de su microestructura, sus propiedades y su comportamiento en definitiva.

Existen numerosos estudios del comportamiento del hielo en condiciones estáticas y en ensayos de fluencia. Sin embargo, en condiciones dinámicas no se ha avanzado tanto acerca del comportamiento del hielo como material.

Los principales parámetros que influyen en el comportamiento del hielo son: la velocidad de deformación, la temperatura, y la microestructura que éste presenta.

2.2.2 Estructura cristalina del hielo.

El hielo se presenta en 12 estructuras o fases cristalinas diferentes. A las presiones habituales en el medio terrestre (en el entorno de la presión atmosférica), la fase estable suele denotarse como fase I según la terminología de Tamman.

Dicha fase I presenta dos variantes relacionadas entre sí:

- El hielo hexagonal, denotado **Ih**.
- El hielo cúbico, denominado **Ic**.

El hielo hexagonal es la fase más común, y la mejor conocida: su estructura hexagonal puede verse reflejada en los cristales de hielo, que siempre tienen una base hexagonal. Prácticamente, todo el hielo que se forma en la biosfera terrestre es hielo del tipo **Ih**, a excepción de una pequeña cantidad de hielo de tipo **Ic**.

El hielo **Ih** presenta una estructura hexagonal en la que cada átomo de oxígeno de una molécula de agua tiene otros cuatro átomos de hidrógeno como sus vecinos más próximos, situados en los vértices de un tetraedro regular cuyo centro es el átomo de oxígeno de interés. Esta unidad tetraédrica es común a todas las demás fases del hielo, y se debe al hecho de que el ángulo entre átomos de hidrógeno en la molécula de agua libre H-O-H es de $104,52^\circ$, en vez de 90° .

Los parámetros de red más relevantes son el lado hexagonal $a=0,451\text{nm}$, y la altura del prisma hexagonal $c=0,7357\text{nm}$. Estos valores pueden variar ligeramente con la temperatura, pero la relación entre ambos, $c/a=1,628$, permanece prácticamente estable y constante.

La estabilidad del parámetro c/a explica el hecho de que la expansión térmica del hielo se produzca de manera isotrópica.

Estos cristales hexagonales se agrupan formando granos policristalinos, que conforman el sólido al que se denomina comúnmente como hielo. El tamaño y la agrupación de estos granos dependen del proceso en el que se ha congelado el hielo. Este proceso puede dar lugar a diferentes microestructuras en el material, siendo la granular y la columnar las más habituales.

En este documento, se va a estudiar la fase del hielo más común en la naturaleza, que como se dijo con anterioridad presenta una estructura hexagonal.

El comportamiento del hielo granular es isótropo, debido a la diversidad de orientación de sus granos y de la estructura dentro de los mismos. Sin embargo, en la microestructura columnar el comportamiento del hielo se verá afectado en función de la orientación de los granos con respecto a la estructura hexagonal.

En función de esta orientación, el hielo columnar se puede clasificar en:

- Hielo-S1: la orientación de los granos es paralela al plano cristalográfico representado por el eje c.
- Hielo-S2: la orientación de los granos es perpendicular al plano cristalográfico representado por el eje c.
- Hielo-S3: el crecimiento de los granos nos atiende a ninguna dirección predominante, creciendo así de forma aleatoria.

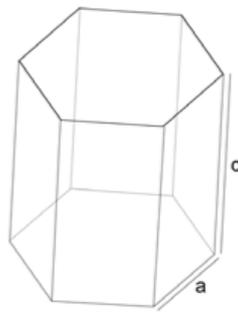


Figura 2.2: Estructura hexagonal del hielo.

El Hielo-S1 y Hielo-S2, sólo aparecen bajo unas determinadas condiciones de congelación, por lo que el hielo columnar presentará en la mayoría de los casos la microestructura Hielo-S3. Por tanto, se puede afirmar que no existe influencia en las propiedades del Hielo-S3 debido a la orientación de la estructura hexagonal con respecto al grano [6].

La estructura del hielo de fase II es ortorrómbica centrada. Este hielo se forma a unos 238K, para presiones de 283 atmósferas, y su densidad es de 1193kg/m^3 , por ser una estructura mucho más compacta.

El hielo de fase III es tetragonal, y aparece a unos 246K y 276 atm, siendo su densidad de 1166kg/m^3 .

El hielo de fase V es monoclinico, apareciendo a 237,5K y 480 atm, con una densidad de 1267kg/m^3 .

El hielo de fase VI es tetragonal, y aparece a 237,5K para 777atm, con una densidad de 1360kg/m^3 .

Todas estas fases son esencialmente frágiles, aunque presentan gran tendencia a la fluencia en el tiempo y cierto comportamiento viscoelástico.

Es por todo esto que **el hielo se debe considerar como un material isótropo [5]**.

2.2.3 Propiedades elásticas del hielo.

Como se explicó con anterioridad en el documento, las propiedades del hielo dependen de tres parámetros fundamentales:

- La velocidad de deformación.
- La temperatura.
- La microestructura que presenta el hielo.

Sin embargo, las propiedades elásticas del hielo no muestran dependencia alguna con respecto a la velocidad de deformación. Ni siquiera la temperatura y la microestructura afectan en gran medida al coeficiente de Poisson del material.

Por el contrario, una variación en estos parámetros si alterará de manera significativa el valor del módulo de Young del material. Teniéndose para:

- Hielo columnar:

$$E = E_m + c(T_m - T)$$

Donde $E_m = 9,61 \text{ GPa}$, y $c = 0,011 \text{ GPa/K}$

- Hielo granular:

$$E = E_m + c(T_m - T)$$

Donde $E_m = 8,93 \text{ GPa}$, y $c = 0,012 \text{ GPa/K}$

Siendo T_m la temperatura de fusión del hielo en condiciones de presión atmosférica para ambos casos.

2.2.4 Resistencia mecánica del hielo.

El hielo presenta unas propiedades diferentes a tracción y compresión [7]. En ambos casos los valores de su resistencia de tracción y de compresión dependen exclusivamente de tres factores:

- I. Velocidad de deformación.
- II. Temperatura.
- III. Microestructura del material.

2.2.4.1 Velocidad de deformación.

En tracción, el hielo se comporta como un material frágil, no depende de la velocidad de deformación. Sin embargo, en compresión el hielo presenta una clara dependencia con la velocidad de deformación. A velocidades de deformación bajas, el hielo se comporta como un material dúctil. Mientras que para altas velocidades de deformación el hielo se comporta como un material frágil.

A medida que se aumenta la velocidad de deformación en el material, el valor de la resistencia a compresión también aumenta.

2.2.4.2 Temperatura.

La resistencia de compresión del hielo aumenta conforme disminuye su temperatura. De nuevo, la resistencia a tracción del material no depende de este factor [5].

2.2.4.3 Microestructura del hielo.

Existen numerosos estudios sobre el comportamiento del hielo con el objetivo de dar una relación entre la microestructura del mismo y sus propiedades resistentes.

De los trabajos realizados por Hooke [8], Schulson [9] y Cole [6] se extrae que la resistencia a compresión del hielo disminuye al aumentar el tamaño del grano del mismo. Mientras que la resistencia a tracción se mantiene constante e independiente del tamaño de grano del material.

2.3 Comportamiento mecánico del Aluminio (Al).

2.3.1 Introducción.

El aluminio (Al) es el elemento metálico más abundante que está presente en la corteza terrestre y, dentro del grupo de los metales no férricos, es el material más ampliamente utilizado en la industria.

Capítulo 2

Materiales empleados en la simulación

La construcción aeronáutica requiere materiales que presenten ligereza, buenas características mecánicas, facilidad para el mecanizado, resistencia a la corrosión, así como posibilidad de recibir tratamientos superficiales.

La estructura de las plataformas aéreas debe ser lo suficientemente resistente como para soportar las velocidades, esfuerzos, presiones o impactos a los que deberá hacer frente; así como ligera. El aluminio y sus diferentes aleaciones reúnen las mejores características para cumplir con estos requisitos.

Su ligereza ($2,70 \text{ g/cm}^3$), su alta resistencia mecánica, su alta conductividad térmica y eléctrica, su durabilidad (el aluminio es estable al aire) y resistencia a la corrosión (con un correcto tratamiento superficial es resistente tanto al agua de mar, como a muchas soluciones acuosas y otros agentes químicos), hacen de este material ideal para innumerables soluciones estructurales.

2.3.2 Aleaciones de aluminio.

El aluminio puro, como material, es blando y presenta unas propiedades resistentes pobres, es por esto que necesita ser aleado. Es en ese momento cuando el aluminio cobra importancia en la industria y adquiere las propiedades mecánicas y resistentes que lo hacen ser tan importante [10].

Los elementos más utilizados para la formación de aleaciones de aluminio son el Cobre, Silicio, Magnesio, Zinc y Manganeso, principalmente. Sin embargo, existen otro gran grupo de elementos que se le pueden añadir denominados aditivos. Los aditivos más frecuentes para las aleaciones de Aluminio son el Hierro y Titanio.

2.3.2.1 Denominación de las aleaciones.

Las aleaciones de aluminio se designan con un número de cuatro dígitos, en el que el primero de ellos indica el tipo de aleante principal según el siguiente código:

Componente Principal	Código
Aluminio puro	1
Cobre	2
Manganeso	3
Silicio	4
Magnesio	5
Magnesio, Silicio	6
Zinc	7
Otros	8

Tabla 2.1: Códigos de los elementos predominantes en las aleaciones.

El resto de dígitos indican la aleación específica de aluminio o la pureza del mismo.

Además de estos cuatro dígitos, es habitual el uso de letras y números adicionales para detallar de forma más exacta las condiciones del material.

1. La letra **O** después de los cuatro dígitos habituales, se emplea para indicar que el material ha sido sometido a un recocido posterior de acuerdo a las siguientes condiciones:
 - a. O1: Recocido a elevada temperatura y enfriamiento lento.
 - b. O2: Sometido a tratamiento termomecánico.
 - c. Homogeneizado, esta designación se aplica a los alambrones y a las bandas de colada continua que son sometidos a un tratamiento de difusión a alta temperatura.

2. La letra **H** designa el grado de trabajo en frío. Indica el estado de acritud del material y se aplica a materiales a los que se les ha realizado un endurecimiento por deformación.
 - a. H1: endurecido por deformación hasta obtener el nivel deseado y sin tratamiento posterior alguno.
 - b. H2: endurecido en exceso por deformación y recocido parcial posterior para recuperar suavidad sin perder ductilidad.
 - c. H3: acritud y estabilizado.
 - d. H4: acritud y lacado o pintado. Son aleaciones endurecidas en frío y que pueden sufrir un cierto recocido en el tratamiento de curado de la capa de pintura o lacada.

3. La letra **T**, seguida por uno o más dígitos sirve para indicar que la aleación ha sido endurecida por tratamiento térmico con o sin endurecimiento por deformación posterior.
 - a. T1: enfriado desde un proceso de fabricación realizado a una elevada temperatura y envejecido de forma natural.
 - b. T2: enfriado desde un proceso de fabricación realizado a una alta temperatura, y trabajado en frío y envejecido de forma natural.
 - c. T3: solución tratada térmicamente, trabajada en frío y envejecida hasta alcanzar una condición estable.
 - d. T4: solución tratada térmicamente y envejecida hasta alcanzar una condición estable.
 - e. T5: enfriado desde un proceso de fabricación a alta temperatura y envejecida artificialmente.
 - f. T6: solución tratada térmicamente y envejecida artificialmente. Son designados de esta forma los productos que después de un proceso de conformado a alta temperatura (moldeo o extrusión) no son endurecidos en frío, sino que sufren un envejecimiento artificial.

- g. T7: solución tratada térmicamente y envejecida para su completa estabilización.
 - h. T8: térmicamente tratada por disolución, trabajada en frío y envejecida artificialmente.
 - i. T9: solución tratada térmicamente, envejecida artificialmente y trabajada en frío.
 - j. T10: enfriado desde un proceso de fabricación realizado a una elevada temperatura, trabajado en frío y envejecido artificialmente hasta una condición sustancialmente estable.
4. La letra **F**, indica que se trata de una aleación en bruto, tal y cómo sale de su respectivo proceso de fabricación.
5. La letra **W**, es empleada para indicar si se trata de una solución tratada térmicamente, se aplica a materiales que después de recibir un tratamiento térmico quedan con una estructura un tanto inestable y sufren un envejecimiento natural.

2.3.2.2 Series de aleaciones de Aluminio.

Las aleaciones de aluminio se dividen en dos grandes grupos, que son: forja y fundición. Esta división se corresponde con el tipo de proceso de conformado de material a que pueden ser sometidas dichas aleaciones.

Dentro del grupo de las aleaciones de aluminio de forja existe otra división en otros dos subgrupos: las aleaciones tratables térmicamente y las no tratables térmicamente. Las aleaciones no tratables térmicamente sólo pueden aumentar su resistencia si son trabajadas en frío.

Dentro de las aleaciones de aluminio forjado sin tratamiento térmico, los grupos o series principales son los siguientes, según la norma AISI-SAE:

- Aleaciones 1xxx: Son aleaciones de aluminio técnicamente puro, al 99,9%, siendo sus principales impurezas el hierro y el silicio como elemento aleante. Se utilizan principalmente para utensilios de cocina, lámina y fleje.
- Aleaciones 3xxx: El elemento aleante principal de este grupo es el manganeso (Mn), el cual tiene como objetivo reforzar al aluminio. Presentan buena trabajabilidad, y son utilizadas este tipo de aleaciones en utensilios de cocina y envases.
- Aleaciones 5xxx: En este grupo de aleaciones es el magnesio (Mg) el principal elemento de aleación. Utilizado en utensilios de cocina, construcción de camiones y aplicaciones marinas.

Dentro de las aleaciones de aluminio forjado que son tratables térmicamente, las series principales son las siguientes:

- Aleaciones 2xxx: El principal aleante de este grupo de aleaciones es el cobre (Cu), Esta aleación se utiliza especialmente para la fabricación de estructuras de aviones.
- Aleaciones 6xxx: Los principales elementos aleantes de este grupo son magnesio y silicio. Es utilizada para perfiles y estructuras en general.
- Aleaciones 7xxx: Los principales aleantes de este grupo de aleaciones son zinc, magnesio y cobre. Se utiliza para fabricar estructuras de aviones.

En esta última división, se encuentran las aleaciones de aluminio con mayores resistencias mecánicas: las de las series 2000 y 7000. Por otro lado, son las aleaciones de aluminio de las series 6000 y 7000 las más utilizadas por su amplia gama de aplicaciones.

2.3.2.3 Aleación 2014.

Debido a que en la simulación numérica se empleará la aleación Al 2014 T4, es importante detallar su composición, propiedades cualitativas y aplicaciones en las que se emplea industrialmente en este apartado, una vez que ya se han explicado las diferentes aleaciones con carácter general [11].

2.3.2.3.1 Composición química.

La composición química de la serie de aluminios 2014 es la siguiente:

Componente	Porcentaje en masa (%)
Silicio	0,15-1,2
Hierro	0,7
Cobre	3,9-5,0
Manganeso	0,4-1,2
Magnesio	0,2-0,8
Cromo	0,1
Zinc	0,25
Titanio	0,15
Otros	0,15
Aluminio	El resto

Tabla 2.2: Composición química de la aleación 2014 T4.

2.3.2.3.2 Propiedades cualitativas.

En la siguiente tabla se muestran algunas de las propiedades cualitativas destacables en esta serie de aleaciones de Aluminio.

Formado	Mecanizado	Soldadura por arco	Soldadura fuerte/blanda	Anodizado protector	Anodizado estético
Bueno	Bueno	No adecuado	No adecuado	Satisfactorio	No adecuado

Tabla 2.3: Propiedades cualitativas de la aleación 2014 T4.

2.3.2.3.3 Aplicaciones.

Gracias a su ligereza y prestaciones de muy alta resistencia y muy buenas características de mecanizado, la aleación 2014 se utiliza extensamente para la fabricación de componentes y accesorios aeroespaciales, debido a su alta resistencia. Otras aplicaciones incluyen las siguientes: vehículos militares, puentes, armamento, y aplicaciones estructurales.

2.3.2.4 Propiedades mecánicas de las aleaciones.

En este punto se definirán una serie de propiedades mecánicas de las series de aleaciones de Aluminio en general, y se hará hincapié en el valor de las mismas para la serie 2014, que servirá de base para la simulación numérica objeto de este documento.

2.3.2.4.1 Resistencia mecánica.

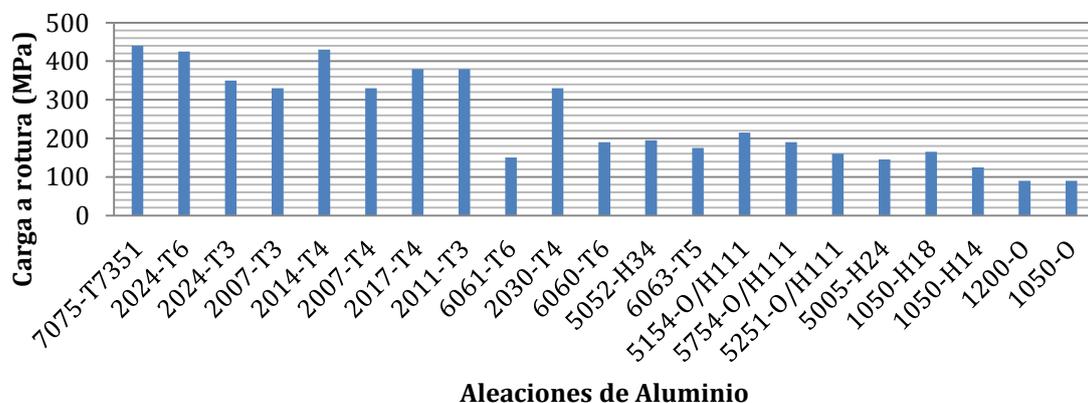
Las características mecánicas del aluminio varían considerablemente dependiendo del tipo de aleación que se esté considerando.

En la siguiente tabla se muestran los valores de la carga de rotura (MPa), el límite elástico (MPa), y el alargamiento en la rotura (en %).

Aleación	Carga a rotura (MPa)	Límite elástico (MPa)	Alargamiento a 5,65%
7075-T7351	440	360	6
2024-T6	425	315	5
2024-T3	350	290	10
2007-T3	330	210	7
2014-T4	430	275	18
2007-T4	330	210	7
2017-T4	380	260	12
2011-T3	380	295	15
6061-T6	150	110	16
2030-T4	330	210	7
6060-T6	190	150	8
5052-H34	195	90	30
6063-T5	175	130	6
5154-O/H111	215	85	16
5754-O/H111	190	80	16
5251-O/H111	160	60	16
5005-H24	145	110	6
1050-H18	165	150	15
1050-H14	125	115	35
1200-O	90	34	23
1050-O	90	34	21

Tabla 2.4: Propiedades resistentes de las principales aleaciones de aluminio.

En la siguiente gráfica se enfrentan las diferentes aleaciones en cuanto a la carga de rotura en el ensayo de tracción expresada en MPa:

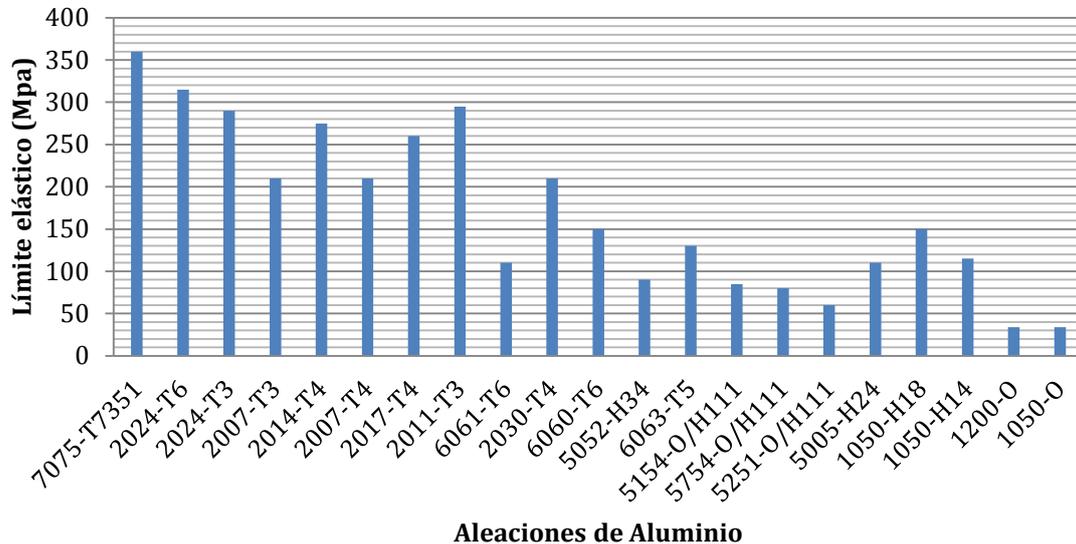


Gráfica 2.1: Carga a rotura de las principales aleaciones de aluminio.

Capítulo 2

Materiales empleados en la simulación

Del mismo modo, en la siguiente figura ilustrativa se muestra cómo varía el límite elástico, valor de tensión para la cual se alcanza una deformación del 0,2% en la pieza ensayada según el ensayo de tracción. Los resultados se muestran para las diferentes aleaciones de aluminio:



Gráfica 2.2: Límite elástico de las principales aleaciones de aluminio.

2.3.2.4.2 Módulo elástico o Módulo de Young.

Considerando un comportamiento elástico de un cierto material, el Módulo de Young relaciona la tensión que experimenta dicho material en una determinada dirección con la deformación que sufre el mismo material en la citada dirección.

El módulo de Young típicamente del Aluminio es:

$$E = 70 \text{ GPa}$$

2.3.2.4.3 Módulo cortante.

El módulo cortante o Módulo de cizalladura está íntimamente relacionado con el módulo de Young, en materiales isótropos:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{ (GPa)}$$

2.3.2.4.4 Coeficiente de Poisson.

EL coeficiente de Poisson corresponde a la razón entre la elongación longitudinal y la deformación transversal en el ensayo de tracción.

Para el Aluminio aleado, el coeficiente de Poisson toma el valor de:

$$\nu = 0,33$$

2.3.2.4.5 Dureza Brinell.

La dureza es una propiedad que mide la capacidad de resistencia que ofrecen los materiales a procesos de abrasión, desgaste, penetración o de rallado. Para medir la dureza de un material se emplea un tipo de ensayo consistente en calibrar la resistencia de un material a la penetración de un punzón o una cuchilla que se usa como indentador. Este indentador usualmente consta en su extremo, o bien de una esfera, o bien de una pieza en forma de pirámide, o en forma de cono y que está compuesto de un material mucho más duro que el material que se está midiendo. La profundidad de la entalla que se produce en el material al ser rallado por este penetrador nos dará una medida de su dureza.

Existen varios métodos para calibrar la dureza de un material, siendo el método Brinell y el método Rockwell los más comunes.

El método Brinell (ASTM E10) es un tipo de ensayo utilizado para calcular la dureza de los materiales. Consiste en una esfera de 10 mm de diámetro, usualmente de un acero endurecido, que se presiona contra la superficie del material objeto de estudio bajo una carga estática de 3.000 kg. El tamaño de la huella nos proporcionará una medida de la dureza, denominada dureza Brinell, bajo estas condiciones del ensayo.

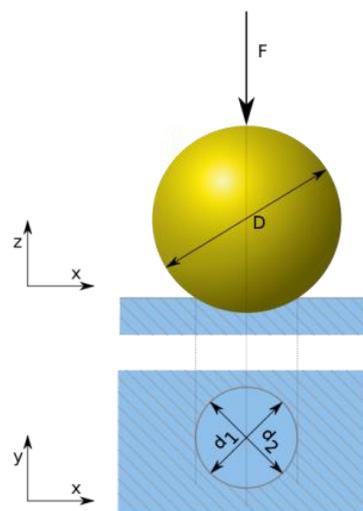


Figura 2.3: Ensayo dureza Brinell.

Capítulo 2

Materiales empleados en la simulación

En la siguiente tabla se muestran los valores de dureza Brinell para todas las aleaciones de las que se ha dado cuenta en el presente capítulo.

Aleación	Dureza Brinell (HB)
7075-T7351	140
2024-T6	125
2024-T3	120
2007-T3	115
2014-T4	110
2007-T4	110
2017-T4	105
2011-T3	100
6061-T6	95
2030-T4	95
6060-T6	85
5052-H34	70
6063-T5	60
5154-O/H111	55
5754-O/H111	55
5251-O/H111	45
5005-H24	45
1050-H18	43
1050-H14	35
1200-O	23
1050-O	21

Tabla 2.5: Dureza Brinell (HB) de las principales aleaciones de aluminio.

Capítulo 3

3. Método de los Elementos Finitos (FEM).

3.1 Introducción.

La presencia de geometrías complejas o cargas irregulares en medios continuos y estructuras hacen más compleja la resolución exacta de las ecuaciones de la mecánica de sólidos, en cuyo caso se suele recurrir a métodos numéricos que proporcionan una solución aproximada a las ecuaciones de gobierno.

Para ello, se debe hacer uso de conceptos de la física y las matemáticas, con el fin de formular un modelo matemático representativo del sistema o del proceso que se esté estudiando.

Para tal fin, se han desarrollado varios métodos de aproximación. En todos los casos se emplea el concepto de la discretización de la estructura bajo estudio. Estos métodos entre otros son:

- Método de Rayleigh-Ritz.
- Método de los Elementos Finitos.
- Método de los Elementos de Contorno.

El Método de los Elementos Finitos es un esquema general para la resolución numérica de problemas continuos, que permite obtener una aproximación a la solución buscada que está constituida por funciones polinomiales que se definen de forma local.

Se consideran problemas continuos los siguientes:

- Equilibrio.
- Propagación.
- Difusión
- Autovalores...

En el análisis por el Método de los Elementos Finitos se parte de una ecuación integral o formulación débil, no se trabaja directamente con ecuaciones diferenciales o formulación fuerte. En el caso de la mecánica de sólidos, la formulación débil se corresponde con el Principio de los Trabajos Virtuales o Principio de la Energía Potencial Mínima.

El Método de los Elementos Finitos permite obtener el campo de desplazamientos, tensiones y deformaciones de un dominio V ; previa división de dicho dominio V en varios subdominios, utilizando funciones de aproximación local independientes de cada subdominio, e imponiendo condiciones de continuidad entre las funciones de aproximación de subdominios adyacentes.

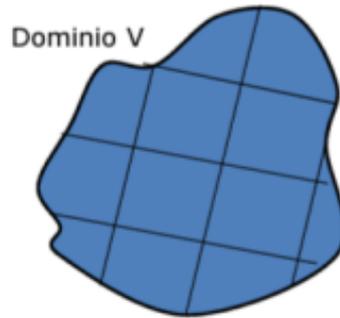


Figura 3.1: División del dominio V en subdominios.

3.1.1 Principio de los Trabajos Virtuales.

Si un sólido deformable está en equilibrio, el trabajo total de las fuerzas de superficie y de volumen, así como de las tensiones, es nulo para cualquier desplazamiento virtual del sólido.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \delta e_{ij} dV - \int_{\Omega} f_i \cdot \delta u_i dV - \int_{\Gamma} t_i \cdot \delta u_i dS = 0$$

3.1.2 Principio de la Energía Potencial Mínima.

La energía potencial de un cuerpo (Π) se define como la suma de la energía de deformación (U) y la energía potencial de la carga (V). De tal forma que:

$$\Pi = U + V$$

Para hacer mínima esta energía basta con:

$$\delta \Pi = \delta(U + V) = 0$$

En sistemas conservativos, de todos los campos de desplazamientos admisibles, es decir, desplazamientos que satisfacen los mínimos requerimientos de continuidad y satisfacen las condiciones de contorno del problema; aquellos correspondientes al equilibrio hacen extrema la energía potencial total. Si éste es un mínimo, el equilibrio es estable.

Si "u" es la solución exacta del problema, es decir, verifica la ecuación diferencial y las condiciones de contorno de la formulación fuerte; y "u_a" es una función de desplazamiento admisible, entonces:

$$\Pi(u) < \Pi(u_a)$$

3.1.3 Discretización.

En el Método de los Elementos Finitos, el concepto de discretización consiste en sustituir la estructura continua original del problema por un cierto número de elementos independientes. A estos elementos se les denomina “**elementos finitos**” o discretos, que están unidos entre sí por un número finito de puntos o nodos.

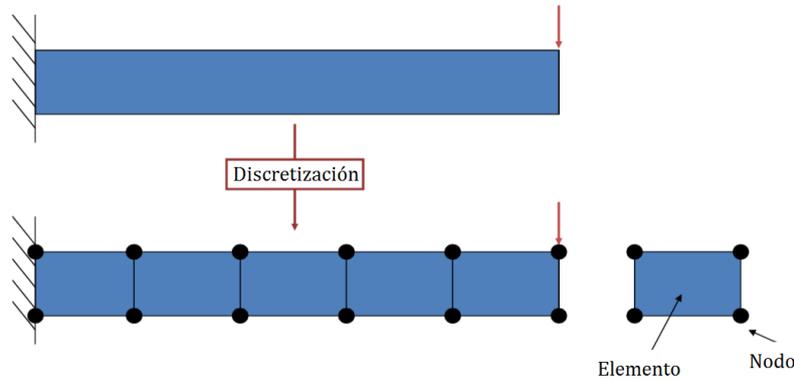


Figura 3.2: Discretización de una viga.

3.1.4 Tipos de problemas.

Existen diferentes tipos de problemas en el Método de los Elementos Finitos, en función de las simplificaciones que se le puedan otorgar al problema en cuestión que se desea modelar. Y en función de estas simplificaciones, los tipos de problemas son:

- I. Unidimensionales.



- II. Bidimensionales.



- III. Tridimensionales.

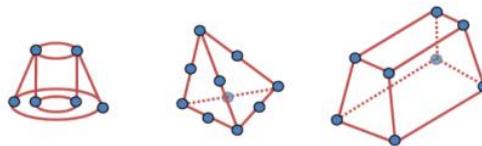


Figura 3.3: Tipos de elementos en función de las dimensiones del problema.

3.1.5 Ventajas del Método de los Elementos Finitos.

Para cada elemento finito estudiado de forma aislada, se pueden determinar las ecuaciones que los gobiernan, hecho que es posible gracias a la sencillez de su forma.

La ventaja de los métodos de aproximación reside en que el Método resuelve un sistema de ecuaciones algebraicas en lugar de resolver las ecuaciones de gobierno originales de la Teoría de la Elasticidad (ecuaciones diferenciales en derivadas parciales).

Para poder realizar dicha aproximación y resolver el sistema de ecuaciones, son necesarios numerosos cálculos; que, debido a su naturaleza repetitiva, se adaptan perfectamente a la programación numérica y a su resolución mediante ordenadores.

3.1.6 Problemas no lineales.

Una de las mayores simplificaciones que se puede llevar a cabo en el cálculo de estructuras es el comportamiento lineal; tanto de la geometría en cuestión, como la del material empleado.

Si en el problema se tienen pequeñas deformaciones, resulta sencillo dar por válida esta afirmación. Las solicitaciones y condiciones de contorno pueden estar referidas a la estructura sin deformar; es decir, a la estructura inicial.

El comportamiento no lineal de un material queda claro al hacer referencia a su curva tensión-deformación. En ella, la dependencia es lineal hasta alcanzar el límite elástico del material; pero, a partir de ese punto, deja de existir tal relación lineal.

En un impacto de un proyectil sobre una placa, es básico introducir en el modelo el comportamiento de no linealidad; ya que, en caso contrario, se estaría obviando tanto el comportamiento plástico de los materiales en la simulación numérica, como la interacción proyectil-placa que se produce en el momento del contacto.

3.2 Formulación del Método de los Elementos Finitos.

3.2.1 Discretización o mallado del dominio.

Como se ha definido anteriormente, la discretización consiste en la división del dominio continuo en unos subdominios más sencillos denominados elementos.

En todo caso, la discretización o mallado debe satisfacer dos condiciones indispensables:

1. El volumen o superficie del dominio, debe ser aproximadamente igual a la unión de los volúmenes o superficies de los elementos en los que se divide.

$$V \approx \bigcup_{e=1}^E V_e$$

2. Los diferentes elementos en los que queda dividido el dominio, no se solapan entre sí.

$$V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j$$

Dado un determinado dominio como ejemplo, la discretización resultante queda:

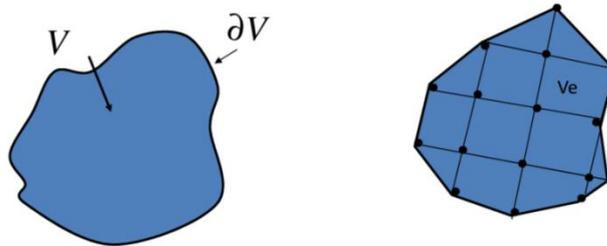


Figura 3.4: Mallado de un dominio V.

En la malla resultante, pueden identificarse P puntos nodales, en los que cada uno tiene una posición r_i con $i=1,2,\dots,P$ en el sistema global de coordenadas.

Cada uno de estos puntos o nodos, puede estar conectado con uno, dos o más elementos del modelo.

Cada elemento finito genérico “e”, con $e=1,2,\dots, E$, contiene un determinado número de nodos m_e ; nodos que se ordenan con un índice de ordenación local “i”, con $i=1,2,\dots,m_e$, como se muestra en la figura adjunta.

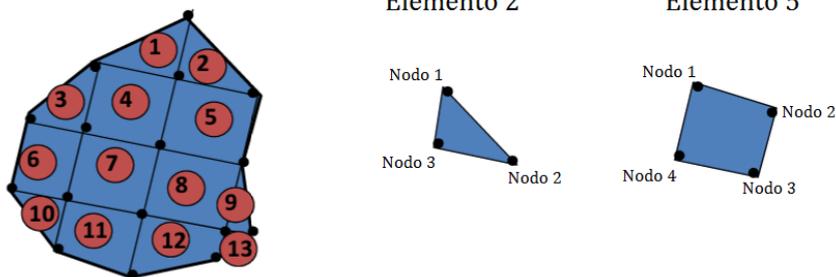


Figura 3.5: Mallado y numeración de nodos y elementos de un dominio.

Si el problema en cuestión se formula en términos de desplazamientos traslacionales, entonces:

- Número de grados de libertad del elemento e-ésimo:
- Número de grados de libertad de la estructura:

$$N_e \begin{cases} m_e & \text{para el caso 1-D} \\ 2m_e & \text{para el caso 2-D} \\ 3m_e & \text{para el caso 3-D} \end{cases}$$

$$N_G \begin{cases} P & \text{para el caso 1-D} \\ 2P & \text{para el caso 2-D} \\ 3P & \text{para el caso 3-D} \end{cases}$$

3.2.2 Definición de funciones de forma.

Se entiende por aproximación local a la asignación a cada uno de los elementos en los que está discretizado el dominio de las funciones de interpolación que permitan calcular las componentes del vector de desplazamiento en el interior de dicho elemento, a partir de los desplazamientos de sus m_e nodos.

$$\{u^{(e)}\} = [N^{(e)}] \cdot \{q^{(e)}\}$$

En donde $[N^{(e)}]$ es la matriz, que contiene las funciones de interpolación del elemento e-ésimo. Sus componentes son funciones de la posición.

$$N_{ij}^{(e)} = N_{ij}^{(e)}(x, y, z) \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, \dots, N_e$$

En donde $\{q^{(e)}\}$ representa un vector columna, que contiene los N_e desplazamientos o grados de libertad de los m_e nodos del elemento e.

Quedando así:

$$u_x = \sum_{j=1}^{N_e} N_{1,j}^{(e)}(x, y, z) \cdot q_j^{(e)} = u_x^{(e)}(x, y, z)$$

$$u_y = \sum_{j=1}^{N_e} N_{2,j}^{(e)}(x, y, z) \cdot q_j^{(e)} = u_y^{(e)}(x, y, z)$$

$$u_z = \sum_{j=1}^{N_e} N_{3,j}^{(e)}(x, y, z) \cdot q_j^{(e)} = u_z^{(e)}(x, y, z)$$

Luego, generalizando:

$$u_i = \sum_{j=1}^{N_e} N_{i,j}^{(e)}(x, y, z) \cdot q_j^{(e)} = u_i^{(e)}(x, y, z)$$

Donde:

- “j” es el índice de numeración local de los nodos de los elementos.
- Las funciones $N_{i,j}^{(e)}(x, y, z)$ deben ser elegidas adecuadamente.

3.2.3 Campo de deformaciones.

El campo de deformaciones en un punto cualquiera del dominio está definido por un vector $\{u\}$, que tiene tantas componentes como deformaciones existen en el dominio. Como se vio anteriormente, para el caso de un problema espacial:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

Si se considera un elemento finito cualquiera, el campo de deformaciones se aproxima, haciendo uso de la hipótesis de interpolación, como un promedio de las deformaciones en cada uno de los n nudos del elemento e; siendo los factores de ponderación las funciones de interpolación (u_x, u_y, u_z) definidas con anterioridad.

3.2.4 Deformaciones unitarias.

Las deformaciones unitarias en un punto cualquiera del elemento, con la suposición de pequeñas deformaciones, son:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

Que, expresándolos de forma matricial, se tiene:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$

En esta expresión se identifica el operador matricial ∂ , que permite pasar de deformaciones de un punto a deformaciones unitarias. Así, aparece una nueva matriz:

$$[B] = [\partial][N]$$

Matriz que relaciona las deformaciones de los nudos del elemento con las deformaciones unitarias en un punto interior cualquiera del mismo. Por lo tanto, la matriz $[B]$ representa el campo de deformaciones unitarias, que se supone existe en el interior del elemento finito como consecuencia de la hipótesis de interpolación de deformaciones efectuada, y juega un papel fundamental en el Método de los Elementos Finitos.

3.2.5 Ecuación constitutiva.

Las tensiones en un punto cualquiera del dominio están definidas por el tensor de tensiones expresado en notación vectorial:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

Asimismo, se conoce la ecuación constitutiva del material que forma el dominio, y que relaciona las tensiones con las deformaciones unitarias. Para un material elástico lineal, esta ecuación constitutiva se puede poner en la forma:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Siendo:

- $[D]$ la matriz elástica, que para un material elástico lineal es constante y depende de sólo dos parámetros: el módulo de Young del material en cuestión y su coeficiente de Poisson.
- $\{\varepsilon\}$ el vector de las deformaciones unitarias existentes en el material en el punto considerado, y que deben ser conocidas.

Las expresiones particulares de la matriz elástica $[D]$ y del vector $\{\varepsilon\}$ dependen del tipo de problema considerado y serán estudiadas en cada caso particular

3.2.6 Ecuación de equilibrio de un elemento.

Una vez que han quedado establecidas las expresiones que relacionan los desplazamientos, las deformaciones unitarias y las tensiones, en función de los desplazamientos de los nudos, se está ya en condiciones de calcular las ecuaciones de equilibrio de un elemento finito. Si se considera un elemento finito cualquiera, las fuerzas que actúan sobre él, en el caso más general, son las siguientes:

- Fuerzas exteriores de volumen aplicadas en el interior del elemento q_v , que son, en general, variables dentro del elemento, y tienen tantas componentes como desplazamientos haya en cada punto.
- Fuerzas exteriores de superficie aplicadas en el contorno libre del elemento q_s , que son, en general, variables a lo largo del contorno, y tienen tantas componentes como desplazamientos tenga cada punto del contorno. Al contorno sobre el que actúan las fuerzas de superficie se le denomina s.

Capítulo 3

Método de los Elementos Finitos (FEM)

- Fuerzas interiores q_c aplicadas en la superficie del contorno de unión del elemento con los elementos vecinos, que son desconocidas. A dicho contorno de unión se le denomina c.
- Fuerzas exteriores puntuales aplicadas sobre los nudos del elemento P_N^e .

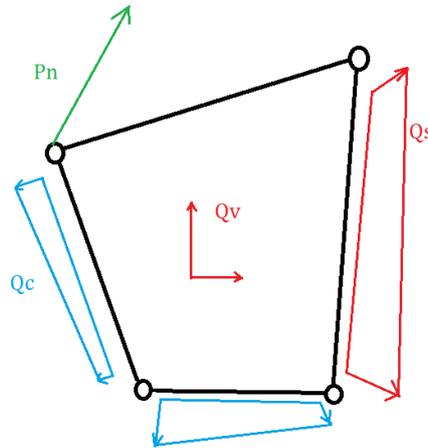


Figura 3.6: Fuerzas aplicadas sobre un elemento.

Aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales, y haciendo una serie de simplificaciones e igualdades, y reordenando términos y sustituyendo valores, se tiene al final la ecuación resultante:

$$\int_v [B]^T [D] [B] dV \{\delta^e\} = \int_v [N]^T \{q_v\} dV + \int_v [N]^T \{q_s\} dS + \int_v [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dV - \int_v [B]^T \{\sigma_0\} dV + P_c^e + P_N^e$$

Esta es la ecuación final de equilibrio del elemento finito considerado. En ella, se identifican los siguientes términos, por orden de aparición en la ecuación:

- Matriz de rigidez del elemento finito. Se trata de una matriz cuadrada de tamaño igual al número de grados de libertad del elemento. $[K^e]$
- Vector de fuerzas nodales equivalentes, debido a las fuerzas actuantes por unidad de volumen. $\{P_v^e\}$
- Vector de fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores de superficie. $\{P_s^e\}$
- Vector de fuerzas nodales equivalentes, producidas por las deformaciones iniciales existentes en el material. $\{P_T^e\}$
- Vector de fuerzas nodales equivalentes, debidas a las tensiones iniciales existentes en el material. $\{P_b^e\}$

La ecuación de equilibrio del elemento puede ponerse en forma compacta como:

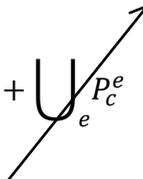
$$[K^e]\{\delta^e\} = \{P_v^e\} + \{P_s^e\} + \{P_T^e\} + \{P_b^e\} + \{P_c^e\} + \{P_N^e\}$$

Esta ecuación de equilibrio está referida al sistema de ejes en el que se hayan definido las coordenadas y las deformaciones de los nudos, y al que, lógicamente, también se habrán referido las distintas fuerzas actuantes.

3.2.7 Ecuación de equilibrio del conjunto.

Para obtener la ecuación de equilibrio de toda la estructura, es necesario, además, imponer el equilibrio de las fronteras de unión entre los elementos. En estas fronteras se han introducido las fuerzas de conexión entre los elementos q_c ; que, a su vez, han dado lugar a las fuerzas nodales equivalentes correspondientes P_c ; y que, como se ha visto, son energéticamente equivalentes a ellas. Por lo tanto, **considerar el equilibrio de las fronteras es equivalente a considerar el equilibrio de los nudos de unión entre los elementos.**

Si se plantean conjuntamente las ecuaciones de equilibrio de todos los nudos de unión entre todos los elementos, se obtiene un conjunto de ecuaciones que representa el equilibrio de toda la estructura. Estas ecuaciones se obtienen por ensamblado de las ecuaciones de equilibrio de los distintos elementos finitos que la forman, en la forma:

$$\bigcup_e [K^e]\{\delta^e\} = \bigcup_e [\{P_v^e\} + \{P_s^e\} + \{P_T^e\} + \{P_b^e\} + \{P_N^e\}] + \bigcup_e P_c^e$$


El símbolo de unión se emplea para indicar el ensamblado de las distintas magnitudes según los grados de libertad de la estructura.

El término nulo es debido a que en el proceso de ensamblado se cancelan todas las fuerzas de conexión entre un elemento y su vecino, ya que son fuerzas iguales de sentidos opuestos.

3.2.8 Condiciones de contorno.

La ecuación de equilibrio deducida antes representa el equilibrio del conjunto de la estructura, considerando todos los elementos que la forman, así como todas las fuerzas exteriores. Para poderla resolver es necesario imponer las condiciones de ligadura, que indican cómo está sustentada la estructura.

3.3 Elasticidad tridimensional.

Los problemas de elasticidad en tres dimensiones son bastante frecuentes en la práctica ingenieril, y se presentan sobre todo en elementos que por su proceso de fabricación, o necesidades funcionales, no pueden tener una dimensión mucho menor que las otras dos.

Esto ocurre con piezas fundidas o forjadas (p.e. carcasas de maquinaria, bancadas de máquinas herramienta, soportes y aparatos de apoyo, etc.), con elementos estructurales en hormigón para apoyo y cimentación (apoyos de puentes, cimentaciones de máquinas, obras hidráulicas...), y, en general, en cualquier estructura en la que no pueda asumirse la hipótesis de que la tensión en la dirección del espesor sea nula.

El cálculo de tensiones y deformaciones en un sólido tridimensional es un problema que no tiene mayor complejidad conceptual que el caso bidimensional, por lo que el Método de los Elementos Finitos se aplicó desde un principio a este tipo de problemas.

3.3.1 Tipos de elementos.

El orden de derivación de las funciones de interpolación en la matriz [B] es la unidad, por lo que es suficiente con emplear funciones de interpolación con continuidad C^0 .

Estas funciones se presentan a continuación para los distintos elementos existentes, empleando sistemas de coordenadas locales adecuados a cada uno de ellos

3.3.1.1 Elementos prisma rectangular.

Para definir las funciones de interpolación se utilizan tres coordenadas locales ξ, η, ζ , con límites desde -1 hasta +1. Cuando se representa en este sistema de ejes locales, el elemento es un cubo de lado 2.

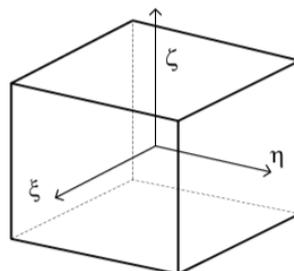


Figura 3.7: Elemento prisma rectangular con su sistema de coordenadas local.

Existe una familia completa de elementos prismáticos de base rectangular, que se corresponden con los elementos rectangulares planos.

3.3.1.1.1 Elemento lineal de 8 nodos.

Es el correspondiente al rectángulo plano de cuatro nudos. Cada una de sus caras es un elemento rectangular de cuatro nodos. Sus funciones de interpolación son:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad i = 1,2, \dots, 8$$

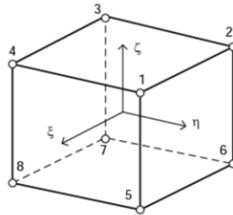


Figura 3.8: Numeración del elemento prisma rectangular con su sistema de coordenadas local.

3.3.1.1.2 Elemento cuadrático de 20 nodos.

Tiene tres nudos por arista (figura 5.5), por lo que éstas pueden ser parábolas, y cada una de sus caras tiene ocho nudos, como un elemento plano. Cada cara puede ser una superficie curva parabólica.

Las funciones de los nudos de esquina son:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i - 2)$$

Las de los nudos intermedios de la cara con $\xi_i = 0$ son:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)$$

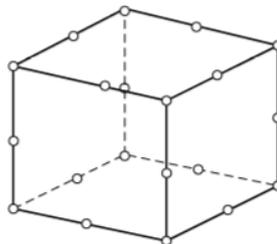


Figura 3.9: Elemento cuadrático de 20 nodos.

3.3.1.1.3 Elemento cúbico de 32 nodos.

Tiene cuatro nudos por arista y cada cara tiene doce nodos. Sus caras pueden, por lo tanto, aproximar a superficies de grado 3

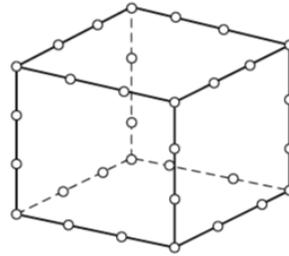


Figura 3.10: Elemento cuadrático de 32 nodos.

3.3.2 Formulación isoparamétrica.

En este punto se establecerá concretamente las particularidades de la formulación isoparamétrica con respecto a la formulación general expuesta con anterioridad.

3.3.2.1 La interpolación de coordenadas.

La interpolación de coordenadas en el espacio se establece en la forma:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ \dots \end{Bmatrix}$$

$$\{x\} = [N]\{x^e\}$$

Donde el vector $\{x^e\}$ agrupa a las coordenadas (x,y,z) de todos los nodos del elemento.

Con esta definición, un elemento isoparamétrico espacial tiene una forma geométrica real que está definida por el tipo de funciones de interpolación que emplee. La forma real de cada cara o lado está definida por el número de nodos que haya en esa cara o lado. De esta manera, los lados con dos nodos son rectos, los lados de tres nodos pueden ser parábolas y los lados de cuatro nodos pueden ser curvas cúbicas. Consecuentemente, las caras con tres nudos son planas, con cuatro nodos son superficies bilineales, etc.

Es posible utilizar asimismo elementos subparamétricos, que pueden tener cierto interés desde el punto de vista práctico; ya que pueden emplear unos pocos nodos (p.e. sólo los cuatro vértices) para definir la forma del elemento, y, sin embargo, emplear muchos nodos intermedios en los lados para representar el campo de deformaciones con gran precisión.

Las derivadas de las funciones de interpolación respecto de las coordenadas locales se pueden obtener mediante la regla de derivación en cadena:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix}$$

El vector de la derecha es conocido sin más que derivar las N_i respecto a ξ, η, ζ . Conociendo $[J]$, se pueden obtener todas las derivadas que forman la matriz $[B]$.

El cálculo de $[J]$ se efectúa apoyándose en la interpolación de coordenadas:

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix}$$

Esta expresión puede ser evaluada con facilidad, ya que las funciones N_i son conocidas en función de ξ, η, ζ ; y x_i, y_i, z_i son las coordenadas de los nudos que definen la forma del elemento.

3.3.1.2 Matriz de rigidez $[K]$.

Como se dedujo anteriormente en el documento la expresión general de la matriz de rigidez en un problema es de la forma:

$$[K] = \int_v [B]^T [D] [B] dV$$

Todos los términos que aparecen en ella son conocidos. Su evaluación se efectúa de forma numérica, siendo aplicables las mismas consideraciones que en el caso plano.

El dominio de integración en este caso es un volumen, cuyo elemento diferencial se expresa como:

$$dV = dx dy dz = J d\xi d\eta d\zeta$$

Siendo J el determinante de la matriz Jacobiana, que es, en general, una función de las coordenadas ξ, η, ζ .

3.3.2.2 Fuerzas de volumen.

Su expresión general es:

$$\{P_v\} = \int [N^T] \{q_v^e\} dV$$

Se supone, que las fuerzas de volumen se pueden interpolar a partir de sus valores nodales, empleando las propias funciones de interpolación:

$$\{q_v\} = [N] \{q_v^e\}$$

Siendo $\{q_v^e\}$ los valores nodales de las fuerzas de volumen, que son constantes. Con esto se obtiene la siguiente expresión del vector de fuerzas nodales equivalentes:

$$\{P_v\} = \int [N^T][N] dV \{q_v^e\} = [M] \{q_v^e\}$$

Considerando la estructura de [N], la matriz [M] es:

$$[M] = \int [N^T][N] dV = \int \begin{bmatrix} N_1^T \\ \dots \\ N_n^T \end{bmatrix} [N_1 \quad \dots \quad N_n] dx dy dz$$

La matriz [M] se puede dividir en nxn submatrices, que relacionan a los “n” nodos entre sí.

Esta subdivisión de matrices se puede expresar de la siguiente manera:

$$[M] = \begin{bmatrix} M^{11} & \dots & M^{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ M^{n1} & \dots & M^{nn} \end{bmatrix}$$

Siendo cada una de estas submatrices, con carácter general para cualquier $i, j \leq n$:

$$[M] = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_i N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} J d\xi d\eta d\zeta$$

El cálculo de la matriz $[M]$ no presenta ningún problema, efectuándose en el sistema local de coordenadas, en el que se conoce la matriz de interpolación $[N]$. Todos los términos que la forman son polinomios, por lo que se puede evaluar de forma exacta por métodos numéricos.

3.3.2.3 Fuerzas de superficie.

En este caso estas fuerzas actúan sobre una de las caras del elemento finito, pudiendo tener componentes en las tres direcciones del espacio.

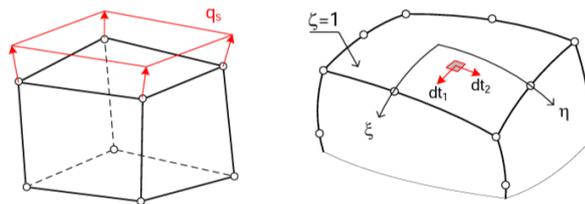


Figura 3.11: Fuerzas e superficie sobre un elemento tridimensional.

Análogamente a las fuerzas de volumen, se obtiene una matriz $[M]_s$ de la misma forma que la anterior y siguiendo exactamente los mismos pasos, pero partiendo de la expresión del vector de fuerzas equivalente a las fuerzas de superficie:

$$[M] = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_i N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} J d\xi d\eta d\zeta$$

3.4 LS DYNA.

LS DYNA es un software que utiliza el Método de los Elementos Finitos.

El programa en el que se basa la herramienta LS DYNA es el software desarrollado en la década de los 70 Dyna3D por el laboratorio Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL), un laboratorio dedicado al desarrollo de tecnología y seguridad de Estados Unidos. Gracias a la inversión e impulso de sectores industriales

Capítulo 3

Método de los Elementos Finitos (FEM)

avanzados como el automóvil, aeroespacial o militar, el software ha ido evolucionando y mejorando hasta nuestros días.

LS DYNA ha demostrado ser capaz de simular problemas dinámicos altamente complejos y de muy diversa índole que se plantean en la realidad cotidiana.

El principal método de cálculo del software se basa en la integración explícita e implícita. Tiene incorporado un algoritmo de contacto que permite abordar el estudio de estos fenómenos. El software brinda al usuario una gran cantidad de posibilidades en la formulación de cada elemento. Además, otorga al usuario la capacidad de implementar modelos de material a través de una subrutina de usuario.

3.4.1 Técnicas numéricas empleadas.

Los métodos numéricos constituyen una potente herramienta de cálculo para resolver problemas complejos de la mecánica de sólidos. A continuación se detallarán las características particulares de los distintos métodos empleados en la simulación objeto de este documento.

3.4.1.1 Método Lagrangiano.

El método Lagrangiano será utilizado en la modelización del proyectil y la placa en capítulos posteriores. La principal característica de este método es su malla, ya que permanece fija al material en todo momento [13]. De forma simplificada se puede apreciar este hecho en la siguiente figura.

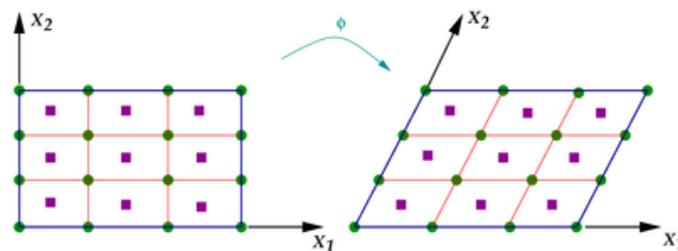


Figura 3.12: Método Lagrangiano antes y después de sufrir deformación (2D).

En la figura anterior se observa como al deformarse el cuerpo discretizado lo hace con él el mallado empleado. De una forma más intuitiva se observa esta circunstancia en la siguiente figura:

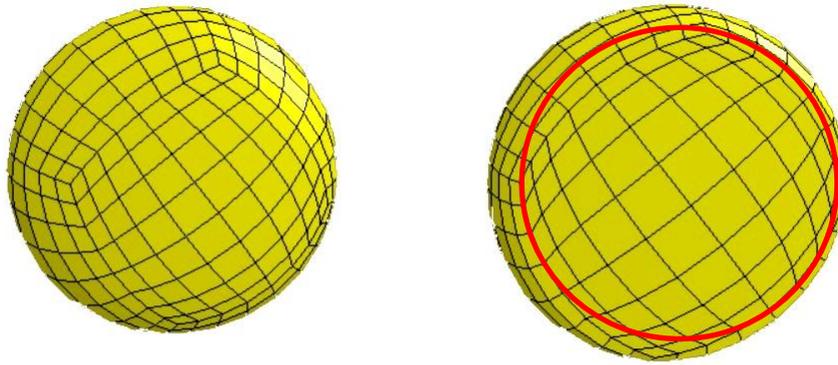


Figura 3.13: Método Lagrangiano antes y después de sufrir deformación (3D).

Como se puede observar en la esfera tridimensional, los elementos sufren una deformación evidente en la superficie de contacto marcada en color rojo.

Este método es el más comúnmente utilizado en los problemas de la mecánica de sólidos, ya que las deformaciones que sufren los cuerpos se consideran pequeñas. Sin embargo, a medida que se hacen mayores estas deformaciones, el método comienza a aumentarse el error en el proceso de simulación; (,) dando lugar a resultados que se alejan de lo sucedido en los ensayos experimentales que se pretenden modelizar.

3.4.1.2 Método sin malla.

SPH son las siglas correspondientes en inglés de “Smoothed Particle Hydrodynamics”. Es un método de malla que nada tiene que ver con el método Lagrangiano descrito.

Este método no consta de una malla propiamente dicha, es un método en el que se le dota al elemento simulado de un número determinado de partículas en el que la interacción entre ellas se establece con funciones de interpolación que no dependen de la malla.

El método SPH fue desarrollado en sus orígenes para la simulación de problemas del campo de la astrofísica, a finales de la década de los 70. Su utilidad quedó demostrada en diversos proyectos incluyendo simulaciones de colisiones estelares, formación de galaxias y de agujeros negros.

Con el paso del tiempo, su uso se ha ido extendiendo hasta establecerse en campos como la mecánica de sólidos o la mecánica de fluidos gracias a su facilidad de

Capítulo 3

Método de los Elementos Finitos (FEM)

formulación, y a su habilidad para incorporar complicados efectos físicos que sería imposible simular de otro modo.

El concepto del método consiste en simular los cuerpos como un conjunto de partículas cohesionadas a las que la herramienta de cálculo les asigna una determinada masa en función de la distribución de las mismas a lo largo del cuerpo.

Es decir, si un cuerpo está formado por “n” partículas equidistantes unas de otras ocupando de forma uniforme el espacio que integran, el software les asignará a cada una de ellas la misma masa. Este hecho tendrá gran importancia en simulaciones que se verán más adelante en este documento. Al final, el cuerpo de masa M, quedará dividido en n partículas de masa n/M .

El método SPH se sirve de la formulación Lagrangiana, con la ventaja de evitar el posible error numérico que provoca sobre esta formulación, la distorsión del mallado sobre el cuerpo simulado cuando éste es sometido a grandes elongaciones.

A la hora de definir un sólido mediante este conjunto de n partículas, se debe definir en el software un determinado cuerpo tridimensional de tipo Shell, para poder distribuir posteriormente las partículas de este modelo en su interior. La figura 3.14 ilustra de manera sugerente este hecho.

Como es lógico, cuanto mayor es el número de partículas que forman el sólido, mayor es la precisión de los resultados de la simulación; pero mayores son también los costes computacionales asociados, y la memoria requerida en el ordenador.

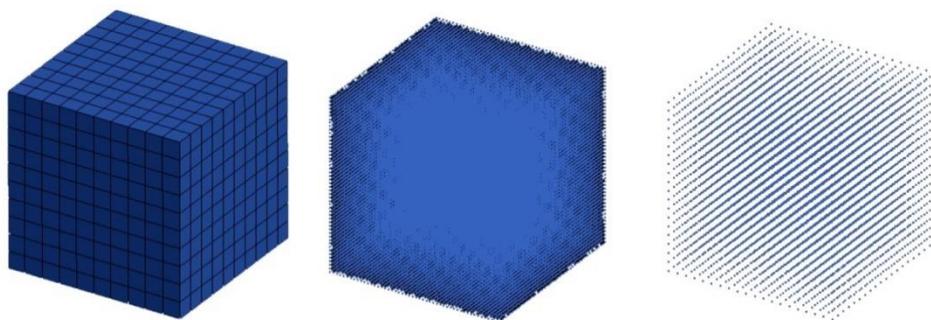


Figura 3.14: Premallado con elementos tipo Shell (izqda.), relleno del premallado con 125.000 partículas (centro), relleno del premallado con 8.000 partículas (dcha.).

Como se puede observar en la figura, el primer prisma es un sólido tridimensional con sus caras tipo Shell, el segundo prisma está compuesto por 125.000 partículas distribuidas uniformemente dentro del volumen que formaba el primero de los

prismas, mientras que el tercero está compuesto por 8.000 partículas distribuidas también uniformemente en el volumen que encierra el primero.

En todos los casos, las partículas SPH se asemejan a un círculo si se está trabajando con un elemento bidimensional, o a una esfera en el caso de tratarse de un problema de tres dimensiones, como es el caso de la figura. Estas partículas quedan definidas perfectamente por su centro y su radio.

Por un lado, el centro proporciona la información sobre su posición en el espacio y su velocidad, mientras que el radio proporciona datos acerca de la densidad y la deformación de la partícula. Esto supone una gran ventaja para el método SPH, ya que en situaciones en las que los desplazamientos y/o las deformaciones sean elevados, el cálculo numérico solo estará contenido en el espacio que ocupa la materia definida y no en todo el espacio computacional [14].

Así, las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento del sólido, se van resolviendo a medida que estas avanzan a lo largo del espacio. Es por esto que el método SPH maneja con gran destreza las simulaciones con altas deformaciones, haciéndolo idóneo para las simulaciones en las que se empleen materiales con comportamiento fluido, como es el caso del hielo para altas velocidades de deformación.

3.4.1.3 Otros métodos.

Además de los dos métodos descritos y de los que se va a hacer uso en la simulación, existen otros métodos de simulación numérica: Euleriano y ALE.

3.4.1.3.1 Método Euleriano.

El método Euleriano es un método que sirve como alternativa al método Lagrangiano explicado, en este método el mallado permanece fijo en el espacio de forma que es el material el que fluye a través de él.

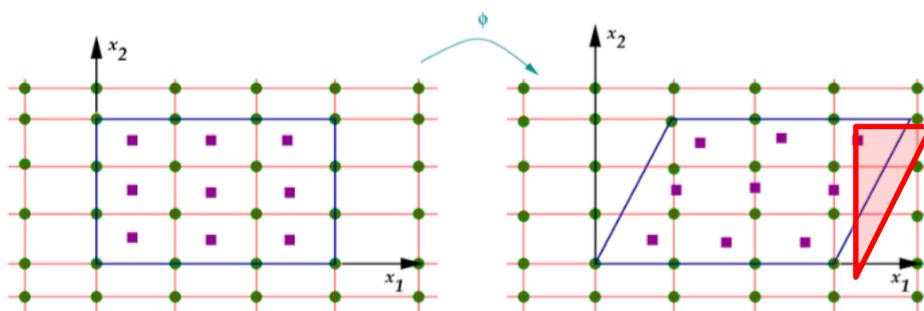


Figura 3.15: Mallado del método Euleriano.

3.4.1.3.2 Método ALE (arbitrary Lagrangian Eulerian).

El método ALE, surge para combinar los beneficios de los métodos Lagrangiano y Euleriano descritos, y tratar de eliminar sus carencias descritas con anterioridad, es decir, reproducir simulaciones en las que los cuerpos se someten a grandes deformaciones con un coste computacional reducido.

En este método una vez deformado el material, la malla se deforma también aunque no lo hace tan acusadamente, y distribuyéndose de forma uniforme a lo largo del material. La malla sigue el movimiento del cuerpo y se adapta a él.

La siguiente figura, recoge esquemáticamente esta descripción en un cuerpo sometido a compresión.

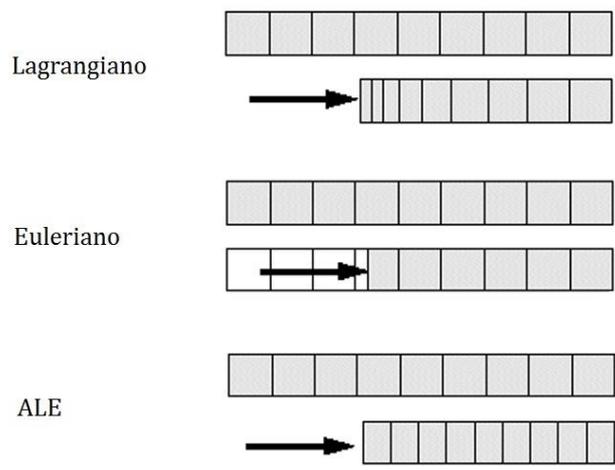


Figura 3.16: Comparativa de deformaciones en mallados.

Capítulo 4

4. Validación del modelo empleado.

4.1 Introducción.

En este capítulo se pretende aceptar como válido el modelo de impacto que se emplea en el software de simulación numérica LS DYNA.

Para ello se ha empleado la nota técnica [4], en el que la Agencia Espacial Estadounidense NASA realizó un ensayo experimental de impacto de un proyectil de hielo sobre una placa de aluminio.

El objetivo de este capítulo es definir el mallado adecuado en la simulación, así como algunas propiedades del hielo y aluminio; de forma que el modelo numérico reproduzca de la manera más exacta posible los resultados que refleja la NASA en su artículo.

4.2 Geometría del ensayo.

En el ensayo experimental realizado se presenta un impacto con un proyectil de hielo de las siguientes características:

- El proyectil es una esfera considerada perfecta ($R=cte$).
- El radio de la esfera es de 12,7 mm.

En lo que se refiere a la placa de aluminio sus características geométricas son:

- Placa plana cuadrada.
- Espesor de placa de 0,91 mm
- La placa es cuadrada con un lado de 305 mm.

En la siguiente figura se muestra la planta y el alzado de la placa ensayada:

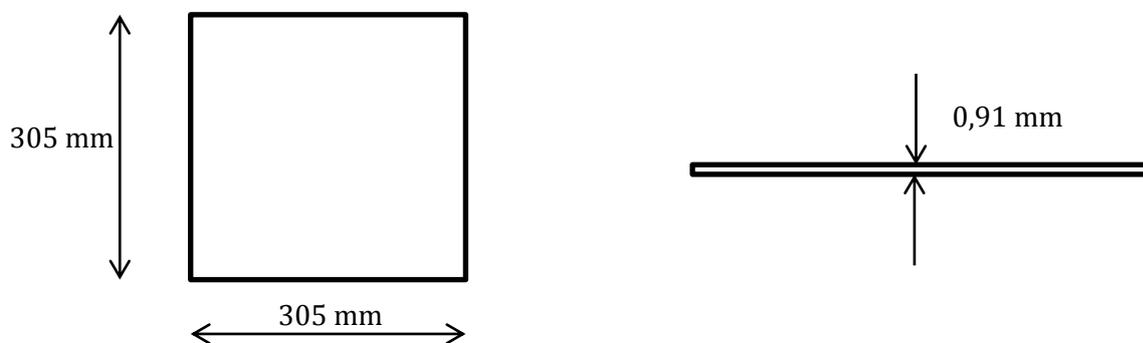


Figura 4.1: Geometría de la placa impactada en el ensayo experimental.

4.3 Condiciones de contorno en el ensayo.

La placa impactada se encuentra empotrada en sus extremos. Para poder hacer esto, se sujetó la placa con ocho pernos, dejando libre una superficie central de $200 \times 200 \text{ mm}^2$.

Los pernos provocan que exista sobre cada lado de la placa cuadrada una sección empotrada con un ancho de 52,5 mm, de forma que se pueda simular una placa lo suficientemente grande como para poder reproducir con mayor fidelidad lo que le sucedería a una parte del fuselaje de un avión.

Por otra parte, al proyectil se le da una velocidad inicial de impacto de 192 m/s, de forma que impacte perpendicularmente a la superficie de la placa.

La siguiente figura representa el alzado de la placa de aluminio, así como la dirección de la velocidad del proyectil.

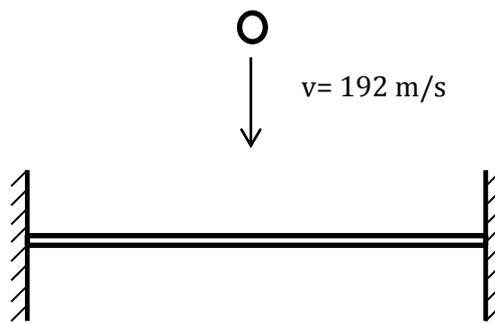


Figura 4.2: Alzado con simplificación geométrica del ensayo experimental.

4.4 Descripción del modelo simulado.

En este apartado se describirán los modelos empleados en el software de simulación para reproducir la geometría del ensayo experimental. Para que los modelos y mallados sean equivalentes, se ha decidido dividir la placa en el mismo número de elementos para ambos modelos ($100 \times 100 \times 4$), y dotar a ambos mallados de proyectil de un número aproximado de elementos o partículas (3500).

4.4.1 Modelo de placa.

Con el objetivo de representar lo más exactamente posible el comportamiento físico de una placa de aluminio, se han utilizado dos modelos diferentes en la herramienta de cálculo LS DYNA:

- Elemento tipo Shell.
- Elemento tipo Box-Solid.

En ambos casos, se ha dividido el lado de la placa cuadrada en cien elementos cuadrados de 2 mm de longitud.

4.4.1.1 Modelo Shell.

Este modelo consta de elementos de dos dimensiones, como se expuso con mayor amplitud en el capítulo anterior. Esta circunstancia provoca un ahorro en el proceso de cálculo de la herramienta y, por lo tanto, en los tiempos invertidos en el cálculo por parte del ordenador.

4.4.1.2 Modelo Box-Solid.

El modelo Box-Solid se ajusta mejor a la realidad física de la placa, ya que es un tipo de elemento en el que se tienen en cuenta las tres dimensiones del espacio. Su principal desventaja es el coste computacional que esto conlleva. Más adelante, en este mismo capítulo, se decidirá si este hecho es relevante o no.

En la siguiente figura se representan los dos tipos de modelos empleados para la placa. En ella aparece una reducida cantidad de los elementos que la componen para que se pueda apreciar con claridad el espesor del modelo Box-Solid (3D):

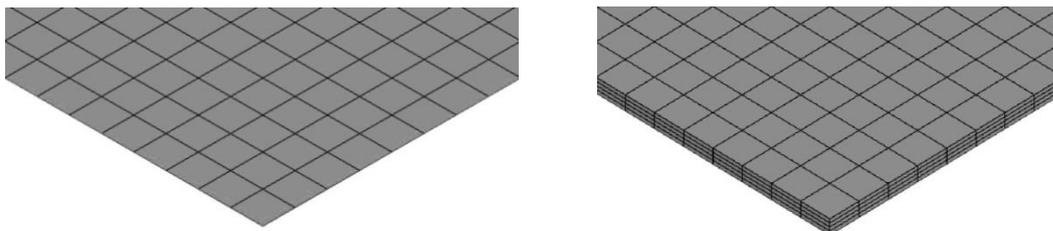


Figura 4.3: Elemento tipo Shell (izqda.) y tipo Box-Solid (dcha.) empleados en la simulación.

A lo largo del espesor de la placa se han situado cuatro elementos de espesor 0,2275 mm, resultando en un espesor total agregado de 0,91 mm.

4.4.2 Modelo de proyectil.

Para la esfera se han realizado simulaciones con dos mallados alternativos, con el objeto de dar por válida aquella que refleje con mayor precisión la naturaleza del

impacto. En ambos casos el modelo empleado en la esfera es tridimensional, dadas sus características físicas. Estos modelos son: Lagrangiano y SPH.

4.4.2.1 Modelo Lagrangiano.

La esfera se considera como un sólido tridimensional empleando el mallado de tipo Lagrangiano, compuesta de 3584 elementos. Este mallado tiene un coste computacional reducido. Sin embargo, presenta ciertos inconvenientes en el contacto con la placa al eliminarse algunos de sus elementos; hecho que realiza de el software al producirse un fallo en el material.

4.4.2.2 Modelo SPH.

El modelo SPH (Smooth Particle Hydrodynamics), modeliza la esfera de hielo como un conjunto de un determinado número de partículas (3359), a las que se les asocia una determinada masa y propiedades.

Este modelo presenta un elevado coste computacional, que se incrementa cuanto mayor es el número de partículas de las que consta la esfera. Por otra parte, es de esperar que cuanto mayor sea el número de partículas empleado, más precisión tendrá el modelo. Sin embargo, se ha de llegar a un compromiso en este punto.

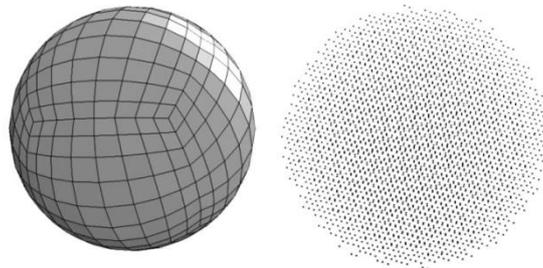


Figura 4.4: Modelo proyectil Lagrangiano (izqda.), modelo de proyectil SPH (dcha.).

4.5 Validación del modelo.

Para ver la conveniencia del uso de un modelo o de otro, tanto para la esfera de hielo como para la placa de aluminio, se utilizarán los datos experimentales de la nota técnica de la NASA [4].

En ese artículo se publica un perfil de desplazamientos verticales en la placa (mm) en el eje Z, como función de la coordenada X (mm), con su origen en el centro de

uno de sus lados y pasando por su centro. La siguiente figura refleja el sistema de coordenadas con mayor claridad:

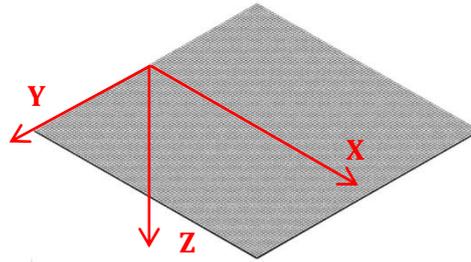


Figura 4.5: Sistema de coordenadas empleado en la placa de aluminio.

De esta manera, se compararán los datos obtenidos para cada uno de ellos con el experimental; y así poder dar por buenas una serie de condiciones y simplificaciones que se verán a continuación.

4.5.1 Modelo de material del hielo.

El modelado del impacto de hielo es un tema ciertamente complicado. El comportamiento del hielo ante un impacto a altas velocidades se caracteriza por unas amplias deformaciones. La siguiente secuencia de imágenes refleja perfectamente este comportamiento [15]:

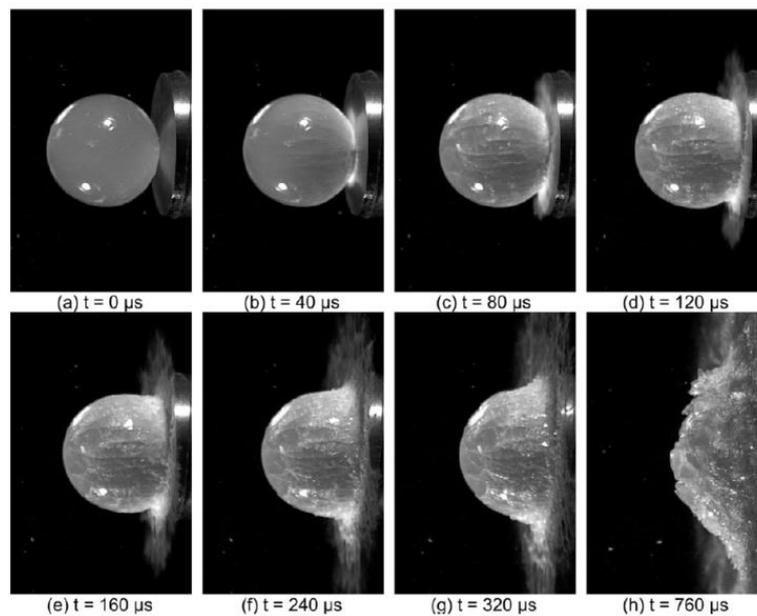


Figura 4.6: Secuencia de imágenes del impacto de una esfera de hielo.

Capítulo 4

Validación del modelo empleado

La secuencia ha sido filmada por un video de alta velocidad a una velocidad de filmación de 25.000 imágenes / segundo y una obturación no inferior a 1/250.000 segundos.

El hielo ha sido modelizado como un material isótropo, elástico hasta rotura con diferentes resistencias a tracción y compresión, para el que se ha empleado el material de la galería (*MAT_013 del LS DYNA, ISOTROPIC_ELASTIC_FAILURE), tal y como empleó H. Kim and K.T. Kedward [2]. Las propiedades que se han introducido en la tarjeta del material se reflejan en la siguiente tabla:

Densidad (kg/mm^3)	$8,46 \cdot 10^{-7}$
Módulo cortante (GPa)	3,46
Límite elástico (GPa)	$10,3 \cdot 10^{-3}$
Módulo endurecimiento plástico (GPa)	$6,89 \cdot 10^{-3}$
Módulo de compresibilidad (GPa)	8,99
Fallo deformación plástica	0,35
Fallo tensión de compresión (GPa)	-0,172

Tabla 4.1: Propiedades del hielo empleadas en la simulación.

4.5.2 Modelo de material del aluminio.

Para el aluminio se ha empleado un modelo de material elasto-plástico isótropo, definido en la galería como (*MAT_098 del LS DYNA, SIMPLIFIED_JOHNSON_COOK). Material que asume un comportamiento plástico con endurecimiento por deformación, y dependencia de la velocidad de deformación y de la temperatura. Su expresión completa es la siguiente:

$$\sigma = (A + B\varepsilon_p^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right) (1 - T^{*m})$$

Para la validación del modelo, se tendrá en cuenta una expresión reducida, sin tener en cuenta el efecto de la temperatura, ni el término correspondiente a la sensibilidad a la velocidad de deformación. En el capítulo siguiente, se abordará el impacto que tiene sobre la simulación esta simplificación, y si es o no significativa. De esta manera, la expresión reducida queda:

$$\sigma = (A + B\varepsilon_p^n)$$

En esta expresión, "A" se corresponde con el límite elástico de la aleación, "B" con el módulo de endurecimiento por deformación plástica, y "n" es una constante que depende del material y que acerca la relación tensión-deformación plástica a una curva y no a una recta.

Según el artículo propuesto para la validación del modelo, la aleación empleada para el ensayo experimental es Al 2014 T4. Las propiedades de esta aleación según [16], vienen reflejadas en la siguiente tabla:

Aleación	Límite elástico A(MPa)	Carga de rotura (MPa)	B (MPa)	n
Al 2014 T4	275	430	-	-

Tabla 4.2: Constantes de la aleación 2014 T4 como material Johnson-Cook.

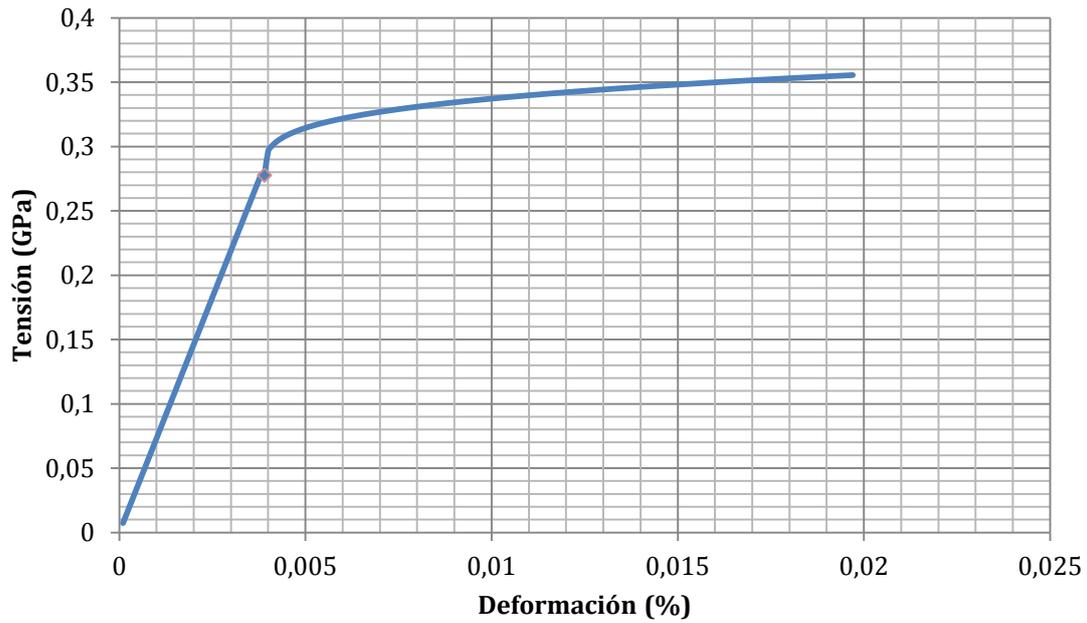
Como se puede apreciar, no existen datos acerca de los valores de “B” y “n” para esta aleación. Tampoco aparecen datos sobre la aleación en concreto en la lista de materiales [17], ni en el artículo empleado para la validación del modelo.

Sin embargo, observando los valores de “n” que se reflejan en las tablas de la lista de materiales [17], se aprecia que la diferencia no es sustancial para la serie 2014. Es por esto que se ha decidido asignarle a la aleación el valor de $n=0,281568$. Y, empleando el límite de rotura y el límite elástico del material, obtener el valor de “B” correspondiente utilizando la expresión del material Johnson-Cook reducida. De este modo, se tiene:

Aleación	Límite elástico A(MPa)	Carga de rotura (MPa)	B (MPa)	n
Al 2014 T4	275	430	250,048	0,281568

Tabla 4.3: Constantes de la aleación 2014 T4 como material Johnson-Cook calculadas.

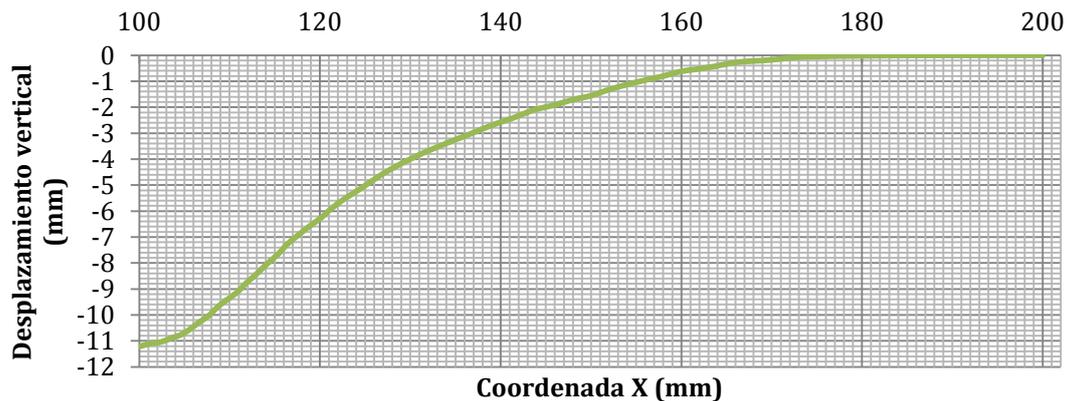
Haciendo uso de estas propiedades, la curva tensión-deformación del Al 2014 T4 teórica es:



Gráfica 4.1: Relación tensión deformación de la aleación 2014 T4.

4.5.3 Resultados ensayo experimental.

Como ya se ha explicado dentro de este mismo capítulo, se va a utilizar el perfil de desplazamientos de media placa (para reducir el número de datos), obtenido en el ensayo experimental para validar el modelo empleado en la simulación. Extrayendo los datos de [3], se tiene:

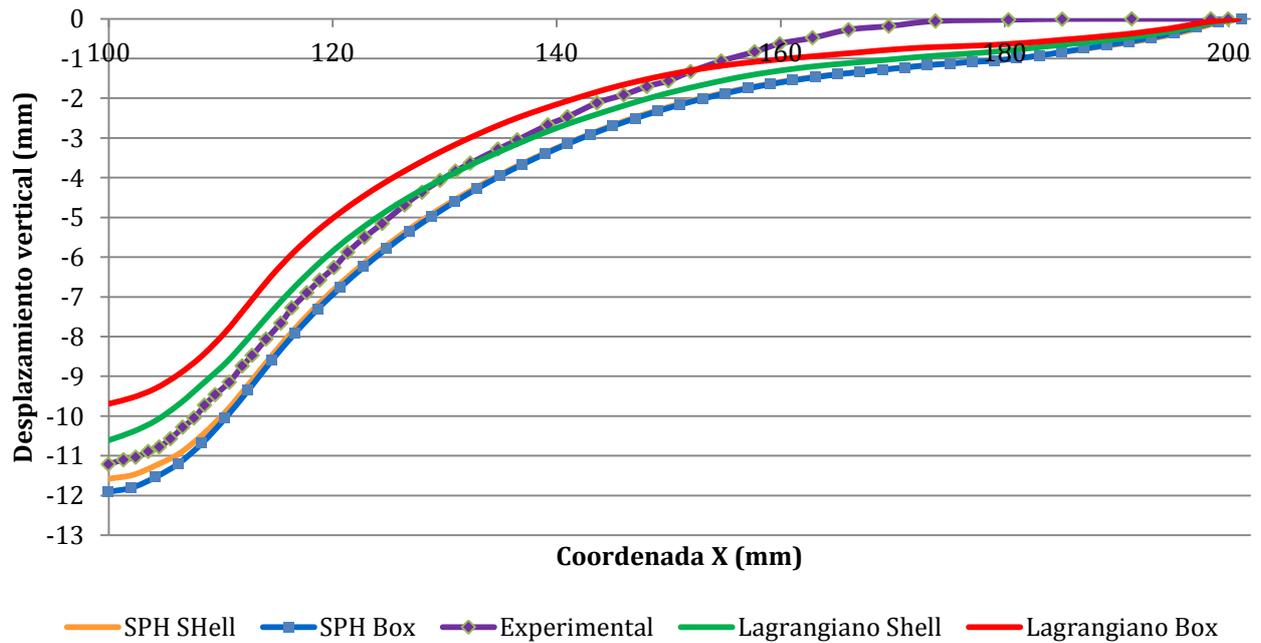


Gráfica 4.2: Perfil de desplazamientos obtenidos en el ensayo experimental.

En el centro de la placa ($X=100\text{mm}$) existe un desplazamiento máximo de 11,2 mm.

El objetivo de este capítulo es el de seleccionar el modelo más adecuado tanto para placa como para proyectil, teniéndose hasta un total de cuatro posibles modelos finales.

La siguiente gráfica muestra la comparativa de desplazamientos de los nodos (mm) en (como) función de la coordenada X (mm) empleada, para un modelo de placa tipo Shell (2D) y BoxSolid (3D) y empleando para el proyectil el mallado Lagrangiano y SPH:



Gráfica 4.3: Perfil de desplazamientos obtenidos en la simulación.

Los resultados numéricos del desplazamiento de la placa que se muestran a continuación son los obtenidos al final de la simulación para un tiempo de simulación de 2 ms, después de habersele aplicado un amortiguamiento, eliminando de esta manera la energía elástica del mismo. Este proceso se detallará más adelante en el documento en el apartado 4.5.5.

Como se puede apreciar en la gráfica comparativa de los cuatro modelos y el resultado experimental, existe una clara evidencia en cuanto al método SPH; el perfil de desplazamientos obtenido en esta técnica es muy semejante al perfil experimental, tanto para elementos tipo Shell o tipo BoxSolid en la placa. Por lo que, a pesar de la diferencia computacional existente, se opta por descartar definitivamente los modelos en los que se ha empleado el mallado Lagrangiano para el proyectil.

Capítulo 4

Validación del modelo empleado

Las diferencias entre los modelos SPH son mínimas en los nodos situados entre el centro y el extremo de la placa. Sin embargo, en el centro existe una ligera mejoría en cuanto al valor del desplazamiento máximo de la placa en el modelo en el que se ha utilizado el elemento bidimensional tipo Shell.

En la siguiente tabla se reflejan los valores obtenidos para el desplazamiento del nodo central (coordenada X=100mm)

Ensayo/Simulación	$\delta_{m\acute{a}x}(mm)$	Error relativo (%)
Experimental	-11,22	-
SPH Shell	-11,57	3,12
SPH BoxSolid	-11,90	6,06

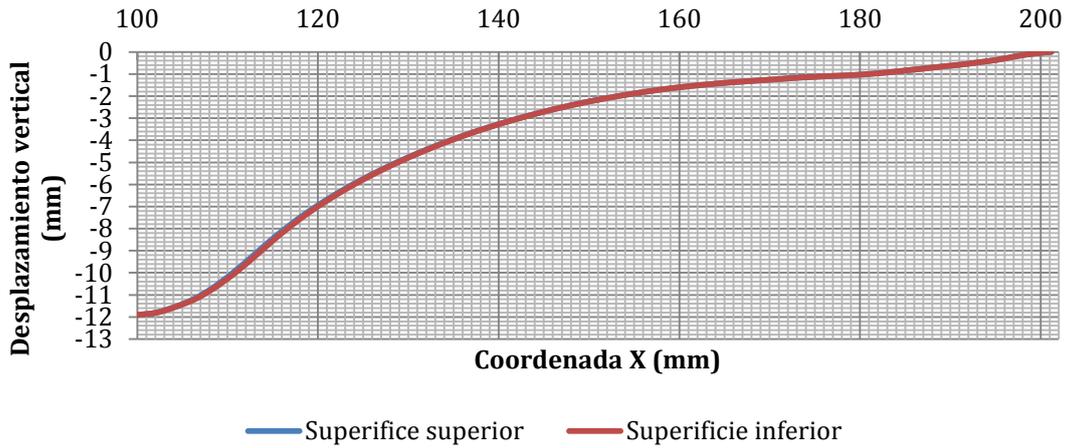
Tabla 4.4: Desplazamiento máximo y error relativo en simulaciones SPH-Shell y SPH-BoxSolid.

Si se tuviera que seleccionar un modelo, a la luz de los resultados obtenidos y del menor coste computacional que supone el modelo bidimensional, no existe duda que el modelo a emplear sería el tipo Shell para la placa de aluminio combinado con un proyectil de mallado SPH.

En el proceso de cálculo que sigue LS DYNA para elementos tipo Shell, siguiendo la formulación para sus elementos Belytschko-Tsay, el software le da al sólido bidimensional el espesor introducido con la mitad de su valor por encima de la superficie, y la otra mitad por debajo. Es un procedimiento matemático que se acerca a lo que le sucede a la placa físicamente, pero no lo refleja con la misma exactitud que lo hace un elemento tridimensional.

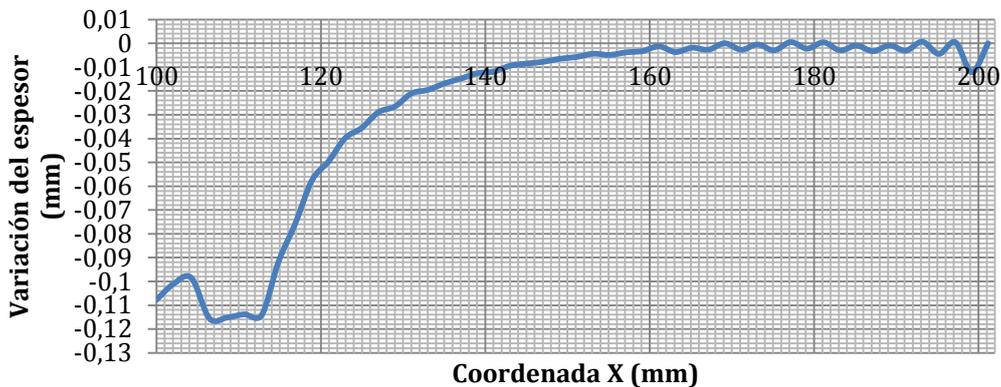
Además, el software, en el caso bidimensional, no tiene en cuenta una posible variación en el espesor de la placa a la hora del impacto. Haciendo uso del modelo Box-Solid tridimensional, las siguientes gráficas muestran si existe tal variación o es insignificante desde un punto de vista físico.

La primera gráfica representa el perfil de desplazamientos de los nodos de la superficie superior e inferior de la placa (mm) como función de la coordenada X (mm).



Gráfica 4.4: Comparativa del perfil de desplazamientos entre superficies superior e inferior con elementos Box-Solid.

A simple vista no existe diferencia entre ambas curvas y son coincidentes. Sin embargo, si se representa la diferencia en los valores de los desplazamientos de cada una de ellas (mm) en función de la coordenada X (mm), se tiene:



Gráfica 4.5: Variación del espesor en la placa empleando elementos Box-Solid.

Como muestra la gráfica anterior, en los nodos pertenecientes a la superficie de impacto existe una variación de espesor más que notable. Teniendo en cuenta que el espesor inicial de la placa es 0,91 mm, con una variación de 0,1155 mm, si se omitiese, se estaría cometiendo un error relativo en este aspecto del 12,7%. Dicha variación es lo suficientemente grande como para ser obviada. Hecho que se produce si se emplea un modelo bidimensional para la placa.

Hay que tener en cuenta también que en el capítulo posterior se pretende estudiar la influencia que tiene el espesor de la placa sobre el comportamiento del impacto.

4.5.4 Conclusiones.

Se decide finalmente utilizar un **modelo tridimensional Box-Solid** para la placa impactada, dadas las explicaciones y la diferencia de resultados obtenidos.

Para la esfera tampoco existe duda, **el método SPH** (Smooth Particle Hydrodynamics) arroja un perfil de desplazamientos que sigue la tendencia de desplazamientos del ensayo experimental realizado. Este mallado tiene un coste computacional mayor que el mallado Lagrangiano, pero a la vista de los resultados se trata del modelo más adecuado para ser empleado.

Además de los resultados meramente numéricos, el mallado SPH refleja con mayor exactitud el comportamiento del hielo ante el impacto, y la transición sólido-líquido en altas velocidades que reflejan los ensayos experimentales y que se encuentra perfectamente descrita en [15].

La siguiente figura representa gráficamente esta situación de impacto para tres instantes de tiempo diferentes, comparando ambos modelos con el ensayo experimental.

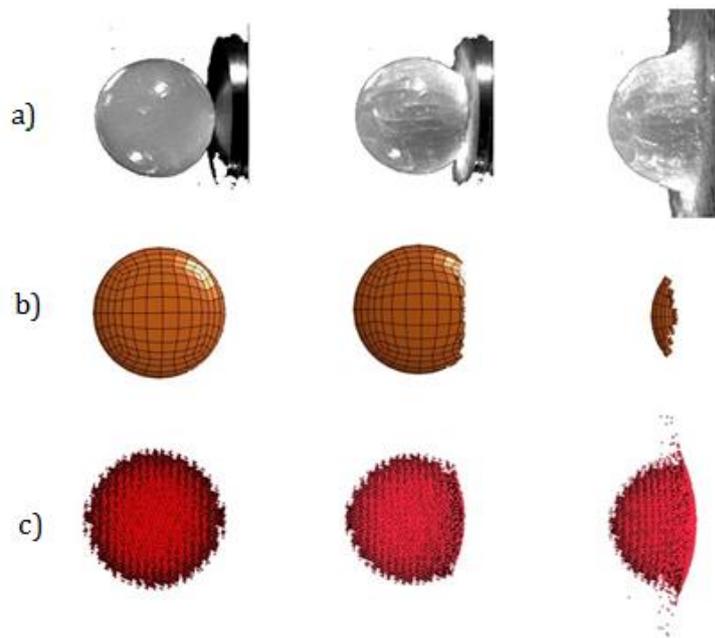


Figura 4.7: Comparativa de deformaciones en proyectiles a)Ensayo experimental, b)Lagrangiano, c) SPH.

La secuencia de imágenes en el impacto demuestra que, además de los datos objetivos reflejados en las gráficas anteriores, el modelo SPH se comporta precisamente como lo hace el proyectil en los ensayos experimentales.

4.5.5 “Damping”.

Para poder realizar esta evaluación, se necesitan extraer los datos de desplazamiento en el software LS DYNA, una vez la placa se detiene. Después de la deformación inicial, la placa tiende a recuperar su forma inicial y, tras una serie de oscilaciones, alcanza finalmente la posición objeto de estudio.

En un ensayo experimental el proceso descrito es sencillo, basta con dejar la placa un determinado tiempo hasta que se estabilice, para posteriormente realizar las mediciones correspondientes. Sin embargo, en el proceso de simulación no es algo tan sencillo.

Dentro de la herramienta de cálculo utilizada no existe rozamiento, de manera que el proceso de oscilación hasta la posición de equilibrio de la placa es un proceso muy largo (mayor a 24 horas).

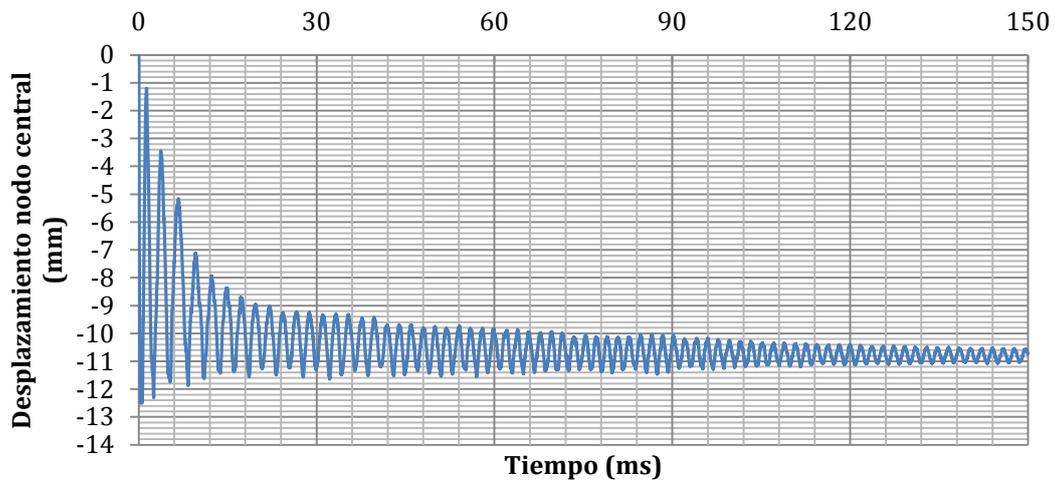
Para evitar esta situación, se pretende hacer uso de la tarjeta “Damping” del LS DYNA. Esta tarjeta permite aplicar un amortiguamiento al sistema de tal modo que se adelante la situación de equilibrio en el espacio temporal, ahorrando así ingentes cantidades de tiempo de simulación y de capacidad de memoria para los datos guardados.

Así, es necesario definir una curva de amortiguamiento para introducir en la tarjeta; de tal forma que, al utilizarla, el software refleje una solución lo más próxima posible a la solución que se alcanzaría al no utilizar dicha tarjeta.

Para justificar el uso de esta tarjeta, en primer lugar se ha simulado el comportamiento del impacto para un tiempo de simulación lo suficientemente largo como para poder asegurar que se ha alcanzado el equilibrio en la placa. Para ello, se ha empleado el modelo Shell bidimensional para simular la placa y un mallado Lagrangiano para el caso del proyectil; ya que es el modelo que menor coste computacional conlleva y que arroja un valor de desplazamiento máximo más que razonable.

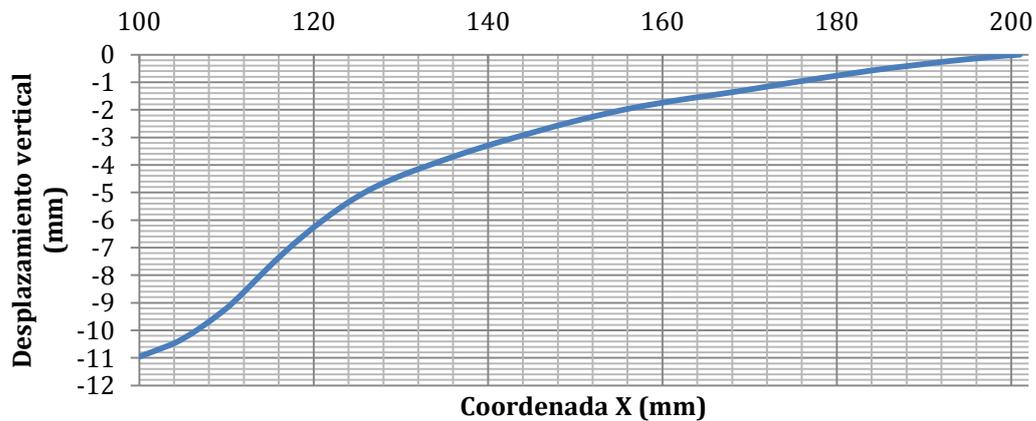
La gráfica 4.6 refleja el desplazamiento del nodo central (mm) como función del tiempo de simulación.

La forma de la gráfica es una onda amortiguada que va convergiendo a un cierto valor con el paso del tiempo. El intervalo de oscilación final ($t=150$ ms) es lo suficientemente largo como para poder asumir que se ha alcanzado el equilibrio en dicho instante.



Gráfica 4.6: Evolución temporal del desplazamiento máximo de la placa.

Para el instante final en el que se considera en equilibrio la placa, el perfil de desplazamientos (mm) como función de la coordenada X (mm) es el siguiente:

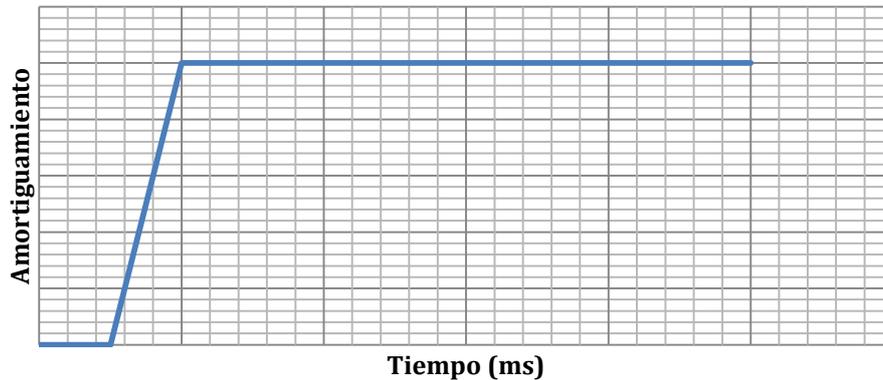


Gráfica 4.7: Perfil de desplazamientos final obtenido en la simulación.

Se trata de encontrar una curva de tipo escalón para utilizar en la tarjeta “Damping” del LS DYNA con la que se alcancen unos desplazamientos similares, y que ahorren la cantidad de memoria almacenada y el tiempo empleados si no se utilizase.

La curva introducida debe provocar que la simulación alcance un máximo desplazamiento y que, a partir de ese instante, se recupere elásticamente como sucede en el ensayo experimental; ya que si no se estaría teniendo en cuenta la

deformación plástica, hecho que no sucede en la realidad. La curva utilizada en la tarjeta “Damping” debe ser de la siguiente forma:



Gráfica 4.8: Curva escalón a introducir en la tarjeta “Damping”.

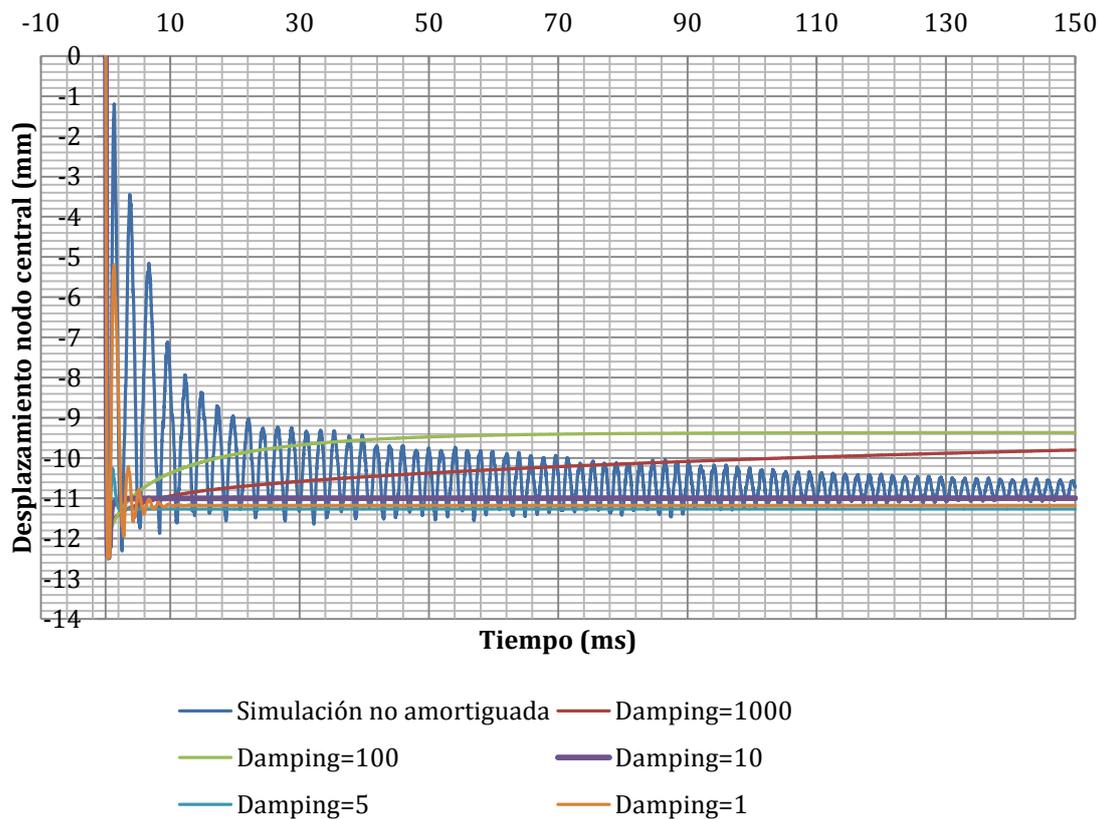
4.5.5.1 Valor del escalón de la curva.

Para conseguir la curva adecuada, se ha decidido dar diferentes valores al escalón introducido en la curva utilizada en la tarjeta “Damping”, así como el tiempo a partir del cual ésta se activa. Para dar alguna curva como válida en su uso en la tarjeta del Damping, se ha decidido utilizar aquella que aproxime con mayor exactitud el valor del desplazamiento máximo de la placa en su nodo central al desplazamiento que sufre la placa en ese mismo nodo para un tiempo considerado de estabilidad de la placa ($t=150$ ms).

La gráfica 4.11 contiene el desplazamiento del nodo central de la placa (mm) como función del tiempo de simulación para diferentes curvas empleadas en la tarjeta “Damping” del LS DYNA.

En todas las curvas utilizadas para el Damping de la gráfica anterior se ha introducido el escalón en el mismo instante de tiempo ($t=0,22$ ms). Posteriormente se verá la importancia de este hecho.

Como se puede observar, existen dos valores del escalón en los que, en los instantes iniciales, pueden reflejar de manera aproximada el comportamiento de la placa. Sin embargo, al pasar los 100 ms de simulación se alejan ostensiblemente del desplazamiento del nodo central de la simulación y, por consiguiente, del valor real no amortiguado. Estos valores de escalón son 100 y 1000.



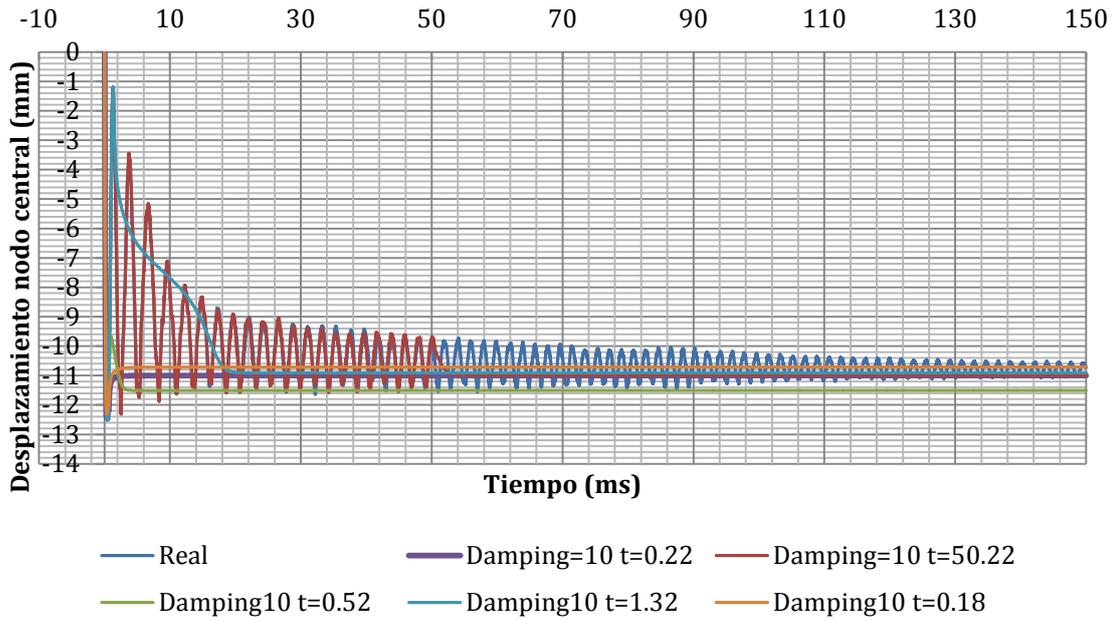
Gráfica 4.9: Evolución temporal del desplazamiento máximo para diferentes valores del escalón.

El valor de escalón que mejor refleja el desplazamiento final del nodo central de la placa es el de 10, ya que arroja un desplazamiento final que se encuentra dentro del intervalo reducido de oscilación de la simulación no amortiguada.

4.5.5.2 Instante de introducción del escalón.

Por otro lado, es necesario observar en qué medida afecta a los resultados la introducción del escalón 10 en un instante u otro de tiempo. Para ello, se ha seguido el mismo procedimiento. Se ha comparado el desplazamiento del nodo central en la simulación no amortiguada, con diferentes curvas empleadas en la tarjeta “Damping” en las que se introduce el escalón en un determinado instante, con el objetivo de determinar el instante que mejor refleje la solución final ahorrando tiempo y almacenamiento de memoria.

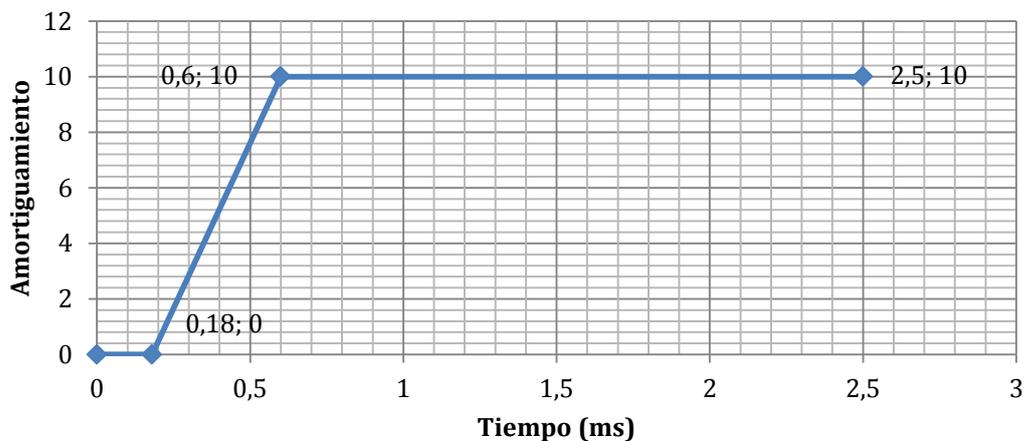
La siguiente gráfica expresa el desplazamiento del nodo central de la placa (mm) en función del tiempo (ms) de las curvas utilizadas en la tarjeta “Damping”, con un escalón de valor 10, para diferentes instantes de introducción de dicho escalón.



Gráfica 4.10: Evolución temporal del desplazamiento máximo para diferentes instantes de introducción del escalón.

Como refleja la gráfica anterior, de los cinco instantes de inicio de escalón empleados, cuatro dan su solución en el intervalo de soluciones que entrega la simulación no amortiguada. Se ha optado por seleccionar la curva de instante inicial **t=0,18 ms**, ya que se encuentra en todo momento en la zona media del intervalo de oscilación del desplazamiento no amortiguado.

De esta manera, la curva empleada en la tarjeta de “Damping” del LS DYNA es la siguiente:

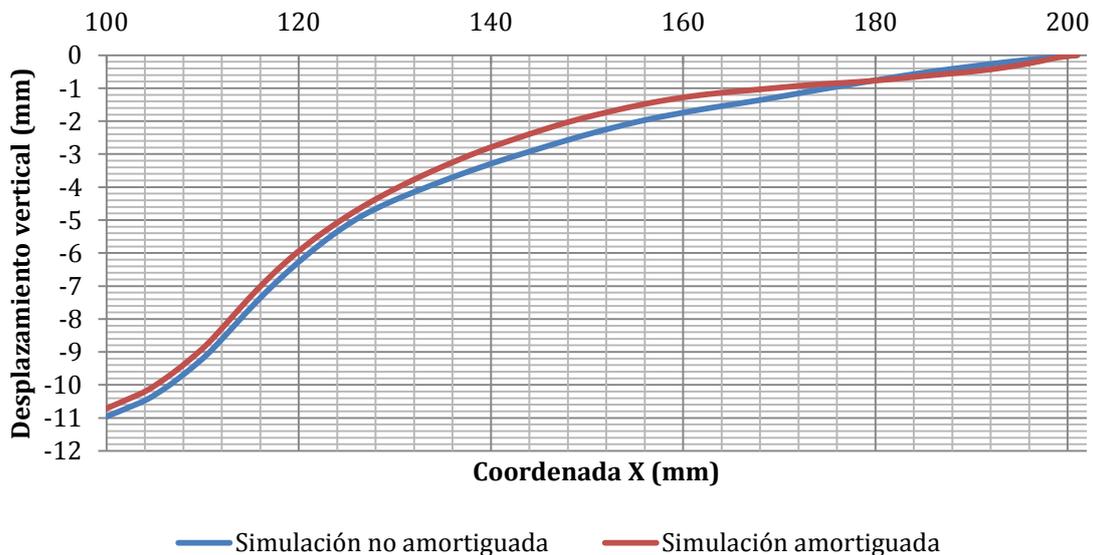


Gráfica 4.11: Curva definitiva a introducir en la tarjeta “Damping”.

Capítulo 4

Validación del modelo empleado

Por otro lado, no tendría mucha lógica dar por bueno definitivamente el modelo sin comprobar la igualdad de desplazamientos no solo del nodo central de la placa, sino la del perfil completo desde el centro de la placa ($X=100$ mm) hasta su extremo ($X=200$ mm). Para ello, se representará este perfil en la siguiente gráfica para la placa simulada sin amortiguamiento, y para la placa simulada con el amortiguamiento definido en este apartado.



Gráfica 4.12: Perfil de desplazamientos en las simulaciones con y sin "Damping".

Como se puede observar, la simulación no amortiguada es muy próxima a la simulación amortiguada, tanto en valores de los desplazamientos de cada nodo como en la tendencia que estos siguen.

Es por esto que **se puede concluir que el modelo empleado es definitivamente válido, tanto en mallados y elementos utilizados, como en las propiedades de los materiales utilizados, como en la curva utilizada en la tarjeta del amortiguamiento.** En el anexo final se encuentran todas las tarjetas utilizadas en la simulación que se ha considerado como válida.

A partir de este punto es posible abordar variaciones en los parámetros de la simulación con los que conseguir datos y resultados que se aproximen a lo que sucedería en estos mismos impactos ensayándolos experimentalmente, como se verá en el capítulo a continuación.

Capítulo 5

5. Simulaciones de impacto de hielo.

5.1 Introducción.

En este capítulo se abordará el estudio de diferentes simulaciones, variando algunas propiedades tanto en el proyectil de hielo como en la placa impactada, con el objetivo de explicar cómo afecta al comportamiento mecánico de la placa la variación de una serie de propiedades del conjunto.

Para tal fin se han realizado cinco tipos de simulaciones independientes, que se explicarán en detalle a continuación:

- I. Composición del aluminio de la placa impactada.
- II. Velocidad de impacto del proyectil.
- III. Espesor de la placa impactada.
- IV. Masa del proyectil, manteniendo la superficie de contacto idéntica.
- V. Volumen y la velocidad del proyectil, manteniendo su energía cinética constante.

5.2 Simulaciones.

5.2.1 Variación en la composición del aluminio de la placa impactada.

La primera simulación consiste en la sustitución de la aleación de aluminio empleada en la validación del modelo por una serie de aleaciones de aluminio de uso frecuente en la industria aeroespacial y automóvil.

Además, se pretende observar la influencia que tiene en la simulación el uso de la constante C ; con la que se tiene en cuenta la sensibilidad a la velocidad de deformación en un material Johnson-Cook simplificado, como el que se ha utilizado desde el capítulo correspondiente a la validación; y cuya expresión viene dada por:

$$\sigma = \left(A + B \varepsilon_p^n \right) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) (1 - T^{*m})$$

Para esta simulación, las aleaciones empleadas, además del 2014 T4 son:

- I. Al 2024 T351.
- II. Al 2024 T851.
- III. Al 5754 H111.
- IV. AL 7075 T6.

Capítulo 5

Simulaciones de impacto de hielo

Para observar la influencia del uso de la constante C en la simulación, se han estudiado las aleaciones Al 2024 T351 y Al 5754 H111, comúnmente utilizadas en la industria del automóvil, y de las que se conoce el valor de dicha constante.

5.2.1.1 Constantes de los materiales.

En la siguiente tabla se recogen todas las constantes introducidas en la herramienta de simulación LS-DYNA, para cada una de las aleaciones.

Aleación	A(Mpa)	B(Mpa)	n(adimensional)	C(adimensional)
Al 2024 T351	352	440	0,42	0,0083
Al 2024 T851	441,91	197,9	0,295665	-
Al 5754 H111	28,13	278,67	0,183	0,00439
Al 7075 T6	481,56	286,81	0,292872	-
Al 2014 T4	275	250,048	0,281568	-

Tabla 5.1: Constantes de las aleaciones como materiales Johnson-Cook.

Además de estas constantes, que son necesarias para estudiar el comportamiento dinámico del material de la placa, es necesario introducir en la tarjeta del material dentro del software utilizado una serie de constantes de la aleación; obtenidas a partir de [10]. Todas ellas se reflejan en la siguiente tabla:

Aleación	$\rho(kg/mm^3)$	E(Gpa)	$\mu(adimensional)$
Al 2024 T351	$2,70 \cdot 10^{-6}$	70	0,33
Al 2024 T851	$2,768 \cdot 10^{-6}$	73,084	0,33
Al 5754 H111	$2,700 \cdot 10^{-6}$	70	0,33
Al 7075 T6	$2,7957 \cdot 10^{-6}$	71,061	0,33
Al 2014 T4	$2,796 \cdot 10^{-7}$	73,084	0,33

Tabla 5.2: Propiedades de las aleaciones a introducir en la tarjeta de materiales.

5.2.1.2 Parámetros iniciales de impacto.

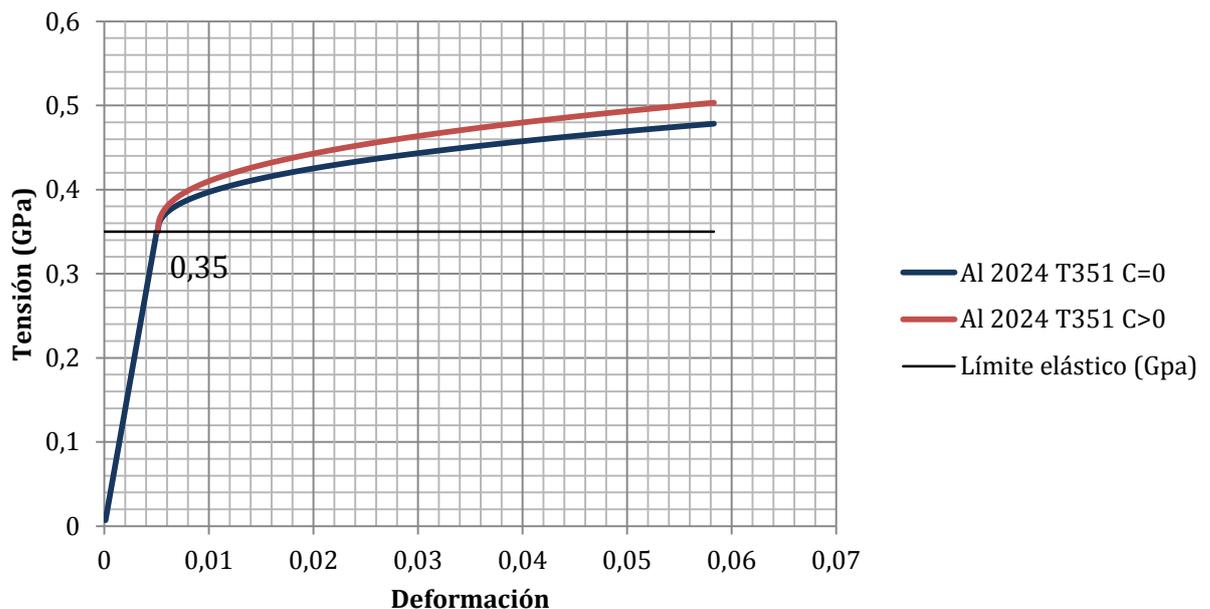
En esta simulación, el resto de parámetros en el impacto permanecen idénticos, salvo el cambio de material, a los parámetros utilizados para la validación del modelo; es decir:

- I. **Proyectil:**
Esfera de hielo de 12,7 mm de radio, con una velocidad de impacto inicial de 192 m/s.
- II. **Placa:**
Placa con 0,91 mm de espesor y 200x200 mm² de superficie, empotrada en todo su contorno perimetral.

5.2.1.3 Consideración de la velocidad de deformación.

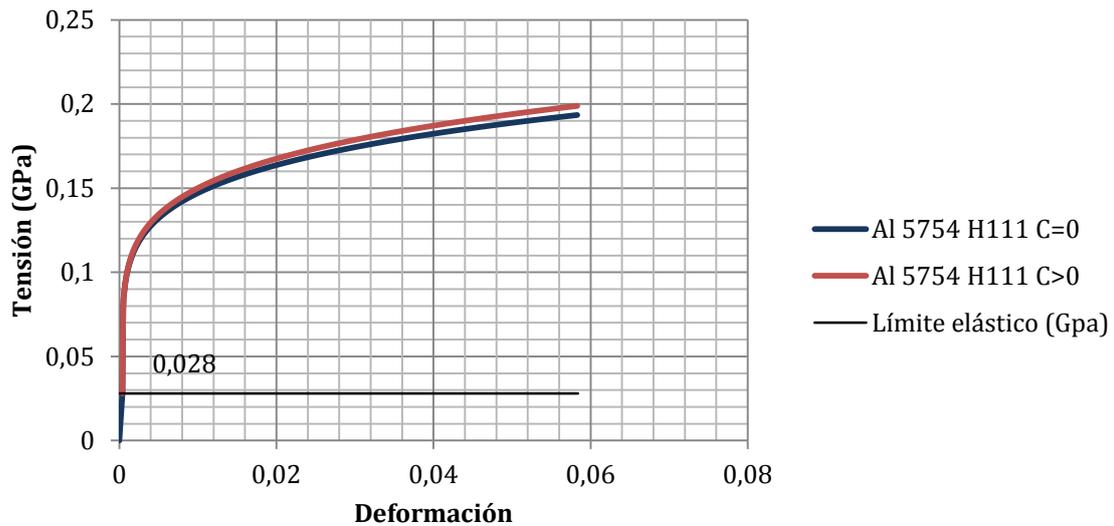
En primer lugar, se verá la influencia de la introducción o no de la constante C del material, con la que se introduciría la influencia de la velocidad de deformación de los materiales en cuestión: las aleaciones Al 2024 T351 y Al 5754 H111.

Para ello, se ha representado desde un punto de vista teórico la curva tensión-deformación de sendos materiales, obteniéndose:



Gráfica 5.1: Relación tensión-deformación 2024 T351.

Como se puede observar en ambas gráficas 5.1 y 5.2, el uso de la constante C aporta un endurecimiento por deformación plástica que se ha obviado; aunque ya se explicará más adelante en el documento hasta qué punto esta obviada resulta significativa.

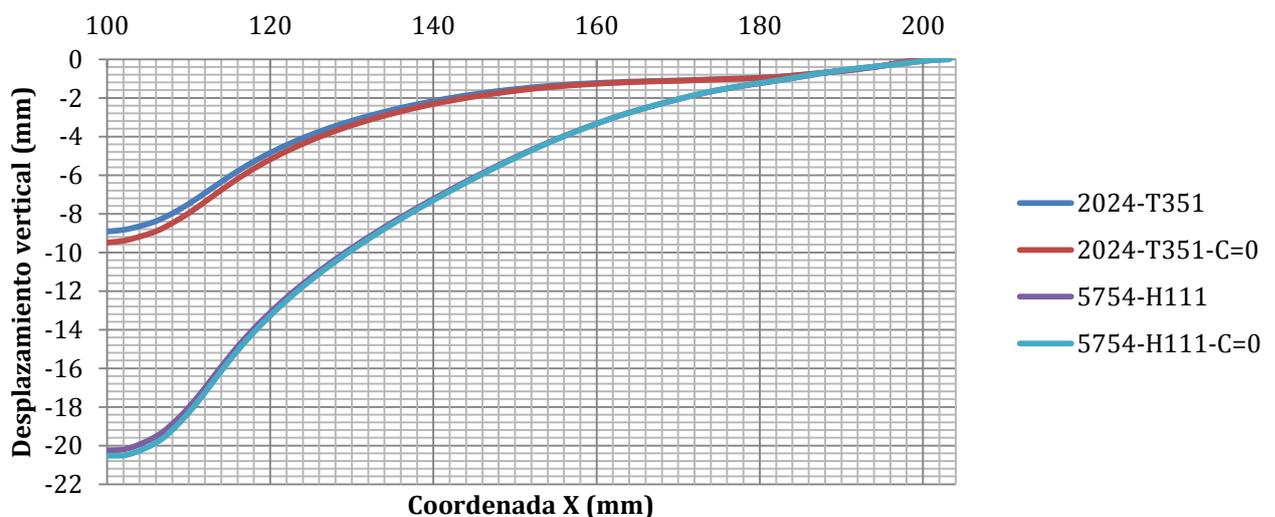


Gráfica 5.2: Relación tensión-deformación 5754 H111.

Se ve claramente que el hecho de no utilizar esta constante es, desde el punto de vista teórico, menos relevante en el Al 5754 H111 ya que el valor de dicha constante es menor este caso.

En este apartado se verá si la herramienta de simulación coincide con lo que aparentemente expresan las dos figuras anteriores.

En la siguiente gráfica se representa el desplazamiento de la placa en función de la coordenada X (mm), con origen en uno de los lados de la placa, para los dos tipos de aluminios empleados; con el fin de contrastar la influencia del uso o no de la constante C en el software utilizado:



Gráfica 5.3: Perfil de desplazamientos de 2024 T351 y 5754 H111.

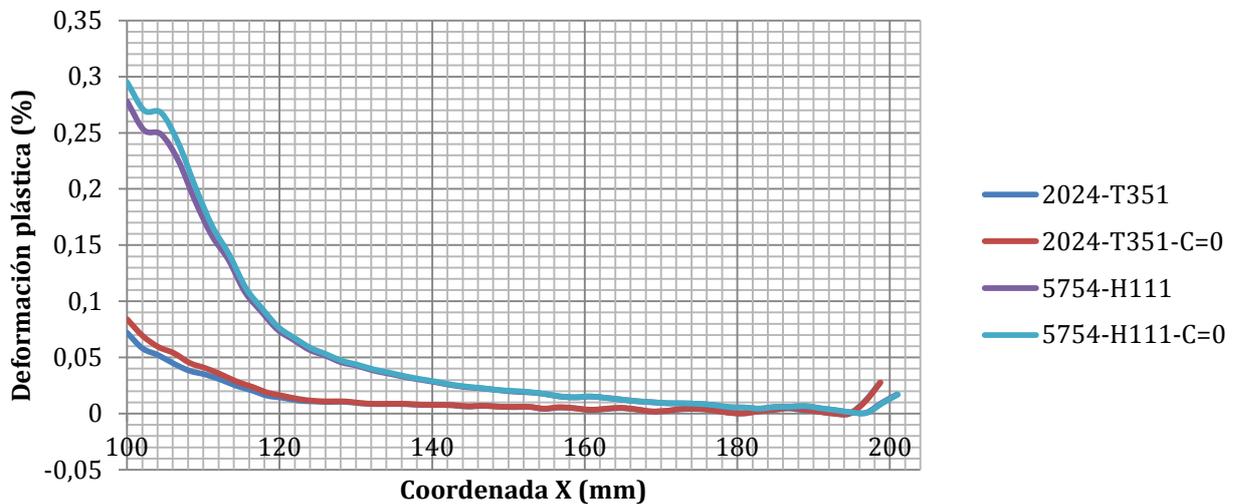
Como se puede observar en la gráfica anterior en lo que se refiere a la predicción de un desplazamiento futuro de cara al ensayo de un aluminio, el uso de la constante C dentro del software no es significativo. En el caso de estos aluminios, el efecto de la constante C es insignificante.

Además de los desplazamientos críticos que se originan en el centro de la placa ($X=100$ mm), es importante observar la tendencia de desplazamientos del resto de nodos hasta alcanzar el límite de la misma.

Como se puede visualizar en la gráfica previa, la tendencia de desplazamientos en todos ellos es idéntica; llegando incluso a coincidir a partir de la coordenada $X=140$ mm.

Por todo lo expuesto, se puede concluir que **el uso de la constante C no es significativo desde el punto de vista del desplazamiento de la placa en este caso.**

Además del desplazamiento, es interesante el estudio de la deformación plástica para ambos aluminios, usando o no la citada constante C. La teoría dice que debe mostrar un comportamiento similar al desplazamiento; sufriendo una deformación mayor los materiales ensayados con $C=0$. En la siguiente gráfica se representa la deformación plástica en función de la coordenada X:



Gráfica 5.4: Deformación plástica de 2024 T351 y 5754 H111.

Efectivamente, sucede exactamente lo mismo. Existe una pequeña diferencia en los nodos que sufren la mayor deformación (centro de placa), diferencia que se va reduciendo a medida que la deformación sufrida es menor; llegando a ser idéntica a partir de la coordenada $X=140$ mm.

Además se observa que los materiales con mayor deformación plástica y que sufren un mayor desplazamiento son aquellos en los que se ha introducido el parámetro C, hecho que coincide con la curva tensión-deformación de las gráficas 5.1 y 5.2. En ella, los materiales en los que se ha introducido su constante C correspondiente, tienen una pendiente mayor en régimen plástico que los materiales en los que se ha considerado despreciable.

En conclusión, **el uso de la constante C puede considerarse despreciable en lo que a los aluminios se refiere**, por lo que se puede dar por buena la expresión:

$$\sigma = (A + B\varepsilon_p^n)$$

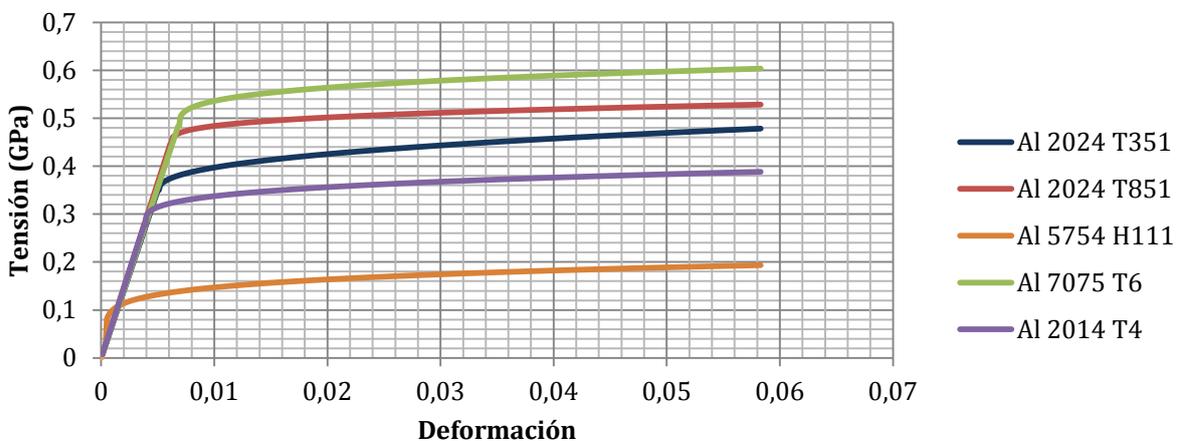
Es decir, **la velocidad de deformación es despreciable dado que el régimen de deformación plástica y el régimen de velocidad de deformación son pequeños.**

5.2.1.4 Análisis de resultados en diferentes aleaciones.

Una vez desestimado el uso de la constante C, en la que se tiene en cuenta la velocidad de deformación de la aleación, se va a estudiar en este punto las diferencias observadas entre diferentes aleaciones que son ampliamente utilizadas en el campo de la aeronáutica y la industria automovilística.

De nuevo, se representará gráficamente los resultados obtenidos en el impacto para el desplazamiento máximo que sufre la placa de aluminio y la deformación plástica de la misma.

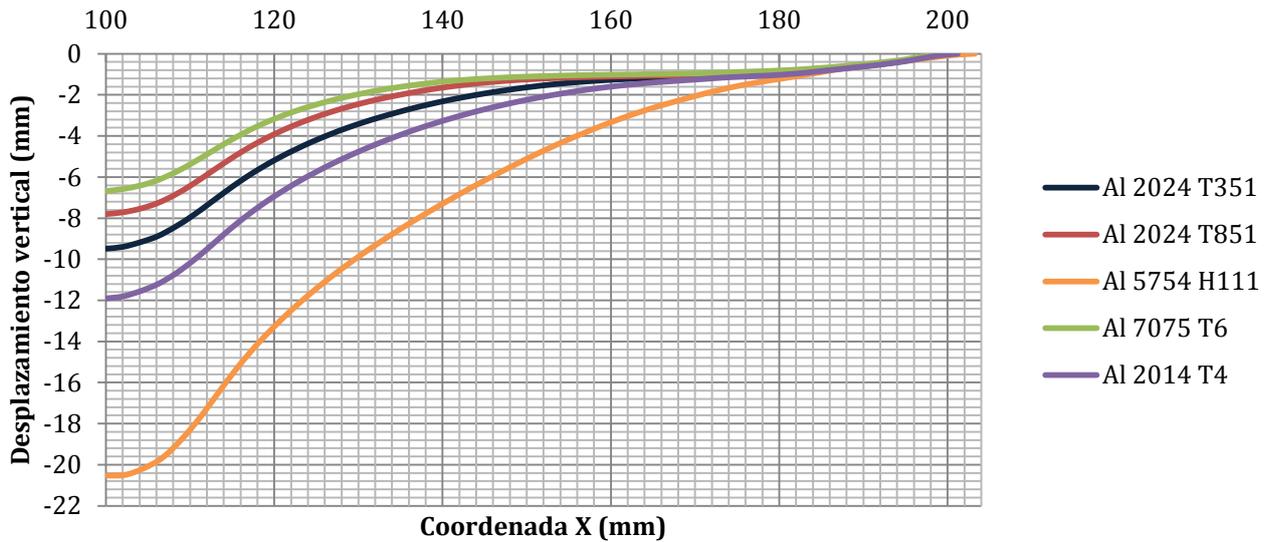
Para tal fin, se debe explicar en primer lugar las gráficas tensión-deformación de las diferentes aleaciones empleadas según la gráfica siguiente:



Gráfica 5.5: Relación tensión-deformación de las aleaciones apartado 5.2.

Como se puede observar, todas las gráficas tienen un comportamiento parecido aparentemente en régimen plástico, y las diferencias que se puedan observar serán acordes a los diferentes límites elásticos de los materiales.

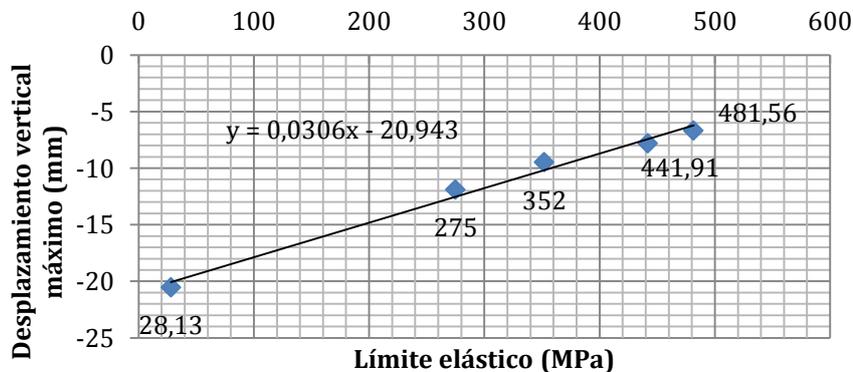
En la siguiente gráfica, se muestran los desplazamientos máximos y la deformada de media placa como se hizo en el capítulo anterior para validar la simulación. Se representa el desplazamiento de cada nodo (mm) en función de la coordenada X (mm) con origen en uno de los lados de la placa.



Gráfica 5.6: Perfil de desplazamientos de las aleaciones apartado 5.2.

Como se puede cotejar en la gráfica anterior: a menor límite elástico, mayor es el desplazamiento máximo obtenido (centro de la placa).

En la siguiente gráfica se puede visualizar la aparente linealidad de los resultados como función del límite elástico de cada aleación:



Gráfica 5.7: Relación desplazamiento máximo-límite elástico de las aleaciones apartado 5.2

Es por esto que se puede hacer una predicción a priori del desplazamiento que puede sufrir una placa sabiendo el límite elástico del material para una velocidad de impacto de 192 m/s.

Además del desplazamiento máximo en el centro de la placa, es reseñable que la tendencia que se observa en el desplazamiento de las diferentes aleaciones es idéntica. **Cuanto menor es el límite elástico del material, mayor es el desplazamiento de los nodos situados entre el centro y el extremo de la placa.** Y esto se debe a que el endurecimiento por deformación plástica en todos los materiales tiene una pendiente casi idéntica, salvo en ciertas regiones como se puede observar en la gráfica 5.5. Es decir, para los aluminios empleados se puede afirmar que **la diferencia en el desplazamiento de cada nudo es función exclusiva de la diferencia en el límite elástico de cada aleación material.**

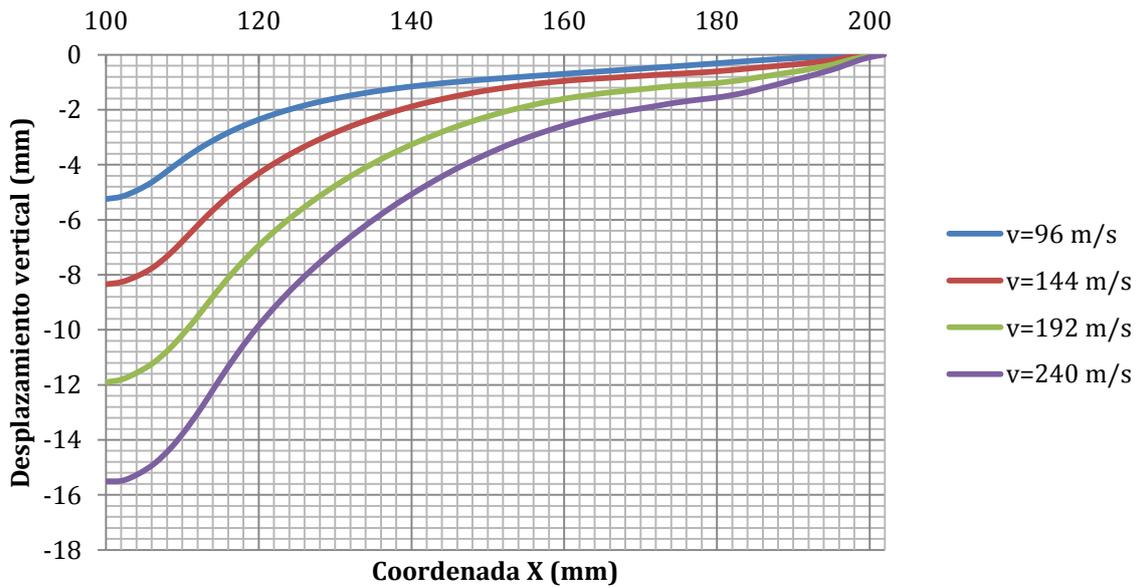
5.2.2 Variación de la velocidad inicial del proyectil.

En esta simulación se pretende hacer una variación en la velocidad inicial del proyectil de hielo, con el objetivo de estudiar su influencia en la placa impactada; además de encontrar el límite balístico para el proyectil empleado en el capítulo de validación. Se considerará una esfera de hielo de 12,7 mm de radio y una placa de Al 2014 T4 de 0,91 mm de espesor para hacer una estimación del desplazamiento máximo en función de la velocidad de impacto.

Las velocidades que se le van a proporcionar al proyectil serán las siguientes:

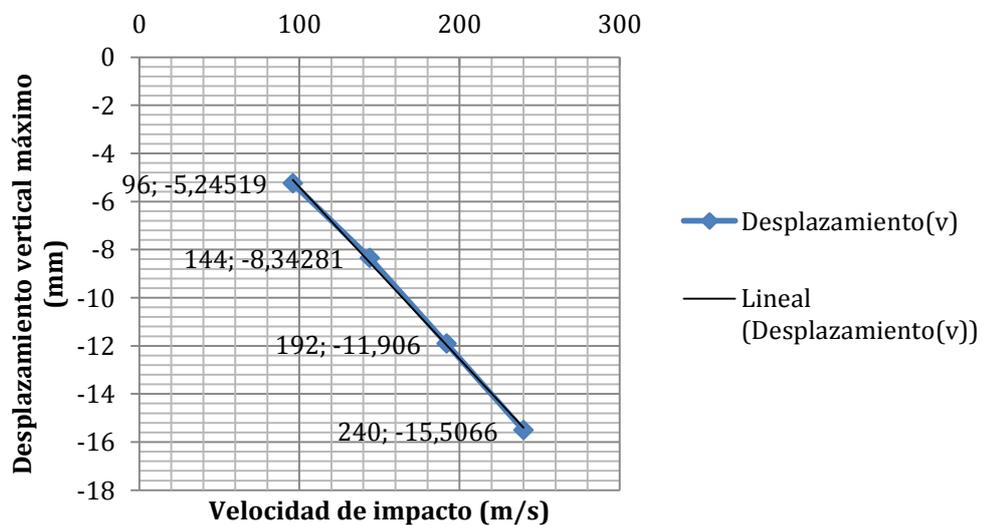
- I. $v_I = 96 \text{ m/s}$
- II. $v_{II} = 144 \text{ m/s}$
- III. $v_{III} = 192 \text{ m/s}$
- IV. $v_{IV} = 240 \text{ m/s}$

En la gráfica siguiente se observa el desplazamiento de cada nodo de la placa (mm), con origen de coordenadas en uno de los lados de la placa, en función de la velocidad de impacto inicial (m/s).



Gráfica 5.8: Perfil de desplazamientos de la placa para las cuatro velocidades simuladas.

Como se puede visualizar, la tendencia de desplazamientos para las cuatro velocidades es idéntica. En la siguiente gráfica se observa la influencia de la velocidad de impacto sobre el desplazamiento máximo de la placa:



Gráfica 5.9: Relación desplazamiento máximo-velocidad de impacto.

Se observa que la relación es lineal, es decir, se podría predecir de manera aproximada cuál sería el desplazamiento máximo que sufrirá una placa de Al 2014 T4 de 0,91 mm de espesor antes de ensayarla numérica y experimentalmente.

5.2.2.1 Límite balístico.

Las condiciones de placa para el estudio son:

- Aleación empleada: 2014 T4.
- Superficie perpendicular a la velocidad de impacto: (200x200 mm²).
- Espesor de placa: 0,91 mm.

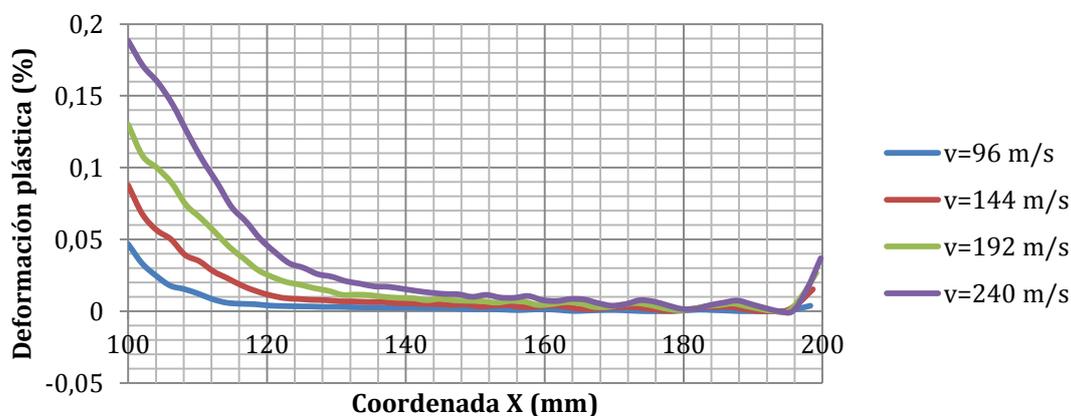
Las condiciones de proyectil son:

- Radio de la esfera de hielo: 12,7 mm.

Empleando estos parámetros se ha observado que el límite balístico es de 240 m/s. Obteniéndose un desplazamiento máximo admisible en la placa en torno a los 15,5 mm. Para velocidades mayores, la placa, además de sufrir deformaciones de carácter permanente, rompe en su parte central.

5.2.2.2 Deformación plástica en la placa.

En este apartado, se pretende observar la influencia de la velocidad del proyectil en la cantidad de superficie de placa que se ve afectada por la deformación plástica. A tal efecto, se ha representado gráficamente la deformación plástica que sufre la placa en función de la coordenada X expresada en mm con origen en uno de los extremos empotrados de la placa. Se debe añadir que la superficie afectada por dicha deformación puede aproximarse a un círculo, tal y como lo demuestra la figura 5.1, en la que se muestra la superficie afectada por la deformación plástica para las cuatro velocidades citadas.



Gráfica 5.10: Deformaciones plásticas en la placa para las cuatro velocidades simuladas.

Como era de esperar, a mayor velocidad de impacto, mayor es la deformación plástica máxima sufrida por la placa. Y mayor es la coordenada a partir de la cual puede considerarse nula la deformación plástica; y, por tanto, su superficie.

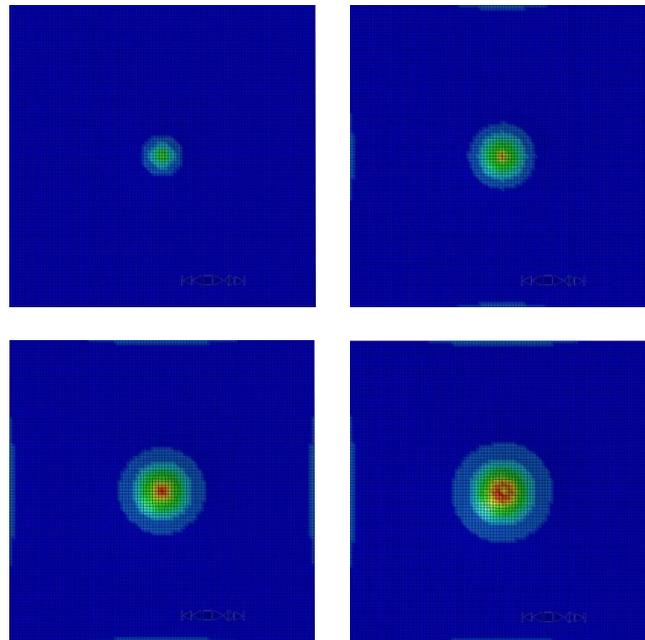
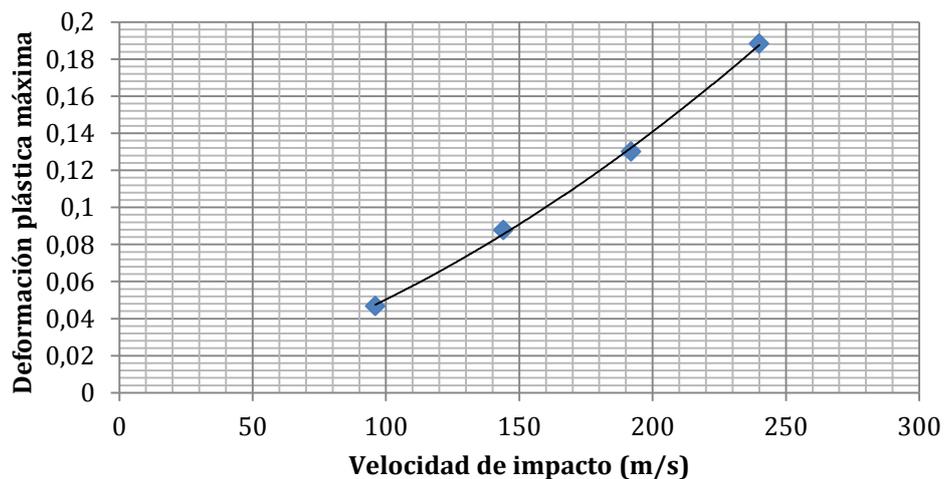


Figura 5.1: Superficie afectada por deformación plástica para las cuatro velocidades.

En la siguiente gráfica se indica la relación entre la velocidad de impacto y la deformación plástica máxima, que puede aproximarse a una relación polinómica de segundo grado.



Gráfica 5.11: Relación deformación plástica máxima-velocidad de impacto del proyectil.

5.2.3 Variación del espesor de la placa.

En esta tercera simulación se introduce una variación en el espesor de la placa impactada, y se tratará de predecir el comportamiento de la misma ante impactos de idéntico proyectil para diferentes velocidades.

Además, se verá la influencia que tiene el espesor de la placa sobre la cantidad de energía cinética que absorbe la misma; y, con ello, cuál será la máxima energía cinética que es capaz de absorber para los diferentes espesores.

5.2.3.1 Espesores empleados.

Como ya se ha dicho, la simulación consiste en analizar el impacto del proyectil en cinco espesores diferentes para las velocidades del apartado anterior. Añadiendo una velocidad adicional, $v_V = 288 \text{ m/s}$, ya que se aumentará el espesor hasta el triple del ensayo empleado en la validación ($t=0,91 \text{ mm}$).

Los espesores son:

- I. $t_I = 0,91 \text{ mm}$
- II. $t_{II} = 1,365 \text{ mm}$
- III. $t_{III} = 1,82 \text{ mm}$
- IV. $t_{IV} = 2,275 \text{ mm}$
- V. $t_V = 2,73 \text{ mm}$

En la simulación empleada en la validación del modelo, se introdujeron cuatro elementos en la placa a lo largo de su espesor.

Para este ensayo de variación de espesor se ha aumentado el número de elementos a lo largo del espesor de manera proporcional, y manteniendo el tamaño de cada uno de ellos constante, teniéndose:

- I. $n_I = 4 \text{ elementos}$
- II. $n_{II} = 6 \text{ elementos}$
- III. $n_{III} = 8 \text{ elementos}$
- IV. $n_{IV} = 10 \text{ elementos}$
- V. $n_V = 12 \text{ elementos}$

El tamaño de cada elemento se muestra esquemáticamente en la siguiente figura:

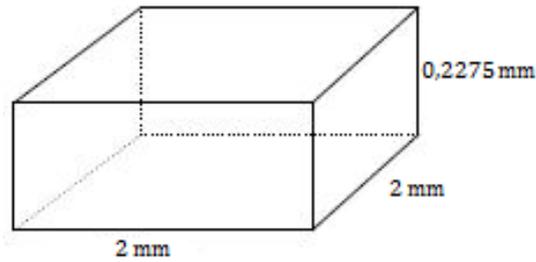
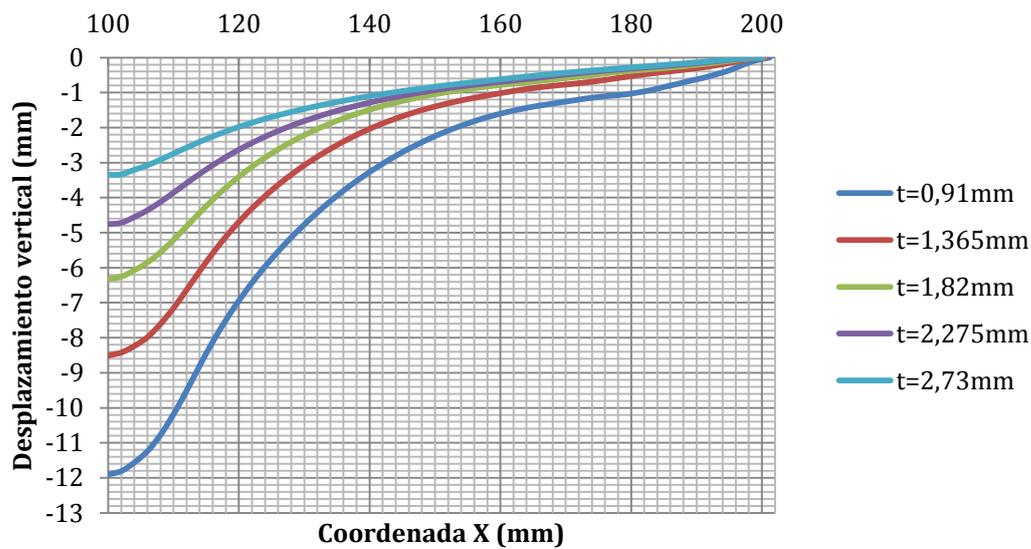


Figura 5.2: Geometría de los elementos Box-Solid.

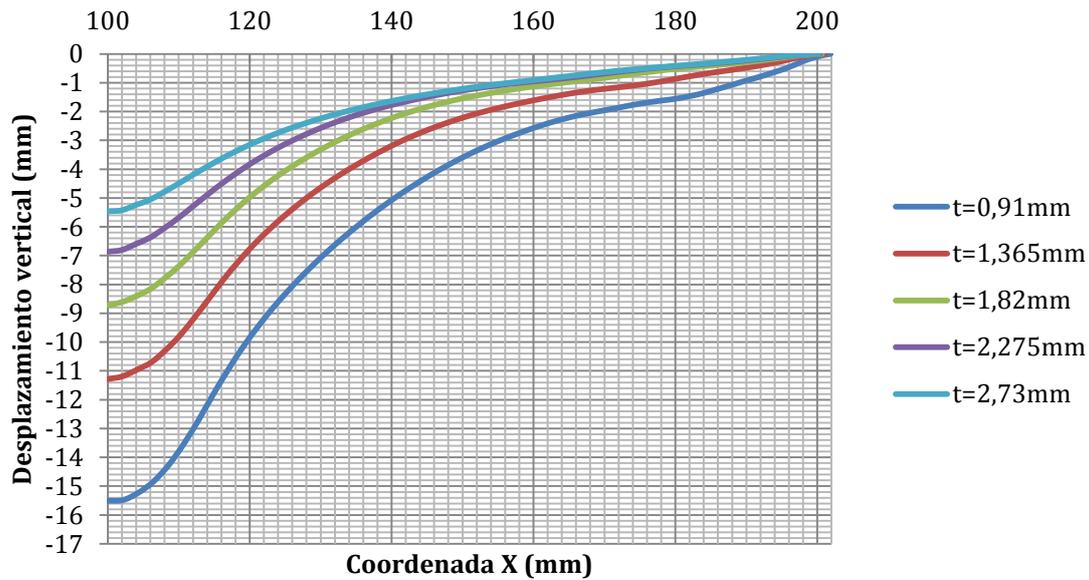
5.2.3.2 Análisis de resultados.

En primer lugar, se va a representar gráficamente el perfil de desplazamientos que sufre la placa para tres velocidades de impacto diferentes. Así se podrá apreciar la influencia que tiene el espesor de la placa sobre el desplazamiento máximo en el centro de la misma. Para una velocidad de impacto $v_I = 192 \text{ m/s}$ se han alcanzado los siguientes desplazamientos:



Gráfica 5.12: Perfil de desplazamientos en la placa para los 5 espesores simulados a 192 m/s.

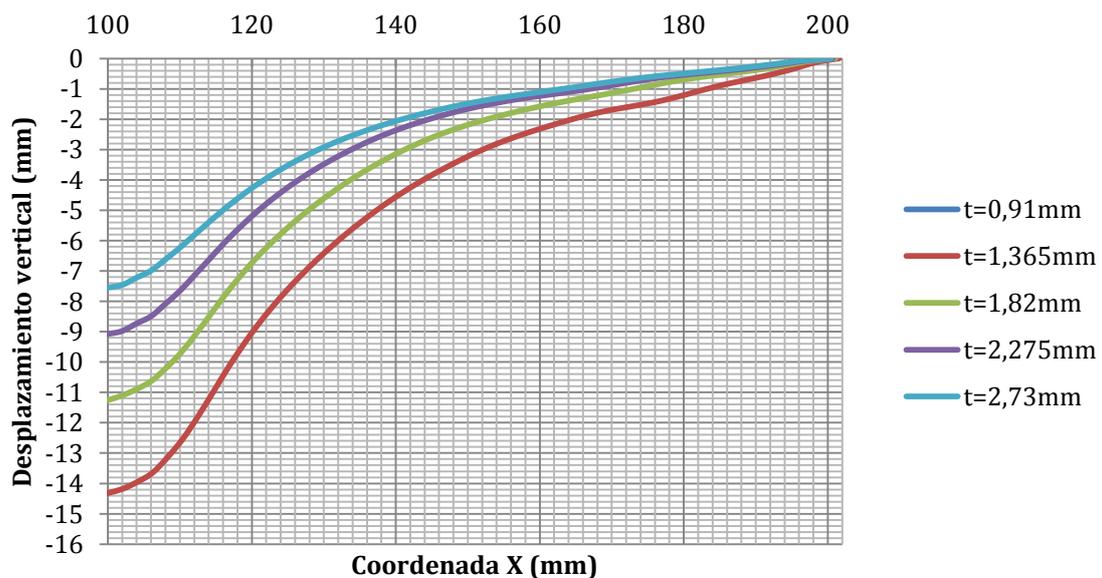
Para una velocidad de impacto $v_{II} = 240 \text{ m/s}$ el perfil de desplazamientos es el siguiente:



Gráfica 5.13: Perfil de desplazamientos en la placa para los 5 espesores simulados a 240 m/s.

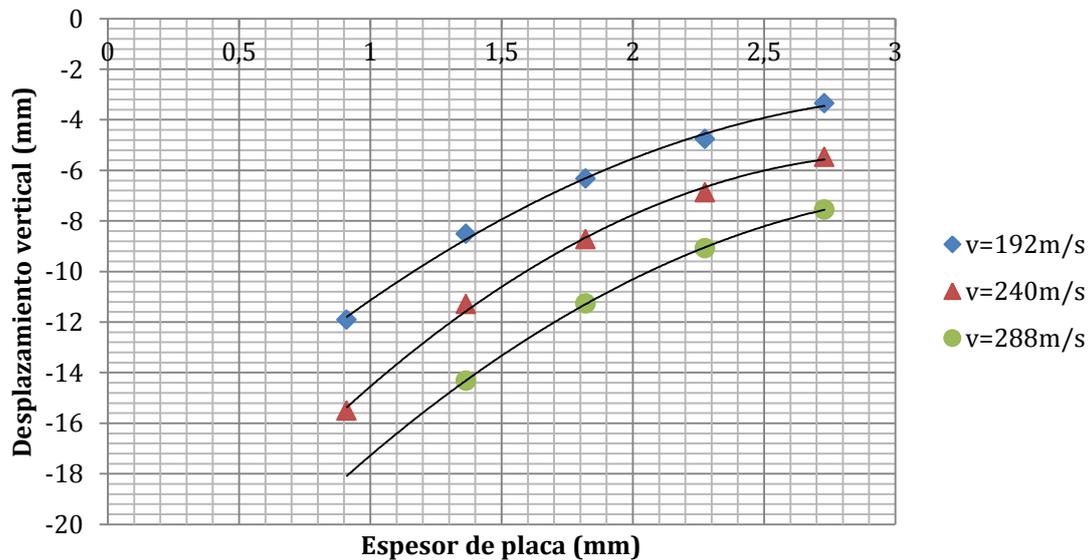
Por último, para la máxima velocidad de esta simulación $v_{III} = 288 \text{ m/s}$ se han obtenido solamente cuatro perfiles de desplazamientos, ya que para el espesor inicial de 0,91 mm el límite balístico es de 240 m/s (como se dijo con anterioridad en este mismo capítulo). Es decir, la placa rompe para una velocidad de impacto de 288 m/s y espesor 0,91 mm.

Los desplazamientos obtenidos en esta simulación son:



Gráfica 5.14: Perfil de desplazamientos en la placa para los 5 espesores simulados a 288 m/s.

Destacar que en todas las simulaciones se observa una tendencia en los desplazamientos muy próxima una de otra. Como se expuso en la simulación de la variación de la velocidad, la relación desplazamiento máximo-velocidad de impacto, es lineal. En la siguiente gráfica su muestran los desplazamientos para las tres velocidades diferentes de impacto, en función del espesor empleado en el modelo.

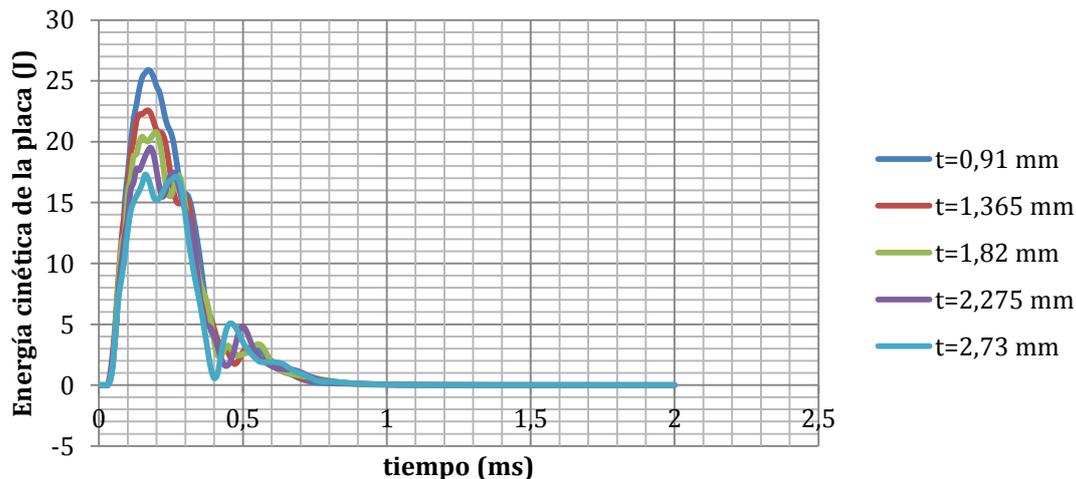


Gráfica 5.15: Relación desplazamiento máximo-espesor de placa para las 3 velocidades de impacto.

La línea de tendencia es una ecuación polinómica de segundo grado para los tres casos, que se ajusta fielmente a los resultados para las tres velocidades de impacto y los cinco espesores de placa. Sin embargo, si se tomaran los desplazamientos obtenidos como positivos, la línea de tendencia se asemejaría a una función del tipo $f(x) = 1/x$, hecho que tiene gran sentido desde un punto de vista físico. Es por esto, que se puede predecir cual serán los resultados de desplazamientos en una placa para una velocidad inicial, y un espesor de placa determinados. Además, se puede predecir el límite balístico del ensayo en concreto, sabiendo que el desplazamiento máximo admisible en la placa está en torno a los 15,506 mm; como ya se explicó en el apartado anterior referente al límite balístico.

Además del estudio del desplazamiento, se pretende observar con este experimento de qué manera absorbe energía la placa en función del espesor. Para tal fin, se ha empleado únicamente la velocidad de proyectil de 192 m/s.

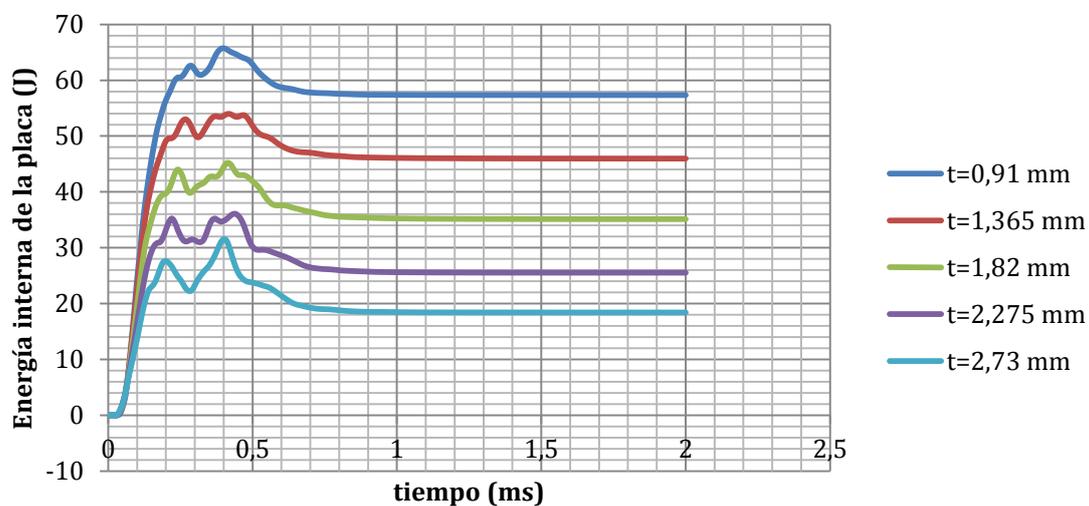
La siguiente gráfica muestra la energía cinética de la placa en función del tiempo, observándose que alcanza un máximo para un mismo instante independientemente del espesor de placa utilizado.



Gráfica 5.16: Evolución temporal de la energía cinética de la placa.

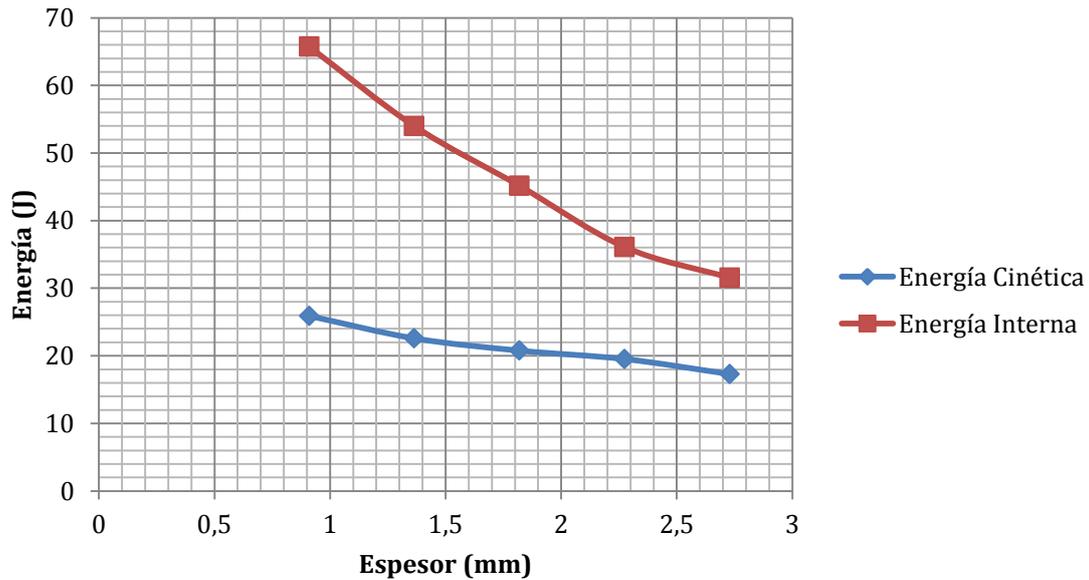
Como es de esperar, cuanto mayor es el espesor menor es la energía cinética alcanzada por la placa en su valor máximo, ya que este incremento le aporta rigidez.

Para poder ver la cantidad de energía que es capaz de absorber la placa se han extraído los datos de energía interna de la misma como función del tiempo de igual modo:



Gráfica 5.17: Evolución temporal de la energía interna de la placa.

Para poder extraer alguna conclusión se ha decidido representar gráficamente los máximos valores de energía, tanto cinética como interna, en función del espesor de placa utilizado, obteniéndose:



Gráfica 5.18: Energías cinética e interna de la placa máximas como función del espesor.

Como se puede observar en las gráficas anteriores, cuanto mayor es el espesor de la placa de aluminio, menor es la energía interna de la placa y menor es el pico de energía cinética que alcanza.

En todo caso la energía interna de la placa es mayor que la cinética por lo que el mecanismo principal de absorción de energía de la placa es mediante deformación tal y como sugiere el mayor valor de energía interna. Esta diferencia es mayor cuanto menor es el espesor, esto puede ser debido a que en espesores pequeños mayor área de la placa se ve deformada. A medida que el espesor aumenta la deformación se localiza y por lo tanto el balance de energías (EI/EC) se hace menor.

5.2.4 Variación de la masa del proyectil.

En esta simulación se pretende estudiar la influencia que tiene sobre la placa una variación en la masa del proyectil empleado, utilizando una superficie de contacto placa-proyectil idéntica a la simulación de validación. Además, el resto de parámetros y condiciones se mantienen constantes.

5.2.4.1 Geometría del proyectil.

Para poder realizar esta simulación con una misma superficie de contacto, se ha decidido modificar la geometría del proyectil. En el capítulo de validación del

Capítulo 5

Simulaciones de impacto de hielo

modelo, la geometría del proyectil consiste en una esfera de 12,7 mm de radio, es decir, el proyectil tiene una masa de:

$$m = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 7,2588 \cdot 10^{-3} kg$$

Si esa es la masa del proyectil y se decide sustituir la mitad de la esfera por un cilindro de igual radio con una cierta altura, se puede conseguir un proyectil de igual masa y superficie de contacto, pero distinta geometría. Se podrá ir aumentando la altura de dicho cilindro con el objetivo de ver la influencia que tiene el aumento en la masa del proyectil sobre el comportamiento de la placa.

Gráficamente, se puede apreciar la modificación explicada en la siguiente figura:

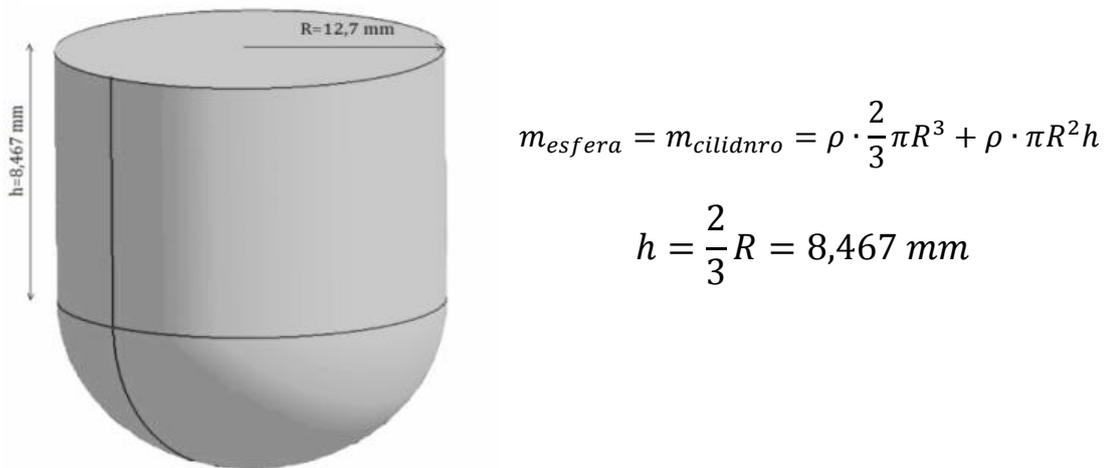
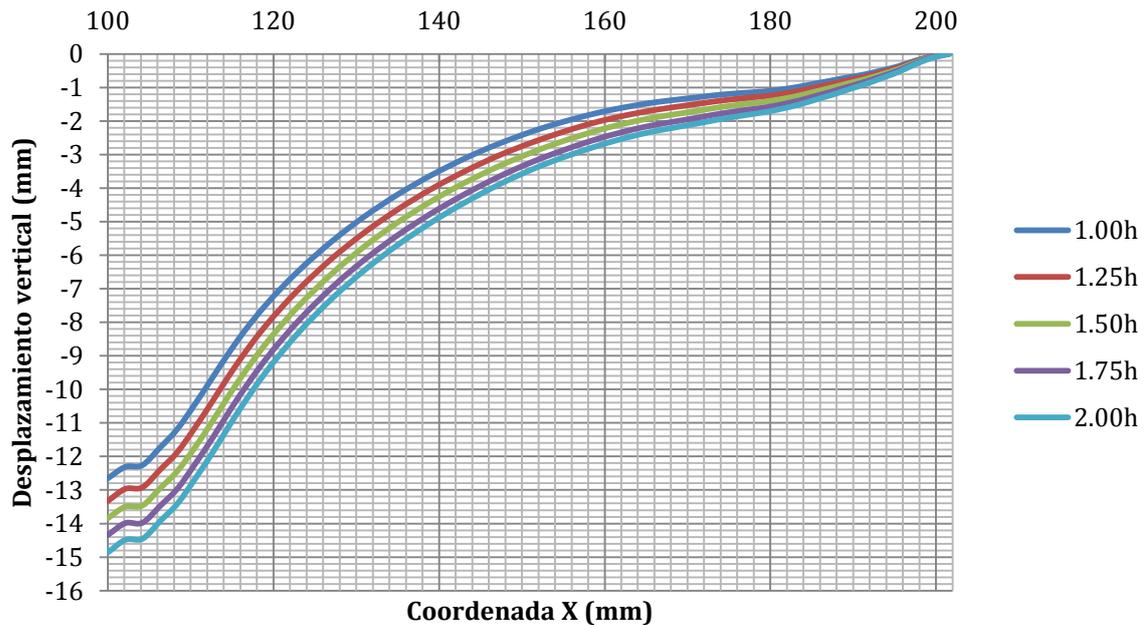


Figura 5.3: Geometría de proyectil hemisférico empleado para la variación en la masa.

Una vez obtenida la geometría adecuada, se ha transformado la altura equivalente calculada; dando lugar a cinco simulaciones con las siguientes alturas y sus respectivas masas correspondientes:

- I. $h_I = 8,467 \text{ mm} \rightarrow m_I = 7,2588 \cdot 10^{-3} kg$
- II. $h_{II} = 10,583 \text{ mm} \rightarrow m_{II} = 8,1662 \cdot 10^{-3} kg$
- III. $h_{III} = 12,7 \text{ mm} \rightarrow m_{III} = 9,0736 \cdot 10^{-3} kg$
- IV. $h_{IV} = 14,817 \text{ mm} \rightarrow m_{IV} = 9,9809 \cdot 10^{-3} kg$
- V. $h_V = 16,933 \text{ mm} \rightarrow m_V = 1,0888 \cdot 10^{-2} kg$

Con estos valores se han obtenido los resultados de desplazamiento de placa, que se presentan en la siguiente gráfica:



Gráfica 5.19: Perfil de desplazamientos para 5 masas diferentes del proyectil.

Como se puede observar en la gráfica, existe una discontinuidad en la pendiente en el nodo correspondiente a la coordenada ($X=102$ mm). Esto es debido a la manera en la que el software LS DYNA ha mallado el proyectil.

Hasta el momento se ha utilizado un mallado de tal forma que a la preforma Lagrangiana de tipo SHELL se le rellenaba con un cierto número de partículas SPH que permanecían equidistantes, de forma que las partículas formaban una red uniforme en cada estrato según la coordenada Z.

Para poder realizar el cambio en la geometría, los pasos a seguir para poder definirla han sido diferentes. En primer lugar, se han creado el cilindro y la esfera por separado, cortándolos por el plano paralelo que ambos tienen en común y asociando los nodos del cilindro a los de la esfera de forma que software considere el sólido como uno solo.

Una vez hecho esto, a cada elemento del mallado Lagrangiano se le ha asociado una partícula SPH. LS DYNA crea los sólidos de forma radial por lo que las partículas se distribuyen en este nuevo modelo de igual forma. De este modo, se ha sustituido un modelo, en el que las partículas estaban equidistantes unas de otras y formaban un sólido uniforme, por otro modelo en el que las partículas están alojadas de forma radial.

Hecho que puede dar lugar a pensar que el modelo nuevo no es válido, ya que se podría pensar que no hay homogeneidad de densidad en el sólido; puesto que en

ciertos planos existen muchas más partículas que en otros. El software corrige esta desviación asociando a cada partícula una densidad diferente, de forma que pueda considerarse uniforme el sólido y el modelo en cuestión pueda darse como válido.

Por todo lo expuesto, se puede asegurar que la discontinuidad en la pendiente para la coordenada ($X=102$ mm), no está asociada a una mayor o menor densidad del sólido (modelo no válido), sino a la interacción partícula-placa que sucede en el momento del contacto entre el proyectil y la placa.

En el nodo correspondiente a la coordenada ($X=102$ mm), existe un plano del proyectil en el que no hay partículas SPH, y es por esto que no existe un desplazamiento continuo.

En la siguiente figura se puede observar el alzado y la planta del proyectil para observar gráficamente todo lo expuesto con anterioridad.

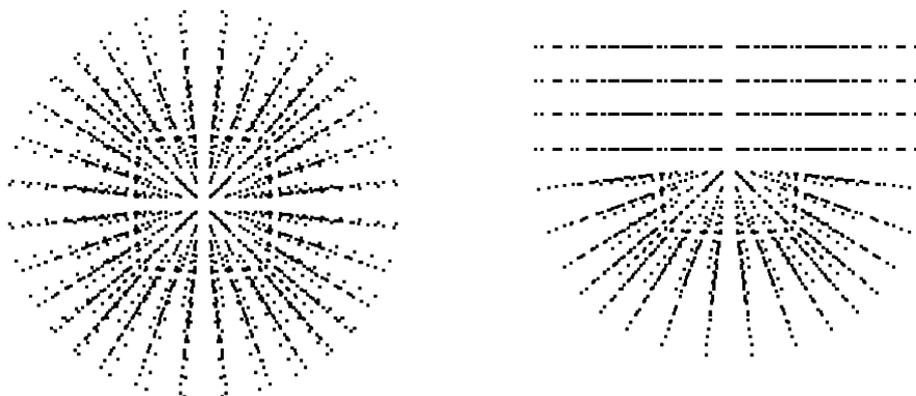
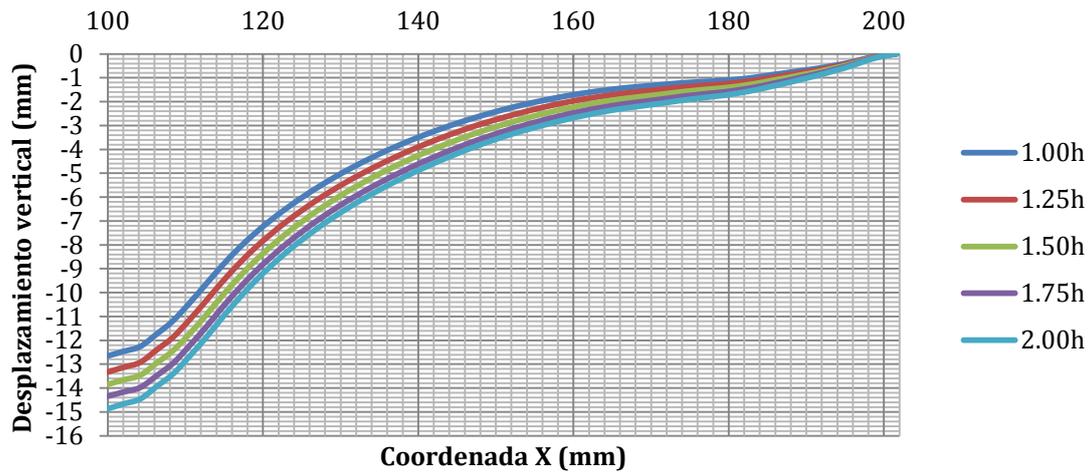


Figura 5.4: Proyectil hemisférico de partículas SPH empleado para la variación en la masa.

5.2.4.2 Validación y análisis de resultados.

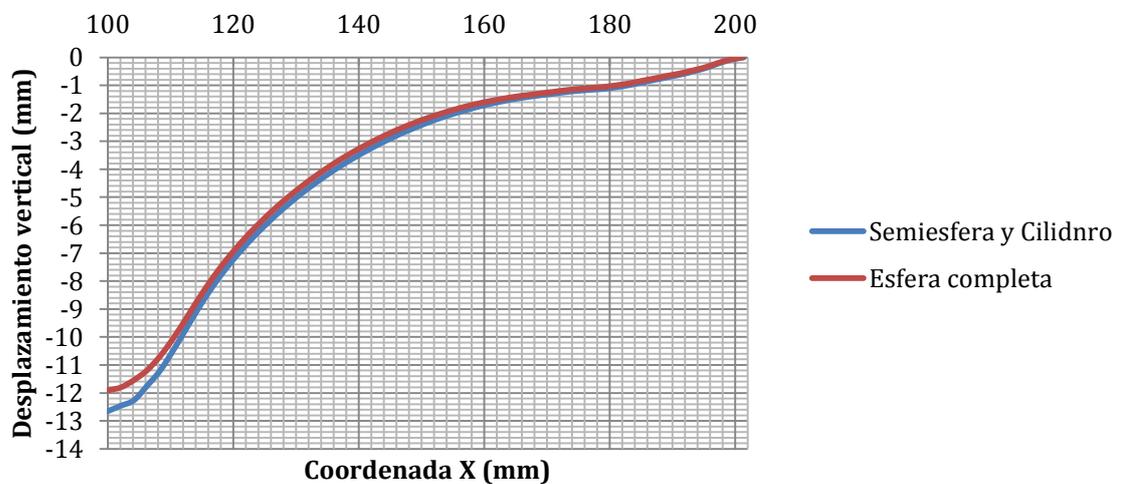
Desde un punto de vista práctico, puede predecirse el comportamiento del nodo correspondiente a la coordenada ($X=102$ mm) como una media entre el nodo central y el nodo correspondiente a la coordenada ($X=104$ mm). El objetivo es dar mayor probabilidad de acierto en la simulación con respecto a lo que sucedería experimentalmente; dando por buena la siguiente gráfica de desplazamientos como función de la coordenada X con origen de coordenadas en uno de los extremos de la placa:



Gráfica 5.20: Perfil de desplazamientos corregido para 5 masas diferentes del proyectil.

Es de esperar que el resultado obtenido para el proyectil con idénticas condiciones de masa, velocidad y superficie de contacto sea el mismo.

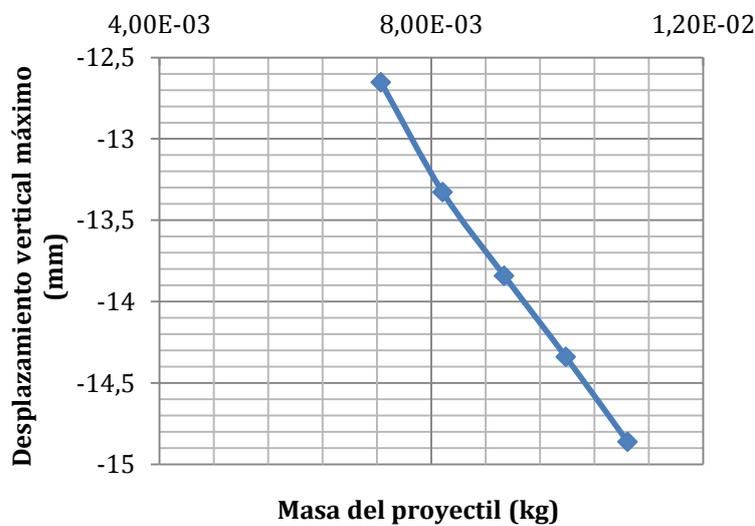
En la siguiente gráfica se observa la diferencia de resultados en la simulación del proyectil esférico y el proyectil de nueva geometría:



Gráfica 5.21: Perfil de desplazamientos para proyectil esférico y hemisférico de igual masa.

Como era de esperar, los resultados son prácticamente idénticos, obteniéndose un desplazamiento ligeramente mayor en el proyectil de nueva geometría; que no es lo suficientemente significativo como para desechar el modelo.

Haciendo uso de nuevo de la gráfica 5.19, se extrae la relación desplazamiento máximo-masa siguiente:



Gráfica 5.22: Relación desplazamiento máximo-masa de proyectil.

Como puede observarse, la relación desplazamiento máximo-masa resulta ser lineal, pudiéndose hacer estimaciones futuras sin necesidad de realizar nuevas simulaciones numéricas.

5.2.5 Energía cinética del proyectil constante.

Para esta última simulación se ha decidido mantener constante la energía cinética del proyectil de hielo; alterando dos parámetros de impacto de forma que esto sea posible.

Dada la ecuación de la energía cinética $E_k = \frac{1}{2} \cdot mv^2$, esta simulación pretende estudiar el comportamiento del impacto al introducir un cambio en la velocidad y masa del proyectil; y, por consiguiente, en su volumen y superficie de contacto.

Según lo estipulado en el capítulo de validación, en el que la velocidad inicial de la esfera era $v = 192 \text{ m/s}$, y el radio $R = 12,7 \text{ mm}$, se obtiene el siguiente valor de la energía cinética.

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \frac{4}{3} \pi R^3 v^2 = 133,7942 \text{ kg}(m/s)^2$$

Manteniendo este valor como constante, se ha decidido realizar cinco simulaciones diferentes. Sus parámetros de velocidad y radio de esfera se reflejan en la siguiente tabla:

Velocidad (m/s)	Radio (mm)
96	20,16
144	15,38
192	12,7
240	10,94
288	9,69

Tabla 5.3: Velocidad y masa con igualdad de energía cinética de proyectil E_{k1} .

Estas son las mismas velocidades utilizadas dentro de este capítulo para la simulación correspondiente a la variación de la velocidad.

5.2.5.1 Análisis del perfil de desplazamientos.

Una vez descrito el ensayo físicamente, es importante aclarar la naturaleza del modelo empleado en el software. Como se explicó en el capítulo correspondiente a la validación del modelo, la esfera de hielo consta de 3359 partículas SPH.

Esto se ha mantenido constante para los otros cuatro ensayos; es decir, la distancia entre una partícula y la anterior será mayor o menor dependiendo del radio de la esfera. Además, el software asociará a cada partícula mayor o menor masa en función de la distancia entre partículas. En la siguiente figura se representa gráficamente la diferencia entre todos los proyectiles empleados en el ensayo.

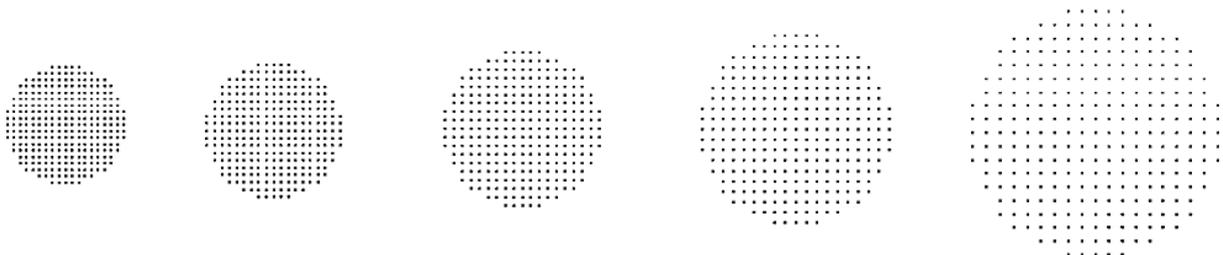
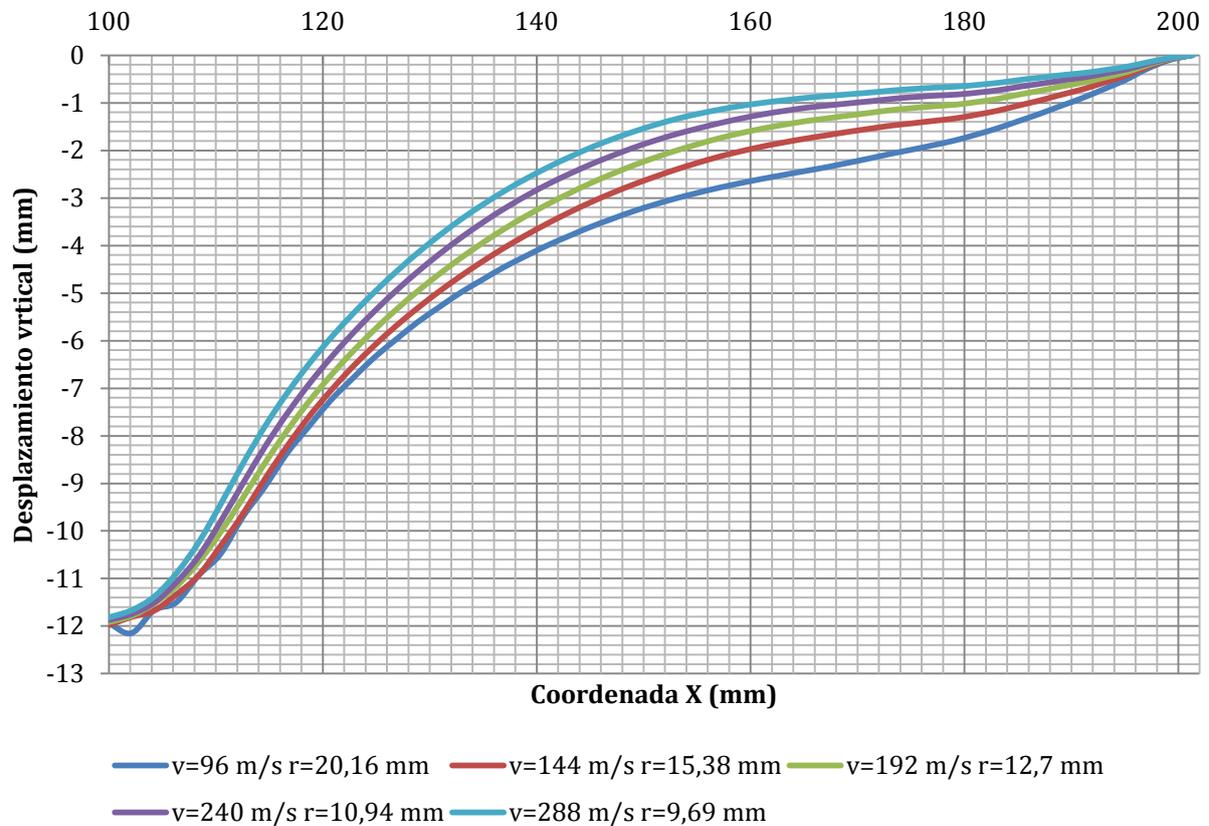


Figura 5.5: Representación gráfica de los 5 proyectiles del ensayo $E_k = cte$.

Capítulo 5

Simulaciones de impacto de hielo

Una vez aclarada la naturaleza de las partículas de los proyectiles, se puede abordar el estudio de la simulación. En la siguiente gráfica se representa el perfil de desplazamientos de la placa en función de la habitual coordenada X (mm):



Gráfica 5.23: Perfil de desplazamientos ensayo $E_{k1} = cte.$

Como se puede observar en la gráfica, el desplazamiento máximo obtenido en los ensayos puede considerarse idéntico a efectos prácticos para todos ellos. Es decir, se puede asumir que para una cierta velocidad cinética se obtiene una diferencia ínfima entre los valores de desplazamiento máximo en el centro de la placa.

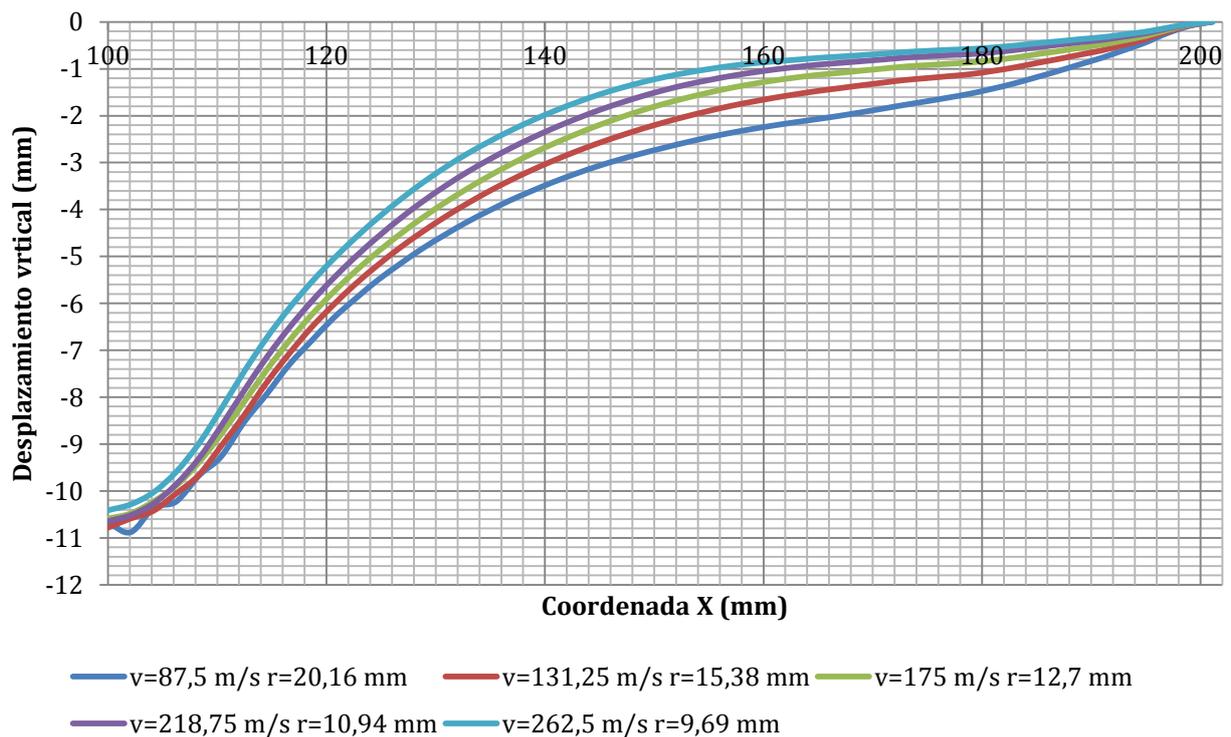
Sin embargo, existe una notable diferencia en la tendencia en los nodos situados entre el centro y el extremo de la placa, cuanto menor es el diámetro del proyectil, la deformación se presenta de forma más local, obteniéndose menores desplazamientos en los citados nodos.

Para poder asegurar la afirmación de que a cada energía cinética le corresponde un único desplazamiento máximo, se han ensayado los cinco proyectiles de idénticos radios, en otras dos energías cinéticas menores a esta. Los parámetros del impacto se reflejan en las siguientes tablas:

$E_k(J)$	$R(mm)$	$v(m/s)$
111,15	20,16	87,5
	15,38	131,25
	12,7	175
	10,94	218,75
	9,69	262,5
81,6615	20,16	75
	15,38	112,5
	12,7	150
	10,94	187,5
	9,69	225

Tabla 5.4: Velocidad y masa con igualdad de energía cinética de proyectil E_{k2}, E_{k3} .

En la siguiente gráfica se representa el perfil de desplazamientos de la placa (mm) en función de la coordenada X (mm) para $E_{k2}(J) = 111,15$.



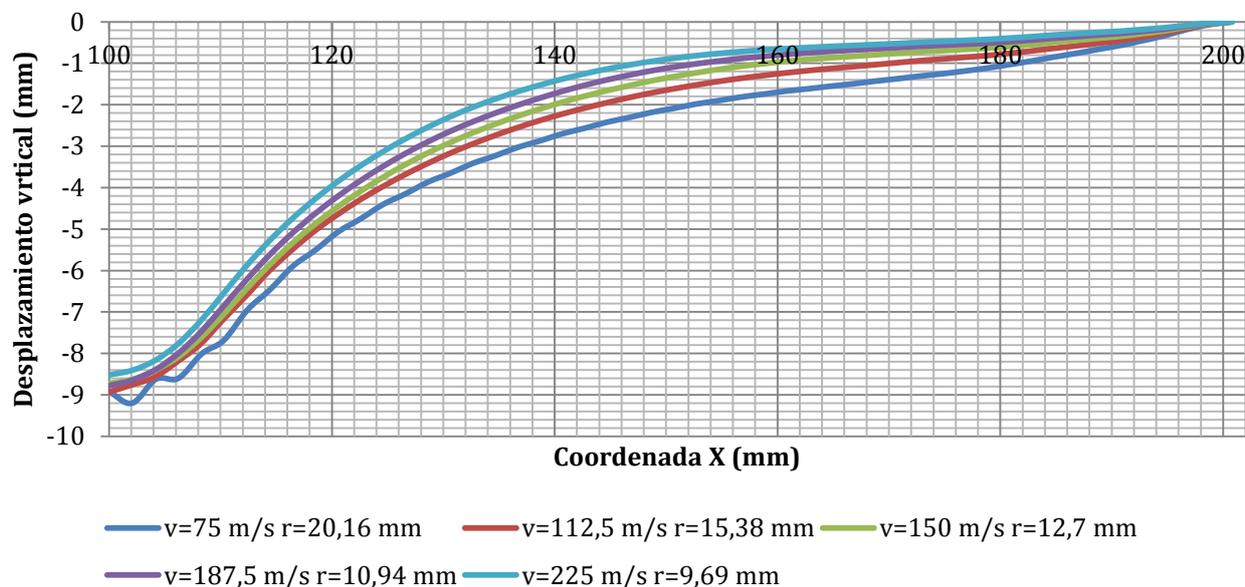
Gráfica 5.24: Perfil de desplazamientos ensayo $E_{k2} = cte$.

Capítulo 5

Simulaciones de impacto de hielo

Efectivamente sucede algo parecido al perfil de desplazamientos en la simulación para $E_{k1}(J) = 133,7942$. Como era de esperar, el desplazamiento máximo es menor, pero el intervalo de valores de desplazamiento sigue estando acotado.

Por último, el perfil de desplazamientos para la tercera velocidad cinética $E_{k3}(J) = 81,6615$ es:



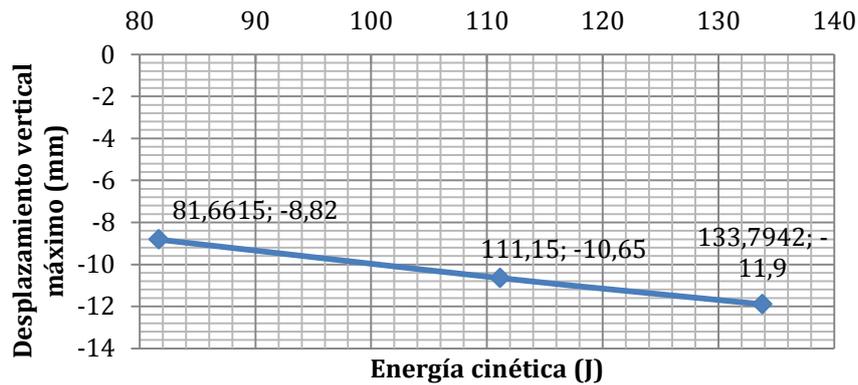
Gráfica 5.25: Perfil de desplazamientos ensayo $E_{k3} = cte$.

Como lo demuestran las gráficas 5.22, 5.23 y 5.24 se puede concluir, a la vista de los resultados, que una cierta energía cinética arroja un determinado desplazamiento máximo en el centro de la placa; teniéndose los siguientes valores aproximados:

$E_k(J)$	$\delta_{m\acute{a}x}(mm)$
133,7942	-11,9
111,15	-10,65
81,6615	-8,82

Tabla 5.5: Energías y desplazamientos máximos asociados.

En la siguiente gráfica se refleja la linealidad de los resultados obtenidos, representando el desplazamiento máximo de la placa en su nodo central (mm) como función de la energía cinética inicial del proyectil (J):



Gráfica 5.26: Relación desplazamiento máximo-energía cinética proyectil.

Como se puede observar, la linealidad en los resultados es absoluta. Hecho que provoca la facilidad en el pronóstico de un desplazamiento máximo como función de la energía cinética del proyectil empleado, lo que podría dar lugar a pensar que para cierta energía cinética existe un desplazamiento máximo.

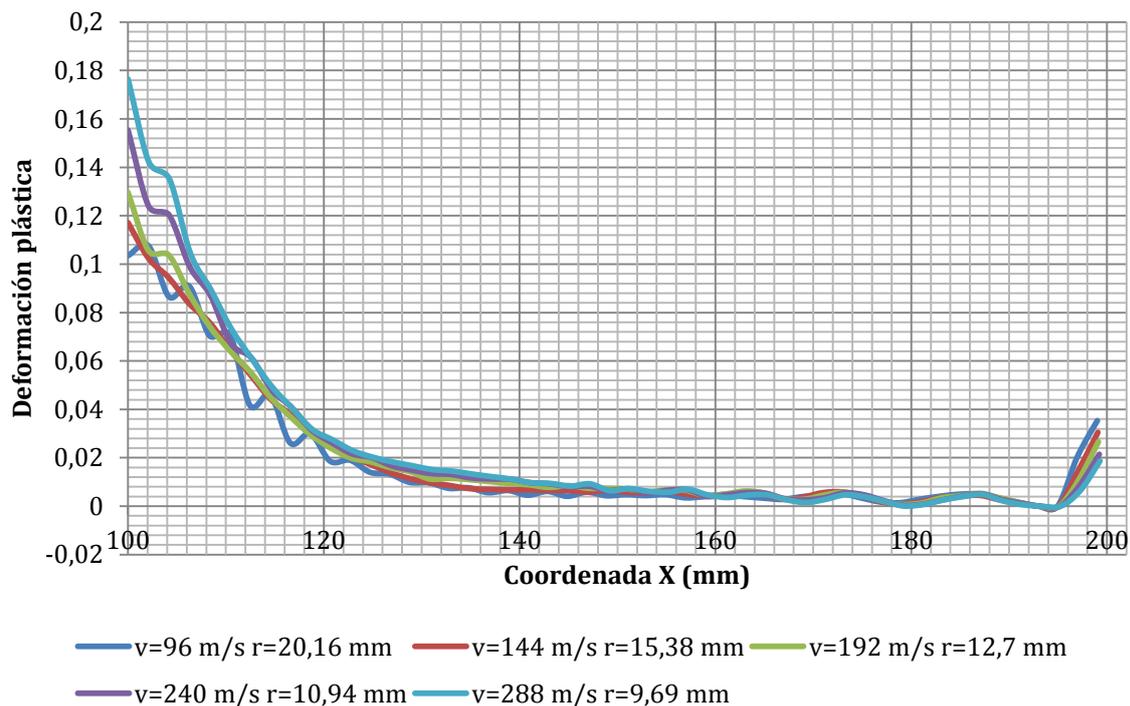
Es remarcable poder afirmar que el perfil de desplazamientos obtenido en todas las simulaciones para la esfera de radio 20,16 mm tiene una curva irregular. En todos ellos se puede apreciar una discontinuidad en la curva del perfil en la zona central de la placa.

Esto es debido al modelo empleado para el ensayo, como se ha explicado dentro de este mismo apartado, donde el proyectil consta de 3359 partículas SPH independientemente del radio de la esfera. Esto implica que una de las partículas del proyectil de mayor tamaño tenga una masa asociada mayor que la masa de esa misma partícula en un proyectil de menor radio.

Esto provoca una interacción en el contacto partícula-placa irregular para la esfera de mayor tamaño; dando lugar al perfil de desplazamientos discontinuo para esa geometría.

Al margen del dato de máximo desplazamiento en el centro de la placa, en las tres gráficas se observa una tendencia en el perfil de desplazamientos distinta para cada geometría y velocidad, hecho que no había sucedido hasta ahora de forma significativa en ninguno de los ensayos realizados en este capítulo.

Esto se debe a la diferencia en la superficie de contacto entre la esfera y la placa. Como se puede apreciar en las gráficas 5.22, 5.23 y 5.24 cuanto mayor es la superficie de contacto, mayores son los desplazamientos de los nodos situados entre el centro y uno de los extremos de la placa. En la siguiente gráfica, se representa la deformación plástica de la placa como función de la coordenada X (mm) para la primera energía cinética E_{k1} .



Gráfica 5.27: Deformación plástica para $E_{k1} = cte$.

Al existir una diferencia notable en el perfil de desplazamientos en los nodos situados entre el centro y el extremo de la placa, era de esperar ver reflejado en la gráfica anterior una diferencia notable en la deformación plástica en los mismos nodos, hecho que no se constata.

En el nodo central existe una deformación plástica que es mayor cuanto mayor es la velocidad del proyectil y menor el radio de la esfera. Sin embargo, a partir de la coordenada ($X=140$ mm) puede considerarse uniforme para cualquier geometría y velocidad de proyectil.

De nuevo aparece un perfil de deformaciones no uniforme para un proyectil de geometría de radio 20,16 mm. Esto es debido a la masa de cada partícula SPH que entra en contacto con la superficie de la placa impactada.

Capítulo 6

6. Conclusiones y trabajos futuros.

6.1 Introducción.

Para el desarrollo del proyecto, se han seguido una serie de pasos y se han realizado una serie de tareas:

- Creación de un modelo numérico capaz de aproximar lo máximo posible su comportamiento al ensayo experimental.
- Validación de un modelo que asemeje dicho comportamiento.
- Variación de parámetros de impacto en la simulación.

De estas tareas se han extraído unos resultados y conclusiones que se reflejan a continuación.

6.2 Conclusiones.

Del **Capítulo 2**, en el que se hace referencia a los materiales empleados, se extrae que:

- **El hielo debe considerarse un material isótropo en la simulación.**
- **El tipo de material a introducir en la tarjeta del material dentro del software es elástico o elastoplástico, aplicando sus criterios de fallo, ya que reproduce correctamente las cargas de impacto.**

Del **Capítulo 3**, en el que se hace referencia al Método de los Elementos Finitos, se concluye que:

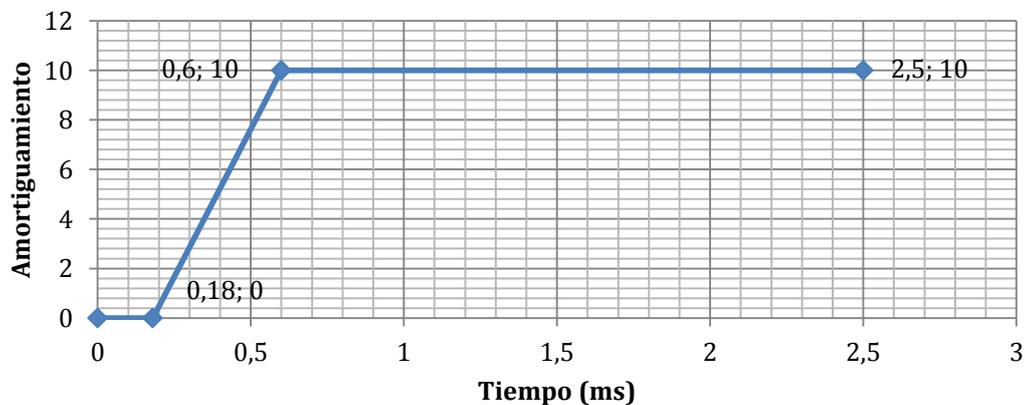
- **Los métodos más adecuados para reproducir el comportamiento de hielo en altas velocidades de deformación son: Lagrangiano y SPH.**
- **Los elementos capaces de asemejarse a la geometría de placa impactada son: Shell y Box-Solid.**

Del **Capítulo 4**, validación del modelo empleado, se han obtenido las siguientes conclusiones:

- **El método que se ajusta con mayor fidelidad a los resultados experimentales obtenidos en [4], y que mejor se adecúa al**

comportamiento del hielo en el impacto, para altas velocidades de deformación es el método SPH.

- El elemento que más adecuado para estudiar el aluminio impactado en profundidad debe ser tridimensional: Box-Solid.
- Se debe hacer uso de la tarjeta “Damping” con el objetivo de arrojar resultados precisos, y ahorrar en tiempos de simulación y almacenamiento de información.
- La curva a introducir en la tarjeta “Damping” debe ser de tipo escalón, con los siguientes valores tiempo de introducción y de tamaño de escalón.



Del **Capítulo 5**, en el que se ha realizado la variación de varios parámetros de impacto, se concluye que:

- El uso en la tarjeta del material de la constante C, que hace referencia a la sensibilidad a la velocidad de deformación, no es significativo en el modelo para los aluminios.
- Los desplazamientos máximos en la placa son función lineal del límite elástico del material, para una velocidad de proyectil y espesor de placa concretos.
- El desplazamiento máximo obtenido en la placa es función lineal de la velocidad con la que el proyectil impacta sobre la misma, para una determinada masa de proyectil.
- El límite balístico del aluminio 2014 T4 de una placa de 0,91 mm de espesor es 240 m/s, empleando un proyectil de diámetro 25 mm.

- **La relación espesor de placa-desplazamiento máximo sigue una función cuadrática, pudiéndose conocer los límites balísticos de diferentes espesores de aluminio para un proyectil de 25 mm de diámetro.**
- **El desplazamiento máximo de la placa es función lineal de la masa del proyectil empleada, para una determinada superficie de contacto.**
- **El desplazamiento máximo sufrido por la placa es idéntico para un proyectil de cierta masa con idéntica superficie de contacto, independientemente de la forma que el proyectil tenga.**
- **Para una determinada energía cinética de proyectil se obtiene un desplazamiento máximo único.**

6.3 Trabajos futuros.

En vista de los resultados obtenidos en la simulación y las conclusiones extraídas a tal efecto, se propone realizar los siguientes trabajos futuros sobre el impacto de hielo:

- Realización de ensayos experimentales que corroboren los resultados de la simulación en el apartado de energía cinética de proyectil constante.
- Realización de simulaciones numéricas en condiciones no simétricas en la geometría del impacto.
- Realización de simulaciones numéricas en las que se varíe el ángulo de incidencia del proyectil sobre la placa.
- Realización de simulaciones empleando otros materiales empleados en la fabricación de una aeronave, así como variaciones en la geometría de las mismas de forma que se adecúe tal simulación a lo que sucede en la realidad de estas aeronaves.
- Realización de simulaciones en las que se altere la geometría del aluminio impactado y que se adecúen en mayor grado a situaciones reales, por ejemplo estudiar el impacto sobre un álabe de turbina de aluminio, o sobre la base estructural del ala.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

- Estudio experimental del límite balístico haciendo uso referencial del documento, con el objetivo de obtener posibles tablas para determinados espesores de aluminio, masas de esfera y aleación correspondiente.

Bibliografía

Lista de referencias

- [1] J.Nadreau Yield and failure envelope for ice under multiaxial compressive stresses. *Cold Regions Science and Technology*, 13(1): 75-82, Oct.1986.
- [2] H. Kim and K.T. Kedward. AIAA-99-1366 Experimental and numerical analysis correlation of hail ice impacting composite structures. *Composite structures*, 68(1):1-11, 1999.
- [3] M.Anghileri, F. Invernizzi and M. Mascheroni. A survey of numerical models for hail impact analysis using explicit finite element codes. *International Journal of Impact Engineering*, 31:929-944, 2005.
- [4] Thomson RG, Hayduk RJ. An improved analytical treatment of the denting of thin sheets by hail. NASA technical note D-6102, Washington, DC, January, 1971, p. 1-36.
- [5] Pernas-Sánchez, J. Análisis y simulación de impactos de hielo sobre laminados carbono/epoxy. 2013.
- [6] D.M. Cole. The microstructure of ice and its influence on mechanical properties. *Engineering Fracture Mechanics*, 68(17-18); 1797-1822, 2001.
- [7] J.J. Petrovic. Mechanical properties of ice and snow. *Journal of Materials Science*, 38:1 – 6, 2003.
- [8] R. L. Hooke and M. Mellor. Mechanical properties of polycrystalline ice and properties for research in ice. *Cold Regions Science and Technology*, 3:263-275, 1980.
- [9] E.Schulson. Brittle failure of ice. *Engineering Fracture Mechanics*, 68(17-18):1839-1887, 2001.
- [10] <http://ingemecanica.com/tutorialsemanal/tutorialn110.html#seccion2>
- [11] http://www.capalex.co.uk/spanish/2014_alloy_sp.html
- [12] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. "El método de los elementos finitos". CIMNE, 1994.
- [13] A three-dimensional parallel adaptive mesh refinement method for fluid structure interaction". Doctoral Thesis / Dissertation, 2009
- [14] Artero Guerrero, J.A. Técnicas empleadas en la modelización numérica de problemas de interacción fluido-estructura". Trabajo tutelado: Máster en Mecánica Estructural Avanzada p. 20-23.

[15] Jeffrey D. Tippmann, Hyonny Kim, Jennifer D. Rymer. Experimentally validated strain rate dependent material model for spherical ice impact simulation. *International Journal of Impact Engineering*, 57 (2013) 43-54.

[16] http://www.lumetalplastic.com/dural_carac_mec.html

[17] <http://www.VarmintAl.com/aengr.htm>

Otra bibliografía y webs empleadas.

Pernas-Sánchez J., Pedroche DA, Varas D., López-Puente J., Zaera R., Numerical modeling of ice behaviour under high velocity impacts. *International Journal of Impact Engineering*, 2012.

Qasim H. Shah and Hasa M. Abid. *From Ls-Prepost to LS-Dyna: An Introduction; LS-Dyna for beginners with 13 step by step solved examples*.

LS- DYNA Keyword User's Manual Volume I. Livermore, California: Livermore Software Technology Corporation, 2012.

LS- DYNA Keyword User's Manual Volume II: Material Models. Livermore, California: Livermore Software Technology Corporation, 2012.

www.dynasupport.com

Apuntes de la asignatura de Ingeniería Industrial "Cálculo de Máquinas". Capítulo 3: Método de los elementos finitos. Universidad Carlos III de Madrid.

Apuntes de la asignatura de Ingeniería Industrial "Mecánica de Sólidos". Capítulo 2: Comportamiento mecánico de los materiales. Universidad Carlos III de Madrid.

Apuntes de la asignatura de Ingeniería Industrial "Mecánica de Sólidos". Capítulo 3: Plasticidad. Universidad Carlos III de Madrid.

Apuntes de la asignatura de Ingeniería Industrial "Mecánica de Sólidos". Capítulo 5: Método de los elementos finitos. Universidad Carlos III de Madrid.

Apuntes de la asignatura de Ingeniería Industrial "Ingeniería Estructural". Capítulo 7: Método de los elementos finitos. Universidad Carlos III de Madrid.

París Carballo F. "Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos.". CIMNE

Anexo

```

$# LS-DYNA Keyword file created by LS-PrePost 4.0 -
28Jan2013(19:00)
$# Created on Apr-30-2014 (00:07:47)
*KEYWORD
*TITLE
$# title
LS-DYNA keyword deck by LS-PrePost
*CONTROL_SPH
$#      ncbs      boxid      dt      idim      memory      form
start      maxv
          1          01.0000E+20          3          150          0
0.0001.0000E+15
$#      cont      deriv      ini      ishow      ierod      icont
iavis
          0          0          0          0          0          0
0
*CONTROL_TERMINATION
$#      endtim      endcyc      dtmin      endeng      endmas
          2.000000          0          0.000          0.000          0.000
*DATABASE_MATSUM
$#      dt      binary      lcur      ioopt
          0.050000          0          0          1
*DATABASE_BINARY_D3PLOT
$#      dt      lcdt      beam      npltc      psetid
          0.010000          0          0          0          0
$#      ioopt
          0
*BOUNDARY_SPC_SET
$#      nsid      cid      dofx      dofy      dofz      dofrx
dofry      dofrz
          6          0          1          1          1          1
1          1
*CONTACT_AUTOMATIC_NODES_TO_SURFACE_ID
$#      cid
title
          2esferaplaca
$#      ssid      msid      sstyp      mstyp      sboxid      mboxid
spr      mpr
          7          7          4          3          0          0
1          1
$#      fs      fd      dc      vc      vdc      penchk
bt      dt
          0.000          0.000          0.000          0.000          0.000          0
0.0001.0000E+20
$#      sfs      sfm      sst      mst      sfst      sfmt
fsf      vsf
          1.000000          1.000000          0.000          0.000          1.000000          1.000000
1.000000          1.000000
$#      soft      sofsc1      lcidab      maxpar      sbopt      depth
bsort      frcfrq
          2          0.100000          0          1.025000          2.000000          2
0          1
*PART
$# title
boxsolid

```

```

$#      pid      secid      mid      eosid      hgid      grav
adpopt      tmid
          7          2          6          0          0          0
0          0
*SECTION_SOLID
$#      secid      elform      aet
          2          1          0
*MAT_SIMPLIFIED_JOHNSON_COOK
$#      mid      ro      e      pr      vp
          6 2.7960E-6 73.084000 0.330000 0.000
$#      a      b      n      c      psfail      sigmax
sigmat      epso
 0.275000 0.250480 0.281568 0.000
0.1891001.0000E+281.0000E+28 0.001000
*PART
$# title
SphNode
$#      pid      secid      mid      eosid      hgid      grav
adpopt      tmid
          11          3          2          0          0          0
0          0
*SECTION_SPH
$#      secid      cslh      hmin      hmax      sphini      death
start
          3 1.200000 0.200000 2.000000 0.0001.0000E+20
0.000
*MAT_ISOTROPIC_ELASTIC_FAILURE
$#      mid      ro      g      sigy      etan      bulk
          2 8.4600E-7 3.460000 0.010300 0.006890 8.990000
$#      epf      prf      rem      trem
 0.350000 -0.172000 0.000 0.000
*INITIAL_VELOCITY_GENERATION
$#nsid/pid      styp      omega      vx      vy      vz
ivatn      icid
          11          2 0.000 0.000 0.000-192.00000
0          0
$#      xc      yc      zc      nx      ny      nz
phase      iridid
 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
0          0
*DEFINE_CURVE
$#      lcid      sidr      sfa      sfo      offa      offo
dattyp
          1          0 1.000000 1.000000 0.000 0.000
0
$#      a1      o1
          0.000 0.000
          0.180000 0.000
          0.600000 10.000000
          3.000000 10.000000
*DAMPING_GLOBAL
$#      lcid      valdmp      stx      sty      stz      srx
sry      srz
          1 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
0.000 0.000

```

