

Modelos de oscilaciones caóticas en superredes semiconductoras a temperatura ambiente

Emanuel Gastón Mompó Pavesi

Tesis depositada en cumplimiento parcial de los requisitos para el
grado de Doctor en
Doctorado en Ingeniería Matemática

Instituto Gregorio Millán Barbany
Departamento de Ciencia e Ingeniería de Materiales
e Ingeniería Química
Universidad Carlos III de Madrid

Director: Luis L. Bonilla

Leganés, diciembre de 2019

Esta tesis se distribuye bajo licencia “Creative Commons **Reconocimiento – No Comercial – Sin Obra Derivada**”.



“A beginning is a very delicate time.” – Princess Irulan (Dune)

Lista de publicaciones

Esta tesis doctoral incluye el trabajo realizado en el siguiente artículo:

- **Mompo, E.**, Ruiz-Garcia, M., Carretero, M., Grahn, H. T., Zhang, Y. and Bonilla, L. L., *Coherence Resonance and Stochastic Resonance in an Excitable Semiconductor Superlattice*, Physical Review Letters, **121**, 086805 (2018)
doi: 10.1103/PhysRevLett.121.086805
Mencionado en Revista Española de Física, 32 (4) (2018)

presente a lo largo del capítulo 3. Esta publicación se realizó junto con [71], cuyos autores brindaron los datos experimentales que se utilizaron para realizar ciertas observaciones y comparativas en partes del capítulo.

También se incluye el siguiente trabajo pendiente de publicación:

- **Mompo, E.**, Ruiz-Garcia, M., Carretero M., and Bonilla, L. L., *Hyperchaos and Intermittency in Modified Semiconductor Superlattices*

que se presenta en los capítulos 4 y 5.

Emanuel Gastón Mompó Pavesi
Leganés, diciembre de 2019

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director, el Profesor Luis Bonilla, por haberme invitado a participar en una de sus líneas de investigación, por su paciencia, y por su ayuda en estos primeros pasos en el mundo académico. También agradecerle por confiarme una beca de Formación de Personal Investigador del Ministerio de Economía y Competitividad de España, sin la cual no podría haberle dedicado el tiempo necesario al trabajo que conduce a esta tesis doctoral.

Agradezco a los Profesores Holger T. Grahn, Manuel Carretero, Yaohui Zhang, y al Doctor Miguel Ruiz García por la fructífera colaboración en trabajos de investigación.

Deseo agradecer al Profesor Russell E. Caflisch por su hospitalidad durante una estancia en el Courant Institute of Mathematical Sciences de la New York University.

También agradecer a quienes son y fueron mis compañeros en el grupo de investigación: Alberto Vara, Andrés Segura, Antonio Lasanta, Aurora Torrente, Carlos Chávez, Carlos Planelles, Carolina Trenado, Filippo Terragni, Jacobo Díaz, Jesús Almenara, José Ángel Bolea, Juan Margalef, Lucas Viani, María Rosendo, Pedro González, Rafael González, Rafa Sánchez, Rocío Vega, y Sergei Iakunin. A su vez, a los Profesores Eduardo Villaseñor, Jesús Salas y José María Gambí.

Asimismo, agradecer a Merche Lorenzo y Raquel Moreno por todas las facilidades desde la Escuela de Doctorado.

Esta tesis fue realizada en el grupo de Modelización y Simulación Numérica, dentro del departamento de Ciencia e Ingeniería de Materiales e Ingeniería Química y del Instituto Gregorio Millán Barbany, de la Universidad Carlos III de Madrid.

También he de agradecer al Ministerio de Economía y Competitividad de España por la financiación brindada a través de los proyectos MTM2014-56948-C2-2-P y MTM2017-84446-C2-2-R. Además, agradecer de nuevo al mismo por el programa de Formación de Doctores, cofinanciado por el Fondo Social Europeo.

Quiero cerrar los agradecimientos con una dedicatoria a aquellas personas que no formaron parte directa del proceso, pero sí que lo complementaron desde el apego.

Deseo dedicar, primero, este trabajo a las personas que más quiero y están o estuvieron en mi vida estos últimos años.

Si sólo pudiese mencionar a una, esa sin dudas es Rocío. Las cosas que vivimos y aprendimos juntos estos años me acompañarán por siempre. Esos momentos no se perderán en el tiempo, no son *lágrimas en la lluvia*. Gracias Ro.

Los siguientes, en estricto orden alfabético (como diría uno de ellos), son Antonio, Carlos, y Gema. Mis mejores amigos, haya distancia temporal o espacial en medio, o no.

No puc deixar fora al meu amic Miquel. Trobe a faltar les nostres xarretes. Tampoc puc fer-ho amb Sandra.

También quiero dedicar este trabajo a las personas a quienes les guardo mucho cariño.

A mi familia, que no siempre es de sangre, ni siquiera de la misma especie: mi madre, Sam, Gabriel, Rodrigo, Mercedes, Rocío (“lawe”), María Dolores, “el” Chema, María Elena, Walter, Laura, Dulce María, mi tío Miguel, y Marcelo. También a mis sobrinas Abril, Julieta, Valentina y Valeria.

A las amistades que hice en Madrid y valoro especialmente: Ana, Andrés, Antonio Luis, Aurora, Eduardo, Jesús, y Rafa.

A las personas que me apoyan desde la distancia: Ana, Alberto, Álvaro, Antonio, David, Dayana, Erki, Jordi, Jorge, Juanjo, Loli, Lucas, Marcos, Mati, Pirro, Samu, Thalia, Vanessa, y Yamila. This also goes for Anastasia, hope you’ll be able to read this someday.

A los profesores que me transmitieron el gustito por aquello de las matemáticas: Adolfo Ballester, Aníbal Moltó, Antonio Marquina, Enrique Llorens, Francisca Mascaró, Josep Martínez, Lucía Sanus, Nick Trefethen, Pablo Galindo, Rafa Sivera, y Vicente Candela. Especialmente Pablo.

A los profesores que me motivaron a comenzar el camino que seguí: Rafa González, Rodolfo Esteve, y Siro Pérez Monasor. Y a los que me transmitieron el amor a su trabajo: Álex Gironés, Antoni Ferrer, Emilio Tadeo, John González, Juan Carlos, Juan Quiles, Lluís, María Ángeles Gastaldo, Paco Carrión, y Vicente Nácher.

Por último, quiero dedicárselo a personas que no conozco pero cuya obra, de un modo u otro, me influyó personalmente: Frank Herbert, y Orson Scott Card. También, y no sería propio de mi no incluirlos, al grupo de músicos de la banda sonora de mi vida: Tool.

Resumen

Esta tesis doctoral está centrada en el estudio de superredes semiconductoras débilmente acopladas. Una de las bondades de esta clase de dispositivos es la posibilidad de ser una fuente de números aleatorios puros con una tasa muy alta de generación. Al ser dispositivos cuyo funcionamiento es totalmente electrónico y que pueden ser fácilmente integrados en un circuito, éstos las convierte en contendientes muy interesantes para usos donde haga falta tales generadores, como lo son el almacenamiento y transmisión segura de información, juegos de azar electrónicos, y simulaciones estocásticas.

Una cuestión pertinente es si se puede garantizar la presencia de caos a la hora de ser fabricadas, pues es el mecanismo por el cual son buenas generadoras de números aleatorios. Abordaremos, de manera teórica, el problema de diseñar una superred que presente comportamiento caótico de manera natural y admita cierto margen de error a la hora de ser fabricada. En el camino recogeremos ciertos criterios a seguir en caso de querer reproducir los pasos teóricos, sin necesidad de disponer de toda la información que nos brinda el modelo y, simplemente, bastándose de observaciones macroscópicas.

Otra aplicación de las superredes es que, por su comportamiento no lineal, pueden interactuar con fuentes de ruido y sincronizarse con señales ocultas en éste, como incluso amplificarlas. Es decir, pueden ser utilizadas para la detección de señales suficientemente débiles como para no distinguirse del ruido de fondo, sin necesidad de disponer de conocimiento previo de la frecuencia de esas señales. Este tema también será abordado en este trabajo y, además, será contrastado experimentalmente.

Índice

Listado de figuras	xvii
Listado de tablas	xxi
1 Introducción	1
2 Descripción del modelo	7
2.1 Presentación del modelo	8
2.2 Modelo microscópico determinista	10
2.2.1 Ecuaciones de Poisson	10
2.2.2 Tasa de cambio de población de electrones	11
2.2.3 Densidad de corriente túnel	12
2.2.4 Conservación de potencial	14
2.2.5 Eliminación de caídas de potencial en pozos	15
2.2.6 Eliminación de bandas de energía superiores	16
2.3 Modelo estocástico	17
2.4 Relación entre densidad de corriente total y V_{SL}	18
2.5 Cálculo de niveles de energía	19
2.6 Condiciones iniciales	20
3 Superred homogénea	23
3.1 Simplificación del modelo	23
3.2 Configuración del sistema y características principales	26
3.2.1 Origen del comportamiento oscilatorio	27
3.2.2 Comportamiento según la conductividad del contacto	29
3.3 Efectos constructivos del ruido	34
3.3.1 Resonancia coherente	36
3.3.2 Resonancia estocástica	43
3.3.3 Determinación de la corriente crítica	49

4 Superred no homogénea	53
4.1 Configuración homogénea de referencia	54
4.2 Modificación de un único pozo	55
4.2.1 Longitud del pozo modificado	56
4.2.2 Posición del pozo modificado	58
4.3 Modificación de dos pozos	61
4.3.1 Longitud relativa de los pozos modificados	61
4.3.2 Distancia relativa entre pozos modificados	62
4.3.3 Criterios de diseño	64
4.4 Caos en superred modificada en dos pozos	65
4.4.1 Evolución del atractor	68
4.4.2 Sección de Poincaré	70
4.4.3 Histéresis	72
5 Influencia de desorden y ruido	75
5.1 Desorden	75
5.1.1 En superred homogénea	76
5.1.2 En superred no homogénea	76
5.1.3 Como origen de caos	80
5.2 Ruido	82
5.2.1 En superred no homogénea	82
6 Conclusiones y trabajo futuro	85
Referencias	89
Apendice A Adimensionalización del modelo	95
A.1 Constantes de referencia	95
A.2 Adimensionalización de funciones	95
A.3 Modelo sin dimensiones	96
Apendice B Cálculo numérico	99
B.1 Aproximación numérica de niveles de energía	99
B.2 Evolución del sistema	99
B.2.1 Esquema numérico	100
B.2.2 Límites de integración	101
B.2.3 Proyección sobre variedad	101
B.2.4 Exponentes de Lyapunov	101
B.3 Creación del ruido y tratamiento	105
B.3.1 Ruido térmico del circuito	105

B.3.2	Ruido interno	105
B.3.3	Ruido blanco de ancho de banda limitado	106
B.3.4	Proporción de señal frente a ruido	107
Apendice C Ejemplos de superred no homogénea		109
C.1	Un único pozo modificado (longitud variable)	109
C.2	Dos pozos modificados (longitud relativa)	109
C.3	Diseño caótico con dos pozos modificados	111

Listado de figuras

1.1 Diagrama de superred	1
1.2 Esquema del transporte electrónico por efecto túnel secuencial . . .	2
1.3 Evolución de la densidad de electrones	3
1.4 Diagrama de bandas de conducción	3
1.5 Curva $I - V$ característica de una muestra	4
2.1 Esquema de barreras y pozos	8
2.2 Mecanismos de transporte electrónico considerados	12
2.3 Niveles de energía según ancho de pozo cuántico	20
3.1 Referencia de experimento	27
3.2 Curva característica de densidad de corriente frente a campo eléctrico	29
3.3 Diagrama de fases de la conductividad del contacto inyector frente al voltaje	30
3.4 Comportamiento en régimen de oscilaciones de alta frecuencia . . .	31
3.5 Comportamiento en régimen de oscilaciones de baja frecuencia a baja conductividad	32
3.6 Comportamiento en régimen de oscilaciones de baja frecuencia a alta conductividad	33
3.7 Curva $I-V$ característica	35
3.8 Resonancia coherente	37
3.9 Desviación estándar del tiempo entre picos según amplitud del ruido	38
3.10 Evolución de la densidad de corriente al haber resonancia coherente	39
3.11 Resonancia coherente en experimentos	41
3.12 Desviación estándar del tiempo entre picos según amplitud del ruido, en experimentos	42
3.13 Resonancia estocástica	44
3.14 Resonancia estocástica: Sincronización de fase	44
3.15 Resonancia estocástica: Relación entre ruido y señal	45
3.16 Resonancia estocástica en experimentos	47

3.17 Amplitud de ruido necesaria para provocar oscilaciones, en experimentos	47
3.18 Resonancia estocástica en experimentos: Relación entre ruido y señal	48
3.19 Proporción normalizada de la desviación típica frente a la media de la duración de picos en la corriente	50
4.1 Curva I-V característica de referencia	54
4.2 Curva característica de referencia de densidad de corriente frente a caída de potencial	55
4.3 Esquema de pozos y niveles de energía	56
4.4 Curva I-V característica para un pozo modificado	59
4.5 Espectro de Fourier para distintas posiciones de pares de pozos modificados	63
4.6 Caos con dos pozos modificados	66
4.7 Evolución de la órbita del sistema	71
4.8 Histéresis con dos pozos modificados	73
5.1 Ejemplos de desorden inhibiendo el comportamiento	78
5.2 Tasa de éxito (a pesar del desorden) frente a desviación típica	79
5.3 Requisitos de la distribución del desorden	81
5.4 Influencia del ruido en los exponentes de Lyapunov	83
5.5 Influencia del ruido en los exponentes de Lyapunov, bis	84
B.1 Diagrama del proceso de “renormalización” del algoritmo para aproximar exponentes de Lyapunov	104
C.1 Caída de potencial en superred con un único pozo modificado	110
C.2 Caída de potencial en superred con dos pozos modificados	111
C.3 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 0.9V$	113
C.4 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 0.95V$	114
C.5 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 0.965V$	115
C.6 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.01V$	116
C.7 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.03V$	117
C.8 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.1V$	118
C.9 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.2V$	119
C.10 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.275V$	120
C.11 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.3V$	121
C.12 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.4V$	122
C.13 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.45V$	123

C.14 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.5V$	124
---	-----

Listado de tablas

3.1	Configuración de superred homogénea	26
4.1	Configuración de superred no homogénea	54
4.2	Configuración de pozos modificados en diseño de superred no homogénea	65

Capítulo 1

Introducción

Una superred semiconductor es un tipo de cristal artificial cuya estructura alterna periódicamente dos, o más, materiales semiconductores diferentes. Esta estructura está compuesta por capas de varios nanómetros de espesor. Al estar intercalándose capas de diferentes semiconductores, las bandas de conducción y de valencia, así como los niveles de energía prohibidos entre ambas bandas, a su vez también se alternarán. Esto nos permite interpretar las superredes semiconductoras como una sucesión periódica casi unidimensional de pozos y barreras de potencial. En este trabajo estudiaremos, concretamente, superredes que alternan dos materiales: arseniuro de galio, GaAs, y arseniuro de galio-aluminio, $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ [45, 44, 52] (ver figura 1.1).

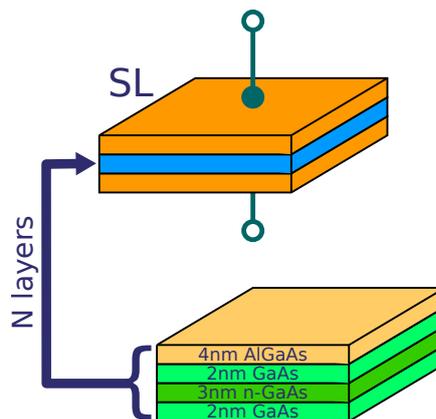


Fig. 1.1 Diagrama de la estructura de una superred semiconductor dopada tipo GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$.

Las superredes semiconductoras de dos materiales alternados fueron propuestas en el año 1970 por Esaki y Tsu [33], con el objetivo de observar macroscópicamente ciertos fenómenos microscópicos, como las oscilaciones de Bloch [13]. Suceso que se realiza posteriormente [51, 57]. Adicionalmente, las superredes

han adquirido interés por sus posibilidades tecnológicas, como lo pueden ser la generación de oscilaciones de alta frecuencia [44] o la producción de números aleatorios [52] con una alta tasa de creación en un dispositivo completamente electrónico, a diferencia de alternativas como [61, 70].

Podemos distinguir, *grosso modo*, dos tipos de superred semiconductoras según la longitud de las barreras. Cuando la longitud de onda del electrón es mucho mayor que las barreras, se denominan superredes fuertemente acopladas y los electrones se desplazan por transporte por minibanda [21, 19]. En el extremo contrario se hallan las superredes débilmente acopladas, donde las barreras son más largas que la longitud de onda típica del electrón. En éstas, que es en las que nos centraremos, el transporte electrónico en presencia de un campo eléctrico se basará en el efecto túnel resonante secuencial [20, 16] (ver figura 1.2).

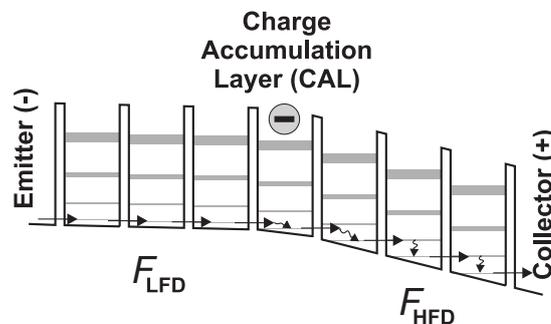


Fig. 1.2 Esquema del transporte electrónico por efecto túnel secuencial, cuando el perfil del campo eléctrico presenta una región de campo bajo y otro de campo alto. Figura extraída de [21].

Dependiendo de la configuración de una superred, como la densidad de dopaje, temperatura, entre otros, la corriente a través de una superred así como el perfil del campo eléctrico dentro de ésta pueden mostrar una gran variedad de fenómenos de origen no lineal: formación de dominios estacionarios del campo eléctrico (ver figura 1.3), oscilaciones autosostenidas de la corriente [16, 44], o comportamiento caótico [52].

Inicialmente, las superredes débilmente acopladas se fabricaban alternando GaAs con AlAs [82] y debían operar a muy bajas temperaturas porque, de otro modo, los electrones no estarían confinados ya que podrían escapar el valle X del arseniuro de aluminio. En [45] se propone el cambio de barrera de AlAs a $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ con una concentración de aluminio $x = 0.45$, lo que evita el escape de electrones por el valle X (ver figura 1.4), y permitirá poder trabajar con superredes semiconductoras débilmente acopladas *a temperatura ambiente*.

Una característica muy importante de las superredes, independientemente del tipo que sean, es lo que se conoce como conductividad diferencial negativa, que es

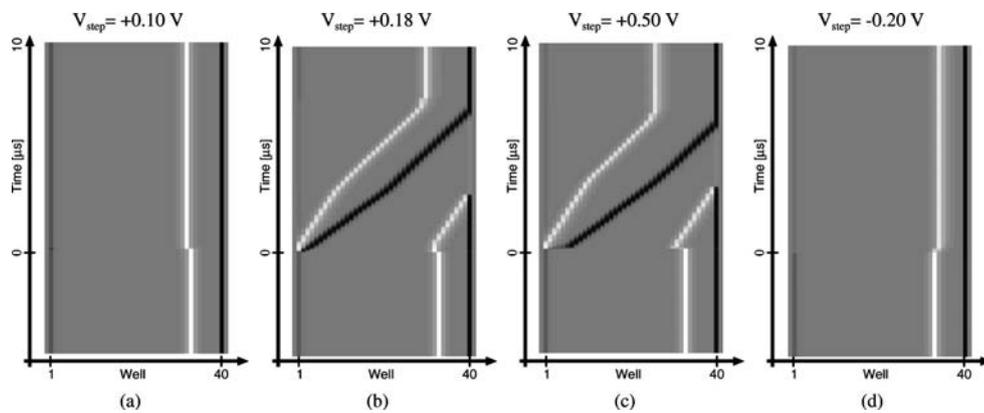


Fig. 1.3 Evolución de la densidad de electrones ante determinados cambios en la caída de potencial a la que la superred está sometida. En blanco una alta densidad de electrones, en negro una baja, y en gris la densidad coincide con el dopaje. Figura extraída de [3].

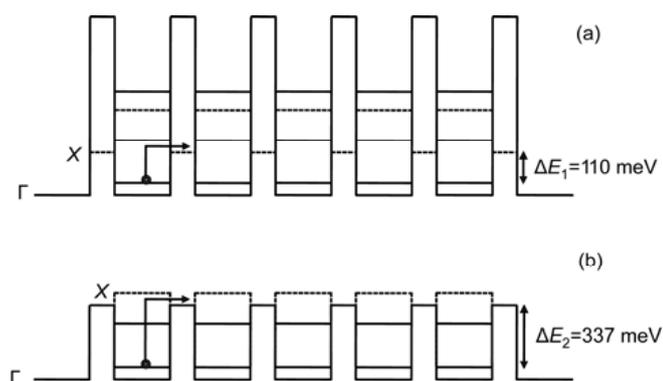


Fig. 1.4 Diagrama de bandas de conducción para superredes de tipo (a) GaAs/AlAs y (b) GaAs/Al_{0.45}Ga_{0.55}As. Figura extraída de [45].

la derivada de la corriente respecto al campo o al potencial eléctrico aplicado. Ésta queda evidenciada cuando la corriente a través de la superred deja de incrementar con el voltaje aplicado (que previamente comportándose como una ley de Ohm), alcanzando un máximo local, y decreciendo a partir del mismo (ver figura 1.5). Este *plateau* está ligado a los comportamientos no lineales de la superred, como lo son las oscilaciones autosostenidas de la corriente, pudiendo ser periódicas o caóticas [24, 25, 55, 26, 52]. En los modelos teóricos es posible hallar más de un *plateau*, lo que facilita el estudio de ciertos fenómenos como el caos. En este trabajo, sin embargo, nos centraremos en el primer *plateau*.

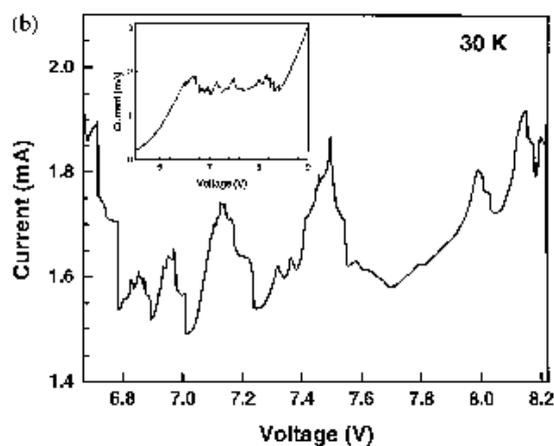


Fig. 1.5 Curva $I - V$ característica de una muestra, en la que se aprecia la región de conductividad diferencial negativa. Figura extraída de [82].

Estructura del trabajo

A continuación se describe la estructura de esta tesis doctoral.

En el capítulo 2 presentamos el modelo propuesto en [16] que describe el transporte electrónico en superredes semiconductoras débilmente acopladas, con la adición de la posibilidad de introducir modificaciones en la estructura de la superred. Entre otras cosas, se podrá modificar la longitud de las barreras o de los pozos cuánticos, o el dopaje en estos últimos. Además, dado que estas modificaciones rompen la periodicidad ideal de la heteroestructura, se comentará cómo se deducen los niveles de energía de los pozos, al dejar de ser viable usar una aproximación basada en suponer que la energía potencial a campo aplicado nulo es espacialmente periódica, como en el modelo de Kronig-Penney [7].

En el capítulo 3 estudiaremos los efectos constructivos del ruido al interactuar con un sistema de comportamiento no lineal como lo es una superred, y complementaremos los resultados con observaciones experimentales. Dado que

estudiaremos estos efectos en una superred ideal, primero se presentará una simplificación del modelo. Entonces daremos una breve explicación de qué ocurre en una superred cuando ésta produce oscilaciones en la corriente, pues será beneficioso para entender la interacción con el ruido. Seguidamente, justificaremos que una superred puede mostrar evidencias de resonancia coherente y estocástica desde el punto de vista teórico, que, además, está confirmado por experimentos [71]. Por último, planteamos una forma indirecta de estimar cierto parámetro (la conductividad del contacto que une la superred con el circuito) cuya medición directa no es realizable.

En el capítulo 4 volveremos al modelo del capítulo 2 para analizar cómo modificaciones puntuales afectan al comportamiento general de la superred. Más específicamente, estudiamos los efectos que tiene incrementar la longitud de un pozo cuántico y variar su posición dentro de la superred. Una vez visto esto, veremos qué ocurre al incrementar la longitud de dos pozos. En general, los cambios que se verán son análogos a la modificación de un único pozo, pero hay circunstancias concretas en las que se ve un nuevo comportamiento en la dinámica de la superred, el cual dará acceso a un régimen caótico fuerte. Con esto, propondremos una serie de indicaciones para poder reproducir las circunstancias en experimentos. Para acabar el capítulo estudiaremos la estructura de los atractores caóticos que se encuentran en un diseño concreto de superred.

En el capítulo 5 estudiamos, por un lado, qué ocurre cuando las modificaciones en la estructura no son por diseño, sino por errores “de fabricación”, y, por otro lado, la interacción del ruido con el caos. En lo que respecta al desorden (que lo entendemos como errores de fabricación que afectan a la longitud de los pozos), veremos cómo afecta si lo añadimos, primero, a un diseño originalmente ideal de superred y, segundo, al diseño no homogéneo estudiado en el capítulo 4. En cuanto al ruido, dados los beneficios que puede aportar al caos [2, 17, 69, 81], comprobaremos si se obtienen resultados análogos cuando el caos es como el hallado.

Por último, en el capítulo 6 recapitularemos los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo y propondremos posibles trabajos a realizar.

Adicionalmente, en los apéndices recogemos el modelo sin dimensiones, que usaremos de cara a la simulación numérica. También explicamos detalles menores relacionados a la simulación, y, finalmente, presentamos una serie de ejemplos pertinentes al capítulo 4.

Capítulo 2

Descripción del modelo

El transporte electrónico dentro de una superred semiconductor débilmente acoplada lo modelaremos apoyándonos en el efecto túnel resonante secuencial [20, 16].

Una consecuencia del débil acoplamiento entre pozos aledaños es que, en cada pozo cuántico, las bandas de energía son estrechas¹. Un electrón sólo podrá viajar de un pozo a otro cuando las bandas de energía se alineen. Ésto ocurrirá por la influencia del campo eléctrico local que modificará el perfil de potencial a lo largo del eje de crecimiento de la superred.

Otra consecuencia es la posibilidad de identificar el campo eléctrico de cada periodo. Esto permite trabajar con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para cada uno, en lugar de ecuaciones de Boltzmann (como ocurre en superredes semiconductoras fuertemente acopladas [19]).

Asumiremos que el tiempo de escape de un electrón de un pozo cuántico, τ_{esc} , es típicamente mucho mayor que el tiempo de *scattering*, τ_{sc} , lo que implica que la distribución de electrones en cada pozo cuántico está en equilibrio local [20]. Además, el tiempo de relajación dieléctrica, τ_{di} , que es lo que tarda la densidad de corriente a lo largo de la superred en responder a cambios repentinos en el perfil de campo eléctrico, es mucho mayor que el tiempo de escape [17]. Así, se puede considerar que la densidad de corriente túnel es estacionaria en la escala de tiempo de la relajación dieléctrica [20]. Entonces habrá que centrarse en especificar los procesos y magnitudes que varían lentamente y gobiernan el transporte electrónico en una superred débilmente acoplada.

Así pues, el modelo describirá la evolución de las caídas de potencial, V_i (proporcionales al campo eléctrico) en cada barrera relacionándola a la densidad de corriente túnel entre los pozos colindantes, $J_{i \rightarrow i+1}$, a la vez que a la densidad de

¹Podemos hablar de niveles de energía en lugar de bandas.

De éstas, $N + 1$ son ecuaciones diferenciales estocásticas para (V_0, \dots, V_N) . Concretamente, son ecuaciones de Ampère:

$$\frac{\varepsilon_{B_i}}{d_{B_i}} \frac{dV_i}{dt} + J_{i \rightarrow i+1} + \eta_i(t) = J(t), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.1)$$

con las densidades de corriente túnel, $J_{i \rightarrow i+1}$, definidas según las ecuaciones (2.31)-(2.33) y (2.22)-(2.23), que a su vez se apoyan en las ecuaciones 2.14-2.21, y donde $\eta_i(t)$ representa las fluctuaciones en la densidad de corriente túnel, tal como se describe en la sección 2.3. Las condiciones iniciales que se utilizarán están descritas en la sección 2.6.

Por su parte, N son ecuaciones algebraicas que relacionan (μ_1, \dots, μ_N) con (V_0, \dots, V_N) , mediante la densidad electrónica bidimensional n_i :

$$n_i = \begin{cases} \frac{\varepsilon_{B_i}}{e} \frac{V_i}{d_{B_i}} - \frac{\varepsilon_{B_{i-1}}}{e} \frac{V_{i-1}}{d_{B_{i-1}}} + N_{D_i} \\ \frac{m_W k_B T}{\pi \hbar^2} \int_0^\infty A_{C_{1,i}}(\lambda) \log \left(1 + \exp \left(\frac{\mu_i - \lambda}{k_B T} \right) \right) d\lambda \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.2)$$

donde se interpreta la densidad electrónica, por un lado, como una ecuación de Poisson y, por otro, como el valor efectivo según el potencial químico. Aquí, $A_{C_{1,i}}$ es la Lorentziana definida en (2.9).

Finalmente, nos queda la restricción algebraica que relaciona $J(t)$ y (V_0, \dots, V_N) :

$$\frac{dV_{SL}}{dt} + \langle u, \left(\frac{d_{B_i}}{\varepsilon_{B_i}} (J_{i \rightarrow i+1} + \eta_i(t)) \right)_{i=0}^N \rangle = J(t) \langle u, \left(\frac{d_{B_i}}{\varepsilon_{B_i}} \right)_{i=0}^N \rangle, \quad (2.3)$$

donde u es un vector fijo definido en (2.40), y donde V_{SL} es la caída de potencial a lo largo de toda la superred, que suponemos una magnitud macroscópica conocida. Esta ecuación se deriva de (2.1) según se describe en la sección 2.4.

En estas ecuaciones intervienen las constantes físicas y parámetros que siguen: k_B es la constante de Boltzmann, \hbar es la constante de Planck reducida, $-e < 0$ es la carga del electrón, m_W es la masa efectiva del electrón en cualquier pozo, T es la temperatura de la superred, ε_{B_i} y d_{B_i} son, respectivamente, la caída de potencial, la permisividad eléctrica y la longitud de la barrera i -ésima, y N_{D_i} es la densidad bidimensional de dopaje en la parte central del pozo i -ésimo.

En la sección 2.2 recogemos la derivación de la versión determinista de (2.1), o sea, considerando $\eta_i \equiv 0$, y de (2.3). También se darán más detalles sobre (2.2) y las densidades de corriente túnel (entre pozos internos y las condiciones de contorno con los contactos) que hacen de acoplamiento no lineal entre las ecuaciones (2.1).

Aunque en los capítulos 3 y 4 establecemos valores específicos para los parámetros, vamos a especificarlos, en general, para una superred de tipo GaAs/Al_xGa_{1-x}As, donde x es la proporción de aluminio (que para nuestros intereses será $x = 0.45$). Tenemos entonces que $m_W = 0.063m_e$ y $m_B = (0.063 + 0.083x)m_e$, donde m_e es la masa del electrón y m_B la masa efectiva de electrón en las barreras, $T = 295\text{K}$, $\epsilon_B = (12.9 - 2.84x)\epsilon_0$ y $\epsilon_W = 12.9\epsilon_0$, donde ϵ_0 es la constante dieléctrica del vacío.

2.2 Modelo microscópico determinista

Queremos construir las ecuaciones (2.1), y presentar la descripción de la densidad de corriente túnel, $J_{i \rightarrow i+1}$, las condiciones de contorno asociadas a $J_{0 \rightarrow 1}$ y $J_{N \rightarrow N+1}$, así como la conservación de caída de potencial a lo largo de toda la superred, para así poder tener un sistema de ecuaciones completo que poder integrar numéricamente.

Por lo pronto vamos a considerar las caídas de potencial tanto en barreras, V_i , como en pozos, V_{W_i} . A su vez, consideramos que sólo habrán tres bandas de energía relevantes en cada pozo, enumeradas por $1 \leq \nu \leq 3$. Ambas consideraciones se verán simplificadas a lo largo de esta sección.

2.2.1 Ecuaciones de Poisson

Las ecuaciones que describen la diferencia de potencial entre pozo y barrera, y entre barreras, vendrán dadas por las siguientes ecuaciones de Poisson que tienen en cuenta el dopaje en los pozos cuánticos [38, 39, 47, 17]:

$$\epsilon_W \frac{V_{W_i}}{d_{W_i}} = \epsilon_{B_{i-1}} \frac{V_{i-1}}{d_{B_{i-1}}} + \frac{e}{2} (n_i - N_{D_i}), \quad (2.4)$$

$$\epsilon_{B_i} \frac{V_i}{d_{B_i}} = \epsilon_{B_{i-1}} \frac{V_{i-1}}{d_{B_{i-1}}} + e (n_i - N_{D_i}), \quad (2.5)$$

donde $1 \leq i \leq N$, ϵ_W la permisividad eléctrica en un pozo, y d_{W_i} es la longitud del pozo i -ésimo.

De la ecuación (2.5) podemos obtener una relación útil de cara a calcular el potencial químico a partir del potencial en las barreras:

$$n_i = \frac{\epsilon_{B_i}}{e} \frac{V_i}{d_{B_i}} - \frac{\epsilon_{B_{i-1}}}{e} \frac{V_{i-1}}{d_{B_{i-1}}} + N_{D_i}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.6)$$

Notemos que n_i recoge toda la densidad bidimensional de electrones del pozo i -ésimo, pero, por lo pronto, necesitaremos más detalle. Así que descomponemos

ésta densidad según los niveles de energía del pozo correspondiente,

$$n_i := \sum_{\nu=1}^3 n_i^{(\nu)}, \quad (2.7)$$

donde $n_i^{(\nu)}$ es la densidad bidimensional de electrones en el ν -ésimo nivel de energía del i -ésimo pozo cuántico.

2.2.2 Tasa de cambio de población de electrones en bandas permitidas

Dado que el tiempo de escape de los electrones, τ_{esc} , es mucho mayor que el tiempo de *scattering*, τ_{sc} , podemos considerar que la distribución de electrones en cada banda de energía de cada pozo se encuentra en equilibrio local [20]. Luego podemos relacionar la densidad bidimensional de electrones con el potencial químico de la siguiente manera [17]:

$$n_i^{(\nu)} = \frac{m_{\text{W}} k_{\text{B}} T}{\pi \hbar^2} \int_0^{\infty} A_{\text{C}_{\nu,i}}(\lambda) \log \left(1 + \exp \left(\frac{\mu_i^{(\nu)} - \lambda}{k_{\text{B}} T} \right) \right) d\lambda, \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq \nu \leq 3, \quad (2.8)$$

donde $\mu_i^{(\nu)}$ el potencial químico en la banda ν -ésima del pozo i -ésimo, y

$$A_{\text{C}_{\nu,i}}(\lambda) = \frac{\gamma_{\nu}}{\pi} \left[\gamma_{\nu}^2 + (\lambda - \mathcal{E}_{\text{C}_{\nu,i}})^2 \right]^{-1}, \quad 0 \leq i \leq N, 1 \leq \nu \leq 3, \quad (2.9)$$

son las funciones Lorentzianas mediante las cuales incluimos los efectos del *scattering* en el modelo. En éstas, $\mathcal{E}_{\text{C}_{\nu,i}}$ es el nivel de energía central de la banda ν -ésima medido desde el fondo del pozo i -ésimo, y γ_{ν} es el parámetro de escala (o anchura media).

Cabe notar que consideramos la temperatura de los electrones en cada nivel de energía como la misma que la temperatura de la superred. Además, $\gamma_{\nu} = \hbar / \tau_{\text{sc}}^{(\nu)}$, donde $\tau_{\text{sc}}^{(\nu)}$ es el tiempo asociado al proceso dominante de *scattering* en la banda de energía ν -ésima; proceso que no preestablecemos con el fin de darle flexibilidad al modelo, pero podrían incluir interacciones entre interfaces, *scattering* por impurezas, *scattering* por fonones, entre otros [78, 1, 65].

Ahora estableceremos las tasas de cambio para las diferentes densidades electrónicas. Para ello recordemos que consideramos que los electrones viven en las primeras tres bandas de energía permitidas. Adicionalmente, vamos a considerar que los electrones, por *scattering*, caen directamente a la primera banda de energía desde las bandas superiores. En el diagrama de la Fig. 2.2 se muestran los mecanis-

mos de transporte de electrones, con un cierto tiempo tiempo de relajación $\tau_{sc}^{(v \rightarrow 1)}$, que incluiremos en las tasas de cambio. Éstas tasas serán, pues:

$$\frac{d}{dt} n_i^{(1)} = \frac{1}{e} \left(J_{i-1 \rightarrow i}^{(1 \rightarrow 1)} - J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow 1)} - J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow 2)} - J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow 3)} \right) + \frac{n_i^{(2)}}{\tau_{sc}^{(2 \rightarrow 1)}} + \frac{n_i^{(3)}}{\tau_{sc}^{(3 \rightarrow 1)}}, \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt} n_i^{(2)} = \frac{1}{e} \left(J_{i-1 \rightarrow i}^{(1 \rightarrow 2)} - J_{i \rightarrow i+1}^{(2 \rightarrow 3)} \right) - \frac{n_i^{(2)}}{\tau_{sc}^{(2 \rightarrow 1)}}, \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt} n_i^{(3)} = \frac{1}{e} \left(J_{i-1 \rightarrow i}^{(1 \rightarrow 3)} + J_{i-1 \rightarrow i}^{(2 \rightarrow 3)} \right) - \frac{n_i^{(3)}}{\tau_{sc}^{(3 \rightarrow 1)}}, \quad (2.12)$$

donde $\tau_{sc}^{(v \rightarrow v')}$ son los tiempos de *scattering* entre bandas de energía en un mismo

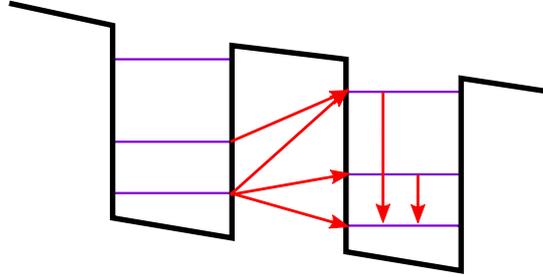


Fig. 2.2 Diagrama de mecanismos de transporte electrónico considerados. El perfil de potencial se ha representado en presencia de un campo eléctrico.

pozo, y $J_{i \rightarrow j}^{(v \rightarrow v')}$ denota la densidad de corriente túnel desde la banda de energía v -ésima del pozo i -ésimo hacia la banda de energía v' -ésima del pozo j -ésimo.

2.2.3 Densidad de corriente túnel

Por los motivos que se explicarán en la sección 2.2.6 sólo nos interesa describir la densidad de corriente túnel $J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow v)}$, con $1 \leq i \leq N - 1$ y $1 \leq v \leq 3$. De manera independiente describiremos la densidad de corriente túnel a través de los contactos de la superred, densidades que podemos considerar como un análogo discreto de condiciones de contorno. La derivación, que utiliza el método del hamiltoniano de transferencia [6, 63], se puede hallar en [80, 17].

Densidad de corriente túnel entre pozos

La densidad de corriente túnel desde el primer nivel de energía del pozo i -ésimo al ν -ésimo nivel de energía del pozo $i + 1$ -ésimo viene dada por

$$J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow \nu)} = \frac{e\hbar k_B T}{2m_{B_i}} \int_0^\infty \left[A_{C_{1,i}}(\lambda) B_i^c(\lambda) B_i^n(\lambda) T_i(\lambda) \cdot \right. \\ \cdot A_{C_{\nu,i+1}} \left(\lambda + eV_i + \frac{e}{2}(V_{W_i} + V_{W_{i+1}}) \right) \cdot \\ \left. \cdot \log \left(\frac{1 + \exp\left(\frac{\mu_i^{(1)} - \lambda}{k_B T}\right)}{1 + \exp\left(\frac{\mu_{i+1}^{(\nu)} - eV_i - \frac{e}{2}(V_{W_i} + V_{W_{i+1}}) - \lambda}{k_B T}\right)} \right) \right] d\lambda, \quad (2.13)$$

donde $\hbar B_i^n / m_{B_i}$ y T_i son, respectivamente, la frecuencia con de intentos de realizar el efecto túnel secuencialmente a través de la barrera i -ésima y la probabilidad (adimensional) de transmisión a través de la misma barrera. Éstas funciones vendrán definidas de la siguiente manera:

$$B_i^c(\lambda) = k_i^c \left[d_{W_i} + \left(\frac{1}{\alpha_i^p} + \frac{1}{\alpha_i^c} \right) \left(\frac{m_{B_i}}{m_W} \sin^2 \left(\frac{k_i^c d_{W_i}}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{k_i^c d_{W_i}}{2} \right) \right) \right]^{-1}, \quad (2.14)$$

$$B_i^n(\lambda) = k_i^n \left[d_{W_i} + \left(\frac{1}{\alpha_i^c} + \frac{1}{\alpha_i^n} \right) \left(\frac{m_{B_i}}{m_W} \sin^2 \left(\frac{k_i^n d_{W_i}}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{k_i^n d_{W_i}}{2} \right) \right) \right]^{-1}, \quad (2.15)$$

$$T_i(\lambda) = \left[\frac{(k_i^c + k_i^n)^2}{4k_i^c k_i^n} + \frac{1}{4} \left(\frac{m_{B_i} k_i^c}{m_W \alpha_i^c} + \frac{m_W \alpha_i^c}{m_{B_i} k_i^c} \right) \left(\frac{m_{B_i} k_i^n}{m_W \alpha_i^c} + \frac{m_W \alpha_i^c}{m_{B_i} k_i^n} \right) \sinh^2(\alpha_i^c d_{B_i}) \right]^{-1}, \quad (2.16)$$

donde k_i y α_i representan el número de onda de propagación en los pozos y decaimiento en las barreras, respectivamente. Según relacionen el pozo i -ésimo con el siguiente, o la barrera i -ésima con la siguiente o la anterior, tomarán los siguientes valores:

$$k_i^c(\lambda) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_W \lambda}, \quad (2.17)$$

$$k_i^n(\lambda) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_W \left(\lambda + eV_i + e \frac{V_{W_i} + V_{W_{i+1}}}{2} \right)}, \quad (2.18)$$

$$\alpha_i^p(\lambda) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_{B_i} \left[eV_B + e \frac{V_{W_i}}{2} + eV_{i-1} - \lambda \right]}, \quad (2.19)$$

$$\alpha_i^c(\lambda) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_{B_i} \left[eV_B - e \frac{V_{W_i}}{2} - \lambda \right]}, \quad (2.20)$$

$$\alpha_i^n(\lambda) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_{B_i} \left[eV_B - e\frac{V_{W_i}}{2} - eV_i - eV_{W_{i-1}} - \lambda \right]}. \quad (2.21)$$

Densidad de corriente túnel en los contactos

La condición de contorno brindada por la densidad de corriente túnel a través de los contactos tendrá un tratamiento diferente [16]:

$$J_{0 \rightarrow 1} = \sigma_e \frac{V_0}{d_{B_0}}, \quad (2.22)$$

y

$$J_{N \rightarrow N+1} = \sigma_c \frac{n_N}{N_{D_N}} \frac{V_N}{d_{B_N}}, \quad (2.23)$$

donde σ_e y σ_c son, respectivamente, la conductividad del contacto emisor y colector.

Éstas condiciones de contorno las podemos considerar una aproximación a primer orden de la densidad de corriente túnel a través de los contactos. Aún tratándose de una aproximación, son suficientes para capturar la fenomenología observada en experimentos con una elección adecuada de la conductividad de los contactos [2, 69]. La cual, sin embargo, no es medible de manera directa en la realidad, y éste hecho hace que los comentarios de la sección 3.3.3 adquieran valor.

A la hora de hacer simulaciones, para evitar tener un parámetro libre adicional, tomaremos $\sigma_c = \frac{d_{B_N}}{d_{B_0}} \frac{N_{D_N}}{\langle N_D \rangle} \sigma_e$.

2.2.4 Conservación de potencial

Como se menciona previamente, estableceremos una restricción que nos permita relacionar las caídas de potencial en cada pozo y barrera de la superred con la caída de potencial macroscópica, V_{SL} . Es decir, de la caída de potencial de la superred como parte de un circuito.

Siguiendo el esquema de pozos y barreras de la figura 2.1, la restricción será

$$V_{SL} = \sum_{i=0}^N V_i + \sum_{i=1}^N V_{W_i}. \quad (2.24)$$

donde V_i y V_{W_i} son, respectivamente, la caída de potencial en la barrera y pozo i -ésimo.

2.2.5 Eliminación de caídas de potencial en pozos

A partir de las ecuaciones (2.4) y (2.5) obtenemos

$$V_{W_i} = \frac{d_{W_i}}{2\varepsilon_W} \left(\frac{\varepsilon_{B_{i-1}}}{d_{B_{i-1}}} V_{i-1} + \frac{\varepsilon_{B_i}}{d_{B_i}} V_i \right), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.25)$$

lo que nos permitirá eliminar la dependencia con V_{W_i} .

Así podemos reescribir la restricción sobre la caída de potencial, descrita en la ecuación (2.24), como

$$V_{SL} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_1}}{d_{B_0}} \frac{\varepsilon_{B_0}}{\varepsilon_W} \right) V_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_i} + d_{W_{i+1}}}{d_{B_i}} \frac{\varepsilon_{B_i}}{\varepsilon_W} \right) V_i + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_N}}{d_{B_N}} \frac{\varepsilon_{B_N}}{\varepsilon_W} \right) V_N. \quad (2.26)$$

Por otra parte, si derivamos las ecuaciones (2.5) respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{B_i}}{d_{B_i}} \frac{dV_i}{dt} &= \frac{\varepsilon_{B_{i-1}}}{d_{B_{i-1}}} \frac{dV_{i-1}}{dt} + e \frac{dn_i}{dt} = \\ &= \frac{\varepsilon_{B_{i-1}}}{d_{B_{i-1}}} \frac{dV_{i-1}}{dt} + e \sum_{\nu=1}^3 \frac{dn_i^{(\nu)}}{dt} = \\ &= \frac{\varepsilon_{B_{i-1}}}{d_{B_{i-1}}} \frac{dV_{i-1}}{dt} + \left(J_{i-1 \rightarrow i}^{(1 \rightarrow 1)} + J_{i-1 \rightarrow i}^{(1 \rightarrow 2)} + J_{i-1 \rightarrow i}^{(1 \rightarrow 3)} + J_{i-1 \rightarrow i}^{(2 \rightarrow 3)} \right) - \\ &\quad - \left(J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow 1)} + J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow 2)} + J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow 3)} + J_{i \rightarrow i+1}^{(2 \rightarrow 3)} \right), \end{aligned}$$

que, reagrupando términos, acaba siendo

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{B_i}}{d_{B_i}} \frac{dV_i}{dt} + \left(J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow 1)} + J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow 2)} + J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow 3)} + J_{i \rightarrow i+1}^{(2 \rightarrow 3)} \right) &= \\ = \frac{\varepsilon_{B_{i-1}}}{d_{B_{i-1}}} \frac{dV_{i-1}}{dt} + \left(J_{i-1 \rightarrow i}^{(1 \rightarrow 1)} + J_{i-1 \rightarrow i}^{(1 \rightarrow 2)} + J_{i-1 \rightarrow i}^{(1 \rightarrow 3)} + J_{i-1 \rightarrow i}^{(2 \rightarrow 3)} \right). \end{aligned}$$

Si introducimos la notación

$$J_{i \rightarrow i+1} := J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow 1)} + J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow 2)} + J_{i \rightarrow i+1}^{(1 \rightarrow 3)} + J_{i \rightarrow i+1}^{(2 \rightarrow 3)} \quad (2.27)$$

y observamos que la ecuación es válida $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, tenemos

$$\frac{\varepsilon_{B_i}}{d_{B_i}} \frac{dV_i}{dt} + J_{i \rightarrow i+1} = \frac{\varepsilon_{B_k}}{d_{B_k}} \frac{dV_k}{dt} + J_{k \rightarrow k+1}, \quad 0 \leq i, k \leq N,$$

así, podemos promediar la parte derecha de la igualdad e introducir

$$J(t) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \left(\frac{\varepsilon_{B_k}}{d_{B_k}} \frac{dV_k}{dt} + J_{k \rightarrow k+1} \right) \quad (2.28)$$

como densidad de corriente total a lo largo de toda la superred, puesto que recoge la densidad de corriente por desplazamiento y por efecto túnel. Obteniendo, finalmente, las ecuaciones de Ampère

$$\frac{\varepsilon_{B_i}}{d_{B_i}} \frac{dV_i}{dt} + J_{i \rightarrow i+1} = J(t), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.29)$$

es decir, la versión determinista de las ecuaciones (2.1) considerando $\eta_i \equiv 0$.

Cabe mencionar que la ecuación (2.28) no será la utilizada para tratar la densidad de corriente total. En su lugar intentaremos recurrir, de alguna manera, a información que relacione a la superred con las magnitudes macroscópicas. En la sección 2.4 veremos cómo asociarla a la caída de potencial a lo largo de toda la superred, V_{SL} .

Adicionalmente, si derivamos las ecuaciones (2.6) respecto al tiempo y usamos las ecuaciones (2.29), llegamos a

$$e \frac{dn_i}{dt} = J_{i-1 \rightarrow i} - J_{i \rightarrow i+1}, \quad 1 \leq i \leq N,$$

lo que garantiza la continuidad de carga.

2.2.6 Eliminación de bandas de energía superiores

Puesto que los tiempos de *scattering* son mucho más cortos que el tiempo de relajación dieléctrica, consideramos $\tau_{sc}^{(2 \rightarrow 1)}, \tau_{sc}^{(3 \rightarrow 1)} \ll \tau_{di}$ y que, cuando los electrones viajan de un pozo al siguiente, lo hacen siempre partiendo desde la banda de energía más baja. Con esto, en las ecuaciones (2.10)-(2.12), usamos $\frac{dn_i^{(2)}}{dt}, \frac{dn_i^{(3)}}{dt} \approx 0$ y $J_{i-1 \rightarrow i}^{(2 \rightarrow 3)}, J_{i \rightarrow i+1}^{(2 \rightarrow 3)} \approx 0$, para obtener

$$\begin{cases} n_i^{(2)} \approx \frac{\tau_{sc}^{(2 \rightarrow 1)}}{e} J_{i-1 \rightarrow i}^{(1 \rightarrow 2)}, \\ n_i^{(3)} \approx \frac{\tau_{sc}^{(3 \rightarrow 1)}}{e} J_{i-1 \rightarrow i}^{(1 \rightarrow 3)}, \\ n_i^{(2)}, n_i^{(3)} \ll n_i^{(1)}, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq N,$$

en la escala de tiempo de la relajación dieléctrica.

Luego podremos fijar $n_i^{(2)} = n_i^{(3)} = 0$, y hacer tender $\mu_i^{(2)}, \mu_i^{(3)} \rightarrow -\infty$. Con lo cual consideramos $n_i = n_i^{(1)}$ y denotamos $\mu_i := \mu_i^{(1)}$. La ecuación (2.8) pasará a ser

$$n_i = \frac{m_W k_B T}{\pi \hbar^2} \int_0^\infty A_{C_{1,i}}(\lambda) \log \left(1 + \exp \left(\frac{\mu_i - \lambda}{k_B T} \right) \right) d\lambda, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.30)$$

y la ecuación (2.27) podemos reescribirla como

$$J_{i \rightarrow i+1} = J_{i \rightarrow i+1}^+(V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, \mu_i, T) - J_{i \rightarrow i+1}^-(V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, \mu_{i+1}, T), \quad (2.31)$$

donde hemos utilizado la descripción dada en la sección 2.2.3 y la ecuación (2.25) para definir

$$J_{i \rightarrow i+1}^+ = \frac{e\hbar k_B T}{2m_{B_i}} \sum_{v=1}^3 \int_0^\infty \left[A_{C_{1,i+1}}(\lambda) B_i^c(\lambda) B_i^n(\lambda) T_i(\lambda) A_{C_{v,i}}(\lambda + S_i) \cdot \log \left(1 + \exp \left(\frac{\mu_i - \lambda}{k_B T} \right) \right) \right] d\lambda, \quad (2.32)$$

$$J_{i \rightarrow i+1}^- = \frac{e\hbar k_B T}{2m_{B_i}} \int_0^\infty \left[A_{C_{1,i}}(\lambda) B_i^c(\lambda) B_i^n(\lambda) T_i(\lambda) A_{C_{1,i+1}}(\lambda + S_i) \cdot \log \left(1 + \exp \left(\frac{\mu_{i+1} - (\lambda + S_i)}{k_B T} \right) \right) \right] d\lambda. \quad (2.33)$$

Para acortar la presentación de estas ecuaciones hemos definido una variable auxiliar, S_i , que representa un desplazamiento de energía, definida como sigue:

$$S_i := \frac{1}{4} \frac{d_{W_i}}{d_{B_{i-1}}} \frac{\varepsilon_{B_{i-1}}}{\varepsilon_W} eV_{i-1} + \left(1 + \frac{1}{4} \frac{d_{W_i} + d_{W_{i+1}}}{d_{B_i}} \frac{\varepsilon_{B_i}}{\varepsilon_W} \right) eV_i + \frac{1}{4} \frac{d_{W_{i+1}}}{d_{B_{i+1}}} \frac{\varepsilon_{B_{i+1}}}{\varepsilon_W} eV_{i+1}, \quad (2.34)$$

para $1 \leq i \leq N-1$.

2.3 Modelo estocástico

En el modelo podemos añadir, de manera directa, tanto ruido interno (ruido térmico y ruido de tipo *shot* [12, 17]) para describir las fluctuaciones en la densidad de corriente túnel, como externo (ruido de Johnson-Nyquist [48, 62], o térmico, a la vez que ruido artificial [71]) que sería el propio del circuito en el que la superred está integrada.

El ruido externo lo introducimos modificando la ecuación (2.26) considerando una estructura para la caída de voltaje a lo largo de toda la superred. Es decir,

$$V_{SL} = V_{\text{bias}}(t) + \eta(t), \quad (2.35)$$

donde V_{bias} es el voltaje de polarización (o *bias*) ofrecido por el circuito y que puede variar en el tiempo (en caso de que haya una señal alternada además de una continua en el voltaje), y η recoge las fluctuaciones presentes en ese *bias*.

En cuanto al ruido interno asociado a la densidad de corriente túnel, lo introducimos modificando la ecuación 2.29 del siguiente modo [17]:

$$\frac{\varepsilon_{B_i}}{d_{B_i}} \frac{dV_i}{dt} + J_{i \rightarrow i+1} + \eta_i(t) = J(t), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.36)$$

donde η_i son ruidos blancos independientes de media cero y cuya correlación es:

$$\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \frac{e}{A} \left[J_{i \rightarrow i+1}^+ + J_{i \rightarrow i+1}^- + 2k_B T \frac{\partial}{\partial \mu} J_{i \rightarrow i+1}^- \Big|_{\mu=\mu_i} \right] \delta_{ij} \delta(t-t'), \quad (2.37)$$

donde A es el área de la superred. Notemos que $J_{i \rightarrow i+1}^+$ y $J_{i \rightarrow i+1}^-$ se evalúan del mismo modo que en las ecuaciones (2.31)-(2.33), pero $\frac{\partial}{\partial \mu} J_{i \rightarrow i+1}^-$ está evaluada en μ_i en lugar de μ_{i+1} .

En [17] se justifica una correlación análoga a (2.37) como ruido *shot* y térmico, relacionándola con la hidrodinámica fluctuante.

Esta forma de incluir el ruido es más realista que otros enfoques, como lo puede ser [41], pues no consideran ruido alguno en la ecuación (2.35), y las ecuaciones (2.36) incluyen sólo un ruido externo modificable a voluntad para cada pozo de la superred.

2.4 Relación entre densidad de corriente total y V_{SL}

Sea $u \in \mathbb{R}^{N+1}$. Podemos vectorizar las ecuaciones (2.36) y tomar el producto escalar, obteniendo

$$\langle u, \left(\frac{dV_i}{dt} \right)_{i=0}^N \rangle + \langle u, \left(\frac{d_{B_i}}{\varepsilon_{B_i}} (J_{i \rightarrow i+1} + \eta_i(t)) \right)_{i=0}^N \rangle = J(t) \langle u, \left(\frac{d_{B_i}}{\varepsilon_{B_i}} \right)_{i=0}^N \rangle, \quad (2.38)$$

de donde podríamos despejar $J(t)$ si $\langle u, (d_{B_i}/\varepsilon_{B_i})_{i=0}^N \rangle \neq 0$. Por otra parte, tenemos el término $\langle u, (dV_i/dt)_{i=0}^N \rangle$ que queremos relacionar con la caída de potencial a lo largo de toda la superred para, así, incorporar los efectos macroscópicos.

Derivando la ecuación (2.26), reordenando términos, y teniendo en cuenta la ecuación (2.35), llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_{\text{bias}} + \frac{d\eta}{dt} = \frac{d}{dt} V_{SL} = & \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_1}}{d_{B_0}} \frac{\varepsilon_{B_0}}{\varepsilon_W} \right) \frac{dV_0}{dt} + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_i} + d_{W_{i+1}}}{d_{B_i}} \frac{\varepsilon_{B_i}}{\varepsilon_W} \right) \frac{dV_i}{dt} + \\ & + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_N}}{d_{B_N}} \frac{\varepsilon_{B_N}}{\varepsilon_W} \right) \frac{dV_N}{dt}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde entendemos $d\eta/dt$ como una derivada generalizada, y donde el lado derecho tiene estructura de producto escalar con el vector $(dV_i/dt)_{i=0}^N$. Escogemos u de modo que se cumpla la ecuación (2.39), es decir,

$$\frac{d}{dt} V_{\text{bias}} + \frac{d\eta}{dt} = \langle u, \left(\frac{dV_i}{dt} \right)_{i=0}^N \rangle.$$

donde $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N)$ es tal que

$$\begin{cases} u_0 = 1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_1}}{d_{B_0}} \frac{\varepsilon_{B_0}}{\varepsilon_W}, \\ u_i = 1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_i} + d_{W_{i+1}}}{d_{B_i}} \frac{\varepsilon_{B_i}}{\varepsilon_W}, & 1 \leq i \leq N-1, \\ u_N = 1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_N}}{d_{B_N}} \frac{\varepsilon_{B_N}}{\varepsilon_W}. \end{cases} \quad (2.40)$$

Ésta elección de u nos permitirá despejar la densidad de corriente total, $J(t)$, en la ecuación (2.38). Esto es gracias a que siempre se verificará la condición $\langle u, (d_{B_i}/\varepsilon_{B_i})_{i=0}^N \rangle \neq 0$ porque todas las componentes de $(d_{B_i}/\varepsilon_{B_i})_{i=0}^N$ son positivas, al igual que ocurre con todas las componentes de u .

2.5 Cálculo de niveles de energía

Dado que la masa efectiva del electrón puede variar de barrera en barrera, y que cada pozo y barrera pueden variar en longitud de periodo en periodo de la superred, no vamos a asumir periodicidad en la superred, con lo cual no sería adecuado usar un enfoque como el modelo de Kronnig-Penney de potencial periódico [7].

En su lugar, vamos a aprovechar el débil acoplamiento entre pozos de la superred, y asumiremos que cada pozo está rodeado por barreras de potencial finito pero de extensión infinita.

Entonces, el ν -ésimo nivel de energía en el pozo i -ésimo, $\mathcal{E}_{C_{\nu,i}}$, lo calcularemos como el ν -ésimo valor propio, λ_ν , de la ecuación de Schrödinger,

$$\begin{cases} -\frac{\hbar}{2m^*} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + W(x)\varphi = \lambda\varphi, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0, \end{cases} \quad (2.41)$$

donde el potencial, que respeta la longitud del pozo, vendrá dado por

$$W(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq d_{W_i} \\ eV_B, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y la masa efectiva del electrón dependerá de las barreras que rodeen al pozo, es decir,

$$m^*(x) = \begin{cases} m_{B_{i-1}}, & x < 0 \\ m_W, & 0 \leq x \leq d_{W_i} \\ m_{B_i}, & x > d_{W_i} \end{cases}$$

Las soluciones y valores propios de la ecuación (2.41) serán aproximadas numéricamente, tal como describimos en el apéndice B.1. En la figura 2.3 tenemos los niveles de energía asociados a diferentes longitudes de pozo cuántico, d_W .

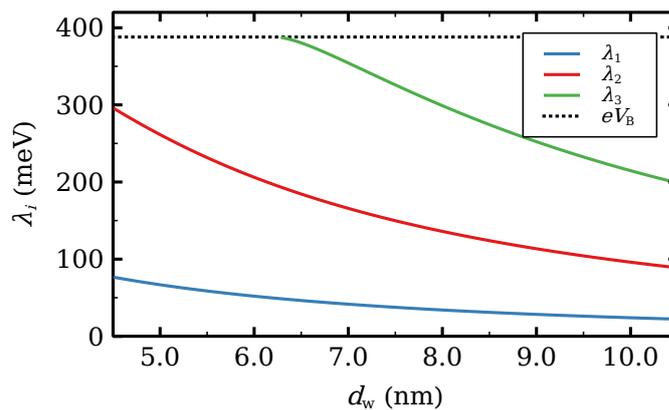


Fig. 2.3 Niveles de energía según ancho de pozo cuántico, cuando las barreras tienen una altura $eV_B = 388$ meV. Calculados siguiendo el apéndice B.1. La línea punteada indica el nivel de energía de las barreras.

2.6 Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales ($V_0(0), \dots, V_N(0)$) que se utilizarán en las ecuaciones (2.1) a la hora de integrarlas numéricamente dependen del tipo de observación que queramos hacer, pero, en general será partir de un perfil uniforme.

Para esto, fijamos $V_i(0) = V_{\text{unif}} \in \mathbb{R}$, $\forall i$. Pero hará falta cumplir la restricción 2.26 sobre el potencial que, en este caso, se leerá como

$$V_{\text{SL}}(0) = \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_1}}{d_{B_0}} \frac{\varepsilon_{B_0}}{\varepsilon_W} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_i} + d_{W_{i+1}}}{d_{B_i}} \frac{\varepsilon_{B_i}}{\varepsilon_W} \right) + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_N}}{d_{B_N}} \frac{\varepsilon_{B_N}}{\varepsilon_W} \right) \right] V_{\text{unif}}, \quad (2.42)$$

de donde podemos despejar el potencial uniforme V_{unif} pues los sumandos son todos positivos y, además, conocemos $V_{\text{SL}}(0)$.

En caso de querer introducir cambios de comportamiento en V_{SL} (por ejemplo, barridos adiabáticos de voltaje), bastará utilizar como condición inicial una perturbación del estado final de V_0, \dots, V_N para que se ajuste al nuevo voltaje V_{SL} . Puesto que la restricción (2.26) no deja de ser un producto escalar (y está definiendo un espacio afín), ésta perturbación se realiza como una proyección, tal como se describe en el apéndice B.2.3.

Capítulo 3

Superred homogénea

Los primeros resultados que obtendremos del modelo serán los relacionados a la interacción con ruido externo en el caso de una superred semiconductor ideal. Esto es, todos los periodos que componen la superred tendrán idénticas propiedades. Nos aprovecharemos de este hecho para realizar una serie de simplificaciones que veremos en la sección 3.1, las cuales, además de recortar el consumo de recursos a la hora de hacer simulaciones numéricas, permiten definir y aclarar ciertos conceptos relacionados al transporte electrónico por efecto túnel resonante secuencial.

En los sistemas físicos no lineales, como es el caso de nuestro modelo, el ruido puede tener interacciones bastante llamativas pues podrían ser aprovechadas tecnológicamente, como puede ser su uso en la detección o amplificación de señales débiles que, de otro modo, estarían escondidas entre el ruido de fondo. Esto es lo que se conoce por resonancia estocástica [58, 35, 5, 27, 59]. Otras interacciones constructivas pueden ser la superresolución en acústica [30, 14], o la resonancia coherente [36, 64, 37, 4, 31, 41], que es la obtención de una respuesta periódica gracias al ruido. A lo largo de la sección 3.3 entraremos en más detalles sobre las interacciones pertinentes a nuestro caso y compararemos los resultados obtenidos a partir del modelo [60] con observaciones de experimentos en laboratorio [71].

3.1 Simplificación del modelo

En este capítulo trabajaremos con superredes ideales (homogéneas). Es decir, cuyas propiedades son idénticas para todos los periodos. Ésto nos permite, por una parte, dejar de lado los índices en los parámetros y, por otro, seguir las simplificaciones descritas en [16, 17]. Además, no vamos a considerar ruido interno por los motivos mencionados en la sección 3.2.

Asumiendo que V_{i-1}/d_B , V_i/d_B y V_{i+1}/d_B se pueden aproximar por un campo eléctrico F_i medio, de la ecuación 2.25 obtenemos que $F_i = V_{W_i}/d_W$. Lo que nos permite reescribir las ecuaciones 2.6 como

$$n_i = N_D + \frac{\varepsilon}{e}(F_i - F_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.1)$$

donde $\varepsilon := d_L/(d_B/\varepsilon_B + d_W/\varepsilon_W)$ es la permisividad media.

Por otra parte, si tomamos $\gamma_1 \downarrow 0$, las Lorentzianas (2.9) se pueden aproximar como $\delta(\lambda - \mathcal{E}_{C_1})$, lo que nos lleva a aproximar (2.30) como

$$n_i = \frac{m^* k_B T}{\pi \hbar^2} \log \left(1 + \exp \left(\frac{\mu_i - \mathcal{E}_{C_1}}{k_B T} \right) \right), \quad (3.2)$$

donde $m^* := m_W$ es la masa efectiva de los electrones. De esta ecuación ahora es posible extraer μ_i por manipulaciones algebraicas si se conoce n_i .

Por otra parte, la consideración de que $A_{C_{1,i}}(\lambda) A_{C_{v,i+1}}(\lambda + eV_i + \frac{e}{2}(V_{W_i} + V_{W_{i+1}}))$ es el factor dominante en (2.13), junto con que $V_i + (V_{W_i} + V_{W_{i+1}})/2 \approx (d_W + d_B)F_i = d_L F_i$, nos da la siguiente aproximación

$$\int_{\mathbb{R}} A_{C_{1,i}}(\lambda) A_{C_{v,i+1}}(\lambda + eF_i d_L) = \frac{(\gamma_1 + \gamma_v)/\pi}{(\mathcal{E}_{C_1} - \mathcal{E}_{C_v} + eF_i d_L)^2 + (\gamma_1 + \gamma_v)^2}, \quad (3.3)$$

la cual, junto con (3.2), permitirá reescribir la densidad de corriente (2.13) como

$$J_{i \rightarrow i+1} = \frac{en_i}{d_L} v^{(f)}(F_i) - J_{i \rightarrow i+1}^-(F_i, n_{i+1}, T), \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (3.4)$$

donde

$$J_{i \rightarrow i+1}^-(F_i, n_{i+1}, T) = \frac{em^* k_B T}{\pi \hbar^2 d_L} v^{(f)}(F_i) \cdot \log \left(1 + \exp \left(-\frac{eF_i d_L}{k_B T} \right) \left(\exp \left(\frac{\pi \hbar^2 n_{i+1}}{m^* k_B T} \right) - 1 \right) \right), \quad (3.5)$$

y

$$v^{(f)}(F_i) = \sum_{v=1}^3 \frac{\frac{\hbar^3 d_L (\gamma_1 + \gamma_v)}{2m^{*2}} \mathcal{T}_i(\mathcal{E}_{C_1})}{(\mathcal{E}_{C_1} - \mathcal{E}_{C_v} + eF_i d_L)^2 + (\gamma_1 + \gamma_v)^2}, \quad (3.6)$$

para la cual [3, 76]

$$\mathcal{T}_i(\lambda) = \frac{16k_i^{c^2} k_i^{n^2} \alpha_i^{c^2} (k_i^{c^2} + \alpha_i^{c^2})^{-1} (k_i^{n^2} + \alpha_i^{c^2})^{-1}}{(d_W + \alpha_i^{p-1} + \alpha_i^{c-1}) (d_W + \alpha_i^{n-1} + \alpha_i^{c-1}) \exp(2\alpha_i^c d_B)}, \quad (3.7)$$

es una aproximación WKB [8] que recoge a las ecuaciones (2.14)-(2.16), y

$$k_i^c(\lambda) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m^* \lambda}, \quad (3.8)$$

$$k_i^n(\lambda) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m^* (\lambda + eF_i d_L)}, \quad (3.9)$$

$$\alpha_i^p(\lambda) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m^* \left[eV_B + e \left(d_B + \frac{d_W}{2} \right) F_i - \lambda \right]}, \quad (3.10)$$

$$\alpha_i^c(\lambda) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m^* \left[eV_B - e \frac{d_W}{2} F_i - \lambda \right]}, \quad (3.11)$$

$$\alpha_i^n(\lambda) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m^* \left[eV_B - e \left(d_B + \frac{3d_W}{2} \right) F_i - \lambda \right]}, \quad (3.12)$$

para $1 \leq i \leq N$, son la reescritura de (2.17)-(2.21) en términos del campo eléctrico.

Las ecuaciones de contorno (2.22)-(2.23) ahora serán

$$J_{0 \rightarrow 1} = \sigma_e F_0, \quad (3.13)$$

$$J_{N \rightarrow N+1} = \sigma_c \frac{n_N}{N_D} F_N. \quad (3.14)$$

Las ecuaciones de Ampère (2.29) las reescribimos como

$$\varepsilon \frac{dF_i}{dt} + J_{i \rightarrow i+1} = J(t), \quad 0 \leq i \leq N. \quad (3.15)$$

Finalmente, la restricción sobre el campo eléctrico será

$$V_{SL} = d_L \sum_{i=0}^N F_i, \quad (3.16)$$

donde $V_{SL}(t)$ vendrá determinada según la naturaleza del circuito en el que esté la superred conectada y que, en general, tendrá la forma

$$V_{SL} = V_{\text{bias}} + \eta(t). \quad (3.17)$$

d_W	d_B	N_D	V_B	ϵ	m^*
nm	nm	10^{10} cm^{-2}	mV	ϵ_0	m_e
7	4	6	388	12.1	0.1
\mathcal{E}_{C_1}	\mathcal{E}_{C_2}	\mathcal{E}_{C_3}	γ_1	γ_2	γ_3
meV	meV	meV	meV	meV	meV
45	173	346	2.5	8	24

Tabla 3.1 Configuración de superred homogénea (siguiendo el modelo descrito en la sección 3.1) con $N = 50$ periodos a temperatura $T = 295 \text{ K}$. La sección transversal de la superred es un cuadrado de $30 \mu\text{m}$. ϵ_0 es la constante dieléctrica del vacío, y m_e es la masa del electrón.

3.2 Configuración del sistema y características principales

Vamos a realizar un análisis previo sobre la dinámica determinista del sistema. Para ello consideramos que la superred está sometida a una caída de potencial constante y sin ruido, lo que se traduce a que fijamos $\eta_c(t) \equiv 0$ en la ecuación (3.17).

Primero describiremos el origen del comportamiento oscilatorio de la corriente. Acto seguido, trataremos la influencia de la conductividad del contacto, σ_e , en la dinámica del sistema, puesto que será relevante a la hora de observar la interacción constructiva con el ruido.

Consideraremos $\sigma_e = \sigma_c$ y los parámetros de la tabla 3.1.

El estudio teórico de ésta sección necesita representar las condiciones experimentales [71] planteadas en la figura 3.1. Ésto lo logramos hacer tomando $V_{\text{bias}}(t) = V_{\text{dc}} + V_{\text{ac}}(t)$ con $V_{\text{ac}}(t) = V_{\text{sin}} \sin(2\pi\nu t)$ representando la señal sinusoidal, y $\eta(t) = \eta_{\text{th}} + \eta_c$ con η_{th} haciendo la función de ruido térmico del circuito y η_c el ruido de ancho de banda limitado que se amplifica. La resistencia de 50Ω no la tendremos en cuenta pues lo único que hace es desplazar la curva $I - V$ característica y, a fin de cuentas, nuestro objetivo es entender cómo ocurren los fenómenos que se observan, en lugar de hacer un ajuste a la perfección (labor complicada dada la no linealidad del modelo).

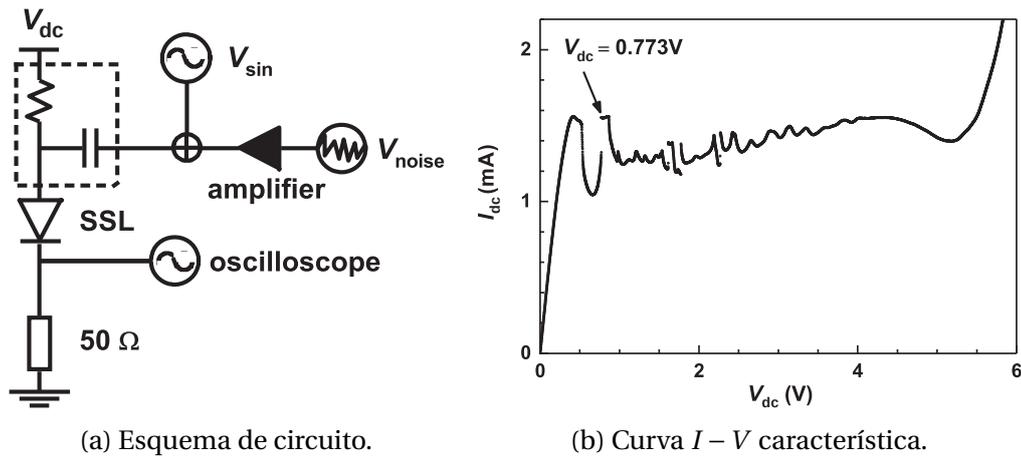


Fig. 3.1 Referencia de experimento. La caída de potencial a lo largo de la superred estará compuesta por una señal constante V_{dc} , una señal sinusoidal con amplitud V_{sin} , y una fuente de ruido amplificado. La corriente total se medirá con un osciloscopio en una resistencia de 50Ω . Figuras extraídas de [71].

3.2.1 Origen del comportamiento oscilatorio

Las superredes semiconductoras dopadas y débilmente acopladas que, según los parámetros y el voltaje al que se ven sometidas, pueden demostrar un comportamiento excitable u oscilatorio [16, 21].

Cuando el dopaje es alto, las superredes tienen estados estacionarios multiestables (la evolución de la caída de potencial puede afectar la estabilidad, además de que hay histéresis presente) y las curvas¹ características $I - V$, formadas por $(V_{SL}, I(V_{SL}))$, donde $I = A \cdot J$, con A el área de la sección transversal de la superred y J es la densidad de corriente *estacionaria*, tienen forma de sierra bajo una caída de potencial V_{SL} constante [49, 16].

Por otra parte, un pulso cuadrado en la señal de voltaje puede excitar el sistema [54], lo cual queda evidenciado por un pico pronunciado de la densidad de corriente total. Este pico se debe a la formación de una onda de dipolo de carga en el contacto inyector y su subsiguiente movimiento a lo largo de la superred, hasta alcanzar el contacto colector [3, 66]. Esto se puede entender mejor apoyándonos en las figuras 3.2 y 1.3: Inicialmente, el sistema se encuentra en un estado estacionario donde el perfil de campo eléctrico a lo largo de la superred es estable. Éste perfil consiste de una gran región de campo bajo que comienza en el contacto inyector y una corta región de campo alto cercana al contacto colector. Al alterar el voltaje adecuadamente [3, 16], la región de campo alto escapa por el contacto colector y comienza a reciclarse a través del contacto inyector. Seguidamente, se

¹Dada la multiestabilidad, cabe hablar de una pluralidad de curvas características $I - V$.

irá desarrollando un dominio de campo alto desde el contacto inyector, cuya área acumulada (entendiendo la restricción (3.16) como una regla de integración) deberá compensarse reduciendo la densidad de corriente, para así mantener el área. En tanto la densidad de corriente pase J_{cr} , el corto dominio de campo alto que nace en el contacto inyector se separará de éste. Ahora, al haber una diferencia de potencial V_{SL} entre los contactos inyector y colector, éste dominio de campo alto se ve forzado a desplazarse en dirección al colector. Entonces se tendrá una pequeña región, cuyo campo eléctrico tendrá valores superiores a F_{cr} , mientras que el resto de la superred tendrá un campo eléctrico cercano a $F^{(1)}(J)$ (en la primera rama creciente de la curva característica de densidad de corriente frente al campo eléctrico, de la figura 3.2), donde ambas circunstancias están asociadas a una densidad de corriente túnel más baja que la crítica, J_{cr} . Puesto que habrá una región anterior y posterior de bajo campo eléctrico que encierra a la región de alto campo eléctrico que, a su vez se va desplazando, podemos hablar de una *onda de dipolo de carga* (ver figura 1.3). Por último, esta región de campo alto alcanzará el contacto colector y el campo eléctrico a lo largo de la superred recuperará su perfil estable inicial, asociado a una corriente mayor que la lograda por el viaje de la onda de dipolo de carga. Se entiende, pues, que una perturbación suficientemente grande provoca que el sistema haga una excursión en el espacio de fases, partiendo y acabando en un mismo estado estacionario estable. Ésto ilustra la condición de sistema excitable de una superred.

Cuando el dopaje es bajo, como es el caso, la densidad de corriente total a través de la superred puede llegar a oscilar de manera periódica en presencia de una caída de potencial constante. Estas oscilaciones son causadas por la ocurrencia repetitiva de nucleación y movimiento de ondas de dipolo de carga [21]. Según la conductividad del contacto inyector, la densidad de dopaje, y la temperatura, podemos hallar intervalos de voltaje en los que, fijado éste, la corriente oscila de manera sostenida [41].

Por último, cabe mencionar que, si bien nos centramos en la primera región de voltaje V_{SL} que presenta comportamiento oscilatorio de la corriente que, como mencionamos en la introducción, llamamos primer *plateau* de oscilaciones, pueden haber regiones de oscilaciones a un voltaje mucho mayor (segundo y, quizá, tercer *plateau*). Entre estas regiones, donde la corriente media suele variar poco, encontramos un régimen estacionario donde la corriente aumenta a la par que V_{SL} , siguiendo una ley de Ohm. Nuestro interés recae en la primera región oscilatoria pues es en la que se centran los experimentos y, dado el voltaje necesario (del orden de diez veces superior) para alcanzar las otras regiones, éstas no sean observables

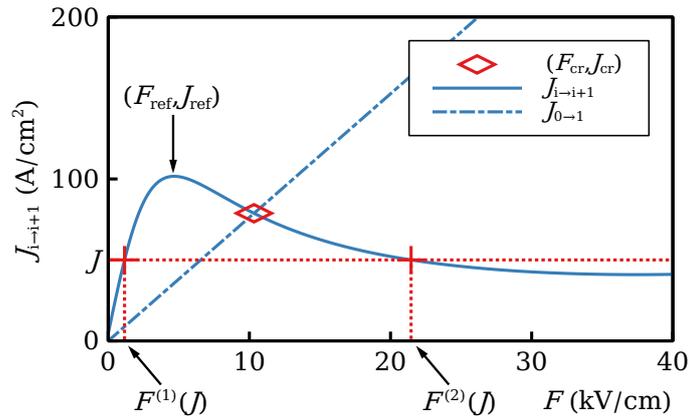


Fig. 3.2 Curva característica de densidad de corriente frente a campo eléctrico (línea continua) y densidad de corriente del contacto inyector (línea discontinua), para campo eléctrico uniforme ($\forall i, F_i = F$). La primera intersección (rombo) da la densidad de corriente túnel crítica, J_{cr} , y el campo eléctrico asociado, F_{cr} , correspondientes a una conductividad σ_e dada. El primer máximo local da el par de valores de referencia para la densidad de corriente y para el campo eléctrico, (F_{ref}, J_{ref}) . En este caso particular, $\sigma_e = 0.763 \text{ A/Vm}$, $F_{cr} = 10.3265 \text{ kV/cm}$, y $J_{cr} = 78.7959 \text{ A/cm}^2$. Figura (sólo cuadro principal) extraída de [60].

de manera viable en experimentos. Con lo cual podemos considerar que son una característica adicional del modelo.

3.2.2 Comportamiento según la conductividad del contacto

Vamos a realizar un análisis previo sobre la influencia de la conductividad del contacto, σ_e , sobre la dinámica del sistema.

Salvo por una región acotada del espacio de fases que puede verse en la figura 3.3, el sistema se hallará en un estado estacionario linealmente estable. Es decir, el perfil del campo eléctrico a lo largo de la superred, (F_0, \dots, F_N) , se hallará en un punto fijo atractor.

Si los parámetros (V_{SL}, σ_e) se encuentran dentro de la región acotada, por contra, el sistema se hallará en un régimen de comportamiento oscilatorio. Esta región tiene dos zonas diferenciadas, indicadas con diferentes colores en la figura 3.3: en las zonas de bajo voltaje hay oscilaciones de alta frecuencia, mientras que en el resto las hay de baja frecuencia. Estas zonas de alta y baja frecuencia vienen definidas por el comportamiento interno de la superred y, para un determinado valor de la conductividad, denotaremos por V_d al voltaje crítico donde ocurre el cambio de una zona a otra.

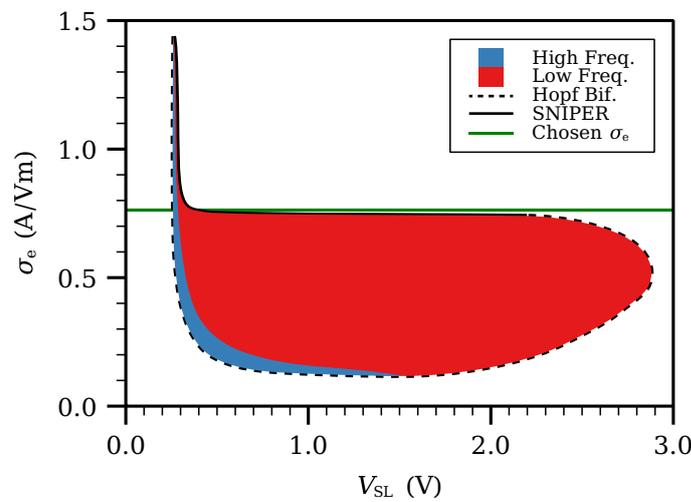


Fig. 3.3 Diagrama de fases de la conductividad del contacto inyector, σ_e , frente a una caída de potencial constante a lo largo de la superred, $V_{SL} = V_{dc}$. En la región blanca no hay oscilaciones de la corriente, en la región azul hay oscilaciones de alta frecuencia (véase la figura 3.4), y en la región roja hay oscilaciones de baja frecuencia (véase la Fig. 3.6). La línea negra discontinua denota que las oscilaciones surgen por una bifurcación de Hopf supercrítica. En cambio, la línea negra continua indica que surgen por una bifurcación de punto de silla de periodo infinito (SNIPER, o *saddle node infinite period bifurcation*). La línea verde indica la conductividad escogida para las simulaciones de la sección 3.3. Figura extraída del material suplementario de [60].

La zona de oscilaciones de alta frecuencia está caracterizada por el hecho de que, en presencia de una caída de potencial relativamente baja, las ondas de dipolo de carga que se nuclean en el contacto inyector, al moverse a través de la superred, no alcanzan el contacto colector y se reciclan antes. Como las oscilaciones en la corriente vienen causadas por la nucleación y movimiento de estas ondas, resultará que las oscilaciones tienen un periodo corto. Un ejemplo en éste régimen de oscilaciones lo podemos ver en la figura 3.4.

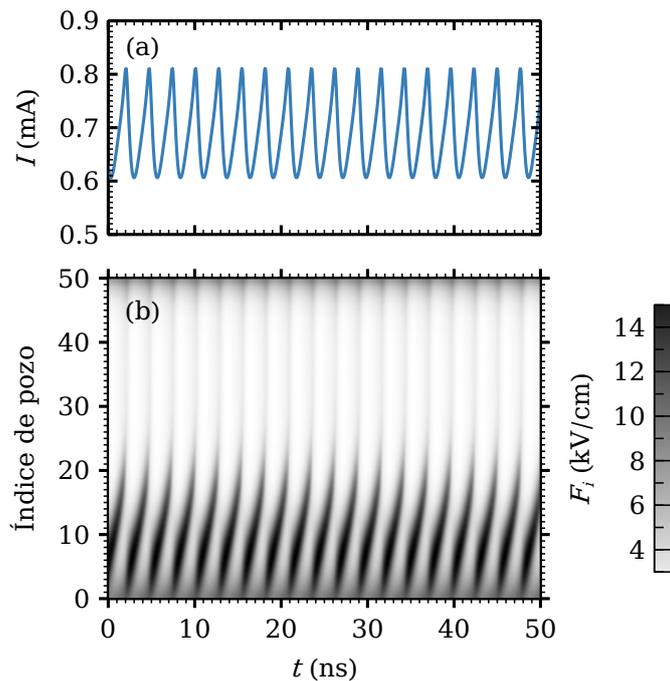


Fig. 3.4 Comportamiento en régimen de oscilaciones de alta frecuencia. (a) Evolución de la corriente total a lo largo del tiempo. (b) Evolución del campo eléctrico en cada pozo en el mismo tramo de tiempo que (a). La caída de potencial a lo largo de la superred está fijada en $V_{SL} = V_{bias} = 0.27$ V, y no se considera ruido interno ni externo. Figura extraída del material suplementario de [60].

La zona de oscilaciones de baja frecuencia está caracterizada, en cambio, por el hecho de que las ondas de dipolo de carga que se nuclean en el contacto inyector, al moverse a través de la superred, sí alcanzan el contacto colector. Como las oscilaciones en la corriente vienen causadas por la nucleación y movimiento de estas ondas, resultará que las oscilaciones tienen un periodo largo. Estas oscilaciones de baja frecuencia se pueden distinguir en dos tipos, según el valor de la conductividad del contacto, σ_e :

- Si la conductividad es relativamente baja (correspondiente a la zona más ancha en la figura 3.3), la frecuencia apenas disminuirá al aumentar el voltaje

V_{SL} , pero irá disminuyendo su amplitud. Esto viene provocado porque las ondas de dipolo de carga no mantienen su estructura en su viaje por la superred. En su lugar, la onda se va ensanchando en su viaje (cubriendo más periodos con un campo eléctrico alto) hasta que es lo suficientemente ancha como para haber alcanzado el contacto colector, donde el campo eléctrico es más alto, y entonces se recicla. Al aumentar el voltaje lo que se logra es que la onda de dipolo ensanchada alcance un campo eléctrico similar al que hay cerca del contacto, acercándose, así, a uniformizar el campo eléctrico a lo largo de la superred. Un ejemplo en éste régimen de oscilaciones lo podemos ver en la figura 3.5.

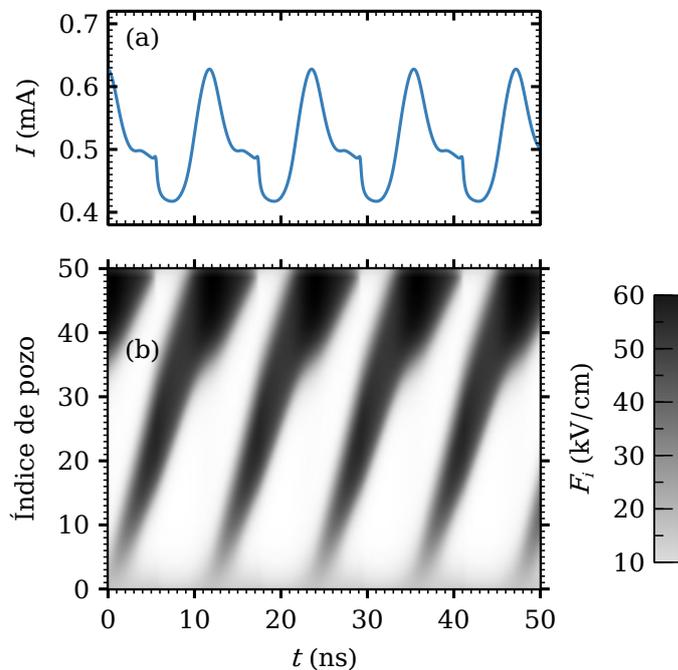


Fig. 3.5 Comportamiento en régimen de oscilaciones de baja frecuencia a baja conductividad. (a) Evolución de la corriente total a lo largo del tiempo. (b) Evolución del campo eléctrico en cada pozo en el mismo tramo de tiempo que (a). La caída de potencial a lo largo de la superred está fijada en $V_{SL} = V_{bias} = 1.20V$, y no se considera ruido interno ni externo.

- Si la conductividad es relativamente alta, se logra que las ondas de dipolo de carga viajen a través de la superred sin deformaciones en su estructura. Es decir, hay unos pocos periodos de la superred con un campo eléctrico alto (alrededor de $F^{(2)}$) y el resto a bajo campo (alrededor de $F^{(1)}$). Respectivamente, por encima y por debajo del campo crítico, F_{cr} . Esto se asocia a una densidad de corriente túnel baja (ver de nuevo la figura 3.2). Cuando

la onda alcanza el contacto colector, ésta se queda estancada y su ancho disminuye, permaneciendo en un estado cuasi estacionario. Para preservar la ecuación (3.16), el campo en el resto de la superred aumenta, acercándose a F_{cr} . De este modo, la densidad de corriente túnel aumentará a un valor cercano al crítico, J_{cr} . Al aumentar el voltaje V_{SL} , el tiempo que el sistema permanece en el estado cuasi estacionario se va prolongando, el máximo que alcanza no cambia al variar V_{SL} , y la diferencia de densidad de corriente total cuando viaja una onda frente al estado cuasi estacionario no disminuye, como se puede apreciar en la figura 3.7 para un caso particular. Un ejemplo en éste régimen de oscilaciones lo podemos ver en la figura 3.6.

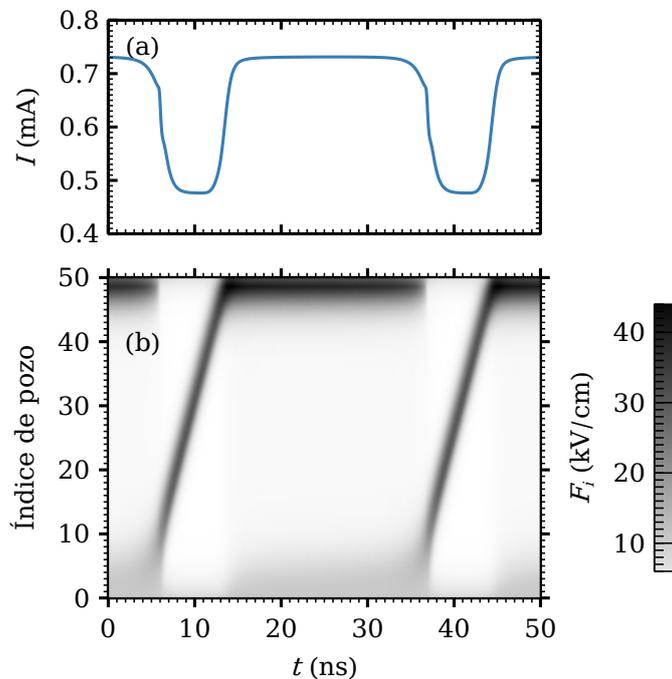


Fig. 3.6 Comportamiento en régimen de oscilaciones de baja frecuencia a alta conductividad. (a) Evolución de la corriente total a lo largo del tiempo. (b) Evolución del campo eléctrico en cada pozo en el mismo tramo de tiempo que (a). La caída de potencial a lo largo de la superred está fijada en $V_{SL} = V_{bias} = 0.36V$, y no se considera ruido interno ni externo. Figura extraída del material suplementario de [60].

En lo que respecta a la transición entre estados estacionarios y régimen de oscilaciones, tenemos que, fijada la conductividad del contacto σ_e , las oscilaciones siempre nacen a partir de una bifurcación de Hopf supercrítica en un voltaje que denotaremos V_{Hopf} . En cambio, al ir aumentando el voltaje V_{SL} , la forma en que desaparecen depende de la conductividad del contacto. Tal como hemos descrito

previamente, si la conductividad es relativamente baja, la frecuencia de las oscilaciones apenas varía, pero sí su amplitud, que va siendo cada vez menos pronunciada (el campo eléctrico es cada vez más uniforme en las oscilaciones). Esto se traduce a que desaparecen, igual que aparecen, por una bifurcación de Hopf supercrítica. En cambio, si la conductividad es relativamente alta, la amplitud de las oscilaciones no disminuye pero sí que aumenta el tiempo entre ellas. De hecho, al acercarse V_{SL} a un valor crítico que denotaremos por V_{SNIPER} , el tiempo que el sistema permanece en el estado cuasi estacionario entre oscilación y oscilación de la corriente tenderá a infinito. Esta clase de bifurcación se conoce como bifurcación de punto de silla de periodo infinito (SNIPER, por su nombre en inglés *saddle node infinite period bifurcation*). En la figura 3.3 las bifurcaciones de Hopf vienen indicadas por una línea negra discontinua, mientras que las de punto de silla de periodo infinito vienen indicadas por una línea negra continua.

3.3 Efectos constructivos del ruido

En sistemas excitables oscilatorios no lineales, un ruido con amplitud suficiente puede producir oscilaciones coherentes (el periodo de las oscilaciones varía muy poco), como también potenciar la proporción de una señal frente al ruido (SNR, o *signal-to-noise ratio*). Este tipo de efectos constructivos del ruido suelen estar estudiados en sistemas de baja dimensionalidad que, además, ofrezcan ciertas facilidades a la hora de su tratamiento teórico como numérico. Un modelo clásico que presenta resonancia coherente es el oscilador excitable de FitzHugh-Nagumo [64, 31], que es utilizado para modelar la activación y desactivación de neuronas [59]. Por su parte, un modelo mínimo que demuestre resonancia estocástica es el de una partícula en un potencial de doble pozo [35] con una fuente oscilatoria monocromática y bajo la presencia de ruido blanco.

En superredes semiconductoras, la posibilidad de hallar resonancia coherente había sido establecida teóricamente [41] y, posteriormente, fue observada a muy baja temperatura (alrededor de 77 K) en superredes de tipo GaAs/AlAs [46]. Sin embargo no se había hallado evidencia de resonancia estocástica, hasta [60, 71].

En esta sección describiremos el hallazgo, en superredes semiconductoras de tipo GaAs/Al_xGa_{1-x}As, con proporción $x = 0.45$, de resonancia tanto coherente como estocástica a temperatura ambiente a través del modelo teórico descrito en la sección 3.1. Esta descripción irá acompañada por una comparativa con observaciones experimentales, con las cuales hay un acuerdo cualitativo notable.

En lo que resta de capítulo, vamos a considerar que los componentes de la ecuación (3.17) son:

$$V_{\text{bias}}(t) = V_{\text{dc}} + V_{\text{ac}}(t), \quad (3.18)$$

y

$$\eta(t) = \eta_{\text{th}}(t) + \eta_c(t), \quad (3.19)$$

donde V_{dc} es un voltaje constante, $V_{\text{ac}}(t)$ es la componente oscilatoria de la caída de potencial $V_{\text{bias}}(t)$, $\eta_{\text{th}}(t)$ es el ruido térmico asociado al propio circuito, y $\eta_c(t)$ es un ruido artificial que podemos controlar a voluntad.

En lo que respecta al ruido, en la ecuación (3.15) no estamos considerando fluctuaciones en la densidad de corriente causadas por el ruido *shot* y térmico. Esto nos lo podemos permitir porque el ruido propio del circuito, η_{th} , y el ruido controlable que añadiremos manualmente, η_c , tienen una amplitud mucho mayor. En particular, η_{th} será un ruido blanco gaussiano de media cero y desviación típica de 2 mV [81]. Por su parte, η_c será un ruido blanco gaussiano de media cero, con amplitud $V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$ controlable, pero con un ancho de banda limitado a 1 GHz. Estos valores del ruido se han escogido para que las simulaciones numéricas coincidan de manera cualitativa con los experimentos y con otras observaciones teóricas [81]. Detalles sobre la creación del ruido se pueden hallar en el apéndice B.3.

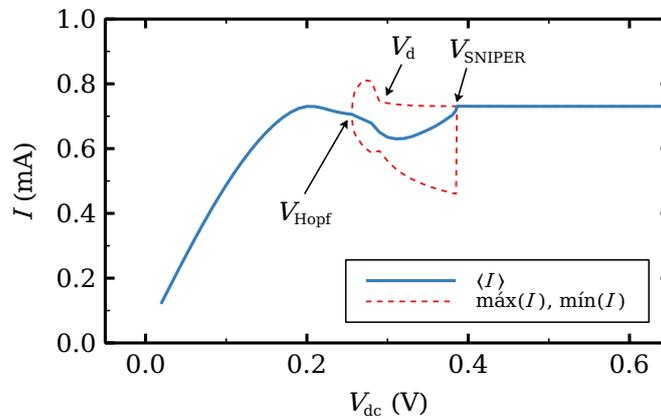


Fig. 3.7 Curva $I - V$ característica cuando la conductividad del contacto inyector es $\sigma_e = 0.763 \text{ A/Vm}$. La línea continua es la corriente promediada en tiempo. Las líneas discontinuas indican el máximo (mínimo) alcanzado por la corriente. Entre V_{Hopf} y V_d , las oscilaciones son de alta frecuencia (ver figura 3.4). Entre V_d y V_{SNIPER} , las oscilaciones son de baja frecuencia (ver figura 3.6). Figura (versión ampliada) extraída de [60].

Por su parte, consideraremos una conductividad del contacto $\sigma_e = 0.763 \text{ A/Vm}$. En este caso, las oscilaciones en la corriente, en ausencia de ruido, comienzan con una bifurcación de Hopf supercrítica en $V_{\text{Hopf}} := V_{\text{dc}} = 0.255 \text{ V}$ y acaban con

una bifurcación de punto de silla de periodo infinito en $V_{\text{SNIPER}} := V_{\text{dc}} = 0.385\text{V}$, como se indica en la figura 3.2. En lo que sigue, fijaremos $V_{\text{dc}} = 0.387\text{V}$, o sea, 2 mV por encima de V_{SNIPER} , por tanto se trata de una situación en la que el sistema se halla en un estado estacionario y la densidad de corriente es constante, valor que denotaremos por J_{dc} , junto a la magnitud asociada de corriente, $I_{\text{dc}} = A \cdot J_{\text{dc}}$. Estar cerca de la bifurcación de punto de silla de periodo infinito será importante de cara a hallar resonancia tanto coherente como estocástica.

3.3.1 Resonancia coherente

Como se ha mencionado previamente, decimos que una resonancia coherente ocurre cuando el ruido en la entrada de un sistema produce una respuesta *ordenada*, como lo pueden ser oscilaciones con una periodicidad bastante regular.

En nuestro caso, con $\sigma_e = 0.763\text{A/Vm}$ y $V_{\text{dc}} = 0.387\text{V}$, cuando la amplitud RMS (*root mean square*), $V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$, del ruido ajustable η_c supera cierto umbral, comienzan a verse ciertos picos en la corriente total, $I(t) = A \cdot J(t)$, como puede observarse en las figuras 3.8(a)-3.8(e) para $V_{\text{noise}}^{\text{rms}} \gtrsim 1.4\text{mV}$, donde se ha representado la componente de la corriente que no se corresponde a la corriente estacionaria que habría en ausencia de ruido. Es decir, hemos descompuesto la corriente como $I(t) = I_{\text{dc}} + I_{\text{ac}}(t)$. El tiempo entre picos de corriente va disminuyendo a medida que aumenta la amplitud del ruido.

Sin embargo sólo esta observación no es suficiente para afirmar la resonancia coherente. Vamos a considerar la sucesión T_a de tiempos entre picos de corriente. En las figuras 3.8(f)-3.8(j) viene indicada por un triángulo la frecuencia asociada al tiempo medio entre oscilaciones $\langle T_a \rangle$. Ésta frecuencia va aumentando al aumentar la amplitud del ruido. Adicionalmente, el espectro de frecuencias de la señal de corriente tiene una clara frecuencia fundamental, centrada alrededor de $1/\langle T_a \rangle$.

Esto, sin embargo, todavía no es evidencia definitiva de resonancia coherente. Necesitamos, además, cierta regularidad en el tiempo entre oscilaciones. Para medir esa regularidad el tiempo medio entre picos de corriente $\langle T_a \rangle$ es insuficiente, y por ello recurrimos a la desviación estándar normalizada del tiempo entre picos de corriente,

$$R_{T_a} := \frac{\sqrt{\langle T_a^2 \rangle - \langle T_a \rangle^2}}{\langle T_a \rangle}, \quad (3.20)$$

la cual representamos en la figura 3.9 frente a distintos valores para la amplitud del ruido, $V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$. Podemos apreciar que se alcanza un mínimo (es decir, se alcanza la máxima coherencia) alrededor de $V_{\text{noise}}^{\text{rms}} = 3\text{mV}$, después de una caída pronunciada y es seguido por un incremento suave. Éste es el comportamiento esperado para

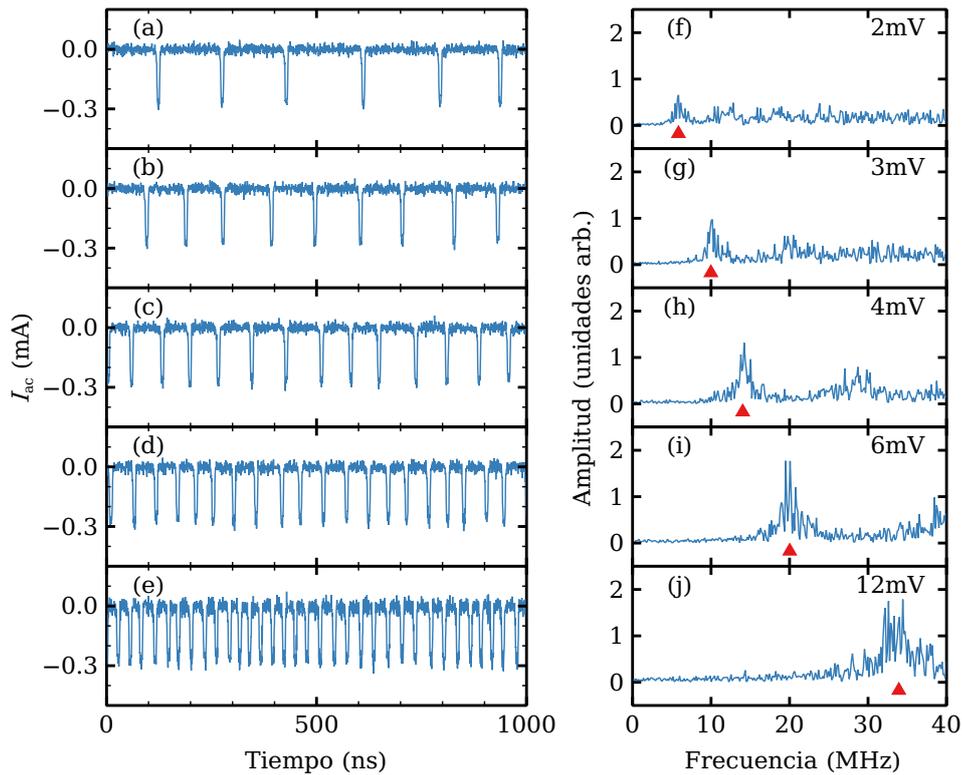


Fig. 3.8 Resonancia coherente. (a)-(e) Evolución en el tiempo de la componente oscilatoria de la corriente total. (f)-(j) Espectro de frecuencia asociado a (a)-(e), con la frecuencia promedio entre picos de corriente indicada con un triángulo. La caída de potencial está fijada en $V_{\text{bias}} = 0.387\text{V}$ con un ruido de amplitud $V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$ diferente para cada fila de la gráfica. Concretamente $V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$ toma los valores 2, 3, 4, 6, y 12 mV. La corriente la consideramos compuesta por $I(t) = I_{\text{dc}} + I_{\text{ac}}(t)$, donde consideramos I_{dc} como la corriente asociada al estado estacionario en ausencia de ruido. Figura extraída de [60].

caídas de potencial cercanas a una bifurcación de punto de silla de periodo infinito [41]. Por su parte, el tiempo medio entre picos, $\langle T_a \rangle$, representado en la gráfica interior de la figura 3.9, muestra una caída abrupta desde infinito en $V_{\text{noise}}^{\text{rms}} = 1.365 \text{ mV}$, que es el umbral de amplitud del ruido para que se produzcan oscilaciones en la corriente, y sigue disminuyendo de manera bastante suave a partir de $V_{\text{noise}}^{\text{rms}} > 5 \text{ mV}$, intentando converger a un cierto valor asociado a la máxima capacidad de picos de la misma naturaleza que puede albergar la señal de corriente. En suma, ya disponemos de evidencia fehaciente para afirmar la ocurrencia de una resonancia coherente en el sistema.

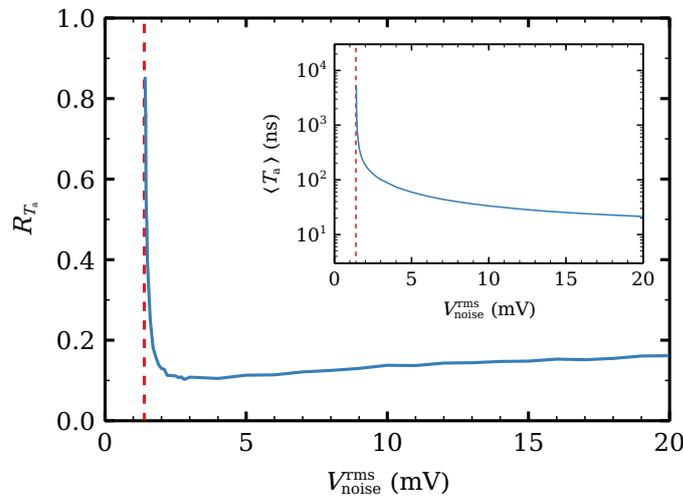


Fig. 3.9 Desviación estándar normalizada R_{T_a} frente a $V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$, habiendo fijado $\eta_{\text{th}} \equiv 0$. La gráfica interior representa el tiempo medio entre picos de la corriente $\langle T_a \rangle$ frente a $V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$. Las asíntotas verticales (líneas discontinuas) se ubican en $V_{\text{noise}}^{\text{rms}} = 1.365 \text{ mV}$. Figura extraída de [60].

Es relevante mencionar un detalle en la nota al pie de la figura 3.9, relacionado a tomar el ruido térmico del circuito como $\eta_{\text{th}} \equiv 0$. Este ruido blanco gaussiano el único efecto que tiene sobre la densidad de corriente son fluctuaciones alrededor de la corriente estacionaria identificables, a su vez, también como ruido blanco gaussiano. Es decir, no logra provocar el tipo de oscilación de gran amplitud que nos interesa. Por contra, el ruido ajustable sí que es capaz de hacerlo por tener un ancho de banda limitado, pues esto conlleva que, en igualdad de amplitud RMS, el espectro de potencia de η_c esté mucho más concentrado en las frecuencias relativamente bajas (ver apéndice B.3.3) que el de η_{th} . Esto, sin embargo, no está falseando la sincronización: como se ve en la figura 3.8 y la gráfica interior de la figura 3.9, la resonancia coherente tiene una frecuencia en el rango 1 a 100 MHz, mientras que el ruido tiene un ancho de banda de 1 GHz.

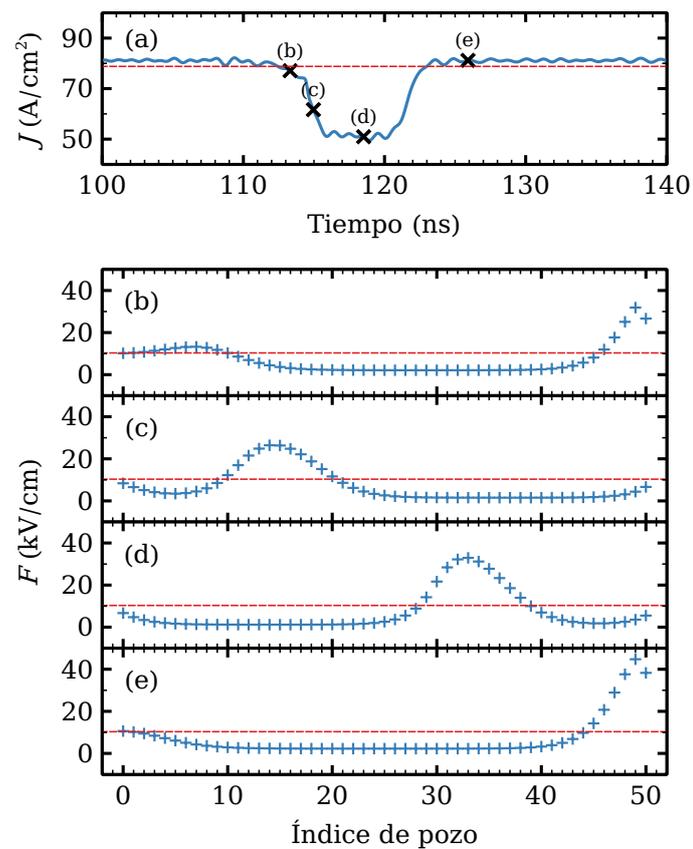


Fig. 3.10 (a) Evolución en el tiempo de la densidad de corriente total, para $V_{dc} = 0.387V$, $\eta_{th} \equiv 0$, y $V_{noise}^{rms} = 3mV$. (b)-(e) Perfil del campo eléctrico a lo largo de la superred en los instantes de tiempo indicados en (a), donde el campo crítico F_{cr} viene indicado por una línea discontinua. Figura extraída de [60].

Si observamos el comportamiento del sistema, vemos que, si $V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$ está por debajo del umbral que desata la resonancia coherente, la densidad de corriente total sufre oscilaciones rápidas de baja amplitud alrededor del valor estacionario, J_{dc} , que tendría en ausencia de ruido. Al sobrepasar ese umbral, se producen picos (caídas) en la corriente separados por grandes intervalos de tiempo. Entre picos, la densidad de corriente se mantiene alrededor del mismo J_{dc} que, a su vez, está ligeramente por encima de la densidad de corriente crítica J_{cr} definida en la figura 3.2. En la figura 3.10(a) representamos la densidad de corriente total $J(t)$ durante uno de esos picos que, ciertamente, tiene la misma naturaleza que las oscilaciones descritas en la figura 3.6. Adicionalmente, se incluyen varios perfiles del campo eléctrico en las figuras 3.10(b)-3.10(e) para poder analizarlo en mayor detalle:

- Fuera del pico de corriente, el perfil del campo es cuasi estacionario (véase la figura 3.10(e)). Cerca del contacto inyector, $F_i \approx F_{\text{cr}}$. Al alejarnos del contacto F_i disminuye hasta $F^{(1)}(J)$ (siguiendo la notación vista en la figura 3.2), y se mantiene en ese nivel hasta que vuelve a aumentar cerca del contacto colector.
- Los picos de corriente, como se ve en las figuras 3.2(b)- 3.2(d), se corresponden a la creación y movimiento de una onda de dipolo de carga cuando la densidad de corriente total $J(t)$ disminuye y permanece por debajo de la corriente crítica J_{cr} durante algún tiempo. Cuando $J < J_{\text{cr}}$, el campo eléctrico alto que se halla cerca del contacto colector intenta escapar de la superred para disminuir de valores cercanos a $F^{(2)}(J)$ hasta $F^{(1)}(J)$. Ahora, puesto que se debe preservar el campo eléctrico total (ecuación (3.16)), al desaparecer el campo alto cercano al colector se nucleará una nueva onda de dipolo de carga en el contacto inyector, lo que provoca que la corriente total decaiga, tal como se ve en las figuras 3.2(a)- 3.2(c). Mientras la onda recorre la superred y su influencia no alcanza los contactos (ver figura 3.2(d)), la densidad de corriente total se mantendrá en un nivel bajo. Cuando la onda de dipolo de carga alcanza el contacto colector, ésta detendrá su movimiento para dar paso a su futura desaparición, lo que hace que la corriente total incremente de nuevo hasta el valor cuasi estacionario (que se corresponde al valor estacionario en ausencia de ruido), salvo por las pequeñas variaciones causadas por el ruido, y que el campo eléctrico (F_0, \dots, F_N) adquiera el perfil cuasi estacionario visto en la figura 3.2(e).

Puesto que la densidad de corriente crítica es relevante de cara a la que se produzca una oscilación de gran amplitud en la corriente, en la sección 3.3.3 veremos

cómo estimarla. Notemos que en el modelo viene determinada por la conductividad del contacto (ver figura 3.2), que no deja de ser un parámetro libre que se ajusta a voluntad para poder estudiar la diferente fenomenología, pero en experimentos no se dispone de una forma directa de medición.

Comparación con experimentos

Disponemos de confirmación experimental de resonancia coherente en superredes semiconductoras débilmente acopladas a temperatura ambiente.

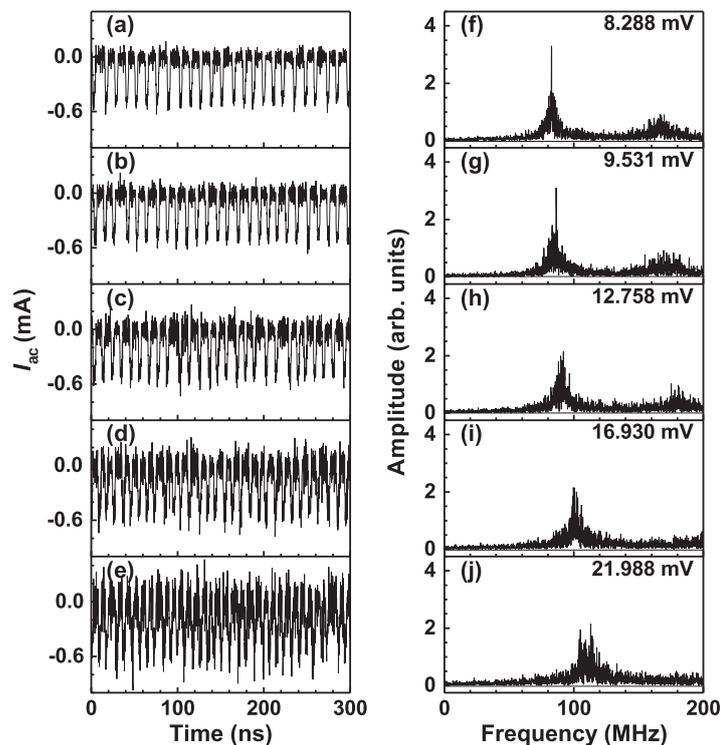


Fig. 3.11 Resonancia coherente en experimentos. (a)-(e) Componente oscilatoria de la corriente, I_{ac} , para distintas amplitudes del ruido controlable. (f)-(j) Los respectivos espectros de frecuencia de $I_{ac}(t)$. La amplitud V_{noise}^{rms} del ruido varía desde 8.288 hasta 21.988 mV. Figura extraída de [71].

La figura 3.11 es el equivalente experimental de la figura 3.8. En los experimentos también se puede observar que el ruido desata oscilaciones de la corriente con una frecuencia, dentro de todo, concreta.

En contraste con el modelo teórico tenemos que los picos que sufre la corriente tienen el doble de amplitud (0.6 mA contra 0.3 mA) y que, si bien no es apreciable en las figuras 3.8 y 3.11, la duración de estos picos es de 3 ns para los experimentos y 10 ns para las simulaciones. También es notable la diferencia de frecuencia de las oscilaciones, entre 5 MHz y 40 MHz para las simulaciones y entre 60 MHz y 120 MHz

para los experimentos. Podemos concluir que el modelo teórico sobreestima la duración del recorrido de las ondas de dipolo de carga a lo largo de la superred y, a su vez, estima inferiormente el tiempo que tardan en reciclarse.

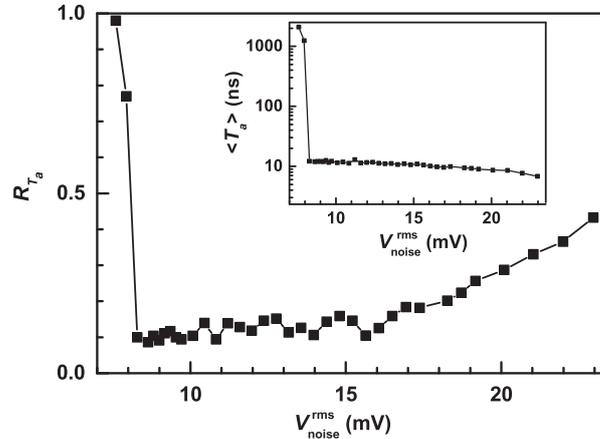


Fig. 3.12 Desviación estándar normalizada R_{T_a} frente a V_{noise}^{rms} . La gráfica interior representa el tiempo medio entre picos de la corriente $\langle T_a \rangle$ frente a V_{noise}^{rms} . Figura extraída de [71].

Igual que antes, monitorizar únicamente el espectro de Fourier de la señal de corriente no es suficiente para asegurar el surgimiento de resonancia coherente. En la figura 3.12 tenemos el equivalente experimental a la figura 3.9. El perfil de la desviación típica R_{T_a} cumple las condiciones para confirmar la resonancia coherente.

Aparte de que el tiempo medio entre picos de corriente es inferior (lo cual está relacionado con lo explicado previamente sobre la estimación inferior de la frecuencia de oscilaciones), hay dos diferencias relevantes entre experimento y modelo. La primera es que en los experimentos hace falta una amplitud mucho mayor de ruido para desatar la resonancia coherente. En las simulaciones esto se puede solventar hasta cierto punto incrementando $V_{dc} - V_{SNIPER}$. La segunda diferencia es que en los experimentos el perfil tiene una caída mucho más brusca que las simulaciones. Ésto está asociado a la longitud del intervalo en el que se producen las oscilaciones de baja frecuencia que son imitadas por la resonancia coherente. Concretamente, si incrementamos (reducimos) la proporción $(V_{SNIPER} - V_d)/(V_{SNIPER} - V_{Hopf})$ haremos que la caída inicial de R_{T_a} sea más suave (abrupta). Ésto, a la vista de la figura 3.3, lo podemos lograr aumentando la conductividad del contacto σ_e .

3.3.2 Resonancia estocástica

Por su parte, diremos que una resonancia estocástica cuando, en presencia de una señal débil embebida en el ruido de fondo, al añadir ruido la respuesta del sistema se sincroniza con la frecuencia de la señal débil, pudiendo incluso amplificarla.

Dado que nos apoyaremos en la resonancia coherente, volvemos a utilizar los parámetros $\sigma_e = 0.763 \text{ A/Vm}$ y $V_{dc} = 0.387 \text{ V}$. Como señal usaremos una oscilación senoidal monocromática, $V_{ac}(t) = V_{sin} \sin(2\pi\nu t)$, con una amplitud V_{sin} pequeña (preferiblemente $V_{sin} < V_{dc} - V_{SNIPER} = 2 \text{ mV}$ para no provocar que V_{bias} se halle dentro de la región oscilatoria) y una frecuencia ν en el rango de frecuencias de la resonancia coherente. Concretamente escogeremos $V_{sin} = 0.646 \text{ mV}$ y $\nu = 5 \text{ MHz}$, por estar ésta frecuencia cerca de la máxima coherencia cuando se produce la resonancia coherente (ver en figura 3.9, $\langle T_a \rangle = 1/\nu = 200 \text{ ns}$ se corresponde con $V_{noise}^{rms} \approx 2 \text{ mV}$, que tiene una desviación típica normalizada R_{T_a} cercana al mínimo).

El resultado sobre la corriente total de añadir la señal V_{ac} descrita a la caída de potencial se puede apreciar en las figuras 3.13(a)-3.13(e). Cuando la amplitud V_{noise}^{rms} del ruido ajustable η_c es inferior a 1.4 mV , la corriente muestra picos de gran amplitud cuya ocurrencia es irregular y aislada. Es decir, el tiempo que transcurre entre ellos es relativamente grande, además de que fluctúa demasiado. Al incrementar la amplitud del ruido, cuando ésta se halla en un rango concreto (aproximadamente entre 1.5 y 2.1 mV), se aprecian picos en la corriente que se distribuyen en tiempo de manera regular (ver figuras 3.13(b)-3.13(d)). Concretamente, el tiempo entre picos es aproximadamente $1/\nu = 200 \text{ ns}$ para todo el rango mencionado. Efectivamente, la densidad de corriente total J oscila con una frecuencia $\nu = 5 \text{ MHz}$, como se aprecia en las figuras 3.13(g)-3.13(i). Se puede decir que la frecuencia de la corriente se ha *bloqueado* a aquella de la señal débil. Si la amplitud V_{noise}^{rms} del ruido continúa aumentando, la corriente deja de sincronizarse con la señal débil, como se ve en la figura 3.13(j), aunque permanezca oscilando a causa de la resonancia coherente.

En la figura 3.14a representamos la amplitud de cada frecuencia de la densidad de corriente total $J(t)$ para una mayor cantidad de amplitudes V_{noise}^{rms} del ruido ajustable que la mostrada por la figura 3.13. En ella se aprecia mejor el bloqueo de frecuencia de $J(t)$ a la de la señal débil de 5 MHz . De cara a hacer más evidente el bloqueo de frecuencia, hemos incluido una figura equivalente, concretamente la figura 3.14b, en condiciones idénticas salvo por una mayor amplitud de la señal, que será $V_{sin} = 2.144 \text{ mV}$. Dado el carácter ilustrativo de esta última figura, no es relevante que la amplitud sea $V_{sin} > V_{dc} - V_{SNIPER}$.

El comportamiento descrito hasta ahora, que se puede resumir en que existe un rango finito de amplitud del ruido para el cual la respuesta del sistema se sincroniza

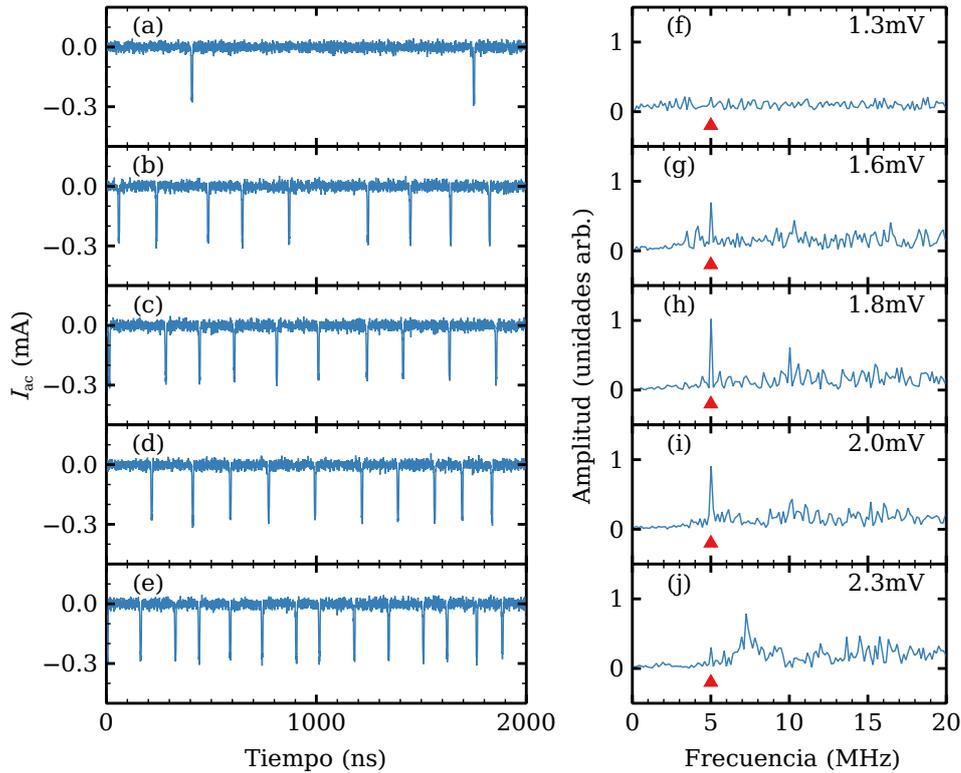


Fig. 3.13 Resonancia estocástica. (a)-(e) Evolución en el tiempo de la componente oscilatoria de la corriente total. (f)-(j) Espectro de frecuencia asociado a (a)-(e), con la frecuencia de la señal embebida en el ruido con un triángulo. La caída de potencial es $V_{bias}(t) = V_{dc} + V_{ac}(t)$, donde $V_{dc} = 0.387\text{V}$ y la componente oscilatoria $V_{ac}(t)$ es una señal sinusoidal con frecuencia $\nu = 5\text{MHz}$ y amplitud $V_{sin} = 0.646\text{mV}$, junto con un ruido de amplitud V_{noise}^{rms} diferente para cada fila de la gráfica. Concretamente V_{noise}^{rms} toma los valores 1.4, 1.7, 1.9, 2.1, y 2.3 mV. La corriente la consideramos compuesta por $I(t) = I_{dc} + I_{ac}(t)$. Figura extraída de [60].

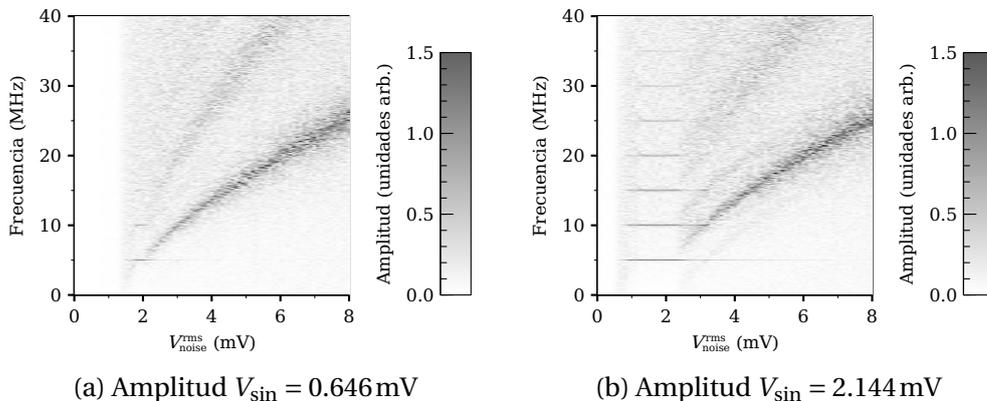


Fig. 3.14 Resonancia estocástica. Amplitud de cada frecuencia de la densidad de corriente total, $J(t)$, para diferentes amplitudes V_{noise}^{rms} del ruido, cuando $V_{dc} = 0.387\text{V}$ y hay presente una señal periódica de frecuencia $\nu = 5\text{MHz}$ con diferentes amplitudes. Figuras extraídas del material suplementario de [60].

(y bloquea) a la frecuencia de la señal débil, es evidencia suficiente para confirmar la presencia de resonancia estocástica.

Adicionalmente, hay evidencia no sólo de bloqueo de frecuencia, sino también de amplificación de la señal débil. Para ello nos apoyaremos en la proporción de señal frente al ruido, SNR, tanto de la señal de entrada $V_{ac} = V_{sin} \sin(2\pi\nu t)$, denotada por SNR_{in} , y de la señal de salida $J(t)$, denotada SNR_{out} , para computar la ganancia de proporción, SNR_{gain} . Esta ganancia será la diferencia de ambas, o, mejor dicho, la proporción pues se mide en escala logarítmica (dB): $SNR_{gain} = SNR_{out}/SNR_{in}$. Detalles sobre el cómputo de SNR_{in} y SNR_{out} se pueden consultar en el apéndice B.3.4.

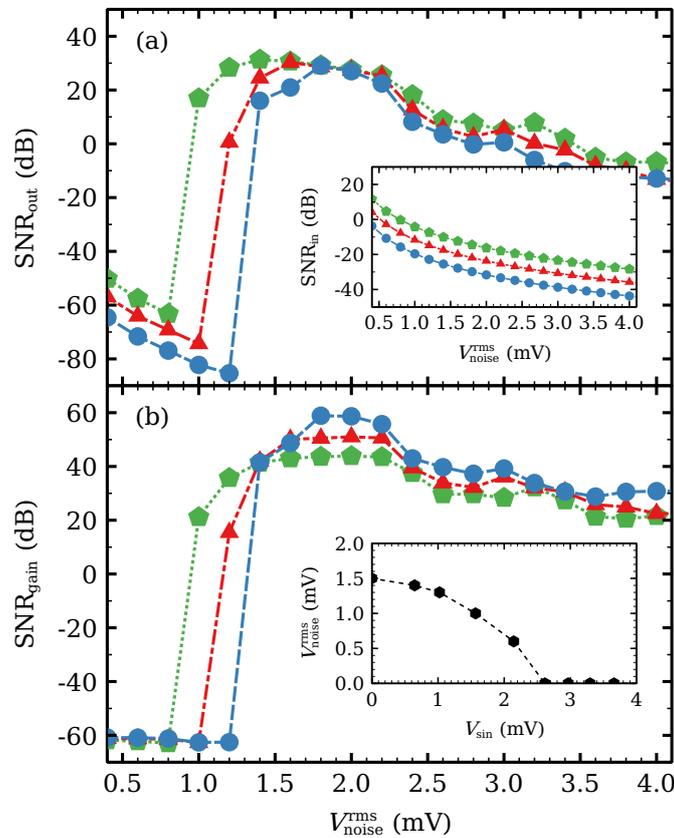


Fig. 3.15 (a) SNR_{out} (gráfica interior: SNR_{in}) y (b) SNR_{gain} frente a V_{noise}^{rms} , el cual varía desde 0.3 mV hasta 4 mV, para $V_{sin} = 0.646$ (círculos), 1.022 (triángulos), y 1.736 mV (pentágonos). La gráfica interior de (b) muestra la amplitud del ruido V_{noise}^{rms} necesaria para que haya resonancia estocástica según diferentes valores de la amplitud V_{sin} de la señal embebida en el ruido. Figura extraída de [60].

En la figura 3.15 representamos las proporciones de señal frente a ruido antes mencionadas para diferentes valores de V_{sin} en escala logarítmica (esto es, representamos $20\log_{10}(SNR)$). Cuando la amplitud V_{noise}^{rms} del ruido supera el umbral

necesario para desatar la resonancia estocástica el SNR_{gain} da un salto brusco desde los -60 dB hasta valores entre 20 y 60 dB. En promedio hay una diferencia de 100 dB, con lo que podemos confirmar que, además de la resonancia estocástica, hay una amplificación de la señal débil V_{ac} . El mejor caso, correspondiente a $V_{\text{sin}} = 0.646$ mV, resulta en una diferencia total de hasta 120 dB.

Dado que el salto en SNR_{gain} y la resonancia estocástica se da en diferentes amplitudes $V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$ del ruido según la amplitud V_{sin} de la señal débil, en la gráfica interna de la figura 3.15(b) representamos la amplitud $V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$ necesaria para provocar una respuesta en la señal $J(t)$ con frecuencia $\nu = 5$ MHz según la amplitud V_{sin} . Cuando la amplitud V_{sin} es suficientemente elevada, no hace falta ruido para que la corriente total presente picos con una frecuencia $\nu = 5$ MHz, pues la señal V_{ac} es lo suficientemente fuerte como para forzar la sincronización de la corriente. Es decir, tampoco hay salto en SNR_{gain} . Si, por el contrario, no hay señal débil ($V_{\text{sin}} = 0$ mV), vemos la amplitud $V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$ necesaria para que la resonancia coherente ocurra a la frecuencia esperada. Entre ambos casos extremos, se ve que, a mayor amplitud de la señal, hace falta menos amplitud en el ruido para provocar la resonancia estocástica.

Comparación con experimentos

También disponemos de confirmación experimental de resonancia estocástica.

La figura 3.16 es la equivalente experimental de la figura 3.13. La señal de corriente total se sincroniza, durante un rango de amplitud del ruido controlable, a una señal de 76 MHz embebida en el ruido de fondo. Con lo que podemos confirmar la presencia de resonancia estocástica. Ésta frecuencia se escoge por estar cerca del máximo de coherencia logrado por la resonancia coherente.

De nuevo, al infraestimar el modelo la frecuencia en la que se producen los picos de la densidad de corriente, los experimentos muestran sincronización con una frecuencia mucho mayor.

La amplitud $V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$ del ruido necesaria para desatar la resonancia estocástica respecto a la amplitud de la señal también es mayor en los experimentos que en las simulaciones (comparar figuras 3.17 y gráfica interna de 3.15(b)).

También es posible ver, además de la sincronización, una amplificación de la propia señal escondida en el ruido (figura 3.18). La estructura es la misma que en simulaciones (figura 3.15), la ganancia de la proporción de señal frente al ruido, SNR_{gain} , da un salto cuando la superred bloquea su frecuencia a la de la señal V_{ac} . Hay una diferencia de escala, sin embargo: En los experimentos hay un salto de 40 dB mientras que en simulaciones puede ser de 100 dB.

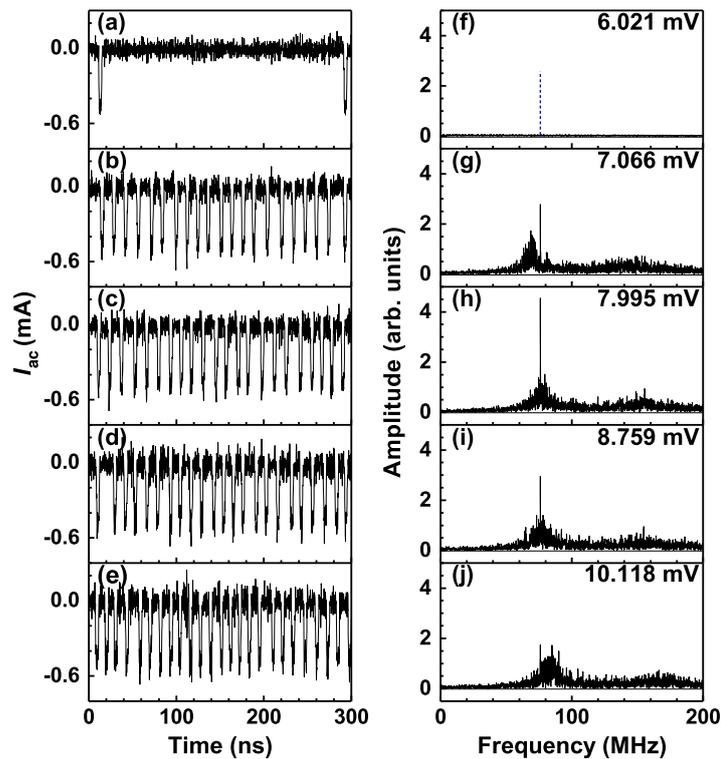


Fig. 3.16 Resonancia estocástica en experimentos. (a)-(e) Componente oscilatoria de la corriente, I_{ac} , para distintas amplitudes del ruido controlable, pero en presencia de una señal débil de frecuencia $\nu = 76\text{MHz}$ y amplitud $V_{sin} = 0.723\text{mV}$. (f)-(j) Los respectivos espectros de frecuencia de $I_{ac}(t)$. La amplitud V_{noise}^{rms} del ruido varía desde 6.021 hasta 10.118 mV. La frecuencia ν está indicada en (f)-(j) como una línea discontinua vertical. Figura extraída de [71].

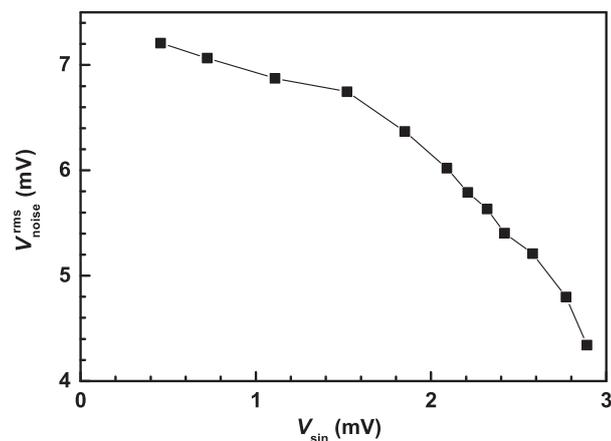


Fig. 3.17 Amplitud de ruido, V_{noise}^{rms} , necesaria para provocar oscilaciones en la corriente, según valor de V_{sin} . Figura extraída de [71].

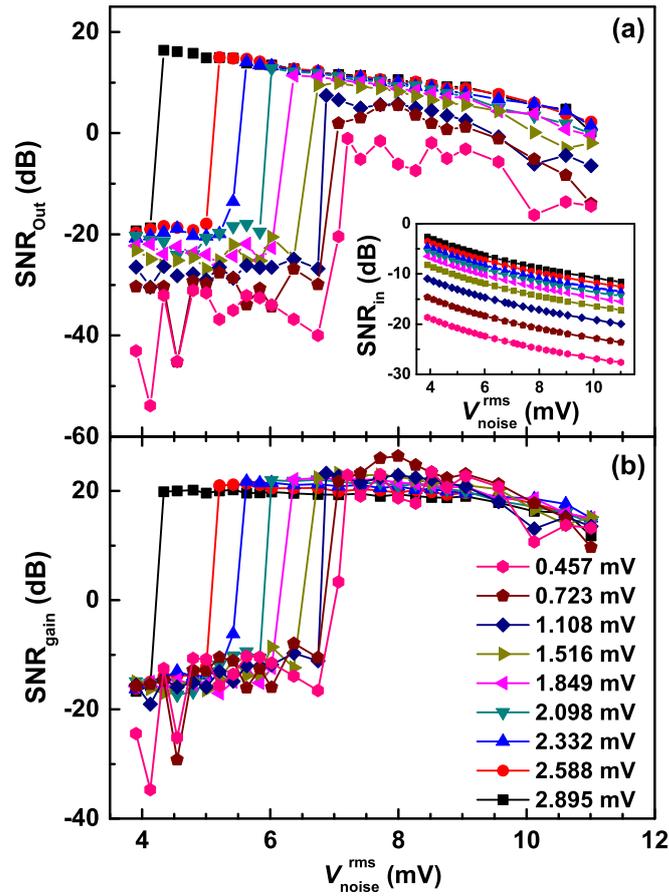


Fig. 3.18 (a) SNR_{out} (gráfica interior: SNR_{in}) y (b) SNR_{gain} frente a V_{noise}^{rms} , el cual varía desde 3.905 hasta 2.895 mV como se indica con los diferentes colores. La señal débil tiene una frecuencia fija de 76 MHz, y el ruido controlable tiene un ancho de banda de 1 GHz. Figura extraída de [71].

3.3.3 Determinación de la corriente crítica

Como mencionamos previamente, para modelizar la densidad de corriente a través de los contactos estamos utilizando leyes de Ohm (ver ecuaciones (3.13) y (3.14)), que no dejan de ser una aproximación a primer orden de la realidad. Al hacer esto, hacemos uso de una conductividad del contacto, σ_e , que, como hemos visto en la sección 3.2.2, es un parámetro libre que afecta al comportamiento del sistema y podemos utilizar para estudiar las diferentes fenomenologías que pueden verse en superredes reales. Sin embargo, no hay una forma directa de medir esta conductividad en la realidad.

Pero, como se ve en la figura 3.2, la conductividad determina la (densidad de) corriente crítica del sistema, y ésta corriente crítica entra en juego a la hora de que se desaten los picos de corriente cuando hay resonancia coherente. Aprovechándonos de esto y de que controlamos toda la información en las simulaciones numéricas, vamos a desarrollar un criterio que podamos aplicar a las mediciones experimentales para, así, poder estimar la corriente crítica de una superred real dada.

De nuevo, queremos situar el sistema en las condiciones que provocan la resonancia coherente: para las simulaciones fijamos $V_{dc} = 0.387V$, mientras que para los experimentos $V_{dc} = 0.773V$ [71].

De las simulaciones sabemos que, entre picos de corriente, la corriente fluctúa alrededor de la corriente estacionaria. Así, en los experimentos podemos estimar I_{dc} promediando la señal de corriente entre dos picos consecutivos. Para obtener una medida fiable, procuramos que el ruido controlable (que, recordemos, es el principal responsable de que hayan picos en la corriente) tenga baja amplitud para que los picos de corriente sean escasos y deba transcurrir mucho tiempo entre uno y otro.

Por otra parte, del modelo con $\sigma_e = 0.763A/Vm$ sabemos que la corriente crítica es $I_{cr} = 0.709mA$ (como se menciona al pie de la figura 3.2, donde $I_{cr} = A \cdot J_{cr}$, y $A = 900\mu m^2$, según lo dicho en la tabla 3.1), lo cual resulta ser el 97 % de la corriente estacionaria I_{dc} , respecto a la corriente promedio de un pico de corriente, es decir, la corriente asociada a cuando hay una onda de dipolo de carga viajando a lo largo de la superred. En las medidas experimentales, la corriente estacionaria se sitúa en 1.448 mA, por lo que, usando el mismo criterio, estimamos la corriente crítica de la superred de los experimentos en 1.404 mA.

Con el fin de darle robustez al criterio deberíamos asegurarnos que los atractores asociados a la resonancia coherente son similares tanto en simulaciones como en experimentos, así como asegurarnos que, ambos casos, sea estadísticamente cierto

que la corriente produce un pico cuando permanece un cierto tiempo por debajo de la corriente crítica.

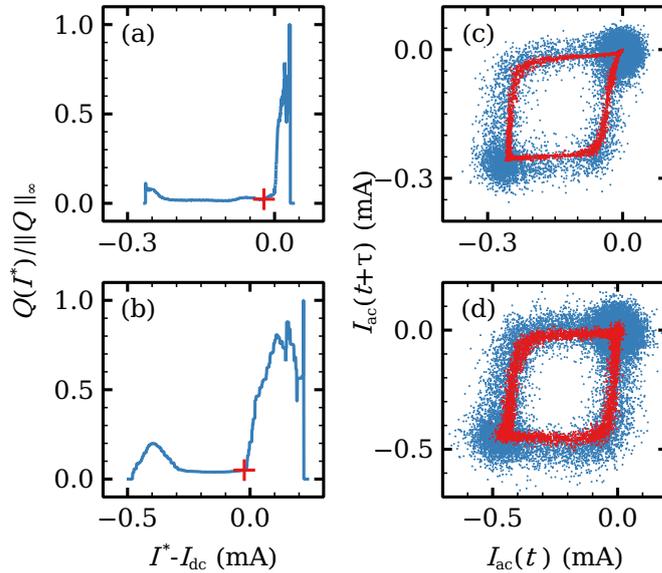


Fig. 3.19 Proporción normalizada de la desviación típica frente a la media de la duración de picos en la corriente, $Q(I^*)/\|Q\|_\infty$, respecto a umbrales de corriente centrados en la corriente estacionaria, $I^* - I_{dc}$, cuando hay resonancia coherente en los siguientes casos: (a) simulaciones numéricas con $V_{dc} = 0.387\text{V}$, $V_{noise}^{rms} = 6\text{mV}$, y $\eta_{th} \equiv 0$; (b) datos experimentales con $V_{dc} = 0.773\text{V}$ y $V_{noise}^{rms} = 8.288\text{mV}$. Las cruces en (a) y (b) indican la corriente crítica, I_{cr} , en relación a I_{dc} . Atractor asociado a la resonancia coherente en el espacio de fases $(I_{ac}(t), I_{ac}(t + \tau))$ de coordenadas embebidas [73] en los casos: (c) simulaciones numéricas con $V_{dc} = 0.387\text{V}$, $\tau = 1.642\text{ns}$, $V_{noise}^{rms} = 8\text{mV}$, y $rms(\eta_{th}) = 2\text{mV}$; (d) datos experimentales con $V_{dc} = 0.773\text{V}$, $\tau = 0.884\text{ns}$, y $V_{noise}^{rms} = 8.288\text{mV}$. En rojo, el respectivo atractor de (c) y (d) si, previamente, se filtra la señal de corriente con un filtro basado en wavelets de Haar de 8 niveles [56]. Figura extraída de [60].

El atractor asociado lo estudiamos mediante un diagrama de coordenadas desfazadas. En las figuras 3.19(c) y 3.19(d) se ha representado la familia de pares $(I_{ac}(t), I_{ac}(t + \tau))$ para las simulaciones y los experimentos. La elección de τ viene especificada al pie de la figura. El desfase temporal, τ , utilizado en simulaciones es más largo que en experimentos pues el modelo sobreestima la duración de los picos de corriente, además de estimar inferiormente la frecuencia a la que ocurren. Tanto para simulaciones como para experimentos el atractor es, esencialmente, un cuadrado. De las simulaciones sabemos que la esquina superior derecha se corresponde al estado cuasi estacionario y que la esquina inferior izquierda se corresponde al estado en que hay una onda de dipolo de carga viajando a través de la superred. Las transiciones entre ambos estados son los lados del cuadrado

formado por el atractor. Hemos incluido, además, el atractor que resultaría de filtrar el ruido de la señal de corriente, resultando ser esencialmente el mismo en ambos casos.

En lo que respecta a tener evidencia estadística de que, tanto en simulaciones como en experimentos, la corriente crítica es el umbral que debe sobrepasar (con cierta continuidad) la señal de corriente para que se produzca un pico, vamos a estudiar cómo se distribuye el tiempo que la corriente permanece debajo de un cierto nivel I^* . En particular nos interesará qué ocurre cerca de $I^* = I_{\text{cr}}$. Para evitar tener en consideración fluctuaciones espurias de la corriente que puedan ensuciar las observaciones, sólo tendremos en consideración los intervalos de tiempo I_i más largos que un cierto tiempo t^* en los que $I(t) < I^*$, $\forall t \in I_i$ de manera continuada. Es decir, sea

$$\mathcal{A}(I^*) := \{I_i \subset \mathbb{R} \text{ conexo} : I(t) < I^* \forall t \in I_i, m(I_i) > t^*, I_i \cap I_j = \emptyset \forall j \neq i\},$$

donde $m(I_i)$ es la medida (duración) de I_i . La elección de t^* será aproximadamente un tercio de la duración media de los picos de corriente (que duran 10 ns para las simulaciones y 3 ns para los experimentos).

Como se ha dicho, nos interesa estudiar la duración de estos intervalos de tiempo. Sea el observable $X := (m(I_1), m(I_2), \dots)$. Vamos a estudiar la proporción entre la desviación típica de X y su media. Para ello definimos

$$Q(I^*) := \frac{\text{std}(X)}{\text{mean}(X)} = \frac{\sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}}{\langle X \rangle}. \quad (3.21)$$

Este estadístico será pequeño cuando la desviación típica lo sea a su vez, o para valores muy altos del umbral I^* , pues la duración media será muy alta. Por contra, será elevado si la desviación típica lo es, o para valores bajos de I^* , asociados a una duración media muy corta.

En las figuras 3.19(a) y 3.19(b) tenemos, respectivamente, éste estadístico normalizado (respecto a su valor máximo, $\|Q\|_\infty$) para las simulaciones y las mediciones experimentales. Apreciamos la misma estructura en ambos casos: Valores intermedios para I^* cercana a la corriente asociada a cuando hay una onda de dipolo de carga viajando por la superred, valores bastante altos cuando I^* está cerca de la corriente estacionaria I_{dc} , pero valores muy bajos en el caso intermedio. Esto último significa que la duración de cada pico es regular. Es decir, las ondas de dipolo de carga tardan lo mismo siempre en recorrer la superred. Notemos también que la corriente crítica propuesta por el criterio cumple que $Q(I_{\text{cr}})$ es muy bajo (lo que, por

extensión, indica que es seguro que habrá un pico de corriente) y que un pequeño incremento del umbral hace que $Q(I_{cr} + \delta)$ se dispare a valores altos.

Concluimos que este criterio es válido pues los atractores son equivalentes y es estadísticamente correcto afirmar que es el umbral que desata la nucleación de ondas de dipolo de carga.

Capítulo 4

Superred no homogénea

En este capítulo nos centraremos en el estudio del caos en superredes semiconductoras débilmente acopladas. En estudios teóricos previos se ha visto que, en superredes homogéneas (ideales), la presencia de caos bien ocurre en estrechos intervalos de voltaje [17], o bien ocurre en intervalos algo más amplios pero es muy débil [2], aunque en ambos casos se puede ver potenciado (ampliando el intervalo o haciendo que no sea tan sutil, respectivamente) teniendo en cuenta el ruido interno (fluctuaciones en la densidad de corriente túnel) y externo (fluctuaciones en la caída de potencial a causa del circuito).

Por su parte, en estudios experimentales [52, 81] se hallan intervalos relativamente grandes que resultan ser caóticos. En el contexto experimental no se puede omitir la presencia de ruido, pero no todas las superredes que se fabrican muestran caos con éxito. Así pues, en la fabricación tienen que haber procesos (o fuentes de error) que aniquilen la posibilidad de caos o, vistos los estudios teóricos, que en realidad la favorezcan.

Estudiaremos cómo influye la modificación de la longitud de uno y dos pozos cuánticos en el comportamiento general de la superred, asumiendo ausencia de todo tipo de ruido, utilizando el modelo descrito en la sección 2.1. La fabricación de una superred se hace por deposición de monocapas de material de longitud $d_{ml} = 0.3 \text{ nm}$, así que nos restringiremos a la adición de una cantidad entera de monocapas. Finalmente, propondremos una modificación concreta que presenta caos fuerte en un gran intervalo de voltaje, lo cual establecerá la longitud de los pozos como un mecanismo para obtener, de manera natural, caos.

Más adelante, en el capítulo 5, veremos cómo afectan el ruido y los errores de fabricación (desorden) al comportamiento global de una superred.

d_W	d_B	N_D	V_B	ϵ_B	ϵ_W	m_B	m_W	σ_e
nm	nm	10^{10} cm^{-2}	mV	ϵ_0	ϵ_0	m_e	m_e	A/Vm
7	4	6	388	11.6	12.9	0.1	0.063	0.49
<hr/>								
		\mathcal{E}_{C_1}	\mathcal{E}_{C_2}	\mathcal{E}_{C_3}	γ_1	γ_2	γ_3	
		meV	meV	meV	meV	meV	meV	
		42	166	354	2.5	8	24	

Tabla 4.1 Configuración de superred no homogénea (siguiendo el modelo descrito en la sección 2.1) con $N = 50$ periodos a temperatura $T = 295$ K. La sección transversal de la superred es un cuadrado de $30 \mu\text{m}$. ϵ_0 es la constante dieléctrica del vacío, y m_e es la masa del electrón.

4.1 Configuración homogénea de referencia

Primero establecemos un marco de referencia previo a cualquier modificación. La configuración utilizada viene recogida en la tabla 4.1 [45, 44, 52].

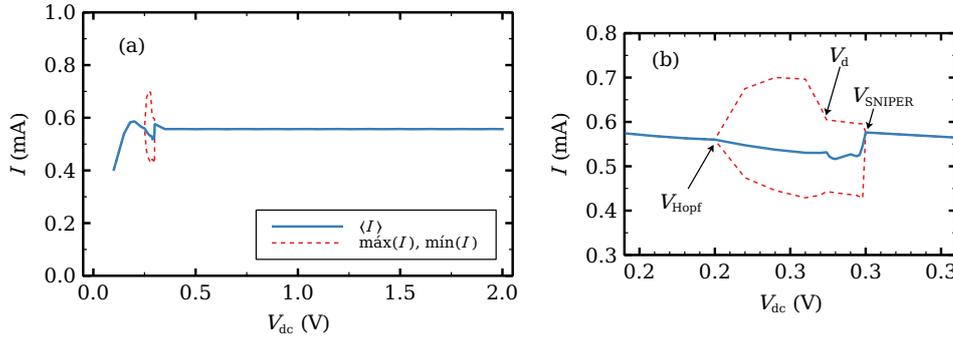


Fig. 4.1 Curva $I - V$ característica de referencia, cuando el sistema tiene periodos idénticos y una conductividad del contacto inyector $\sigma_e = 0.49 \text{ A/Vm}$. (a) primer *plateau*. (b) Aumento visual de la región de oscilaciones de la corriente, con las transiciones señaladas.

Esta configuración tiene asociada como curva $I - V$ característica aquella representada en la figura 4.1. Si bien, a la vista de la figura 3.3, se corresponde a una conductividad σ_e mayor a los 0.763 A/Vm utilizada en el capítulo anterior, esto no supone un problema puesto que σ_e no deja de ser un parámetro libre que se puede ajustar para entender la diversa fenomenología. La conductividad inferior (o, más bien, que la región con régimen oscilatorio de figura 4.1 se ve desplazada) se puede entender teniendo en cuenta las simplificaciones utilizadas en la sección 3.1 relacionadas a los integrandos de las densidades de corriente túnel. Ahora, la curva característica de densidad de corriente túnel frente a la caída de potencial será la

vista en la figura 4.2, donde se evidencia que son inferiores las corrientes túnel (ver valores críticos), lo que se traduce al desplazamiento inferior de la conductividad del contacto para ver la misma fenomenología que en el modelo simplificado.

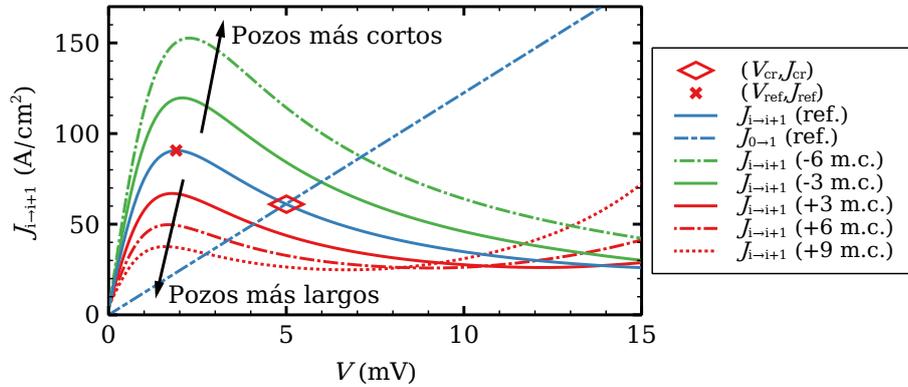


Fig. 4.2 Curva característica de referencia de densidad de corriente frente a caída de potencial (línea azul continua) y densidad de corriente del contacto inyector (línea azul discontinua), para caída de potencial uniforme ($\forall i, V_i = V$). El primer máximo local (cruz roja) lo utilizamos como el par de valores de referencia para la densidad de corriente y para la caída de potencial, $(V_{ref}, J_{ref}) = (1.912 \text{ mV}, 90.658 \text{ A}/\text{cm}^2)$. La primera intersección (rombo) da la densidad de corriente túnel crítica, J_{cr} , y la caída de potencial asociada, V_{cr} , correspondientes a una conductividad del contacto inyector σ_e dada. Para el caso particular $\sigma_e = 0.49 \text{ A}/\text{Vm}$, tenemos $(V_{cr}, J_{cr}) = (5.005 \text{ mV}, 61.021 \text{ A}/\text{cm}^2)$. Si modificamos la longitud de *todos* los pozos, cambia la curva característica. Si añadimos (quitamos) monocapas (m.c.) de longitud $d_{ml} = 0.3 \text{ nm}$ obtenemos las curvas rojas (verdes) cuyo primer máximo local está cada vez más cerca (lejos) de la intersección con la densidad de corriente del contacto inyector al añadir (quitar) cada vez más monocapas.

4.2 Modificación de un único pozo

Vamos a estudiar el efecto que la modificación de un único pozo de potencial tiene sobre la curva $I - V$ característica y sobre la dinámica de las ondas de dipolo de carga.

Concretamente, las modificaciones consistirán en aumentar el número de monocapas que se depositan al fabricar un pozo y cambiar qué posición ocupa tal pozo. Ambas modificaciones las trataremos por separado puesto que sólo será relevante el caso en que se aumente el número de monocapas en una gran cantidad.

4.2.1 Longitud del pozo modificado

El número de monocapas añadidas afectará al movimiento de una onda de dipolo de carga cuando la onda atraviese el pozo modificado. Esto, además, tendrá su influencia en la densidad de corriente total.

Si el número de monocapas añadidas es bajo, concretamente 5 o menos, las ondas de dipolo de carga aumentarán ligeramente su amplitud al pasar por el pozo ensanchado pero no se verán afectadas más allá de eso. Es decir, continuarán su viaje hasta el contacto colector. La corriente, a su vez, dará un pequeño salto cuando la onda atraviesa el pozo modificado. En lo que respecta a la curva $I - V$ característica, cada monocapa añadida hará que la región de voltaje en la que la corriente se encuentra oscilando sufra un desplazamiento. Un caso particular se aprecia en la figura C.1a.

Por contra, si el número de monocapas añadidas es alto, específicamente 6 o más, la dinámica de las ondas y de la corriente total (y por tanto de la curva $I - V$ característica) se ve muy afectada: Cuando el sistema se halla bajo la influencia de una caída de potencial V_{dc} relativamente baja, las ondas de dipolo de carga pueden nuclearse en el propio pozo modificado (en lugar de nuclearse en el contacto inyector, ver figura C.1c) o, si una onda tuviese que viajar a través del pozo modificado, ésta no logrará hacerlo (se consumirá en el pozo) y no habrá reciclaje en el contacto de entrada (ver figura C.1b). Por su parte, la curva $I - V$ característica ya no sufre cambios notables al añadir monocapas como ocurría al agregar pocas.

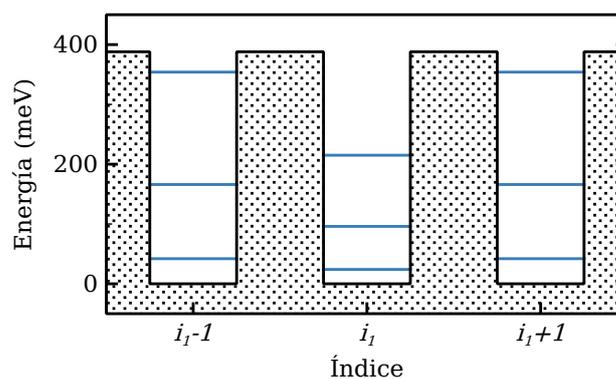


Fig. 4.3 Esquema de pozos y niveles de energía, centrado en el pozo modificado, y representado en ausencia de un campo eléctrico. Se han usado los valores recogidos en las tablas 4.1 para los pozos sin modificar y 4.2 para el modificado, siendo i_1 el índice de éste último.

Éste último hecho lo podemos interpretar viendo cómo influye el ancho del pozo en los niveles de energía (consultar las figuras 2.3 y 4.3) y en la densidad de

corriente túnel (ver figura 4.2). Un pozo sin modificar mide $d_W = 7$ nm, pero uno con 6 o más monocapas adicionales medirá $d_W \geq 8.8$ nm.

Desde el punto de vista de los niveles de energía (ver figura 4.3), tenemos que los de un pozo sin modificar están mucho más separados que los del pozo sin modificar y, además, siempre son mayores que sus respectivos niveles en el pozo modificado, siempre que los midamos desde el fondo de sus correspondientes pozos. Esto hará que, por un lado, el primer nivel de energía del pozo anterior al modificado tenga mayor facilidad de alineamiento con los niveles del pozo modificado y, por otro, como el primer nivel de energía del pozo modificado es considerablemente más bajo que el primer, segundo y tercer nivel del pozo posterior (medidos desde el fondo del pozo correspondiente), hará falta la presencia de un potencial eléctrico más fuerte (en comparación a si no estuviese modificado) para lograr el alineamiento. Luego este pozo modificado es capaz de detener el efecto túnel resonante secuencial que tenga lugar en los pozos anteriores.

Desde el punto de vista de la densidad de corriente túnel entre pozos (ver curva azul de referencia y curvas rojas en la figura 4.2), se aprecia que, al aumentar la longitud de los pozos, decrece el primer máximo local de la densidad de corriente túnel. Al ir decreciendo, quedará por debajo de la densidad de corriente crítica J_{cr} . En principio, si la corriente pasa del valor crítico dado por el contacto, J_{cr} , cabe esperar la formación de una onda de dipolo de carga en el contacto inyector. Si la corriente pasa por encima del máximo local en el pozo modificado, cabe esperar que se forme una onda en él, siempre y cuando no haya una onda ya formada que, viniendo del contacto emisor, cruce el pozo modificado en esos instantes. El potencial antes del pozo modificado será un valor $V^{(1)}(J)$ en la primera rama (que es creciente, y se halla en $0 < V < V_{cr}$) de la curva característica densidad de corriente frente a voltaje de la superred sin modificar (curva azul en figura 4.2). En el pozo modificado, la curva característica es diferente y, si la corriente pasa por encima del máximo local, el potencial crecerá hacia la tercera rama¹ (que es de nuevo creciente) de dicha curva característica.

Puesto que, en la configuración de parámetros estudiada, hará falta que la superred tenga al menos 14 periodos para que se pueda formar un dominio de campo eléctrico capaz de evolucionar en una onda², el efecto global que tiene

¹Recordemos que, como se dice en el capítulo 2, la densidad de corriente túnel se supone estacionaria localmente porque el tiempo de relajación dieléctrica, τ_{di} , es mucho mayor que los tiempos en que se alcanza un equilibrio local en cada periodo de la superred. Teniendo esto en cuenta, la variación de la corriente con el tiempo es bastante lenta. Por eso se puede suponer que el potencial se acomoda al estado estacionario para el valor instantáneo de la corriente junto con las ondas de dipolo de carga que se estén moviendo.

²Este número mínimo de periodos, que depende de la configuración de parámetros de la superred, lo obtenemos al reducir el número de periodos N de la superred homogénea, con los parámetros

modificar un pozo añadiendo un número alto de monocapas lo tendremos que analizar según la posición que ocupe el pozo modificado.

4.2.2 Posición del pozo modificado

Dado que añadir pocas monocapas al pozo modificado es poco interesante, vamos a centrarnos en el caso de añadir muchas monocapas y ver el efecto que tiene cambiar la posición $1 \leq i_1 \leq N = 50$ del pozo modificado. Concretamente el número de monocapas agregadas será de 10, por tanto $d_{W_{i_1}} = 10$ nm, mientras que el resto de pozos medirán 7 nm.

Como hemos comentado previamente, cuando la caída de potencial V_{dc} es relativamente baja, si una onda nacida en el contacto emisor no pudiese alcanzar el pozo modificado, seguirán nucleándose ondas en el contacto emisor, pero, si V_{dc} es suficiente para garantizar que sí lo alcance, entonces no habrá nucleación de ondas en el contacto emisor. Así pues, hay dos posibles regímenes de oscilación: cuando las ondas nacidas en el contacto inyector no alcanzan el pozo modificado, y cuando las ondas nacen en el propio pozo modificado.

Por su parte, dado que para que una onda se forme completamente hace falta un espacio mínimo de 14 periodos, la posición i_1 del pozo modificado mediará la naturaleza de las oscilaciones de corriente. Concretamente, tendremos diferentes escenarios si el pozo modificado está cerca el inyector (ver figura 4.4(a)), si está cerca del contacto colector (ver figura 4.4(d)), o si está lejos de ambos (ver figuras 4.4(b)-(c)).

Tenemos, pues, las siguientes situaciones al hacer un barrido creciente en V_{dc} :

1. Si el pozo modificado se halla en un periodo $i_1 > 14$, va a haber un pequeño intervalo de voltaje en el que las ondas de dipolo de carga se nuclean en el contacto emisor pero se desvanecen antes de lograr alcanzar el pozo modificado (ver figuras 4.4(b)-(d)). Éste intervalo presenta oscilaciones de corriente de alta frecuencia, comparable al presentado en la figura 3.4. Si $i_1 < 14$, este intervalo no existirá (ver figura 4.4(a)).
2. El sistema alcanza un estado estacionario. Si V_{dc} no es muy grande, pero lo suficiente como para que las ondas nacidas en el contacto emisor pudiesen alcanzar el pozo modificado, entonces no habrá creación o reciclaje de ondas (la carga estará concentrada en el pozo modificado). A raíz de ésto, hay una caída brusca en la densidad de corriente total.

de la tabla 4.1. Si $N < 14$, no hallamos oscilaciones de la corriente para $V_{dc} < 2V$. Aunque se haya seguido este enfoque, cabe mencionar que existen estimaciones teóricas para este número mínimo de periodos (o longitud mínima) [77, 29].

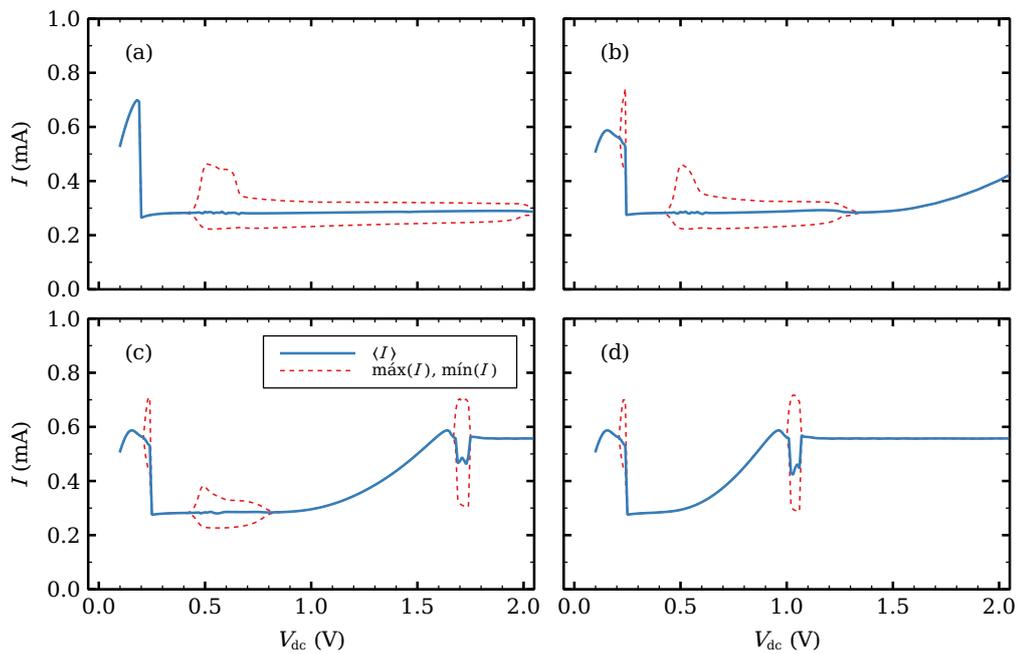


Fig. 4.4 Curva $I - V$ característica para un único pozo modificado, en la posición i_1 -ésima, con 10 monocapas adicionales, teniendo así $d_{W_{i_1}} = 10$ nm. (a) $i_1 = 5$, no hay oscilaciones asociadas a la nucleación de ondas en el contacto emisor. (b) $i_1 = 20$ y (c) $i_1 = 30$, representan el acortamiento suave de la región de oscilaciones asociadas a la nucleación de ondas en el pozo modificado, a medida que la posición de éste se aleja del contacto inyector y se acerca al contacto colector. (d) $i_1 = 39$, no hay oscilaciones asociadas a la nucleación de ondas en el pozo modificado.

3. Si el pozo modificado se halla en un periodo $i_1 < N - 14$, habrá un intervalo de voltaje donde se producen oscilaciones en la corriente (con una corriente promediada en tiempo baja). En este caso las ondas de dipolo de carga se nuclean en el pozo modificado y viajan hacia el contacto colector. Éste intervalo de oscilaciones se vuelve más corto a medida que $i_1 \uparrow N - 14$. Véase la evolución del intervalo en las figuras 4.4(a)-(c). En cambio, si $i_1 > N - 14$, un intervalo con oscilaciones de esta naturaleza no existirá (ver figura 4.4(d)).
4. El sistema vuelve a ser estacionario y, al aumentar V_{dc} , la densidad de corriente vuelve a elevarse hasta niveles cercanos a los que preceden la caída antes mencionada.
5. Si el pozo modificado se encuentra cerca del contacto colector ($i_1 > N - 14$), se puede hallar un intervalo de voltaje de oscilaciones en la corriente, que acaba en una bifurcación de punto de silla de periodo infinito. Éste intervalo ya no se encuentra en un régimen de caída de potencial V_{dc} baja, y las oscilaciones ocurren de la siguiente manera: la región entre el pozo modificado y el contacto colector se encuentra saturada de carga, luego las ondas de dipolo de carga se nuclean periódicamente en el contacto inyector y recorren la superred hasta desvanecerse en el pozo modificado. Éste intervalo se aprecia en las figuras 4.4(c)-(d).
6. El sistema, de nuevo, vuelve a un estado estacionario (ver figuras 4.4(c)-(d)), y la densidad de corriente aumenta suavemente al aumentar V_{dc} hasta, en algún momento, alcanzar el segundo *plateau*.

En lo que respecta a comportamiento caótico no hubo evidencia alguna en ninguno de los tres posibles intervalos de oscilaciones. Las oscilaciones siempre son periódicas. Luego, a pesar del efecto que un pozo mucho más largo pueda tener sobre la dinámica de la superred, que se podría entender como que la “parte” en dos, no logramos hallar las propiedades vistas en superredes de pocos periodos como las estudiadas en [69]³.

³Notemos que estas superredes de 10 periodos tienen un porcentaje de aluminio diferente y, lo que es más importante, dada la conservación de campo eléctrico total, a mismo voltaje V_{dc} cada pozo de una superred de 10 periodos verá un campo eléctrico de un orden 5 veces mayor que los de una superred de 50 periodos, haciendo que, a $V_{dc} = 2V$, la superred de 10 periodos se encuentre en el segundo *plateau* de oscilaciones en lugar del primero.

4.3 Modificación de dos pozos

En esta sección estudiamos cómo afecta la presencia de dos pozos modificados con la adición de “suficientes” monocapas (es decir, 6 o más) al comportamiento de las ondas y al comportamiento general de la superred. Los pozos estarán ubicados en los periodos $0 < i_1 < i_2 < N$ y denotaremos por R_I , R_{II} , y R_{III} , respectivamente, a las regiones delimitadas por el contacto inyector, primer pozo modificado, segundo pozo modificado, y contacto colector.

Dado que un pozo suficientemente ancho, en general, elimina la posibilidad de que hayan ondas en la región previa a él, vamos a considerar que $i_2 - i_1 > 14$ y $i_2 < N - 14$ para que en las regiones R_{II} y R_{III} puedan haber ondas.

4.3.1 Longitud relativa de los pozos modificados

Vamos a analizar la relación entre monocapas adicionales en cada uno de los dos pozos modificados una vez fijado el primero en $d_{W_{i_1}} = 10$ nm. Es decir, si $d_{W_{i_k}} = 7 \text{ nm} + \delta d_{W_{i_k}}$, veremos el comportamiento según $\delta d_{W_{i_1}} / \delta d_{W_{i_2}}$.

Se tienen las siguientes tres posibilidades:

1. Si el segundo pozo modificado tiene muchas menos monocapas adicionales que el primer pozo, es decir $\delta d_{W_{i_1}} / \delta d_{W_{i_2}} \gg 1$, las ondas de dipolo de carga se nuclean en el primer pozo y, tal como se describe en la sección 4.2.1 cuando hay pocas monocapas, la onda, si alcanza el segundo pozo, podrá superarlo en su viaje hacia el contacto colector (ver figura C.2b). La densidad de corriente total, en el instante en que la onda atraviesa el pozo modificado, sufrirá un pico muy breve.
2. Si ambos pozos modificados tienen una cantidad similar de monocapas adicionales, o sea $\delta d_{W_{i_1}} / \delta d_{W_{i_2}} \approx 1$, se nuclearán ondas de dipolo de carga en *ambos* pozos y se reciclarán de manera sincronizada, pero no lograrán salir de las regiones en las que hayan sido nucleadas. Pueden surgir comportamientos complejos. Los describiremos en las secciones 4.3.2 y 4.4.
3. Si el segundo pozo modificado tiene muchas más monocapas adicionales que el primer pozo, es decir $\delta d_{W_{i_1}} / \delta d_{W_{i_2}} \ll 1$, ocurre, de manera análoga a la sección 4.2.1 cuando hay muchas monocapas, que las ondas se nuclearán en el primer pozo modificado sólo si V_{dc} no es lo suficientemente elevado como para que esas ondas sean capaces de alcanzar al segundo pozo modificado. Si V_{dc} es suficiente como para que esas ondas pudiesen alcanzar el segundo pozo modificado, el sistema, en lugar de nuclear ondas en el primer pozo,

alcanzará un estado estacionario (ver figura C.2a, donde se fuerza la presencia de una onda de dipolo de carga en la región entre ambos pozos modificados). Si V_{dc} es relativamente elevado, las ondas se nuclearán en el segundo pozo modificado.

4.3.2 Distancia relativa entre pozos modificados

Analizamos qué ocurre cuando ambos pozos tienen la misma alta cantidad de monocapas adicionales (concretamente, $d_{W_{i_k}} = 10$ nm, que se corresponde a 10 monocapas añadidas) pero variamos la relación $(i_2 - i_1)/(N - i_2)$. Es decir, cómo cambia el comportamiento según lo grandes que sean las regiones R_{II} y R_{III} una respecto a la otra. En ese caso fijaremos $i_1 = 5$, logrando así que no hayan ondas de dipolo de carga nucleadas en el contacto inyector de carga. Ésto hace que, si esperamos que puedan haber ondas en ambas regiones, el segundo pozo modificado sólo podrá estar ubicado en el periodo $19 = i_1 + 14 < i_2 < N - 14 = 36$.

El fenómeno más interesante en estas circunstancias es que las ondas de ambas regiones se reciclan de manera sincronizada. Es decir, en una región, cuando una onda fuese a desvanecerse o a reciclarse, provocará el reciclaje de la onda de la otra región y, seguidamente, la nucleación de una onda en ambos pozos modificados. Entendemos, pues, que el reciclaje de ondas de dipolo de carga está enlazado entre ambas regiones.

Se distinguen tres escenarios de reciclaje enlazado:

1. Si una onda no fuese a alcanzar el final de su respectiva región y se desvanece antes, entonces su desvanecimiento provocará la creación de una onda en el comienzo de ambas regiones (R_{II} y R_{III}).
2. Las ondas que recorren la región R_{II} por completo (es decir, las nacidas en el primer pozo modificado y son capaces de alcanzar el segundo), serán absorbidas por el segundo pozo modificado y se reciclarán ondas en cada una de las dos regiones.
3. Las ondas que recorren la región R_{III} por completo (nucleadas en el segundo pozo modificado y que alcanzan el contacto colector) no van a desatar el reciclaje necesariamente. Éstas ondas de carga pueden detenerse y permanecer en los periodos cercanos al contacto colector (como se veía en la figura 3.6) por una duración corta o larga de tiempo. Esto se puede entender como un estado metaestable.

Las oscilaciones de la corriente serán periódicas en el caso 2, pero se podrá observar caos en los casos 1 y 3. Ésto lo podemos apreciar a lo largo del apéndice C y en la sección 4.4.

Dado que, si sólo se modifica la longitud de dos pozos, la velocidad de las ondas es la misma en ambas regiones, estos tres casos los podemos controlar según la longitud de las regiones R_{II} y R_{III} o, lo que es lo mismo, la distancia relativa $(i_2 - i_1)/(N - i_2)$. Aunque, una vez fijado $i_1 = 5$, no podremos evitar el primer caso, sí que podremos escoger entre el segundo y tercer caso descrito eligiendo adecuadamente la posición de i_2 :

- Si la región R_{II} es más corta, $i_2 - i_1 < N - i_2$, las ondas de la región R_{III} nunca alcanzarán el contacto colector. Si las ondas de la región R_{II} son capaces de alcanzar el segundo pozo modificado, el reciclaje ocurrirá de manera periódica. En este caso, si las ondas de la región R_{II} se desvanecen antes de recorrer toda la región, no hemos observado caos. Por ejemplo, fijando $i_2 = 25$.
- Si la región R_{II} es más larga, $i_2 - i_1 > N - i_2$, las ondas de la región R_{III} pueden alcanzar el contacto colector y se da el tercer caso descrito. En esta situación, tanto da si las ondas de la región R_{II} alcanzan el segundo pozo modificado o no, que podrá observarse caos en ambos casos. Un caso concreto es tomando $i_2 = 30$, que estudiaremos en la sección 4.4.

Ejemplos de ambas situaciones podemos verlos en la figura 4.5.

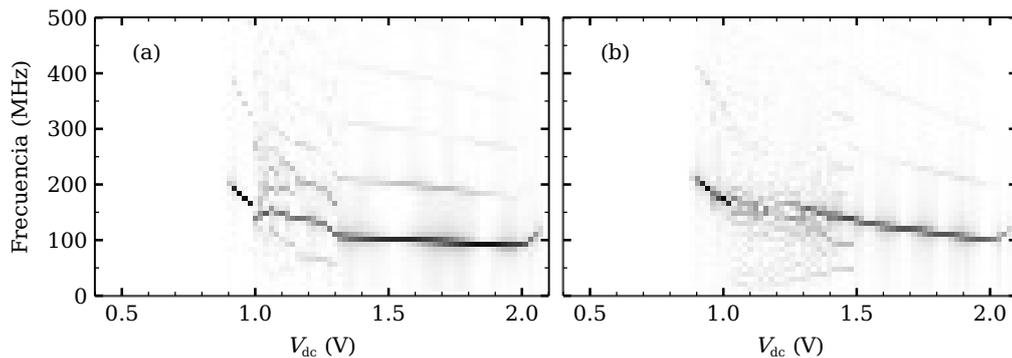


Fig. 4.5 Espectro de Fourier para distintas posiciones de pares de pozos modificados. Las especificaciones son $d_{W_{i_1}} = d_{W_{i_2}} = 10$ nm, $i_1 = 5$. El segundo pozo modificado ocupará la posición: (a) $i_2 = 25$ y (b) $i_2 = 29$.

Una ventaja adicional es que, al ser las regiones R_{II} y R_{III} más cortas que la longitud total, el reciclaje de las ondas de dipolo de carga ocurrirá más rápido, lo que lleva a que las oscilaciones de la corriente sean de mayor frecuencia que en el

caso de una superred homogénea. Concretamente, para el caso que trataremos en la sección 4.4, $i_2 - i_1 = 25 = N/2$, con lo que la frecuencia de las oscilaciones será aproximadamente el doble.

4.3.3 Criterios mínimos para garantizar caos

Para finalizar ésta sección daremos unos criterios cualitativos de diseño de caos enfocados a la fabricación de una superred “naturalmente” caótica. Tendremos en cuenta la restricción de no poder usar una cantidad de periodos inferior a $N = 50$ y que sólo tendremos acceso a información macroscópica (como puede ser la curva $I - V$ característica, la corriente total, o el espectro de Fourier de la propia corriente).

Los pasos a seguir son:

1. Establecer cantidad mínima de monocapas adicionales. Esto es posible obtenerse modificando un periodo central y observando los cambios en la curva $I - V$ característica. La cantidad mínima se alcanzará cuando la corriente promediada en tiempo tenga una caída brusca, tal como se ve en la figura 4.4.
2. Establecer longitud mínima de periodos, k_{\min} , para que puedan nuclearse ondas de dipolo de carga. Una vez conocida la cantidad mínima de monocapas que hay que añadir, se modifica un pozo cercano al contacto colector y se repite el experimento modificando pozos cada vez más lejanos. En cuanto la curva $I - V$ característica pase de no tener oscilaciones en un régimen de corriente promedio baja (ver figura 4.4(d)) a tenerlo (ver figura 4.4(c)), habremos dado con la longitud mínima.
3. Escoger las posiciones de los pozos modificados, i_1 e i_2 , cumpliendo las siguientes restricciones: $0 < i_1 < k_{\min}$ para que no hayan ondas nucleándose en el contacto emisor, e $i_2 - i_1 > N - i_2 > k_{\min}$ para que puedan nuclearse ondas en ambos pozos modificados y que las ondas de dipolo de carga formadas en el segundo pozo modificado alcancen antes el final de su recorrido (es decir, el contacto colector), para así estar las condiciones de reciclaje de ondas que son fortuitas al caos.

Por último, cabe recordar que la elección $0 < i_1 < k_{\min}$ como posición para el primer pozo está anulando la posibilidad de que se nucleen ondas en el contacto inyector. Sin embargo, dado que estas observaciones se hicieron teniendo en cuenta unas condiciones de contorno concretas (ecuaciones (2.22) y (2.23)), y en vistas de [18], debemos contemplar la posibilidad de que, utilizando otras condiciones de contorno, podamos modificar la nucleación de ondas en el contacto inyector

d_W	d_B	N_D	ϵ_B	m_B	\mathcal{E}_{C_1}	\mathcal{E}_{C_2}	\mathcal{E}_{C_3}	γ_1	γ_2	γ_3
nm	nm	10^{10} cm^{-2}	ϵ_0	m_e	meV	meV	meV	meV	meV	meV
10	4	6	11.6	0.1	24	96	215	2.5	8	24

Tabla 4.2 Configuración de pozos modificados en diseño de superred no homogénea, ubicados en los periodos $i_1 = 5$ e $i_2 = 30$, y a temperatura $T = 295 \text{ K}$. ϵ_0 es la constante dieléctrica del vacío, y m_e es la masa del electrón.

de modo que no sea necesario incluir ese primer pozo cercano al contacto para obtener la dinámica que se busca con los criterios antes descritos.

4.4 Estudio del caos en superred modificada en dos pozos

Analizamos un diseño de superred no homogénea concreto que presenta dos tipos de caos. Concretamente, modificaremos dos pozos, ubicados en los periodos $i_1 = 5$ e $i_2 = 30$, agregando 10 monocapas. Es decir, $d_{W_5} = d_{W_{30}} = 10 \text{ nm}$. La configuración de la superred será la recogida por la tabla 4.1, a excepción de los dos pozos modificados cuyos valores vienen en la tabla 4.2 y sustituirán a los valores por defecto.

Nos centraremos en la estructura global del intervalo de voltaje en el que hay oscilaciones. Ejemplos concretos pueden verse en el apéndice C.

En la figura 4.6 hacemos un barrido sobre V_{dc} y representamos lo siguiente:

- Sección de Poincaré de V_{42} y dV_{42}/dt en función de V_{12} . Es decir, representamos $V_{42}(t^*)$ y $dV_{42}(t^*)/dt$, $\forall t^* \in \{t \in \mathbb{R} : V_{12}(t) = \langle V_{12} \rangle \wedge dV_{12}(t)/dt > 0\}$. La primera condición, $V_{12}(t) = \langle V_{12} \rangle$, intenta recoger la periodicidad del sistema, mientras que la segunda condición, $dV_{12}(t)/dt > 0$, evita duplicidad de información. La elección de los periodos 12 y 42 es debida a que están en dos regiones diferentes y porque hay más de 14 periodos entre ellos.
- Los tres exponentes de Lyapunov más relevantes. Se calculan siguiendo el apéndice B.2.4. Éstos exponentes recogen cuánto se quiere desviar el sistema de una trayectoria ante la presencia de errores infinitesimales. Un exponente positivo implica caos.
- Espectro de Fourier de la señal de densidad de corriente total, $J(t)$, que ha sido normalizada para cada valor de V_{dc} con el fin de resaltar las frecuencias principales.

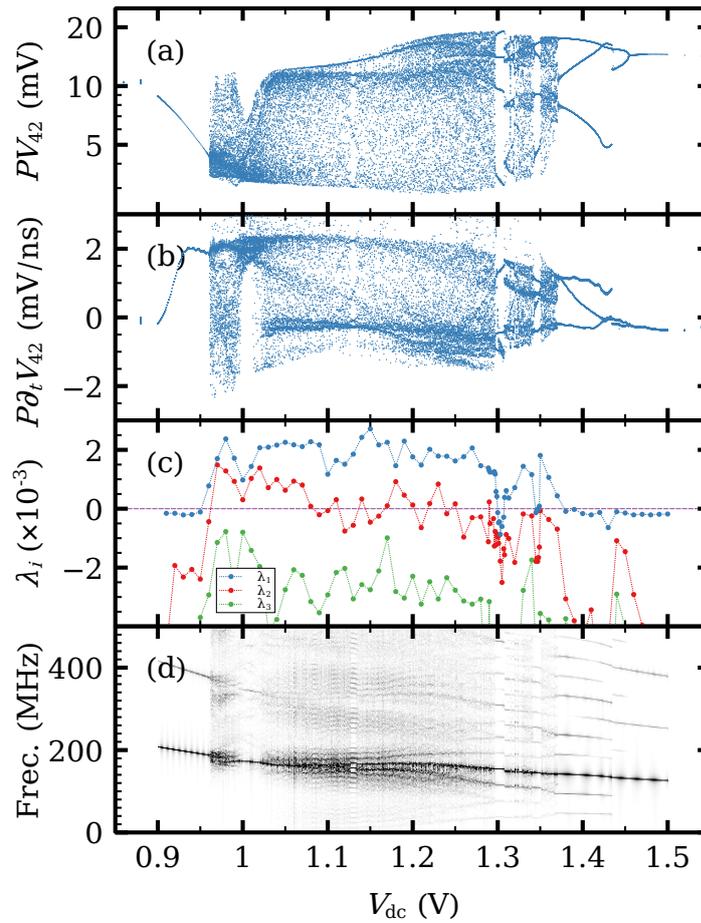


Fig. 4.6 Caos en dos pozos modificados, según sección 4.3.3, con $i_1 = 5$, $i_2 = 30$, $d_{W_5} = d_{W_{30}} = 10$ nm. (a) Sección de Poincaré de V_{42} . (b) Sección de Poincaré de dV_{42}/dt . (c) Exponentes de Lyapunov. (d) Espectro de Fourier (normalizado para cada V_{dc}), en negro las frecuencias más potentes.

Cada uno de estos observables representa información complementaria. Los exponentes de Lyapunov revelan que hay caos en el intervalo $0.96\text{V} < V_{\text{dc}} < 1.37\text{V}$, salvo por pequeños intervalos de periodicidad. El mayor exponente de Lyapunov, además, es del orden de los obtenidos con ruido en [2]. El segundo exponente revela que puede haber caos en diferentes escalas de tiempo, en caso de ser positivo. La sección de Poincaré $\mathcal{P}V_{42}$ muestra que la ruta al caos no se trata de una cascada de doble periodo como en [69, 34], además muestra saltos entre ciertos atractores periódicos (por ejemplo, en $V_{\text{dc}} = 1.31\text{V}$ y $V_{\text{dc}} = 1.43\text{V}$). La sección de Poincaré $\mathcal{P}\delta_t V_{42}$ permite distinguir dos tipos de caos (más detalles en la sección 4.4.1) según el valor de V_{dc} . Por último, el espectro de Fourier, que es el único observable macroscópico, brinda patrones que poder buscar en un experimento, como lo puede ser que, a falta de una frecuencia principal, hay un rango de frecuencias dominante (salvo alrededor de $V_{\text{dc}} = 1\text{V}$), aparte de que todas las frecuencias que intervienen no son, necesariamente, armónicos de éstas frecuencias dominantes.

La transición al caos, como decimos, no se trata de una cascada de doble periodo. Cuando se V_{dc} sobrepasa un valor crítico (aproximadamente 0.96V y 1.37V), el caos emerge sobre una posible cuasi-periodicidad. El mayor exponente de Lyapunov salta bruscamente de un valor nulo a un valor positivo, mientras que el segundo exponente toma valores nulos o incluso positivos. El caos surge por interacción entre diferentes atractores. En la sección 4.4.1 explicamos en mayor detalle esos atractores y cómo interactúan al hacer un barrido creciente en V_{dc} .

Los saltos repentinos en la sección de Poincaré nos motivan a estudiar la presencia de histéresis. Esto lo haremos en la sección 4.4.3. Adicionalmente, estos saltos revelan la presencia de diferentes atractores. Ésto afecta de manera inevitable a la aproximación de los exponentes de Lyapunov cerca de esos saltos, puesto que al introducir error de manera artificial, el sistema puede encontrarse en el área de atracción de un atractor diferente al cuál queremos caracterizar. Será relevante en los saltos entre atractores periódicos (como en $V_{\text{dc}} = 1.43\text{V}$) porque puede inducir falsos positivos. Es decir, indicar la presencia de caos cuando realmente no la hay.

El rasgo más importante es que hay dos tipos de caos:

- El primero será lo que se conoce como hipercaos [68] (hay más de un exponente de Lyapunov positivo), que se encuentra en el intervalo $0.96\text{V} < V_{\text{dc}} < 1.02\text{V}$. Este tipo de caos está asociado a que las ondas de dipolo de carga nucleadas en el segundo pozo modificado no alcanzan el contacto colector o, en caso de hacerlo, no logran mantenerse en los periodos cercanos al contacto.

- El segundo es lo que se conoce como caos por intermitencias, en el que se hallan eventualmente⁴ oscilaciones caóticas de la corriente que duran una cierta cantidad de tiempo y, entre intervalos de este tipo de oscilación, puede haber una corriente cuasi-estacionaria u oscilatoria de baja amplitud con una duración incierta. Este tipo de caos se ve en el intervalo $1.02V < V_{dc} < 1.37V$, a excepción de pequeñas ventanas de periodicidad, y se asocia a que las ondas nucleadas en segundo pozo modificado logran alcanzar y mantenerse cerca del contacto colector.

No hemos hallado menciones previas sobre presencia de hipercaos en superredes semiconductoras (sean débil o fuertemente acopladas). Los artículos teóricos normalmente se centran en el primer exponente de Lyapunov [24, 2] y no calculan los siguientes exponentes, luego no podemos catalogarlo en esos casos. Puntualmente, los que sí los calculan [25], encuentran otros tipos de caos (sólo un exponente de Lyapunov es positivo) o son trabajos mucho más recientes centrados en superredes fuertemente acopladas y, también, hallan otro tipo de caos [50, 42, 43]. Los artículos experimentales donde se halla evidencia de caos, como lo son [55, 26, 52], en caso de calcular exponentes, sólo pueden estimar el primero⁵ por las limitaciones propias del método que se utiliza [23]. Ejemplos mínimos de sistemas dinámicos que presentan hipercaos son [68, 53].

El caos por intermitencias había sido hallado tanto teórica como experimentalmente, recientemente, en superredes fuertemente acopladas en una configuración especial (acopladas a un circuito RLC) y a muy bajas temperaturas en [42, 43].

4.4.1 Evolución del atractor al variar V_{dc}

Al aumentar la caída de potencial a lo largo de la superred V_{SL} , apreciamos el siguiente comportamiento (en la figura 4.7 se recogen los atractores representados en los ejemplos completos a los que se hará referencia, y que se hallan en el apéndice C):

1. El sistema pasa de un estado estacionario (punto fijo) a un ciclo límite Γ_1 en $V_{dc} = 0.8V$. Ver figuras C.3 y C.4. Las ondas se nuclean en ambos pozos modificados y apenas alcanzan el contacto colector. El sistema se halla en un régimen periódico.
2. Un segundo ciclo, Γ_2 , empieza a interactuar con el ciclo Γ_1 anterior a partir de $V_{dc} = 0.96V$, y surge un atractor caótico. La órbita del sistema salta de Γ_1

⁴Dicho en el sentido español.

⁵Existen métodos para estimar el segundo exponente en medidas experimentales, pero su uso no es trivial, ver [79].

- a Γ_2 , y viceversa, rellenando el espacio entre ambos ciclos. Ver figura C.5. Hay dos exponentes de Lyapunov positivos, lo cual hace que cataloguemos éste escenario como hipercaótico. Las ondas de dipolo de carga se reciclan al alcanzar el final de sus respectivas regiones (las ondas que llegan al contacto colector no se detienen cerca de éste, en su lugar se reciclan al alcanzarlo).
3. Alrededor de $V_{dc} \approx 1V$, ambos ciclos tienen una fusión parcial, que llamaremos $\Gamma_1 \# \Gamma_2$. La órbita del sistema sigue rellenando el espacio entre las regiones que no se fusionan. Ver figura C.6. Siguen habiendo dos exponentes de Lyapunov positivos, pero son ambos inferiores a los descritos en el punto anterior. La órbita se asemeja a aquella vista en [2], descrita como *snail shaped*.
 4. Un tercer ciclo, Γ_3 , comienza a interactuar con $\Gamma_1 \# \Gamma_2$ en $V_{dc} \approx 1.02V$. La órbita salta de un atractor a otro, como puede verse en la figura C.7. Éste atractor es representa la transición entre el hipercaos y el caos por intermitencias: las ondas que alcanzan el contacto colector a veces son capaces de permanecer cerca sin necesidad de reciclarse inmediatamente.
 5. Γ_3 se contrae hasta convertirse en un punto de silla, que denotaremos Σ_3 cuando $V_{dc} \approx 1.04V$, pero mantiene su interacción con $\Gamma_1 \# \Gamma_2$. La órbita del sistema salta desde $\Gamma_1 \# \Gamma_2$ hasta Σ_3 ralentizándose cuanto más cerca está del punto de silla, hasta que lo sobrepasa y vuelve a $\Gamma_1 \# \Gamma_2$ formando espirales. Ver figura C.8. Éste es un caso de caos por intermitencias: se producen oscilaciones irregulares entre periodos (que pueden variar en duración) donde el comportamiento es regular. El comportamiento regular está asociado a que las ondas de dipolo de carga que alcanzan el contacto colector se detienen y permanecen en los periodos cercanos al contacto, mientras que las oscilaciones irregulares están asociadas al reciclaje de éstas (y de las nacidas en el primer pozo modificado).
 6. En $V_{dc} \approx 1.2V$ el punto de silla Σ_3 se expande a un ciclo Σ_Γ pero mantiene su comportamiento de silla. La órbita del sistema va desde $\Gamma_1 \# \Gamma_2$ hasta Σ_Γ y regresa, formando espirales en ambos sentidos. Se sigue teniendo caos por intermitencias, con la salvedad de que los periodos regulares entre oscilaciones irregulares son ahora oscilaciones de baja amplitud. Al aumentar V_{dc} se puede apreciar mejor la influencia de Σ_Γ , como se ve en las figuras C.9 y C.10.

7. A partir de $V_{dc} = 1.3V$ el atractor caótico permanece siendo el mismo, salvo por pequeños intervalos de voltaje en los que el sistema se encierra en un atractor periódico (como ocurre en la figura C.11).
8. Cerca de $V_{dc} \approx 1.37V$ el sistema, de manera consistente, deja de recubrir el espacio, y sigue un atractor cíclico de periodo 3 (ver figura C.12). Al ir aumentando la caída de potencial a lo largo de la superred surgirá un segundo atractor periódico que, en principio, el sistema no notará (ver sección 4.4.3) pero, a partir de un cierto voltaje $V_{dc} = 1.43V$, será el único atractor que influya al sistema y tendrá periodo 2 (ver figura C.13).
9. El ciclo de periodo 2 se deforma suavemente en un ciclo de periodo 1, que se representa en la figura C.14.

Recapitulando, los casos 2 a 3 se corresponden a hipercaos, mientras que los casos 5 a 7 se corresponden a caos por intermitencias.

4.4.2 Sección de Poincaré

La sección de Poincaré asociada a $V_{42}(t)$ (ver figura 4.6(a)) puede utilizarse para distinguir la periodicidad, pero no permite distinguir con facilidad la estructura de los atractores caóticos.

En cambio, la sección de Poincaré asociada a $dV_{42}(t)/dt$ (ver figura 4.6(b)) sí que permite diferenciar los rasgos generales de los dos tipos de caos descritos en la sección 4.4.1. Éstos son:

- Cuando hay hipercaos por la interacción de dos ciclos independientes, Γ_1 y Γ_2 , la sección de Poincaré está muy dispersa pero, aún así, hay una gran concentración en $dV_{42}(t)/dt \approx 2\text{mV/ns}$. Esto ocurre cuando $0.96V \lesssim V_{dc} \lesssim 1V$.
- Cuando hay hipercaos por la interacción de dos ciclos parcialmente fusionados, $\Gamma_1 \# \Gamma_2$, la sección estará concentrada en $dV_{42}(t)/dt \approx 2\text{mV/ns}$. Esto ocurre cuando $1V \lesssim V_{dc} \lesssim 1.02V$.
- Cuando hay caos por intermitencias por interacción con el punto de silla, Σ_3 , la sección vuelve a estar dispersa pero con una gran concentración en $dV_{42}(t)/dt \approx 0\text{mV/ns}$. Ésto es de esperar, pues el sistema suele estar en un estado cuasi-estacionario. Esto ocurre cuando $1.02V \lesssim V_{dc} \lesssim 1.2V$.
- Cuando hay caos por intermitencias pero el punto de silla se ha expandido a Σ_Γ , la sección vuelve a estar dispersa pero la concentración en $dV_{42}(t)/dt \approx$

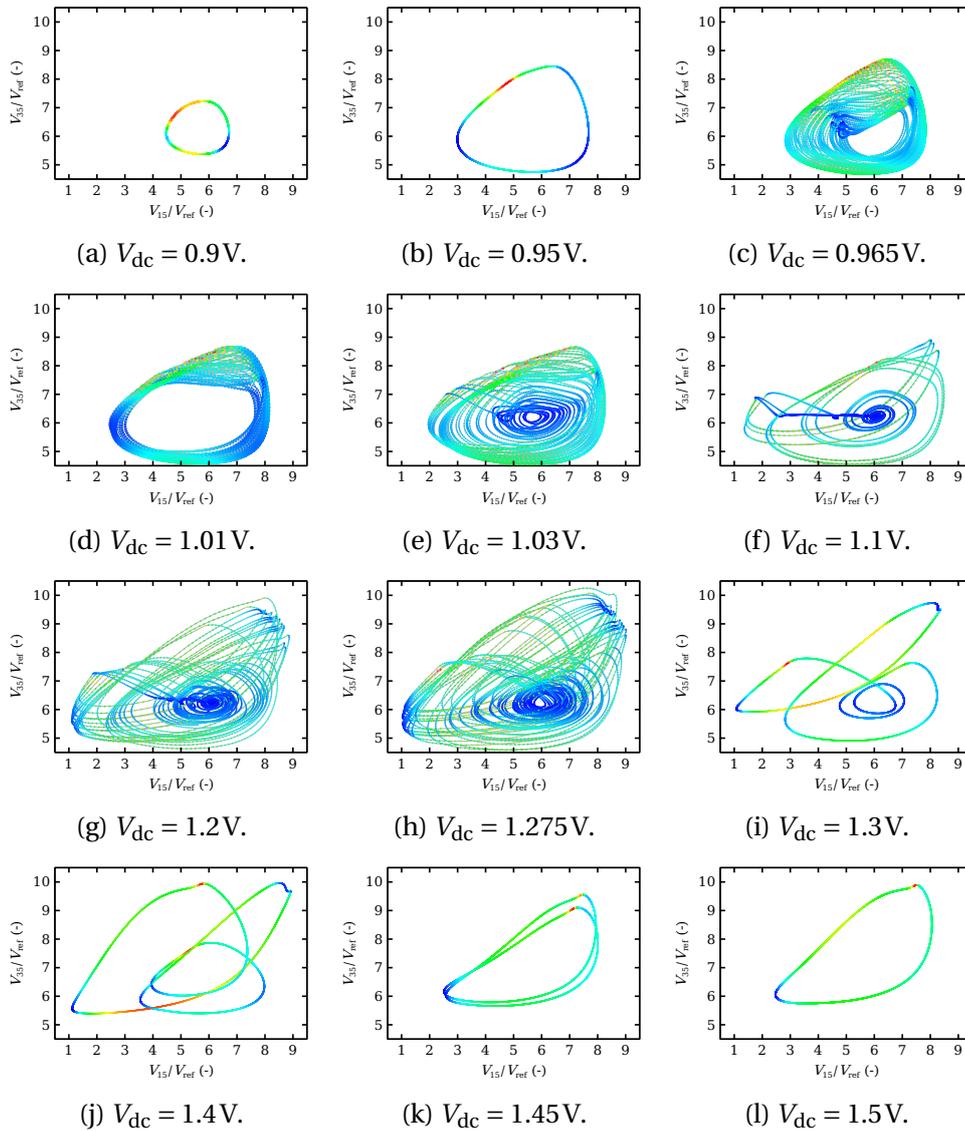


Fig. 4.7 Evolución de la órbita del sistema para la superred modificada en dos pozos, al variar la caída de potencial V_{dc} .

0 mV/ns se vuelve menos focalizada, lo que relacionamos a las oscilaciones regulares de baja amplitud entre intervalos de oscilaciones irregulares. Esto ocurre cuando $1.2\text{V} \lesssim V_{\text{dc}} \lesssim 1.3\text{V}$.

4.4.3 Histéresis

Dados los saltos que se aprecian en la sección de Poincaré e, incluso, en el espectro de Fourier en $V_{\text{dc}} = 1.31\text{V}$ y $V_{\text{dc}} = 1.43\text{V}$, esperamos encontrar evidencia de histéresis. Es decir, que la estabilidad de los atractores pueda depender no sólo del parámetro V_{dc} , si no, además, de su tasa de cambio dV_{dc}/dt .

Para comprobar la presencia de histéresis hemos comparado simulaciones cuyas condiciones iniciales son, una vez fijado V_{dc} , usar caídas de potencial uniformes ($V_i = V_0 \forall i$) de modo que se cumpla la restricción 2.26, con otras simulaciones que utilizan información previa como condiciones iniciales. La información previa se va obteniendo al hacer un barrido ascendente (descendente) desde $V_{\text{dc}} = 0.96\text{V}$ ($V_{\text{dc}} = 1.5\text{V}$) hasta $V_{\text{dc}} = 1.51\text{V}$ ($V_{\text{dc}} = 0.95\text{V}$) haciendo pasos de 1 mV, y el barrido ha seguido el procedimiento siguiente:

1. Fijada la caída de potencial V_{dc} , se deja evolucionar el sistema el equivalente de $5000 t_{\text{ref}} = 271.27\text{ ns}$, donde $t_{\text{ref}} = 54.254\text{ ps}$. Entonces,
2. Aumentar (disminuir) la caída de potencial V_{dc} a lo largo de la superred en una tasa absolutad de $0.01\text{ mV}/t_{\text{ref}} = 0.184\text{ mV/ns}$ durante $100 t_{\text{ref}} = 5.4254\text{ ns}$.

En la figura 4.8 podemos apreciar histéresis principalmente en escenarios no caóticos. Específicamente, ocurre cuando hay dos atractores coexistiendo uno junto a otro, lo que queda patente por saltos repentinos en la sección de Poicaré de referencia y que, al hacer un barrido ascendente o descendente, desplazamos el valor de voltaje V_{dc} en el que ocurren dichos saltos. El salto donde ocurre de manera más evidente es en el ubicado en $V_{\text{dc}} = 1.43\text{V}$. En cambio, en $V_{\text{dc}} = 1.31\text{V}$ sólo podemos extender la atracción del atractor al hacer el barrido en dirección descendente. Por contra, las transiciones abruptas al caos no se ven afectadas por el barrido en ninguna dirección.

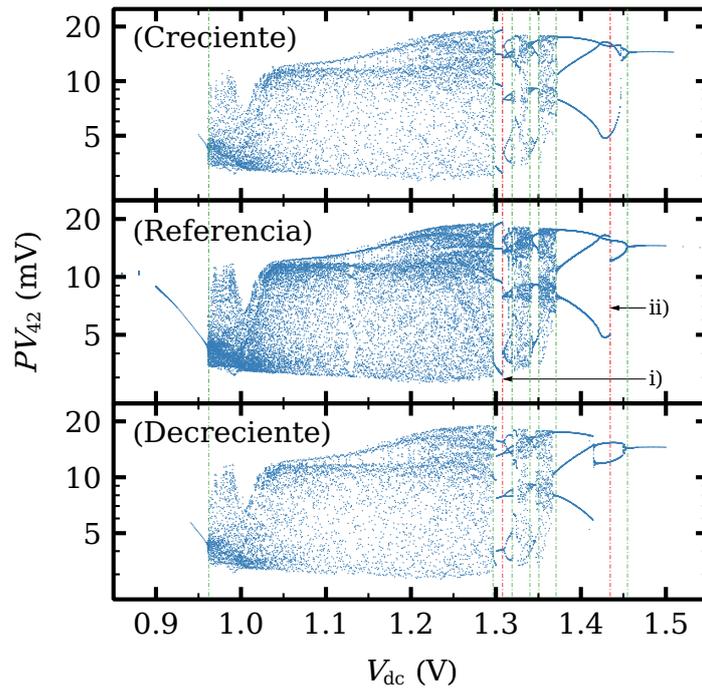


Fig. 4.8 Histéresis en dos pozos modificados, según sección 4.3.3, con $i_1 = 5$, $i_2 = 30$, $d_{W_5} = d_{W_{30}} = 10$ nm. (a) Sección de Poincaré con un barrido creciente en V_{dc} . (b) Sección de Poincaré de referencia (fijando V_{dc} y partiendo de una condición inicial uniforme $V_i = V_0 \forall i$). (c) Sección de Poincaré con un barrido decreciente en V_{dc} . Líneas punteadas rojas denotan saltos en los atractores periódicos: (i) ocurre en $V_{dc} = 1.31$ V, (ii) ocurre en $V_{dc} = 1.43$ V. Líneas punteadas verdes indican transiciones a caos o cambios de periodicidad en las que o bien no hay histéresis o es muy débil.

Capítulo 5

Influencia de desorden y ruido

En el capítulo 4 hemos estudiado los efectos que tienen modificaciones puntuales y deliberadas en la dinámica de una superred semiconductor débilmente acoplada. En este capítulo estudiaremos el efecto que tiene introducir desorden (errores de fabricación en la longitud de los pozos cuánticos) y, por otra parte, el efecto que tiene considerar la presencia de ruido (tanto interno como externo) sobre la dinámica general.

El desorden lo analizaremos con un doble objetivo. El primero es ver si, al añadirse a un diseño originalmente homogéneo de superred, se potencia el caos sin necesidad de introducir ruido. El segundo, contrario en naturaleza, es comprobar qué tan robusto es caos del diseño estudiado en la sección 4.4 frente a posibles errores de fabricación.

El ruido, como se ha mencionado previamente, sirve como mecanismo para potenciar caos débil o para prolongar el espacio de parámetros en el que lo podemos hallar. Veremos los efectos que tiene el ruido en el diseño mencionado.

5.1 Desorden

Sea $\delta_i \in \mathbb{R}$ el error introducido en la longitud del pozo i -ésimo, con $1 \leq i \leq N$. Como referencia, recordemos que las superredes se fabrican por deposición de monocapas de grosor $d_{ml} = 0.3 \text{ nm}$, y que la longitud de los pozos hasta ahora ha sido de 7 nm .

Notemos que el desorden que vamos a considerar no es por diseño, por lo que no tiene necesidad de ser múltiplos enteros de d_{ml} . Ésto tiene un sentido adicional: en el modelo estamos considerando que sólo importa la dirección de crecimiento de la superred, así que omitimos información en las direcciones ortogonales a ésta, pero la deposición de material no tiene por qué ser uniforme en esas direcciones.

El que δ_i sea un número real podemos considerarlo como un promedio de la no uniformidad de deposición.

En general asumiremos que el desorden se distribuye de manera independiente y está idénticamente distribuido como una normal con media nula, es decir, $\delta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Notemos que esta distribución tiene por soporte toda la recta real, con lo cual no es conveniente considerar valores de la desviación típica σ muy grandes. Será útil recordar que en una distribución de este tipo, $0.95 < \mathbb{P}(-2\sigma < \delta_i < 2\sigma) < 0.96$.

5.1.1 Desorden añadido a superred homogénea

Vamos a partir de un diseño homogéneo de superred. Es decir, usamos los parámetros de la tabla 4.1. Recordemos que, en éstas circunstancias de partida, el caos y la transición a él son difíciles de hallar, al menos en el primer *plateau* de oscilaciones de la corriente.

Entonces asumimos que la fabricación tiene errores, lo que hace que $d_{W_i} = 7 \text{ nm} + \delta_i$. También asumiremos que $6 \text{ nm} < d_{W_i} < 8 \text{ nm}$ para no desviarnos demasiado del diseño original. Esto requiere que $|\delta_i| < 1 \text{ nm}$, con lo que podemos tomar una desviación típica $\sigma = 0.5 \text{ nm}$ para que $|\delta_i| > 1 \text{ nm}$ sea un evento raro.

No hemos observado caos ni cambios generales en el comportamiento de la superred en estas condiciones. Es decir, el comportamiento global de la superred en el primer *plateau* de oscilaciones no ha variado, o lo ha hecho de manera insustancial.

En el mejor de los casos, si eliminamos la restricción $|\delta_i| < 1 \text{ nm}$, hemos observado como algo puntual la aparición de “burbuja” de doble periodo (como la presente en [34]). Es decir, dentro del intervalo de voltaje en el que la corriente es periódica con una cierta frecuencia dominante, puede surgir un subintervalo cuya frecuencia dominante sea la mitad. Pero no se aprecia la aparición de cascadas de doble periodo o amplificación del caos.

Éstas observaciones no entran en conflicto con estudios similares sobre el desorden, como [34]: el rasgo destacable es que las superredes que se analizan en la cita tienen una longitud mucho menor ($N < 15$ periodos), pero la diferencia de potencial a la que están sometidas (alrededor de 1.4 V para la superred con parámetros similares a los que estudiamos en este texto) sitúa las oscilaciones de corriente en el segundo *plateau*. Es más, sin desorden ya presentan caos por este mismo motivo.

5.1.2 Desorden añadido a diseño de superred no homogénea

Ahora partimos del diseño no homogéneo de superred analizado en la sección 4.4. Es decir, usamos los parámetros de la tabla 4.1, salvo para los periodos $i_1 = 5$ e

$i_2 = 30$, para los cuales usamos los valores de la tabla 4.2. De modo que, para los pozos modificados $d_{W_{ij}} = 10 \text{ nm} + \delta_{ij}$ con $j = 1, 2$, pero para el resto $d_{W_{ij}} = 7 \text{ nm} + \delta_{ij}$ con $j = 3, \dots, N$.

Estudiamos qué ocurre con el comportamiento general del sistema cuando la desviación típica σ toma valores desde $0.03 \text{ nm} = 0.1 \times d_{\text{ml}}$ hasta $0.27 \text{ nm} = 0.9 \times d_{\text{ml}}$. Esto hará que $|\delta_i| > 0.6 \text{ nm} = 2 \times d_{\text{ml}}$ sea un evento raro, aunque estamos acotando el rango de posibles valores frecuentes respecto a lo dicho en la sección 5.1.1 anterior.

En el comportamiento general apreciamos que ciertas características se verán con frecuencia, como lo pueden ser que, dentro del intervalo de voltaje dónde hallamos hipercaos o dentro del que hallamos caos por intermitencia, pueden surgir subintervalos bastante amplios donde desaparece todo tipo de oscilación y el sistema se halla en un estado estacionario. Lo primero (que esté confinado a la región de caos por intermitencia) es más frecuente que lo segundo. Otra ocurrencia frecuente es que los intervalos de corriente en los que se encuentra caos (independientemente de su categoría) se comprimen en intervalos mucho más pequeños, en comparación con la superred sin desorden.

Notablemente, una desviación típica de $\sigma = 0.03 \text{ nm} = 0.1 \times d_{\text{ml}}$ no es suficiente para que el comportamiento global se desvíe con total seguridad del presentado por la configuración sin desorden. Concretamente, algo más de la mitad de simulaciones muestran las mismas características que el diseño sin desorden (ver figura 5.2). Por contra, para $\sigma = 0.12 \text{ nm} = 0.4 \times d_{\text{ml}}$ en adelante, no hemos logrado observar de nuevo el comportamiento general (o insustancialmente alterado) del sistema sin desorden.

Si, en lugar de preocuparnos de lo robusto que es el comportamiento general del sistema sin desorden, respecto al desorden, nos preocupamos sencillamente de la presencia de caos, tenemos que, hasta $\sigma = 0.15 \text{ nm} = 0.5 \times d_{\text{ml}}$, la mayoría de simulaciones muestra *algún* intervalo caótico. Sin embargo, el tamaño de estos intervalos se verá afectado negativamente por el desorden. A medida que aumenta la desviación típica σ , será cada vez más frecuente ver intervalos cortos de caos, en lugar de intervalos largos. Para $\sigma > 0.15 \text{ nm}$, a medida que σ crece se verán cada vez menos casos en los que haya algún intervalo caótico.

El desorden logra eliminar cualquier comportamiento oscilatorio (sea caótico o no) en lo que parece ser dos intervalos de voltaje V_{dc} muy concretos. El primero está centrado en el intervalo que es intermitentemente caótico en ausencia de desorden, y es el que se ve con mayor frecuencia. El segundo está centrado en el intervalo en el que se halla hipercaos a falta de desorden. Curiosamente, éste segundo intervalo de “inhibición” de comportamiento oscilatorio sólo ocurre cuando también se observa el primero. Con lo que podemos afirmar que el caos por intermitencia es

más sensible al desorden, es decir, es más probable que desaparezca por culpa del desorden que el hipercaos. En mayor detalle, para una desviación típica σ pequeña, es el primer intervalo de inhibición el que se observa principalmente, pero a medida que σ aumenta, lo más frecuente es ver la ocurrencia del segundo intervalo (que trae consigo la ocurrencia del primero). Complementario a esto, vemos que el que haya *algún* intervalo de inhibición suele ocurrir entre un tercio y la mitad de las simulaciones, independientemente de la desviación típica.

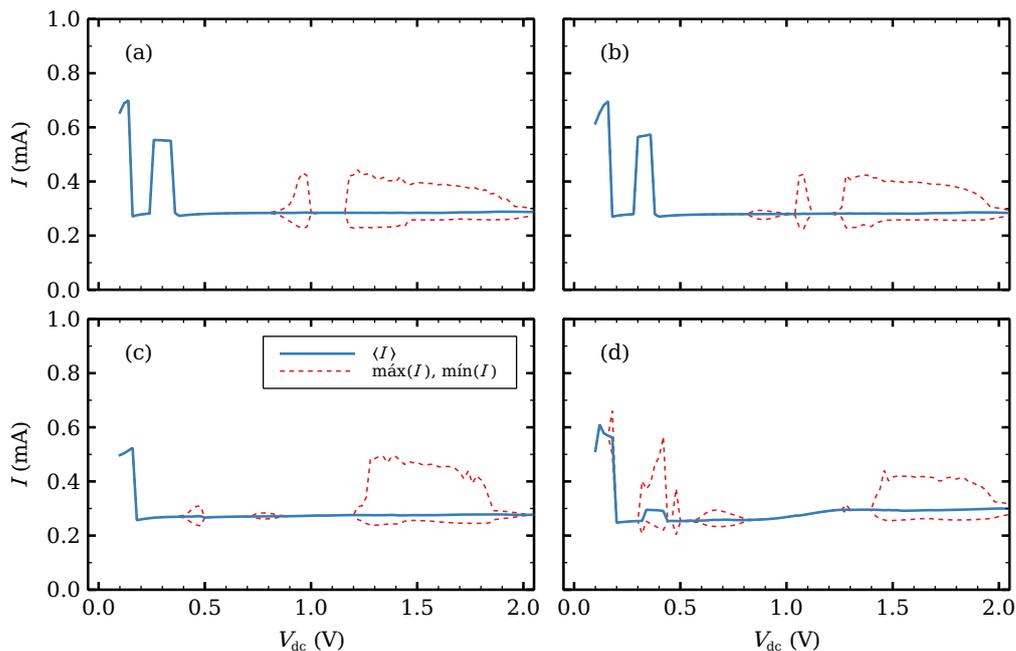


Fig. 5.1 Ejemplos de desorden inhibiendo el comportamiento, observado a través de la curva $I - V$ característica. Vemos los escenarios siguiente: (a) Inhibición de un intervalo de caos por intermitencia, (b) Inhibición de dos intervalos, uno de caos por intermitencia y otro hipercaótico, (c) Inhibición fuerte de oscilaciones, (d) Inhibición total de caos pero no de oscilaciones (incluso surgen un par de intervalos de oscilaciones regulares).

En la figura 5.1 recogemos algunos ejemplos donde se puede ver la inhibición de oscilaciones. Se incluye una ocurrencia poco frecuente en la que emergen pequeños intervalos de oscilaciones de la corriente, que resultan ser periódicos. También se aprecia que en ocasiones la región de oscilaciones de alto voltaje se extiende hacia mayor voltaje. Sin embargo para esos valores el régimen es periódico.

Fuera de estos intervalos de inhibición de oscilaciones podemos hallar comportamiento oscilatorio (sea caótico o no). El tipo de atractores (caóticos o no) que se pueden hallar en la frontera de estos intervalos son del mismo tipo que se puede hallar en el diseño sin desorden, pero ligeramente desplazados en la caída de potencial V_{dc} .

En la figura 5.2 recogemos la tasa de éxito (a pesar del desorden) de que se mantenga la estructura global del sistema en ausencia de desorden para valores pequeños de la desviación típica σ , que son los que hacen que una distribución normal para el desorden pueda tener sentido. Podemos observar que hasta $\sigma = 0.015 \text{ nm} = 0.05 \times d_{\text{ml}}$ el caos del diseño sin desorden se mantiene intacto (o alterado de manera despreciable), pero ya $\sigma = 0.024 \text{ nm} = 0.08 \times d_{\text{ml}}$ es suficiente para que la tasa de éxito decaiga un 30 %.

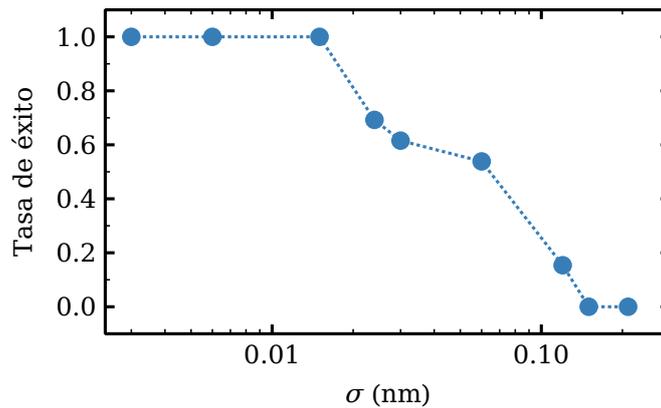


Fig. 5.2 Tasa de éxito (a pesar del desorden) frente a desviación típica σ , donde entendemos éxito como que se mantiene la estructura global de comportamiento del sistema sin desorden.

Otro tipo de observación que hemos podido realizar está relacionada con la siguiente metodología. Sea (x_1, \dots, x_N) una muestra de una distribución normal tipificada. Entonces $\delta_i = \sigma x_i$ es una muestra de una distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Al aumentar la desviación típica σ podremos hallar un umbral dependiente de la muestra original, $\sigma_{\text{cr}}(x_1, \dots, x_N)$, por debajo del cual se mantiene la estructura general del comportamiento de la superred pero, por encima, hay cambios significativos (regiones de inhibición de oscilaciones o desaparición absoluta de intervalos oscilatorios, por ejemplo). Esto entendemos que está relacionado con las observaciones realizadas en la sección 4.2.1: si la diferencia de errores entre longitudes de pozos contiguos, $\delta_i - \delta_{i+1}$, es negativa y elevada (en valor absoluto), ésta dificultará el paso de ondas de dipolo de carga tal como se describe en la mencionada sección. Con lo que tendríamos una explicación de por qué el desorden es una vía de inhibición de oscilaciones y caos.

En conclusión, si el desorden es pequeño (donde entendemos que pequeño se asocia a una desviación típica inferior a $0.03 \text{ nm} = 0.1 \times d_{\text{ml}}$, si asumimos que el desorden se distribuye como una normal de media nula), éste no será actuará notablemente en detrimento del comportamiento global del diseño estudiado. Por

contra, si el desorden es alto, sí que promoverá la desaparición de caos e, incluso, de oscilaciones.

5.1.3 Desorden como origen de comportamiento caótico

Dadas las observaciones de la sección 5.1.1 para un diseño homogéneo de la superred, en la que la evidencia de caos en ausencia de ruido es muy débil, y las de la sección 5.1.2 para un diseño no homogéneo concreto que presenta comportamiento caótico y es relativamente robusto frente al desorden, nos planteamos la pregunta de qué tan probable es que el desorden modifique el diseño homogéneo lo suficiente como para dar con uno de los diseños planteados en la sección 4.3.3.

Para facilitar los cálculos vamos a asumir que podemos debilitar un poco las condiciones para hallar un diseño caótico:

- En lo que respecta a la longitud de los pozos, sólo restringiremos inferiormente la longitud de los pozos más largos y daremos un margen de gracia al resto. Concretamente, asumiremos que $\delta_{i_1}, \delta_{i_2} > 1.8 \text{ nm} = 6 \times d_{\text{ml}}$ y $|\delta_{i_j}| < 0.3 \text{ nm} = d_{\text{ml}}$ para $j = 3, \dots, N$ garantizaran un comportamiento caótico relevante, siempre que $i_1 < i_2$ se escojan adecuadamente.
- En lo que respecta a las posiciones $i_1 < i_2$, sea r_1 el número de periodos entre el contacto inyector y el pozo i_1 -ésimo, r_2 el número de periodos entre el pozo i_1 e i_2 -ésimo, y r_3 el número de periodos entre el pozo i_2 -ésimo y el contacto colector. Asumimos que $r_1 > 0$ y $r_2 > r_3 > 14$ son las condiciones que harán adecuada a la elección de i_1 e i_2 . Para nuestro caso, se deberá cumplir $r_1 + r_2 + r_3 = 48 = N - 2$. Lo que nos interesa es el número de soluciones de esta ecuación con tales restricciones¹, que es 195.

Notemos también que, al distribuirse el desorden de manera independiente e idénticamente, cada posible elección de posiciones para los pozos modificados tiene asignada una probabilidad equivalente.

De este modo podremos calcular la probabilidad \mathbb{P} (éxito) de que el desorden modifique el diseño homogéneo lo suficiente como para construir un diseño naturalmente caótico de los conocidos como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{éxito}) &= \#(\text{Config.válidas}) \times \mathbb{P}(\delta_{i=1,2} > 1.8 \text{ nm}, |\delta_{i>2}| < 0.3 \text{ nm}) = \\ &= 195 \times \mathbb{P}(\delta > 1.8 \text{ nm})^2 \times \mathbb{P}(|\delta| < 0.3 \text{ nm})^{48}. \end{aligned}$$

¹Este problema de combinatoria se puede resolver haciendo el cambio de variable $\bar{r}_2 := r_2 - r_3$ y trabajando con funciones generatrices en $x + y + 2z = 48$, $x, y > 0$, $z > 14$ ó, lo que es equivalente, $x + y + 2z = 20$, $x, y, z > 0$, [67].

Si consideramos que $\delta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, entonces una desviación típica de $\sigma = 1.372 \times d_{\text{ml}} \approx 0.412 \text{ nm}$ maximizará $\mathbb{P}(\text{éxito})$ con el valor 6×10^{-22} . Esto bien puede significar que el desorden no sigue una distribución normal o bien que el desorden no es el mecanismo por el que una superred logra un comportamiento caótico natural.

Dado que una de las reticencias a la hora de utilizar una distribución normal es que tiene por soporte toda la recta real, podemos intentar hacer lo mismo con una distribución que tenga un soporte semi-infinito como el intervalo $]0, \infty[$, como lo puede ser una Maxwelliana. Dado que queremos incluir desorden negativo, podemos desplazar la distribución. De este modo, sea X una variable aleatoria distribuida según la distribución de Maxwell-Boltzmann con parámetro de escala σ , y sea $\delta = a + X$, con $a \in \mathbb{R}$. Esto hace que $\delta > a$. Introducimos la restricción de que $-a < 7 \text{ nm}$ para garantizar que los pozos no dejan de existir. En este caso, $\sigma = 1.6189$ y $-a = 2.17 \times d_{\text{ml}}$ maximizan $\mathbb{P}(\text{éxito})$ con un valor 9.39×10^{-18} . Lo que nos deja de nuevo en la situación anterior.

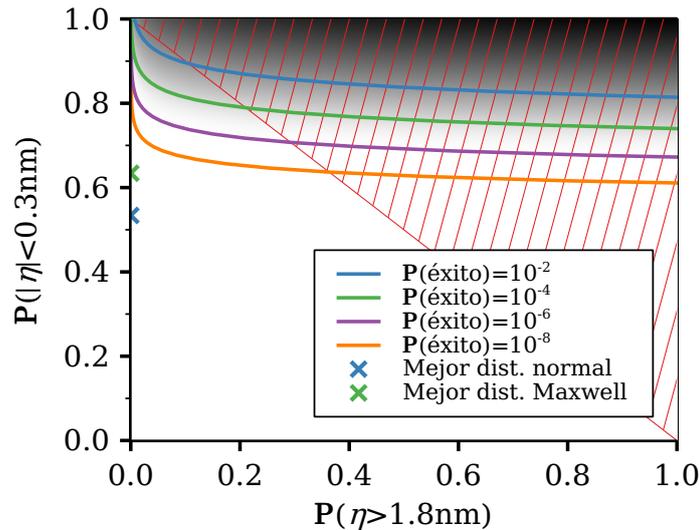


Fig. 5.3 Requisitos que debe cumplir la distribución del desorden para poder explicar el comportamiento global de caos. Dada la incompatibilidad de los sucesos que contemplamos, sólo serán válidos los valores que estén por debajo de la línea en diagonal. Se indican curvas de nivel para $\mathbb{P}(\text{éxito})$. También vienen indicadas la posición de las mejores distribuciones normal y Maxwelliana.

Puesto que no conocemos realmente la distribución que sigue el desorden, podemos buscar requisitos que deba cumplir la distribución para que $\mathbb{P}(\text{éxito})$ sea relevante. Como los dos eventos de los cuales calculamos la probabilidad son incompatibles, tenemos $\mathbb{P}(\delta > 1.8 \text{ nm}) + \mathbb{P}(|\delta| < 0.3 \text{ nm}) \leq 1$. Lo que nos permite plantear el problema como el estudio de una función $f(x, y) = 195x^2y^{48}$ con las restricciones $0 < y < x$, y $0 < x < 1$. En la figura 5.3 tenemos los conjuntos de nivel

que hacen que $\mathbb{P}(\text{éxito})$ sea una de cada 100 o de cada 10 000, entre otros. Pero éstas, que son las que lo harían viable, apenas tienen presencia en la región válida.

En suma, podemos afirmar es muy poco probable que el desorden sea el mecanismo que haya hecho que se fabriquen superredes con comportamiento caótico fuerte al procurar fabricar una superred homogénea.

5.2 Ruido

Nuestro último objetivo es, al igual que en [2], estudiar cómo afecta la presencia de ruido a los atractores caóticos vistos en la sección 4.4.

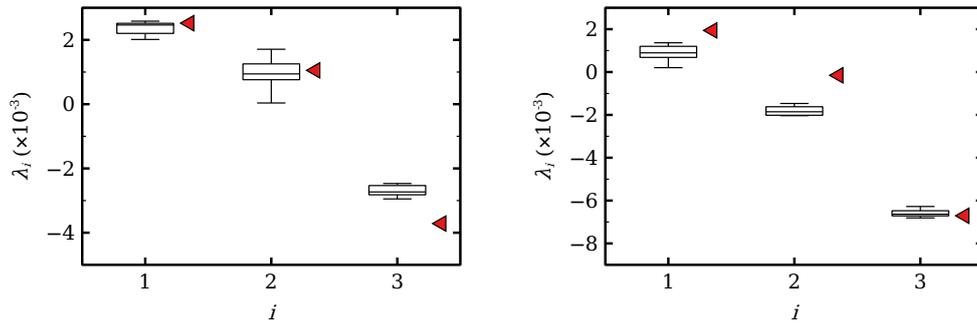
Recordemos que en esta configuración el caos es fuerte y está presente en un intervalo bastante amplio, lo que nos coloca en un contexto distinto a [2, 17] donde hubo que buscarlo en regiones muy concretas, como cerca de bifurcaciones de Hopf subcríticas evidenciadas por la presencia de histéresis en la transición entre el régimen oscilatorio y el estacionario, o cerca de saltos bruscos en la corriente en el segundo *plateau* de oscilaciones, respectivamente. En estos estudios el ruido fue capaz de potenciar (desde duplicarlo hasta hacerlo crecer en dos órdenes de magnitud) el máximo exponente de Lyapunov en las regiones donde ya había caos y, además, extender la región caótica.

Aquí nos centraremos en ver cómo afecta a las regiones donde ya hay caos (concretamente en las configuraciones donde el máximo exponente de Lyapunov es máximo, para cada uno de los dos regímenes de caos, uno el hipercaótico y otro el de caos por intermitencias).

No nos preocuparemos de si aumenta la extensión de la región caótica al cubrir ésta ya, de por sí, un intervalo de voltaje mayor a 0.3 V, y los subintervalos de voltaje en régimen periódico son pequeños, a diferencia de [34] o [81], donde ocupan una gran proporción del intervalo de voltaje donde se encuentra caos. De hecho, el caos en los estudios citados, en caso de extenderse, sólo lo hace a esos intervalos internos.

5.2.1 Ruido en superred no homogénea

En el diseño estudiado en la sección 4.4.1 consideramos la presencia de ruido interno (fluctuaciones en la densidad de corriente túnel debidas al ruido *shot* y térmico) tal como se describe en la sección 2.3, y de ruido externo para la caída de potencial a lo largo de la superred ($V_{SL} = V_{dc} + \eta(t)$, donde η recogerá el ruido térmico del circuito y, si es de interés, algún ruido artificial).



(a) $V_{dc} = 0.98V$. Originalmente habría hipercaos.

(b) $V_{dc} = 1.15V$. Originalmente habría caos por intermitencias.

Fig. 5.4 Influencia del ruido en los exponentes de Lyapunov del diseño de dos pozos modificados, para valores de V_{dc} donde se alcanzan los exponentes más altos en ausencia de ruido. El ruido considerado son las fluctuaciones en la densidad de corriente túnel por ruido térmico y *shot*, además del ruido térmico en la caída de potencial a lo largo de la superred. En rojo se indican los exponentes de Lyapunov en ausencia de ruido.

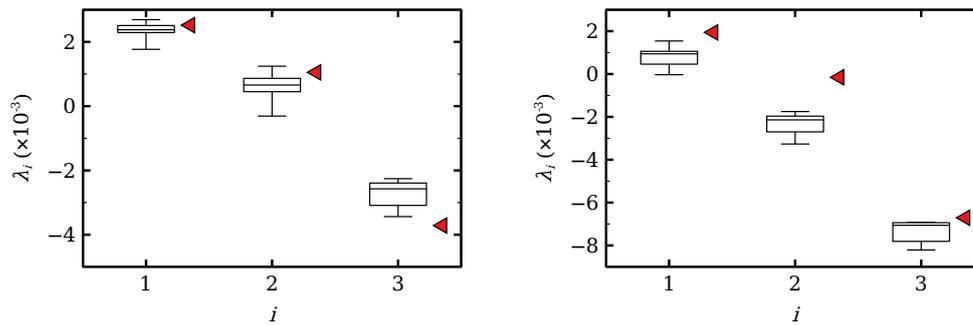
Vamos a ver cómo influye el ruido en la aproximación de los exponentes de Lyapunov: Dada una señal con ruido, V_{SL} , podemos integrar el sistema respecto a esa señal y obtener un exponente. Si repetimos cuantas veces queramos, podemos considerar que los exponentes siguen una distribución que, en principio, desconocemos, y comparar la muestra de exponentes y el exponente del sistema en ausencia de todo ruido.

Si consideramos solamente ruido térmico en el circuito (entendido como ruido blanco gaussiano con desviación típica de 2 mV [81, 60] y media cero) no hallamos contribuciones al comportamiento caótico (ver figura 5.4). Es decir, el primer exponente de Lyapunov no aumenta (puede empeorar, ver 5.4b). Lo mismo ocurre con el segundo exponente que, en el peor de los casos, deja de ser nulo. Sólo el tercer exponente parece mejorar, pero nunca cambia de signo.

Por otra parte, sabiendo que la superred tiene una corriente total que oscila en un rango sobre los 100 MHz e inspirado en la sección 3.3.1, consideramos una componente artificial η_c en el ruido. Es decir, $\eta = \eta_{th} + \eta_c$, y asumimos que η_c es un ruido blanco gaussiano de ancho de banda limitado, concretamente el ancho de banda será 200 MHz.

A pesar de este cambio, observamos que la influencia del ruido en los exponentes de Lyapunov es aún peor que antes.

Lo descrito es contrario a lo visto en [2] donde el ruido potencia el caos, pero es compatible con lo visto en [34]. Podemos entender que los atractores caóticos son, de manera natural, lo más potentes que podrían ser. De hecho, los exponentes



(a) $V_{dc} = 0.98V$. Originalmente habría hipercaos.

(b) $V_{dc} = 1.15V$. Originalmente habría caos por intermitencias.

Fig. 5.5 Influencia del ruido en los exponentes de Lyapunov del diseño de dos pozos modificados, para valores de V_{dc} donde se alcanzan los exponentes más altos en ausencia de ruido. El ruido considerado son las fluctuaciones en la densidad de corriente túnel por ruido térmico y *shot*, mientras que las fluctuaciones en la caída de potencial a lo largo de la superred está compuesta por el ruido térmico del circuito y un ruido blanco con ancho de banda limitado. En rojo se indican los exponentes de Lyapunov en ausencia de ruido.

de Lyapunov asociados al sistema utilizado son de un orden comparable a los de [2]. Así pues, concluimos que, en estas circunstancias, el ruido no logra potenciar el caos cuando el sistema ya se encuentra en un régimen caótico.

Por último, dado el enfoque seguido en [81] (centrado en la influencia del ruido de alta amplitud sobre el ancho de banda de la señal de corriente y en la extensión del intervalo caótico, y donde coinciden los resultados experimentales y teóricos) y en este trabajo (centrado únicamente en la influencia del ruido natural sobre los exponentes de Lyapunov), no podemos establecer una comparación directa de resultados.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

Este trabajo de tesis recoge parcialmente los resultados obtenidos durante los pasados cuatro años relacionados al estudio de superredes semiconductoras débilmente acopladas que funcionan a temperatura ambiente. Las conclusiones derivadas de este trabajo vienen explicadas a continuación.

La primera conclusión que podemos extraer de este trabajo es que el modelo utilizado es flexible y relevante, pues es capaz de capturar la nueva fenomenología observada en experimentos. Hablamos, concretamente, de la resonancia estocástica que se evidencia por primera vez en superredes semiconductoras, tanto desde el punto de vista teórico como del experimental.

La segunda conclusión que obtenemos es que la resonancia coherente no sólo es una curiosidad o un fenómeno que brinda un buen punto de partida para buscar evidencia de resonancia estocástica. Esto lo afirmamos porque hemos obtenido, por primera vez, un método indirecto, pero viable, de medir la conductividad del contacto inyector en un experimento, siempre que pueda mostrar resonancia coherente.

Un problema de gran interés es el de potenciar el comportamiento caótico de las superredes semiconductoras débilmente acopladas homogéneas. Una forma de hacerlo es reducir el número de periodos, como se evidencia en [34]. Sin embargo las superredes se suelen fabricar con un gran número de periodos.

La tercera conclusión a la que llegamos es que es posible potenciar el caos en una superred sin necesidad de cambiar el número de periodos con las que se fabrican, pero para ello deben alejarse bastante de la homogeneidad. Si bien modificar dos periodos para obtener los resultados que observamos no es un gran cambio, hemos comprobado que es estadísticamente improbable que una superred que, en un principio, debiese ser homogénea acabe teniendo, sólo por errores de fabricación, el tipo de configuración planteada en este trabajo.

De manera complementaria a este último comentario, tenemos una cuarta conclusión respecto a los errores de fabricación en lo que respecta a la longitud de los pozos cuánticos. Ésta es que el desorden no es un mecanismo viable de obtención de caos si partimos de un diseño homogéneo de superred. Es más, puesto que incluso en un diseño que presenta un comportamiento caótico fuerte lo que logra el desorden es inhibir el comportamiento caótico e, incluso, el oscilatorio, concluimos algo más fuerte: El desorden es un mecanismo de inhibición del caos, y no al revés.

La última conclusión está relacionada con el potencial uso de las superredes como generadoras robustas de números aleatorios. Aunque desconozcamos el espectro completo de exponentes de Lyapunov en las muestras de laboratorio, podemos afirmar que haber encontrado hipercaos en el diseño estudiado será un atributo a tener en cuenta de cara a ésta aplicación tecnológica. No sólo por el valor intrínseco de que el régimen caótico sea fuerte, sino también porque las oscilaciones tienen, aproximadamente y para nuestra elección concreta de las posiciones de pozos a modificar, una frecuencia que duplica a la que tendrían las oscilaciones en una superred homogénea.

Las posibilidades de trabajo futuro incluyen, entre otras:

- Comprobación experimental de las observaciones realizadas a lo largo del capítulo 4 que podrían dar lugar a un diseño fácilmente reproducible de caos.
- Estudio de la interacción de una superred con otros componentes electrónicos, como puede serlo un transistor.
- En la sección 5.1.2, mencionamos que el desorden puede hacer emerger intervalos que inhiben el comportamiento oscilatorio (y, por ende, caótico). Puede ser interesante comprobar si es posible recuperar el comportamiento original o, al menos, disminuir la extensión de esos intervalos. De ser así, el diseño propuesto se volvería más atractivo de cara a su fabricación y uso como generador de números aleatorios.
- Respecto a esto último, incluso a nivel de simulaciones, es posible comprobar exactamente cuánto puede mejorar la tasa de generación de números aleatorios si una superred presenta un régimen hipercaótico a causa de la presencia de pozos cuánticos más largos que el resto, puesto que hace que el reciclado de ondas ocurra con mayor frecuencia.
- Dado que el desorden en la longitud de los pozos no logra explicar que las superredes homogéneas muestren un comportamiento caótico fuerte, se

puede estudiar otro tipo de modificaciones, como podría ser cambiar el dopaje en los pozos o variar ligeramente la concentración de aluminio en las barreras (que en el modelo viene recogida por la masa efectiva de los electrones en las barreras).

- Ampliar el entendimiento de los efectos del ruido con el caos, como puede ser el aumento del ancho de banda del caos [81], la relación del ancho de banda con los exponentes de Lyapunov.
- Cálculo de la velocidad de las ondas de dipolo de carga para la superred, bajo la descripción brindada por el modelo trabajado en esta tesis, en virtud de [28]. Con especial interés en la influencia de un pozo modificado sobre la velocidad de la onda.
- Estudio de la dinámica con otras condiciones de contorno y un único pozo modificado, para comprobar si es posible obtener un diseño de superred con fuerte comportamiento caótico con una cantidad mínima de modificaciones. Enfoque motivado por [18].
- Corroborar que la dinámica de dipolos de carga es, en el límite del continuo, equivalente a la descrita en [40, 22, 15] en el contexto del efecto Gunn.
- Análisis de estabilidad lineal para comprobar si el surgimiento de ciclos límite al variar V_{dc} en las superredes modificadas (tanto en uno como en dos pozos) se debe a bifurcaciones de Hopf supercríticas.

Referencias

- [1] Aguado, R. and Platero, G. (1997). Dynamical localization and absolute negative conductance in an ac-driven double quantum well. *Physical Review B*, 55(19):12860–12863.
- [2] Alvaro, M., Carretero, M., and Bonilla, L. L. (2014). Noise-enhanced spontaneous chaos in semiconductor superlattices at room temperature. *Europhysics Letters*, 107(3):37002.
- [3] Amann, A., Wacker, A., Bonilla, L. L., and Schöll, E. (2001). Dynamic scenarios of multistable switching in semiconductor superlattices. *Physical Review E*, 63(6):066207.
- [4] Avila, J. F. M., de Cavalcante, H. L. D. S., and Leite, J. R. R. (2004). Experimental deterministic coherence resonance. *Physical Review Letters*, 93(14):144101.
- [5] Badzey, R. L. and Mohanty, P. (2005). Coherent signal amplification in bistable nanomechanical oscillators by stochastic resonance. *Nature*, 437(7061):995–998.
- [6] Bardeen, J. (1961). Tunnelling from a many-particle point of view. *Physical Review Letters*, 6:57–59.
- [7] Bastard, G. (1990). *Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures*. John Wiley and Sons Inc.
- [8] Bender, C. M. and Orszag, S. A. (2013). *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. Springer Science & Business Media.
- [9] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., and Strelcyn, J.-M. (1980a). Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. *Meccanica*, 15(1):9–20.
- [10] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., and Strelcyn, J.-M. (1980b). Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 2: Numerical application. *Meccanica*, 15(1):21–30.
- [11] Benettin, G., Galgani, L., and Strelcyn, J. (1976). Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Physical Review A*, 14:2338–2345.
- [12] Blanter, Y. and Büttiker, M. (2000). Shot noise in mesoscopic conductors. *Physics Reports*, 336(1):1–166.

- [13] Bloch, F. (1928). Quantum mechanics of electrons in crystal lattices. *Z. Phys*, 52:555–600.
- [14] Blomgren, P., Papanicolaou, G., and Zhao, H. (2002). Super-resolution in time-reversal acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 111(1):230–248.
- [15] Bonilla, L. and Teitsworth, S. (2010). *Nonlinear Wave Methods for Charge Transport*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co.
- [16] Bonilla, L. L. (2002). Theory of nonlinear charge transport, wave propagation, and self-oscillations in semiconductor superlattices. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 14(14):R341–R381.
- [17] Bonilla, L. L., Alvaro, M., and Carretero, M. (2016). Chaos-based true random number generators. *Journal of Mathematics in Industry*, 7(1):1.
- [18] Bonilla, L. L., Cantalapiedra, I. R., Gomila, G., and Rubí, J. M. (1997). Asymptotic analysis of the gunn effect with realistic boundary conditions. *Physical Review E*, 56:1500–1510.
- [19] Bonilla, L. L., Carretero, M., and Segura, A. (2017). Two-dimensional collective electron magnetotransport, oscillations, and chaos in a semiconductor superlattice. *Physical Review E*, 96(6):062215.
- [20] Bonilla, L. L., Galán, J., Cuesta, J. A., Martínez, F. C., and Molera, J. M. (1994). Dynamics of electric-field domains and oscillations of the photocurrent in a simple superlattice model. *Physical Review B*, 50(12):8644–8657.
- [21] Bonilla, L. L. and Grahn, H. T. (2005). Non-linear dynamics of semiconductor superlattices. *Reports on Progress in Physics*, 68(3):577–683.
- [22] Bonilla, L. L., Kindelan, M., and Keller, J. B. (2005). Periodically generated propagating pulses. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(3):1053–1079.
- [23] Broer, H. and Takens, F. (2010). *Dynamical Systems and Chaos*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York.
- [24] Bulashenko, O. M. and Bonilla, L. L. (1995). Chaos in resonant-tunneling superlattices. *Physical Review B*, 52(11):7849–7852.
- [25] Bulashenko, O. M., García, M. J., and Bonilla, L. L. (1996). Chaotic dynamics of electric-field domains in periodically driven superlattices. *Physical Review B*, 53(15):10008–10018.
- [26] Bulashenko, O. M., Luo, K. J., Grahn, H. T., Ploog, K. H., and Bonilla, L. L. (1999). Multifractal dimension of chaotic attractors in a driven semiconductor superlattice. *Physical Review B*, 60(8):5694–5697.
- [27] Burada, P. S., Schmid, G., Reguera, D., Vainstein, M. H., Rub, J. M., and Hänggi, P. (2008). Entropic stochastic resonance. *Physical Review Letters*, 101(13):130602.
- [28] Carpio, A., Bonilla, L. L., and Dell’Acqua, G. (2001). Motion of wave fronts in semiconductor superlattices. *Physical Review E*, 64:036204.

- [29] Carpio, A., Bonilla, L. L., Wacker, A., and Schöll, E. (2000). Wave fronts may move upstream in semiconductor superlattices. *Physical Review E*, 61(5):4866–4876.
- [30] Derode, A., Roux, P., and Fink, M. (1995). Robust acoustic time reversal with high-order multiple scattering. *Physical Review Letters*, 75(23):4206–4209.
- [31] DeVille, R. E. L., Vanden-Eijnden, E., and Muratov, C. B. (2005). Two distinct mechanisms of coherence in randomly perturbed dynamical systems. *Physical Review E*, 72(3):031105.
- [32] Driscoll, T. A., Hale, N., and Trefethen, L. N. (2014). Chebfun guide.
- [33] Esaki, L. and Tsu, R. (1970). Superlattice and negative differential conductivity in semiconductors. *IBM Journal of Research and Development*, 14(1):61–65.
- [34] Essen, J., Ruiz-Garcia, M., Jenkins, I., Carretero, M., Bonilla, L. L., and Birnir, B. (2018). Parameter dependence of high-frequency nonlinear oscillations and intrinsic chaos in short GaAs/AlGa superlattices. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 28(4):043107.
- [35] Gammaitoni, L., Hänggi, P., Jung, P., and Marchesoni, F. (1998). Stochastic resonance. *Reviews of Modern Physics*, 70(1):223–287.
- [36] Gang, H., Ditzinger, T., Ning, C. Z., and Haken, H. (1993). Stochastic resonance without external periodic force. *Physical Review Letters*, 71(6):807–810.
- [37] Giacomelli, G., Giudici, M., Balle, S., and Tredicce, J. R. (2000). Experimental evidence of coherence resonance in an optical system. *Physical Review Letters*, 84(15):3298–3301.
- [38] Goldman, V. J., Tsui, D. C., and Cunningham, J. E. (1987a). Observation of intrinsic bistability in resonant tunneling structures. *Physical Review Letters*, 58(12):1256–1259.
- [39] Goldman, V. J., Tsui, D. C., and Cunningham, J. E. (1987b). Resonant tunneling in magnetic field: Evidence for space-charge buildup. *Physical Review B*, 35(17):9387–9390.
- [40] Higuera, F. and Bonilla, L. (1992). Gunn instability in finite samples of GaAs. II. Oscillatory states in long samples. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 57(1):161–184.
- [41] Hizanidis, J., Balanov, A., Amann, A., and Schöll, E. (2006). Noise-induced front motion: Signature of a global bifurcation. *Physical Review Letters*, 96(24):244104.
- [42] Hramov, A. E., Makarov, V. V., Koronovskii, A. A., Kurkin, S. A., Gaifullin, M. B., Alexeeva, N. V., Alekseev, K. N., Greenaway, M. T., Fromhold, T. M., Patanè, A., Kusmartsev, F. V., Maksimenko, V. A., Moskalenko, O. I., and Balanov, A. G. (2014). Subterahertz chaos generation by coupling a superlattice to a linear resonator. *Physical Review Letters*, 112:116603.

- [43] Hramov, A. E., Makarov, V. V., Maximenko, V. A., Koronovskii, A. A., and Balanov, A. G. (2015). Intermittency route to chaos and broadband high-frequency generation in semiconductor superlattice coupled to external resonator. *Physical Review E*, 92(2):022911.
- [44] Huang, Y., Li, W., Ma, W., Qin, H., Grahn, H. T., and Zhang, Y. (2013). Spontaneous quasi-periodic current self-oscillations in a weakly coupled GaAs/(Al,Ga)As superlattice at room temperature. *Applied Physics Letters*, 102(24):242107.
- [45] Huang, Y., Li, W., Ma, W., Qin, H., and Zhang, Y. (2012). Experimental observation of spontaneous chaotic current oscillations in GaAs/Al_{0.45}Ga_{0.55}As superlattices at room temperature. *Chinese Science Bulletin*, 57(17):2070–2072.
- [46] Huang, Y., Qin, H., Li, W., Lu, S., Dong, J., Grahn, H. T., and Zhang, Y. (2014). Experimental evidence for coherence resonance in a noise-driven GaAs/AlAs superlattice. *Europhysics Letters*, 105(4):47005.
- [47] Iñarrea, J. and Platero, G. (1996). Photoinduced current bistabilities in a semiconductor double barrier. *Europhysics Letters*, 33(6):477–482.
- [48] Johnson, J. B. (1928). Thermal agitation of electricity in conductors. *Physical Review*, 32:97–109.
- [49] Kastrup, J., Grahn, H. T., Ploog, K., Prengel, F., Wacker, A., and Schöll, E. (1994). Multistability of the current-voltage characteristics in doped GaAs-AlAs superlattices. *Applied Physics Letters*, 65(14):1808–1810.
- [50] Koronovskii, A. A., Hramov, A. E., Maximenko, V. A., Moskalenko, O. I., Alekseev, K. N., Greenaway, M. T., Fromhold, T. M., and Balanov, A. G. (2013). Lyapunov stability of charge transport in miniband semiconductor superlattices. *Physical Review B*, 88:165304.
- [51] Leo, K., Bolivar, P. H., Brüggemann, F., Schwedler, R., and Köhler, K. (1992). Observation of Bloch oscillations in a semiconductor superlattice. *Solid State Communications*, 84(10):943–946.
- [52] Li, W., Reidler, I., Aviad, Y., Huang, Y., Song, H., Zhang, Y., Rosenbluh, M., and Kanter, I. (2013). Fast physical random-number generation based on room-temperature chaotic oscillations in weakly coupled superlattices. *Physical Review Letters*, 111(4):044102.
- [53] Li, Y., Tang, W. K. S., and Chen, G. (2005). Hyperchaos evolved from the generalized Lorenz equation. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 33(4):235–251.
- [54] Luo, K. J., Grahn, H. T., and Ploog, K. H. (1998a). Relocation time of the domain boundary in weakly coupled GaAs/AlAs superlattices. *Physical Review B*, 57(12):R6838–R6841.
- [55] Luo, K. J., Grahn, H. T., Ploog, K. H., and Bonilla, L. L. (1998b). Explosive bifurcation to chaos in weakly coupled semiconductor superlattices. *Physical Review Letters*, 81(6):R6838–R6841.

- [56] Mallat, S. (2008). *A Wavelet Tour of Signal Processing, Third Edition: The Sparse Way*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 3rd edition.
- [57] Martini, R., Klose, G., Roskos, H. G., Kurz, H., Grahn, H. T., and Hey, R. (1996). Superradiant emission from bloch oscillations in semiconductor superlattices. *Physical Review B*, 54:R14325–R14328.
- [58] McNamara, B., Wiesenfeld, K., and Roy, R. (1988). Observation of stochastic resonance in a ring laser. *Physical Review Letters*, 60(25):2626–2629.
- [59] Mejias, J., Torres, J., and Marro, J. (2007). Modelling neural systems with short-term depression and facilitation. *Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics (AIP Conference Proceedings Volume 913)*, 913:102–107.
- [60] Mompo, E., Ruiz-García, M., Carretero, M., Grahn, H. T., Zhang, Y., and Bonilla, L. L. (2018). Coherence resonance and stochastic resonance in an excitable semiconductor superlattice. *Physical Review Letters*, 121(8):086805.
- [61] Murphy, T. E. and Roy, R. (2008). Chaotic lasers: The world’s fastest dice. *Nature Photonics*, 2:714–715.
- [62] Nyquist, H. (1928). Thermal agitation of electric charge in conductors. *Physical Review*, 32:110–113.
- [63] Payne, M. C. (1986). Transfer hamiltonian description of resonant tunnelling. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 19(8):1145–1155.
- [64] Pikovsky, A. S. and Kurths, J. (1997). Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Physical Review Letters*, 78(5):775–778.
- [65] Platero, G. and Aguado, R. (1997). Sequential tunneling current through semiconductor superlattices under intense thz radiation. *Applied Physics Letters*, 70(26):3546–3548.
- [66] Rogozia, M., Teitworth, S. W., Grahn, H. T., and Ploog, K. H. (2002). Relocation dynamics of domain boundaries in semiconductor superlattices. *Physical Review B*, 65(20):205303.
- [67] Rosen, K. H. and Krithivasan, K. (2012). *Discrete mathematics and its applications: with combinatorics and graph theory*. Tata McGraw-Hill Education.
- [68] Rossler, O. (1979). An equation for hyperchaos. *Physics Letters A*, 71(2):155–157.
- [69] Ruiz-Garcia, M., Essen, J., Carretero, M., Bonilla, L. L., and Birnir, B. (2017). Enhancing chaotic behavior at room temperature in GaAs/(Al,Ga)As superlattices. *Physical Review B*, 95(8):085204.
- [70] Sciamanna, M. and Shore, K. A. (2015). Physics and applications of laser diode chaos. *Nature Photonics*, 9:151–162.
- [71] Shao, Z., Yin, Z., Song, H., Liu, W., Li, X., Zhu, J., Biermann, K., Bonilla, L. L., Grahn, H. T., and Zhang, Y. (2018). Fast detection of a weak signal by a stochastic resonance induced by a coherence resonance in an excitable GaAs/al_{0.45}ga_{0.55}As superlattice. *Physical Review Letters*, 121(8):086806.

- [72] Shizgal, B. (2015). *Spectral methods in chemistry and physics*. Springer.
- [73] Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC Press, 2 edition.
- [74] Taylor, R. L. (2010). Attractors: Nonstrange to chaotic. *Society for Industrial and Applied Mathematics, Undergraduate Research Online*, pages 72–80.
- [75] Trefethen, L. N. (2000). *Spectral methods in MATLAB*, volume 10. Siam.
- [76] Wacker, A. (2002). Semiconductor superlattices: a model system for nonlinear transport. *Physics Reports*, 357(1):1–111.
- [77] Wacker, A., Moscoso, M., Kindelan, M., and Bonilla, L. L. (1997). Current-voltage characteristic and stability in resonant-tunneling n-doped semiconductor superlattices. *Physical Review B*, 55(4):2466–2475.
- [78] Weil, T. and Vinter, B. (1987). Equivalence between resonant tunneling and sequential tunneling in double-barrier diodes. *Applied Physics Letters*, 50(18):1281–1283.
- [79] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., and Vastano, J. A. (1985). Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3):285–317.
- [80] Xu, H. and Teitworth, S. W. (2007). Dependence of electric field domain relocation dynamics on contact conductivity in semiconductor superlattices. *Physical Review B*, 76:235302.
- [81] Yin, Z., Song, H., Zhang, Y., Ruiz-García, M., Carretero, M., Bonilla, L. L., Biermann, K., and Grahn, H. T. (2017). Noise-enhanced chaos in a weakly coupled GaAs/(Al,Ga)As superlattice. *Physical Review E*, 95(1):012218.
- [82] Zhang, Y., Kastrup, J., Klann, R., Ploog, K. H., and Grahn, H. T. (1996). Synchronization and chaos induced by resonant tunneling in GaAs/AlAs superlattices. *Physical Review Letters*, 77:3001–3004.

Apendice A

Adimensionalización del modelo

A.1 Constantes de referencia

La adimensionalización se hará con las siguientes constantes de referencia:

- Campo eléctrico de referencia (V/m): F_{ref} .
- Caída de potencial eléctrico de referencia (V): $V_{\text{ref}} = \langle d_L \rangle F_{\text{ref}}$.
- Densidad de corriente de referencia (A/m²): J_{ref} .
- Tiempo característico (s): $t_{\text{ref}} = \frac{\langle \epsilon_B \rangle V_{\text{ref}}}{\langle d_B \rangle J_{\text{ref}}}$.
- Densidad de carga bidimensional (1/m²): $\langle N_D \rangle$.
- Energía (eV): γ_1 .
- Distancia (m): $\langle d_L \rangle$.
- Conductividad (A/V/m): $\sigma_{\text{ref}} = J_{\text{ref}} \frac{d_{B0}}{V_{\text{ref}}}$.

Adicionalmente, definimos las siguientes constantes sin dimensiones:

- $\rho_0 := \frac{m_W \cdot k_B \cdot T}{\langle N_D \rangle \cdot \pi \cdot \hbar^2}$.
- $\xi_i := \frac{e \hbar k_B T}{2 J_{\text{ref}} \langle d_L \rangle^4 \gamma_1 m_{B_i}}$

A.2 Adimensionalización de funciones

La variable de tiempo y las funciones involucradas se adimensionalizarán como sigue:

- $\tilde{t} := t/t_{\text{ref}}$.
- $\tilde{V}_i := V_i/V_{\text{ref}}, \quad \tilde{V}_{\text{SL}} := V_{\text{SL}}/V_{\text{ref}}$.
- $\tilde{\eta}_{\text{th}}(\tilde{t}) := \eta_{\text{th}}(t_{\text{ref}} \cdot \tilde{t})/V_{\text{ref}} = \eta_{\text{th}}(t)/V_{\text{ref}}$.
- $\tilde{J}(\tilde{t}) := J(t_{\text{ref}} \cdot \tilde{t})/J_{\text{ref}} = J(t)/J_{\text{ref}}, \quad \tilde{J}_{i \rightarrow i+1}^{\pm} := J_{i \rightarrow i+1}^{\pm}/J_{\text{ref}}$.
- $\tilde{\eta}_i(\tilde{t}) := \eta_i(t_{\text{ref}} \cdot \tilde{t})/J_{\text{ref}} = \eta_i(t)/J_{\text{ref}}$.
- $\tilde{n}_i := n_i/\langle N_{\text{D}} \rangle$.
- $E_{\text{C}_{v,i}} := \mathcal{E}_{\text{C}_{v,i}}/\gamma_1, \quad \tilde{\gamma}_v := \gamma_v/\gamma_1, \quad \tilde{\lambda} := \lambda/\gamma_1, \quad \tilde{S}_i := S_i/\gamma_1$.
- $\tilde{\mu}_i := \mu_i/\mu_0$, donde tomamos $\mu_0 = \gamma_1$.
- $\tilde{A}_{\text{C}_{v,i}}(\tilde{\lambda}) := \gamma_1 A_{\text{C}_{v,i}}(\gamma_1 \cdot \tilde{\lambda}) = \gamma_1 A_{\text{C}_{v,i}}(\lambda)$.
- $\tilde{\sigma}_e := \sigma_e/\sigma_{\text{ref}}, \quad \tilde{\sigma}_c := \sigma_c/\sigma_{\text{ref}}$.
- $\tilde{k}_i(\tilde{\lambda}) := k(\tilde{\lambda} \cdot \gamma_1)/\langle d_{\text{L}} \rangle, \quad \tilde{\alpha}_i(\tilde{\lambda}) := \alpha(\tilde{\lambda} \cdot \gamma_1)/\langle d_{\text{L}} \rangle$.

A.3 Modelo sin dimensiones

La ecuación de Ampère (2.1) será

$$\frac{d\tilde{V}_i}{d\tilde{t}} = \frac{\langle \varepsilon_{\text{B}} \rangle}{\varepsilon_{\text{B}_i}} \frac{d_{\text{B}_i}}{\langle d_{\text{B}} \rangle} (\tilde{J}(\tilde{t}) - \tilde{J}_{i \rightarrow i+1} - \tilde{\eta}_i(\tilde{t})), \quad 0 \leq i \leq N. \quad (\text{A.1})$$

La ecuación de Poisson (2.6) es

$$\tilde{n}_i = \frac{V_{\text{ref}}}{\langle N_{\text{D}} \rangle \cdot e} \left(\frac{\varepsilon_{\text{B}_i}}{d_{\text{B}_i}} V_i - \frac{\varepsilon_{\text{B}_{i-1}}}{d_{\text{B}_{i-1}}} V_{i-1} \right) + \frac{N_{\text{D}_i}}{\langle N_{\text{D}} \rangle}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (\text{A.2})$$

que, por otra parte, como ecuación (2.30), ahora será

$$\tilde{n}_i = \rho_0 \int_0^{\infty} \tilde{A}_{\text{C}_{1,i}}(\tilde{\lambda}) \log \left(1 + e^{\frac{\gamma_1}{k_{\text{B}} T} \left(\frac{\mu_0}{\gamma_1} \tilde{\mu}_i - \tilde{\lambda} \right)} \right) d\tilde{\lambda}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (\text{A.3})$$

donde la Lorentziana (2.9) pasa a ser

$$\tilde{A}_{\text{C}_{v,i}}(\tilde{\lambda}) = \frac{\tilde{\gamma}_v}{\pi} \left[\tilde{\gamma}_v^2 + (\tilde{\lambda} - E_{\text{C}_{v,i}})^2 \right]^{-1}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad 1 \leq v \leq 3. \quad (\text{A.4})$$

En lo que respecta a la densidad de corriente túnel, tenemos que (2.32) será

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{i \rightarrow i+1}^+ = \xi_i \sum_{v=1}^3 \int_0^\infty & \left[\tilde{A}_{C_{1,i}}(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{B}_i^c(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{B}_i^n(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{T}_i(\tilde{\lambda}) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \log \left(1 + e^{\frac{\gamma_1}{k_B T} \left(\frac{\mu_0}{\gamma_1} \tilde{\mu}_i - \tilde{\lambda} \right)} \right) \cdot \tilde{A}_{C_{v,i+1}}(\tilde{\lambda} + \tilde{S}_i) \right] d\tilde{\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

mientras que (2.33) será

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{i \rightarrow i+1}^- = \xi_i \int_0^\infty & \left[\tilde{A}_{C_{1,i}}(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{B}_i^c(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{B}_i^n(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{T}_i(\tilde{\lambda}) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \log \left(1 + e^{\frac{\gamma_1}{k_B T} \left(\frac{\mu_0}{\gamma_1} \tilde{\mu}_{i+1} - (\tilde{\lambda} + \tilde{S}_i) \right)} \right) \cdot \tilde{A}_{C_{1,i+1}}(\tilde{\lambda} + \tilde{S}_i) \right] d\tilde{\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Las condiciones de contorno (2.22) y (2.23) son ahora

$$\tilde{J}_{0 \rightarrow 1} = \tilde{\sigma}_e \tilde{V}_0, \quad (\text{A.7})$$

y

$$\tilde{J}_{N \rightarrow N+1} = \frac{d_{B_0} \langle N_D \rangle}{d_{B_N} N_{D_N}} \tilde{\sigma}_c \tilde{n}_N \tilde{V}_N. \quad (\text{A.8})$$

Los términos del integrando de (A.5) y (A.6) son

$$\tilde{B}_i^c(\tilde{\lambda}) = \tilde{k}_i^c \left[\frac{d_{W_i}}{\langle d_L \rangle} + \left(\frac{1}{\tilde{\alpha}_i^p} + \frac{1}{\tilde{\alpha}_i^c} \right) \left(\frac{m_{B_i}}{m_W} \sin^2 \left(\frac{\tilde{k}_i^c}{2} \frac{d_{W_i}}{\langle d_L \rangle} \right) + \cos^2 \left(\frac{\tilde{k}_i^c}{2} \frac{d_{W_i}}{\langle d_L \rangle} \right) \right) \right]^{-1}, \quad (\text{A.9})$$

$$\tilde{B}_i^n(\tilde{\lambda}) = \tilde{k}_i^n \left[\frac{d_{W_i}}{\langle d_L \rangle} + \left(\frac{1}{\tilde{\alpha}_i^c} + \frac{1}{\tilde{\alpha}_i^n} \right) \left(\frac{m_{B_i}}{m_W} \sin^2 \left(\frac{\tilde{k}_i^n}{2} \frac{d_{W_i}}{\langle d_L \rangle} \right) + \cos^2 \left(\frac{\tilde{k}_i^n}{2} \frac{d_{W_i}}{\langle d_L \rangle} \right) \right) \right]^{-1}, \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{T}_i(\tilde{\lambda}) = \left[\frac{(\tilde{k}_i^c + \tilde{k}_i^n)^2}{4 \tilde{k}_i^c \tilde{k}_i^n} + \frac{1}{4} \left(\frac{m_{B_i} \tilde{k}_i^c}{m_W \tilde{\alpha}_i^c} + \frac{m_W \tilde{\alpha}_i^c}{m_{B_i} \tilde{k}_i^c} \right) \left(\frac{m_{B_i} \tilde{k}_i^n}{m_W \tilde{\alpha}_i^c} + \frac{m_W \tilde{\alpha}_i^c}{m_{B_i} \tilde{k}_i^n} \right) \sinh^2 \left(\tilde{\alpha}_i^c \frac{d_{B_i}}{\langle d_L \rangle} \right) \right]^{-1}, \quad (\text{A.11})$$

que se corresponden a (2.15)-(2.16).

Los números de onda (2.17)-(2.21) pasan a ser, respectivamente,

$$\tilde{k}_i^c(\tilde{\lambda}) = \frac{\sqrt{\gamma_1} \langle d_L \rangle}{\hbar} \sqrt{2 m_W \tilde{\lambda}}, \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{k}_i^n(\tilde{\lambda}) = \frac{\sqrt{\gamma_1} \langle d_L \rangle}{\hbar} \sqrt{2 m_W (\tilde{\lambda} + \tilde{S}_i)}, \quad (\text{A.13})$$

$$\tilde{\alpha}_i^c(\tilde{\lambda}) = \frac{\sqrt{\gamma_1} \langle d_L \rangle}{\hbar} \sqrt{2m_{B_i} \left[\frac{eV_B}{\gamma_1} - (\tilde{\lambda} + \tilde{S}_i^c) \right]}, \quad (\text{A.14})$$

$$\tilde{\alpha}_i^p(\tilde{\lambda}) = \frac{\sqrt{\gamma_1} \langle d_L \rangle}{\hbar} \sqrt{2m_{B_i} \left[\frac{eV_B}{\gamma_1} + \tilde{S}_i^p - \tilde{\lambda} \right]}, \quad (\text{A.15})$$

$$\tilde{\alpha}_i^n(\tilde{\lambda}) = \frac{\sqrt{\gamma_1} \langle d_L \rangle}{\hbar} \sqrt{2m_{B_i} \left[\frac{eV_B}{\gamma_1} - (\tilde{\lambda} + \tilde{S}_i^n) \right]}. \quad (\text{A.16})$$

En (A.5)-(A.5) y (A.13)-(A.16) se han usado las siguientes variables auxiliares

$$\tilde{S}_i := \frac{eV_{\text{ref}}}{\gamma_1} \left[\frac{1}{4} \frac{\varepsilon_{B_{i-1}}}{\varepsilon_W} \frac{d_{W_i}}{d_{B_{i-1}}} \tilde{V}_{i-1} + \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_{B_i}}{\varepsilon_W} \frac{d_{W_i} + d_{W_{i+1}}}{d_{B_i}} \right) \tilde{V}_i + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_{B_{i+1}}}{\varepsilon_W} \frac{d_{W_{i+1}}}{d_{B_{i+1}}} \tilde{V}_{i+1} \right], \quad (\text{A.17})$$

$$\tilde{S}_i^c := \frac{eV_{\text{ref}}}{\gamma_1} \left[\frac{1}{4} \frac{\varepsilon_{B_{i-1}}}{\varepsilon_W} \frac{d_{W_i}}{d_{B_{i-1}}} \tilde{V}_{i-1} + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_{B_i}}{\varepsilon_W} \frac{d_{W_i}}{d_{B_i}} \tilde{V}_i \right], \quad (\text{A.18})$$

$$\tilde{S}_i^p := \frac{eV_{\text{ref}}}{\gamma_1} \left[\left(1 + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_{B_{i-1}}}{\varepsilon_W} \frac{d_{W_i}}{d_{B_{i-1}}} \right) \tilde{V}_{i-1} + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_{B_i}}{\varepsilon_W} \frac{d_{W_i}}{d_{B_i}} \tilde{V}_i \right], \quad (\text{A.19})$$

$$\tilde{S}_i^n := \frac{eV_{\text{ref}}}{\gamma_1} \left[\frac{1}{4} \frac{\varepsilon_{B_{i-1}}}{\varepsilon_W} \frac{d_{W_i}}{d_{B_{i-1}}} \tilde{V}_{i-1} + \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_{B_i}}{\varepsilon_W} \frac{d_{W_i} + 2d_{W_{i+1}}}{d_{B_i}} \right) \tilde{V}_i + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{B_{i+1}}}{\varepsilon_W} \frac{d_{W_{i+1}}}{d_{B_{i+1}}} \tilde{V}_{i+1} \right]. \quad (\text{A.20})$$

Por último, la restricción (2.26) sobre la caída de potencial a lo largo de toda la superred es

$$\tilde{V}_{\text{SL}} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_1}}{d_{B_0}} \frac{\varepsilon_{B_0}}{\varepsilon_W} \right) \tilde{V}_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_i} + d_{W_{i+1}}}{d_{B_i}} \frac{\varepsilon_{B_i}}{\varepsilon_W} \right) \tilde{V}_i + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_{W_N}}{d_{B_N}} \frac{\varepsilon_{B_N}}{\varepsilon_W} \right) \tilde{V}_N, \quad (\text{A.21})$$

con (2.35) volviéndose

$$\tilde{V}_{\text{SL}} = \tilde{V}_{\text{bias}} + \tilde{\eta}_{\text{th}}(\tilde{t}). \quad (\text{A.22})$$

Usando u como en (2.40), tenemos

$$\frac{\langle d_B \rangle}{\langle \varepsilon_B \rangle} \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{V}_{\text{SL}} + \langle u, \left(\frac{d_{B_i}}{\varepsilon_{B_i}} (\tilde{J}_{i \rightarrow i+1} + \tilde{\eta}_i(\tilde{t})) \right)_{i=0}^N \rangle = \tilde{J}(\tilde{t}) \langle u, \left(\frac{d_{B_i}}{\varepsilon_{B_i}} \right)_{i=0}^N \rangle, \quad (\text{A.23})$$

Apendice B

Cálculo numérico

B.1 Aproximación numérica de niveles de energía

De cara a aproximar las soluciones y valores propios de la ecuación (2.41) recurriremos a métodos espectrales. Concretamente a métodos de colocación de Chebyshev [75, 32], que son utilizados con frecuencia para resolver la ecuación de Schrödinger, incluso en contextos más complejos [72].

Sólo debemos tener en consideración que el dominio no puede ser todo \mathbb{R} y deberemos acotarlo. Luego, sea $L > 0$. Entonces acotamos el dominio a $[-L, d_{W_i} + L]$ y cambiamos las condiciones de contorno a $\varphi(-L) = \varphi(d_{W_i} + L) = 0$.

El coste de esta acotación en la calidad de la aproximación es negligible, pues el error será exponencialmente pequeño: Para $0 < \lambda < eV_B$, las soluciones exactas φ tendrán un comportamiento de decaimiento exponencial fuera del pozo. Es decir, $\varphi(x) = \mathcal{O}(\exp(-|x|))$ para $|x| \rightarrow +\infty$.

B.2 Evolución del sistema

Desarrollamos el esquema numérico apoyándonos en las ecuaciones sin dimensiones, así que evitaremos el uso de las tildes que denotan adimensionalidad.

Por brevedad, vamos a utilizar cierta notación vectorial $V := (V_0, \dots, V_N)$ y $dV := (dV_0/dt, \dots, dV_N/dt)$. Entonces, dado $t_k = k\Delta t$, buscamos aproximar $V^k \approx V(t_k)$ y $(dV)^k \approx dV/dt$ siguiendo el esquema que sigue

B.2.1 Esquema numérico

Utilizaremos Euler explícito para integrar las ecuaciones diferenciales (o Euler-Maruyama en caso de ser ecuaciones estocásticas), y Clenshaw-Curtis [75] para la aproximación de integrales.

Supongamos V^k y $(dV)^k$ conocidos. Aproximaremos V^{k+1} y $(dV)^{k+1}$ del modo que sigue:

1. Calcular $n_i^k \equiv n_i(V_i^k, V_{i-1}^k)$, como en (A.2).
2. Obtener μ_i^k que verifique $n_i(\mu_i^k) = n_i^k$, como en (A.3).
3. Calcular S_i , S_i^c , S_i^p y S_i^n en $V = V^k$, como en (A.17).
4. Para cada $1 \leq i \leq N-1$, obtener límite superior (L_i^\wedge) e inferior (L_i^\vee) para las integrales a lo largo de la energía, teniendo en cuenta la aclaraciones B.2.2. Construir la discretización de integración $\Lambda := (\lambda_{ij})_{i=1, \dots, N-1}^{j=1, \dots, \dots}$, de modo que $L_i^\vee \leq \lambda_{ij} < \lambda_{i,j+1} \leq L_i^\wedge$, $\forall i, j$.
5. Calcular k_i^c y k_i^n (como en (A.12) y (A.13), respectivamente), y α_i^c , α_i^p y α_i^n (como en (A.14), (A.15) y (A.16), respectivamente) en cada fila de Λ .
6. Calcular B_i^c , B_i^n (como (A.9) y (A.10), respectivamente) y T_i (como en (A.11)).
7. Calcular $J_{0 \rightarrow 1}^k$, $J_{N \rightarrow N+1}^k$ (como en (A.7) y (A.8), respectivamente) y $J_{i \rightarrow i+1}^k$ para $1 \leq i \leq N-1$ (como en (2.13), (A.5) y (A.6)).
8. Calcular $J^k = J(t_k)$ como en (A.23), usando u (2.40), y

$$\frac{dV_{SL}}{dt} \approx \frac{V_{SL}^{k+1} - V_{SL}^k}{\Delta t},$$

esto es, una derivada posterior o explícita. En caso de incluir ruido, necesitamos una aproximación apropiada de $d\eta_{th}/dt \approx (\eta_{th}^{k+1} - \eta_{th}^k)/\Delta t$.

9. Calcular V_i^{k+1} usando Euler explícito (o Euler-Maruyama en el caso estocástico) en (A.1)

$$V_i^{k+1} = V_i^k + \Delta t \frac{\langle \varepsilon_B \rangle}{\varepsilon_{B_i}} \frac{d_{B_i}}{\langle d_B \rangle} \left(J^k - J_{i \rightarrow i+1}^k - \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \eta_i^k \right)$$

10. Calcular $(dV)^{k+1} = (V^{k+1} - V^k)/\Delta t$.

B.2.2 Límites de integración

Para poder integrar las ecuaciones (A.5) y (A.6), hace falta que los números de onda \tilde{k}_i^c , \tilde{k}_i^n , \tilde{a}_i^c , \tilde{a}_i^p y \tilde{a}_i^n sean reales y no nulas (por como intervienen en (A.9)-(A.11)). De ésto, obtenemos las siguientes condiciones (sin dimensiones), respectivamente:

$$\lambda > 0,$$

$$\lambda > -S_i,$$

$$\lambda < \frac{eV_B}{\gamma_1} - S_i^c,$$

$$\lambda < \frac{eV_B}{\gamma_1} + S_i^p,$$

$$\lambda < \frac{eV_B}{\gamma_1} - S_i^n,$$

lo que se puede resumir en la siguiente condición:

$$\max(0, -S_i) + \max(S_i^c, -S_i^p, S_i^n) < \frac{eV_B}{\gamma_1}. \quad (\text{B.1})$$

B.2.3 Proyección sobre variedad

Puesto que la ecuación (2.26) no es más que

$$V_{\text{SL}} = \langle u, (V_0, \dots, V_N) \rangle, \quad (\text{B.2})$$

donde u está definido según (2.40), podemos corregir cualquier pequeña desviación haciendo la siguiente proyección sobre la variedad afín:

$$V = V^* - \frac{\langle u, V^* \rangle - V_{\text{SL}}}{\langle u, u \rangle} u, \quad (\text{B.3})$$

donde $V := (V_0, \dots, V_N)$ será el vector corregido a partir de uno $V^* := (V_0^*, \dots, V_N^*)$ dado.

B.2.4 Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov son una forma de medir la influencia de pequeñas variaciones de las condiciones iniciales en la evolución de un sistema dinámico.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$F(t, y, y') = 0,$$

con $y \in \mathbb{R}^n$, y condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$, éste tiene asociados n exponentes de Lyapunov

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n,$$

Si el máximo exponente de Lyapunov (λ_1) es estrictamente positivo, decimos que el sistema es caótico.

Para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov nos apoyamos en [74] (basado en [11]). Para el resto de exponentes usamos una versión con norma modificada del método basado en la ortonormalización visto en [9, 10].

Aproximación de los exponentes

Queremos aproximar los primeros m (con $1 \leq m \leq n$) exponentes de Lyapunov del problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

para tiempos $t \geq t_0$.

Algoritmo

Para evitar problemas numéricos en las simulaciones largas se utiliza el siguiente algoritmo:

1. Fijamos el módulo de referencia para el error $\varepsilon > 0$.
2. Escogemos el tiempo de renormalización $t_r > 0$.
3. Establecemos las condiciones iniciales de partida para la órbita de referencia

$$v_0^0 = y_0,$$

y para las m distintas órbitas perturbadas

$$v_0^k = y_0 + \varepsilon e_k,$$

con $1 \leq k \leq m$, y donde e_k es el k -ésimo elemento de la base canónica de \mathbb{R}^n .

4. Comienza el proceso iterativo. Sea $i \geq 1$, y sea $I_i := [t_0 + (i-1)t_r, t_0 + it_r]$ el intervalo i -ésimo de trabajo. Repetimos los siguientes pasos tantas veces como haga falta.

(a) Planteamos el problema de referencia en el intervalo I_i .

$$(PRi) \begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0 + (i-1)t_r) = v_{i-1}^0 \end{cases}$$

cuya solución llamamos y_i^0 , y denotamos el punto final como

$$v_i^0 := y_i^0(t_0 + i t_r).$$

(b) Planteamos el problema paralelo en el intervalo i -ésimo asociado al k -ésimo exponente de Lyapunov

$$(PPki) \begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0 + (i-1)t_r) = v_{i-1}^0 \end{cases}$$

cuya solución llamamos y_i^k .

(c) Obtenemos la diferencia entre el punto final de la órbita de referencia y las órbitas paralelas

$$w_i^k := y_i^k(t_0 + i t_r) - v_i^0.$$

(d) Ortogonalizamos la familia $\{w_i^k\}$ con Gram-Schmidt

$$\begin{cases} \tilde{w}_i^1 = w_i^1, \\ \tilde{w}_i^k = w_i^k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{w_i^k \cdot \tilde{w}_i^j}{\|\tilde{w}_i^j\|_2^2} \tilde{w}_i^j, \quad \forall k > 1 \end{cases}$$

(e) Definimos las condiciones iniciales para la siguiente iteración

$$v_i^k := v_i^0 + \varepsilon \frac{\tilde{w}_i^k}{\|\tilde{w}_i^k\|_2},$$

y almacenamos

$$d_i^k := \|\tilde{w}_i^k\|_2,$$

con $1 \leq k \leq m$.

5. Obtenemos los m primeros exponentes de Lyapunov

$$\lambda_k = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p t_r} \sum_{i=1}^p \log \left(\frac{d_i^k}{\varepsilon} \right).$$

Es decir, para p_0 suficientemente grande,

$$\lambda_k^{p_0} := \frac{1}{p_0 t_r} \sum_{i=1}^{p_0} \log \left(\frac{d_i^k}{\varepsilon} \right) \approx \lambda_k,$$

con $1 \leq k \leq m$.

Observaciones (renormalización)

La ortogonalización es necesaria. Sin ella obtendríamos, erróneamente, que $\lambda_1 = \lambda_k, \forall k$. Es decir, sólo obtendríamos el máximo exponente de Lyapunov.

Observaciones (interpretación geométrica)

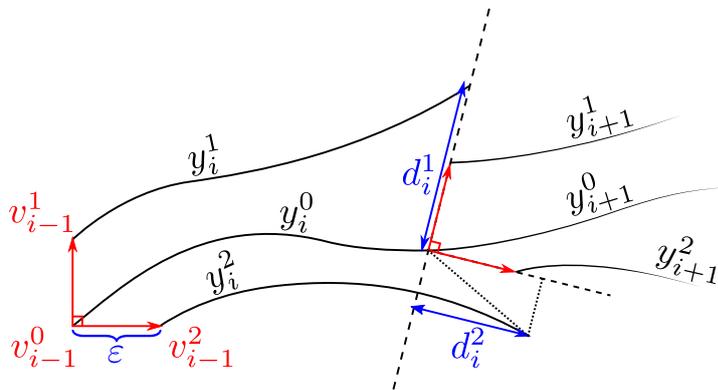


Fig. B.1 Diagrama del proceso de “renormalización” del algoritmo. En negro (continuo) las trayectorias. En azul las distancias. En rojo los puntos de partida en cada renormalización (donde los vectores que unen los de las trayectorias paralelas con el de la trayectoria de referencia forman una base ortogonal y tienen todos norma ε).

Apoyándose en la figura B.1 es sencillo ver qué son las distancias que almacena el algoritmo:

$$d_i^k = \begin{cases} d(v_i^k, v_i^0), & \text{si } k = 1 \\ d(v_i^k, v_i^0 + \langle \{v_i^j - v_i^0\}_{j=1}^{k-1} \rangle), & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

es decir, es la distancia entre el final de una de las órbitas paralelas y el espacio afín generado por el punto final de la órbita de referencia y los vectores que unen este punto con el final de las órbitas paralelas anteriores.

B.3 Creación del ruido y tratamiento

Sea $X = (X_j)_{j=1}^N$ un vector de variables aleatorias. Si la matriz de covarianza $\Sigma(X)$ es diagonal, tenemos que $\text{cov}(X_i, X_j) = k_i \delta_{ij}$, y decimos que X representa un ruido blanco.

En principio no hay mención sobre la distribución de probabilidad que siga X . Sólo hace falta que sus componentes sean independientes e idénticamente distribuidas.

B.3.1 Ruido térmico del circuito

Esto es lo que utilizamos para modelar η_{th} a cada paso de tiempo característico, t_{ref} . Es decir, $\eta_{\text{th}}(t_j) = X_j \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, donde μ es la media y σ es la desviación típica, por tratarse de un ruido blanco gaussiano.

Puesto que $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (X_j - \mu)^2} = \sigma$, y que, en nuestro caso, $\mu = 0$, tenemos que $\text{rms}(X) \approx \sigma$.

Llamamos, entonces, amplitud de η_{th} a $\text{rms}(\eta_{\text{th}})$, que es un parámetro que podemos controlar.

Los valores a los que fijamos su amplitud son 0 mV ó 2 mV.

Construcción

1. Fijamos el valor de σ deseado (con dimensiones tendría unidades de voltaje).
2. Sea $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$ con $Y_j \sim N(0, \sigma_n^2)$.
3. Definimos $\eta_{\text{th}}(t)$ por interpolación lineal a trozos de modo que se verifique la restricción $\eta_{\text{th}}(t_j) = Y_j$.

Con esto conseguimos que $\eta_c(t_j) \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, i.i.d..

B.3.2 Ruido interno asociado a las fluctuaciones de la densidad de corriente

Vamos a obtener una muestra de η_i en cada paso de simulación, que normalmente consideramos $t_{\text{ref}}/100$. Al ser un ruido blanco gaussiano de media cero pero con una correlación variable en tiempo (2.37), consideramos que, para cada tiempo t , se tiene $\eta_i(t) = X_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i(t)^2)$, donde $\sigma_i(t)$ es la desviación típica que depende del tiempo y la barrera. Describimos, sin dimensiones, la varianza para cada instante

de tiempo e índice:

$$\text{Var}(\tilde{\eta}_i(\tilde{t})) = \frac{e}{A \cdot J_{\text{ref}} \cdot t_{\text{ref}}} \left[\tilde{J}_{i \rightarrow i+1}^+ + \tilde{J}_{i \rightarrow i+1}^- + 2 \frac{k_B T}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{\mu}} \tilde{J}_{i \rightarrow i+1}^- \Big|_{\tilde{\mu}=\tilde{\mu}_i} \right], \quad (\text{B.4})$$

con lo que bastará tomar $\sqrt{\text{Var}(\tilde{\eta}_i(\tilde{t}))} X_i$ con $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ para cada instante de tiempo \tilde{t} .

B.3.3 Ruido blanco de ancho de banda limitado

Esto es lo que utilizamos para modelar η_c . De nuevo, $\eta_c(t_j) = X_j \sim N(\mu, \sigma^2)$, con $\mu = 0$ y σ fijado a voluntad.

Si $X = (X_0, X_1, \dots)$ es un ruido blanco, entonces $\mathcal{F}(X)$ no tiene números de onda que puedan destacar por sobre el resto (en valor absoluto). Cuando X es un vector finito (que asumimos periódico), $|\hat{X}_k| = |\mathcal{F}(X)(k)|$ no es constante, pero convergerá a serlo si promediamos las transformadas de muchos vectores de la misma naturaleza.

Además se tiene que $\mathbb{E}(\mathcal{F}(X)(k)) = 0 \in \mathbb{C}$. Luego la parte probabilista de \hat{X}_k radica principalmente en el argumento. Es decir, $\arg(\hat{X}_k) \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$.

Si X tiene un ancho de banda limitado tendremos, además, que existe $k_b > 0$ tal que $\forall |k| > k_b, |\mathcal{F}(X)(k)| = 0$.

Luego un ruido blanco con ancho de banda limitado cumplirá:

$$|\mathcal{F}(X)(k)| = \begin{cases} A_0 & \text{si } 0 < |k| \leq k_b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $A_0 > 0$, y $\mathbb{E}(\mathcal{F}(X)(k)) = 0$.

Construcción

1. Fijamos $k_b > 0$ el número de onda asociado al ancho de banda, y fijamos el valor de σ deseado (con unidades de voltaje).
2. Sea $\theta_k \sim \mathcal{U}([0, 1])$, con $0 < k < k_b$. Construimos $\hat{Y}_k = e^{2\pi i \theta_k}$, e $\hat{Y}_{-k} = e^{-2\pi i \theta_k}$, para $0 < k < k_b$. Para el resto de números de onda, $\hat{Y}_k = 0$.
3. Tomamos $Y_j = \mathcal{F}^{-1}(\hat{Y})$.
4. Definimos $\eta_c(t)$ por interpolación lineal de modo que se verifique la restricción $\eta_c(t_j) = \sigma_n Y_j / \text{std}(Y)$.

Con esto conseguimos que $\eta_c(t_j) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, con un ancho de banda k_b .

Como detalle, al tener un ancho de banda limitado, la matriz de covarianzas no será diagonal, pero al aumentar el ancho de banda convergerá a serlo.

B.3.4 Proporción de señal frente a ruido

Sea S_m la medición de una señal que, asumimos, puede ser descompuesta en $S_m = S + \eta$, donde S es la señal real y η es ruido.

Si conocemos tanto S como η , la proporción de señal frente al ruido (SNR) la podemos calcular como

$$\text{SNR}(S_m) := \frac{\text{rms}(S)^2}{\text{rms}(\eta)^2} \quad (\text{B.5})$$

donde

$$\text{rms}(f) := \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{m(I)} \int_I |f|^2}, & \text{si } f \text{ continua e } I \text{ intervalo acotado y conexo} \\ \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f_i|^2}, & \text{si } \{f_i\}_{i=1}^n \text{ es una muestra discreta} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

con $m(I)$ la medida del intervalo I .

Si no hay conocimiento directo a la descomposición (sólo conocemos S_m) podemos recurrir a un filtro de ruido, \mathcal{F} , para obtener las siguientes aproximaciones: $S \approx \mathcal{F}(S_m)$ y $\eta \approx S_m - \mathcal{F}(S_m)$.

En la figura 3.15 hemos aplicado los criterios siguientes:

- Para calcular SNR_{in} tomamos $S = V_{\text{ac}}(t) = V_{\text{sin}} \sin(2\pi\nu t)$ y $\eta = \eta_{\text{th}} + \eta_c$. Observemos que $\text{rms}(V_{\text{ac}}) = V_{\text{sin}}/\sqrt{2}$ y que $\text{rms}(\eta)^2 = \text{rms}(\eta_{\text{th}})^2 + \text{rms}(\eta_c)^2$, donde $\text{rms}(\eta_{\text{th}}) = 2 \text{ mV}$ y $\text{rms}(\eta_c) = V_{\text{noise}}^{\text{rms}}$.
- Para calcular SNR_{out} tomamos la componente oscilatoria de la densidad de corriente total como señal, es decir, $S_m = J(t) - J_{\text{dc}}$, donde J_{dc} es la densidad de corriente estacionaria cuando no hay ruido externo (o, cuando aún habiéndolo, no hay picos de la corriente). En este caso necesitamos filtrar el ruido. Para tal fin utilizamos un filtro basado en wavelets de Haar de 6 niveles [56].

Apendice C

Ejemplos de superred no homogénea

C.1 Un único pozo modificado (longitud variable)

Consideramos un único pozo modificado, ubicado en el periodo $i_1 = 20$. El resto de la superred cumple los parámetros de la tabla 4.1.

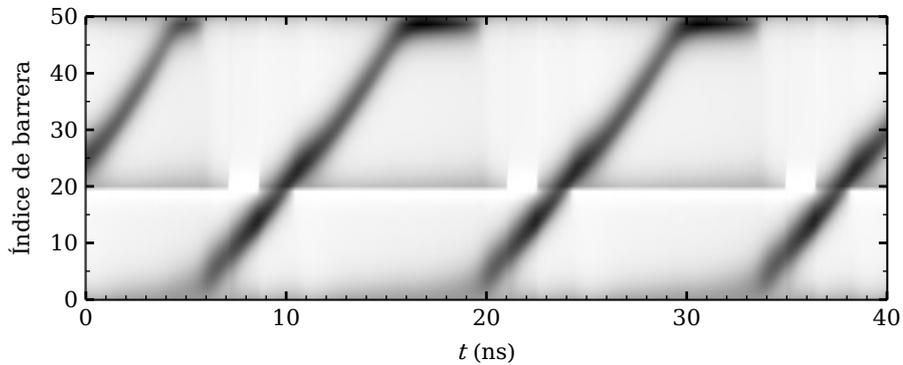
Aumentar la cantidad de monocapas añadidas al pozo modificado alterará el comportamiento de las ondas de dipolo de carga que se pudiesen nuclear en el contacto emisor. Si la cantidad es baja (ver figura C.1a), las ondas que se nuclean en el contacto emisor son capaces de atravesar el pozo modificado. Si la cantidad es alta (ver figura C.1b) y logramos inyectar una onda en el contacto emisor de modo que ésta puede llegar hasta el pozo modificado, entonces no lo superará, y el sistema permanecerá en un estado estacionario.

C.2 Dos pozos modificados (longitud relativa)

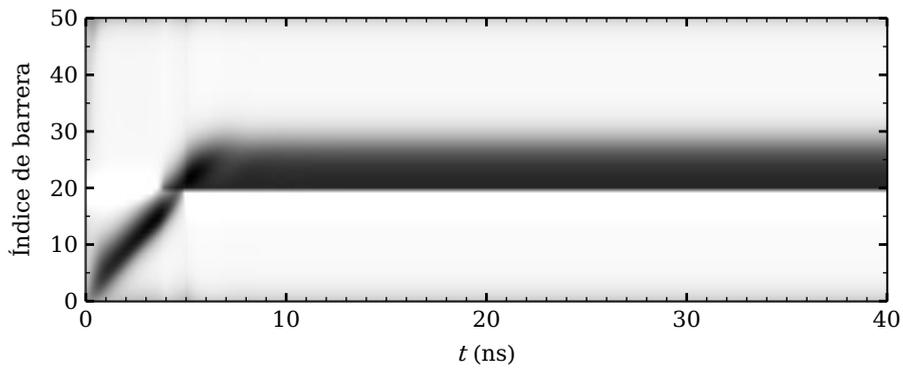
Consideramos dos pozos modificados, ubicados en los periodos $i_1 = 5$ e $i_2 = 30$. El resto de la superred cumple los parámetros de la tabla 4.1. La longitud final de los pozos modificados la expresamos como $d_{W_{i_k}} = 7 \text{ nm} + \delta d_{W_{i_k}}$, con $\delta d_{W_{i_k}} > 0$.

Si en el segundo pozo modificado añadimos muchas más monocapas que en el primer pozo (ver figura C.2a), es decir, $\delta d_{W_{i_1}} \ll \delta d_{W_{i_2}}$, apreciamos un comportamiento cercano al de la figura C.1b: Si forzamos la presencia de una onda de dipolo de carga en la región inmediatamente posterior al primer pozo modificado capaz de alcanzar el segundo pozo modificado, ésta no supera el segundo pozo modificado y, posteriormente, el sistema alcanza un estado estacionario.

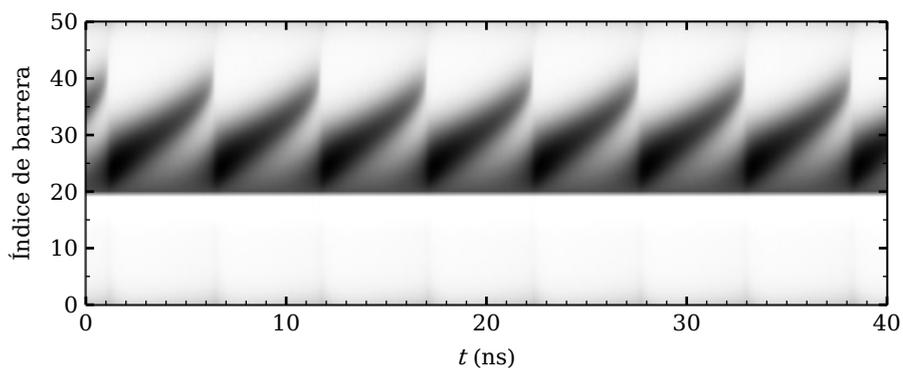
Por contra, si el segundo pozo modificado tiene muchas menos monocapas adicionales que el primer pozo (ver figura C.2b), es decir, $\delta d_{W_{i_1}} \gg \delta d_{W_{i_2}}$, apreciamos un comportamiento análogo al de la figura C.1a: Las ondas que se nuclean en el



(a) $d_{W_{i_1}} = 7.6 \text{ nm}$, que se corresponde a añadir 2 monocapas. Las ondas nucleadas en el contacto emisor pueden superar el pozo modificado, con $V_{\text{dc}} = 0.295 \text{ V}$.

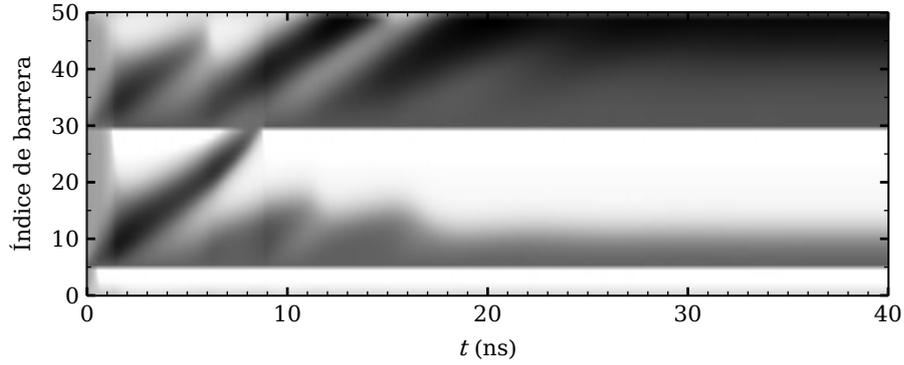


(b) $d_{W_{i_1}} = 10 \text{ nm}$, que se corresponde a añadir 10 monocapas. Las ondas nucleadas en el contacto emisor no logran superar el pozo modificado y el sistema alcanza inmediatamente un estado estacionario, con $V_{\text{dc}} = 0.295 \text{ V}$.

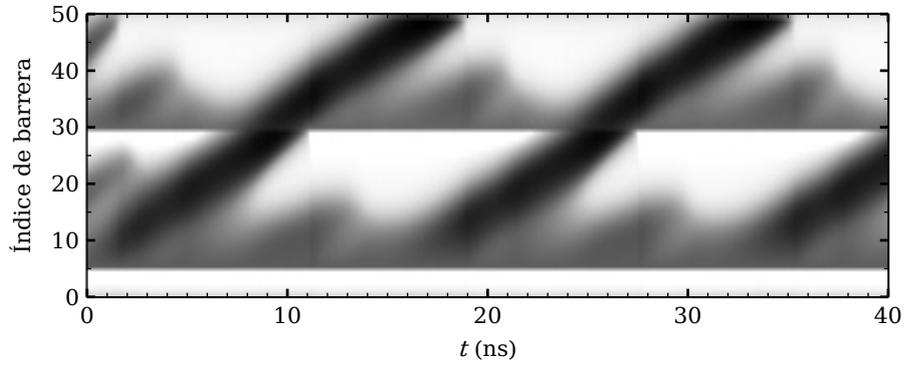


(c) $d_{W_{i_1}} = 10 \text{ nm}$, que se corresponde a añadir 10 monocapas. Las ondas se nuclean de manera sostenida en el pozo modificado, con $V_{\text{dc}} = 0.5 \text{ V}$.

Fig. C.1 Evolución en el tiempo de la caída de potencial en superred con un único pozo modificado. El pozo modificado se ubica en $i_1 = 20$.



(a) $d_{W_{i_1}} = 10$ nm y $d_{W_{i_2}} = 13$ nm, que se corresponde a añadir 10 y 20 monocapas, respectivamente.



(b) $d_{W_{i_1}} = 13$ nm y $d_{W_{i_2}} = 10$ nm, que se corresponde a añadir 20 y 10 monocapas, respectivamente.

Fig. C.2 Evolución en el tiempo de la caída de potencial en superred con dos pozos modificado, ubicados en $i_1 = 5$ e $i_2 = 30$.

primer pozo modificado (es decir, antes del segundo pozo modificado), logran superar el segundo pozo modificado en su viaje hacia el contacto colector.

C.3 Diseño caótico con dos pozos modificados

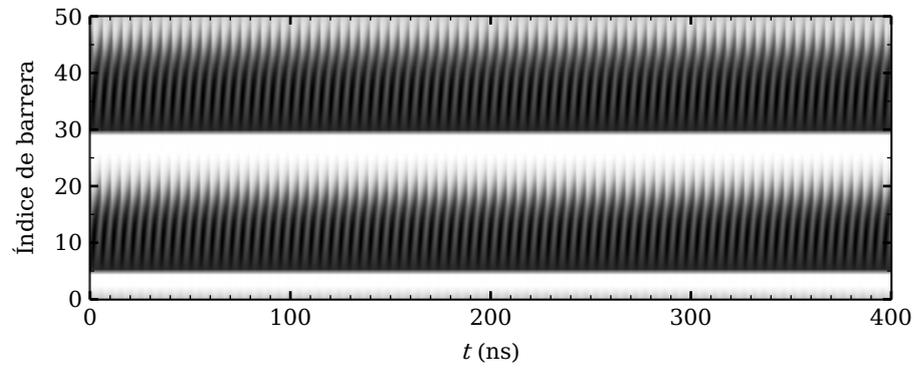
Consideramos dos pozos modificados, según sección 4.3.3, con $i_1 = 5$, $i_2 = 30$, $d_{W_5} = d_{W_{30}} = 10$ nm, y parámetros indicados en las tablas 4.1 y 4.2.

A lo largo de las figuras C.3 a C.14 presentamos ejemplos relevantes de comportamiento. En cada figura se representará la evolución en tiempo de las caídas de potencial en cada barrera de la superred, $(V_0(t), \dots, V_N(t))$, la evolución en tiempo de la corriente total, $I(t) = A \cdot J(t)$, la órbita del sistema asociada a (V_{15}, V_{35}) coloreada según la velocidad relativa $\|d(V_{15}, V_{35})/dt\|_2$ normalizada para cada valor de V_{dc} , y la sección de Poincaré asociada a V_{42} respecto a V_{12} .

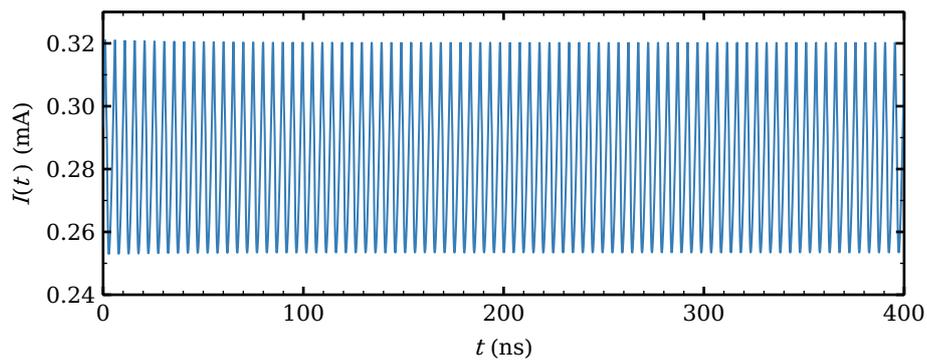
Notemos que para la órbita usamos V_{15} y V_{35} mientras que para la sección de Poicaré estamos usando otro par (V_{42} y V_{12}). Esta elección se hace porque, cada par, da una mejor representación, pero ambos pares de elecciones cumplen el criterio de estar en regiones diferentes de la superred y con, al menos, 14 periodos entre medias.

Las caídas de potencial las hemos representado en una escala relativa, donde se considera $\min_{i,t} V_i(t)$ como 0 y $\max_{i,t} V_i(t)$ como 1, y la escala de color es más oscura cuanto más alta sea la caída de potencial.

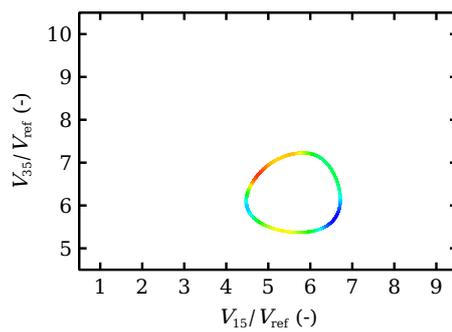
La órbita del sistema tiene una escala de color asociada a la velocidad relativa de modo que, cuanto más lento evoluciona la órbita, más frío (azul) será el color, mientras que cuanto más rápido lo hace, más caliente (rojo) será.



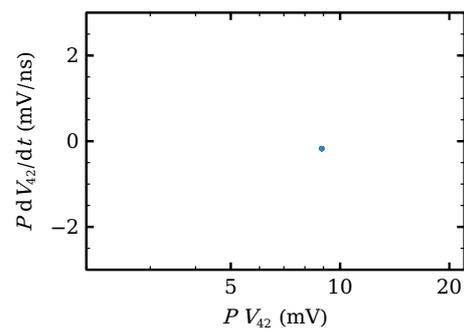
(a) Evolución de las caídas de potencial en cada barrera.



(b) Evolución de la corriente total.

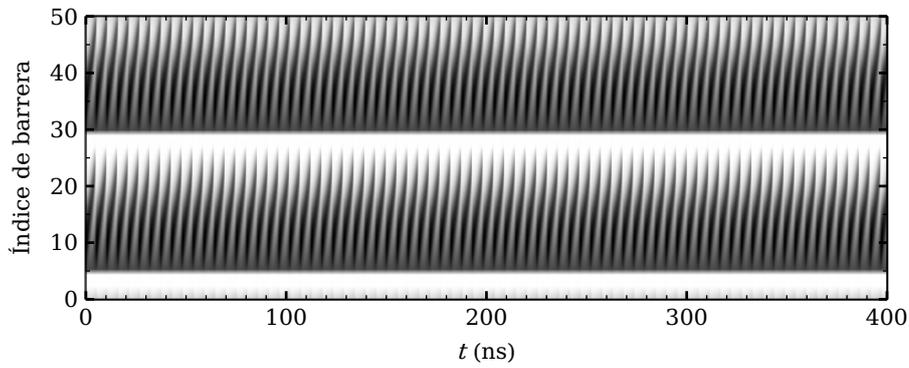


(c) Atractor.

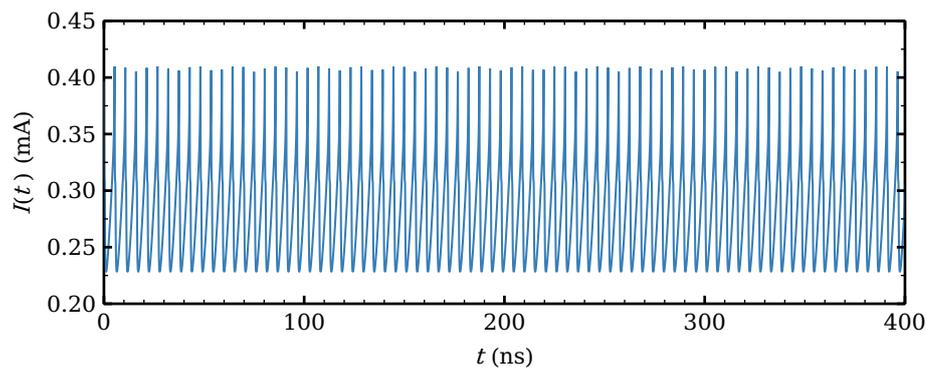


(d) Sección de Poincaré.

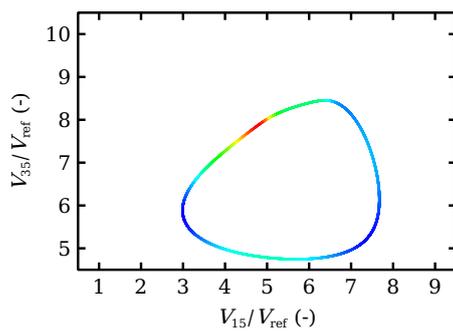
Fig. C.3 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 0.9V$



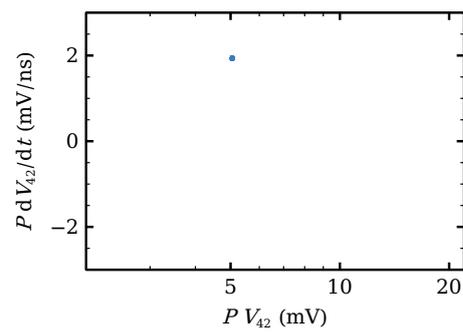
(a) Evolución de las caídas de potencial en cada barrera.



(b) Evolución de la corriente total.

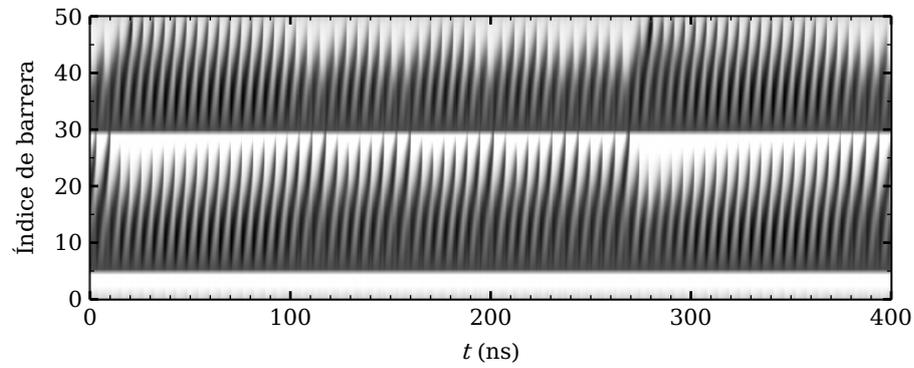


(c) Atractor.

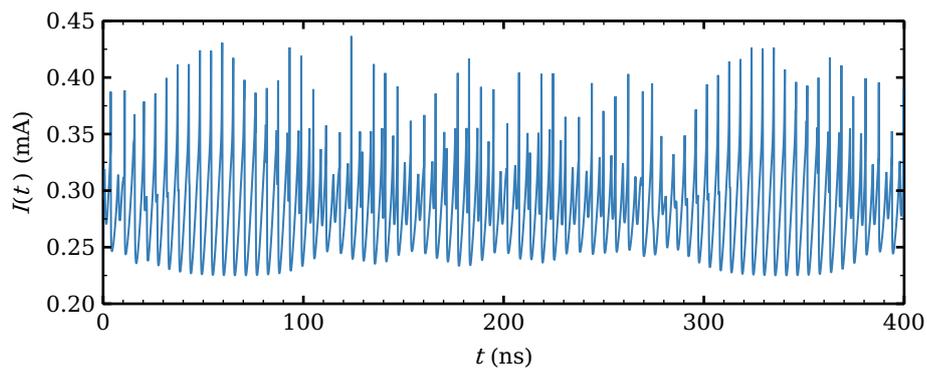


(d) Sección de Poincaré.

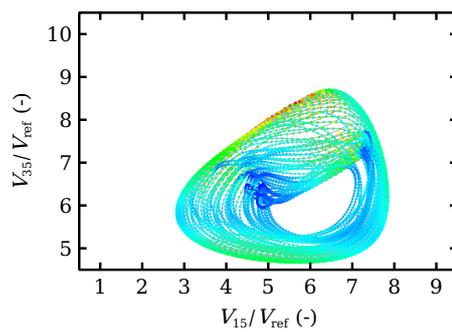
Fig. C.4 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 0.95 V$



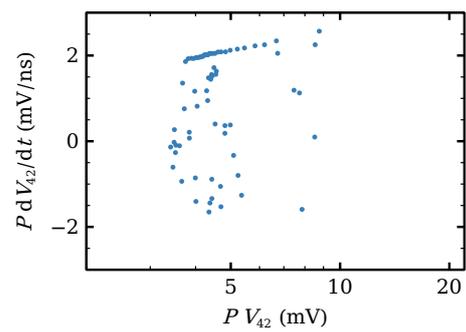
(a) Evolución de las caídas de potencial en cada barrera.



(b) Evolución de la corriente total.

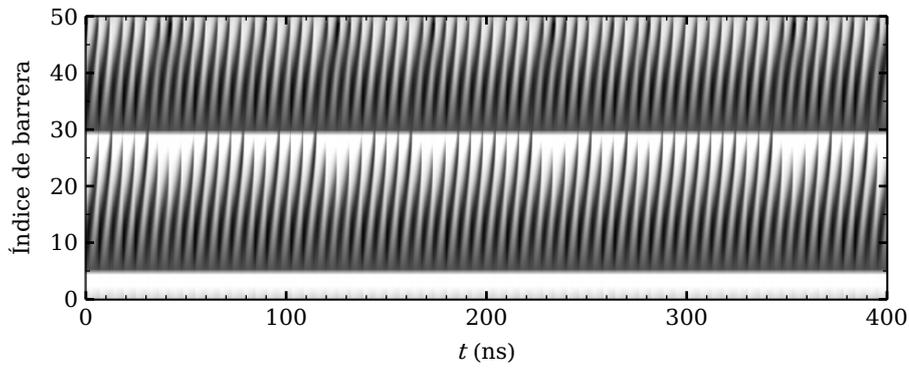


(c) Atractor.

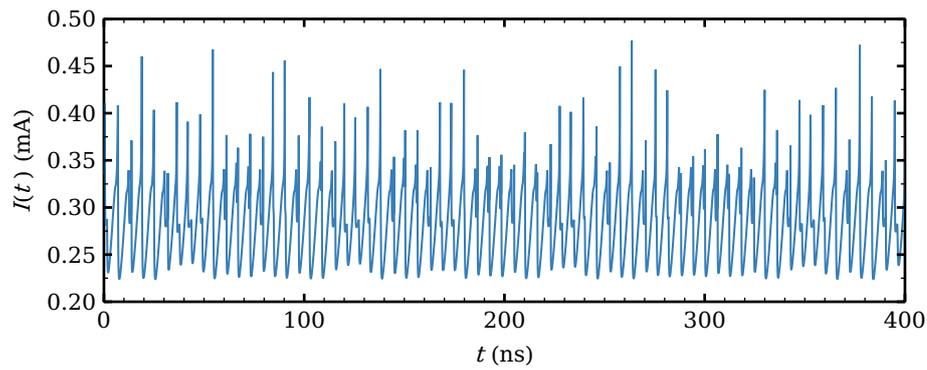


(d) Sección de Poincaré.

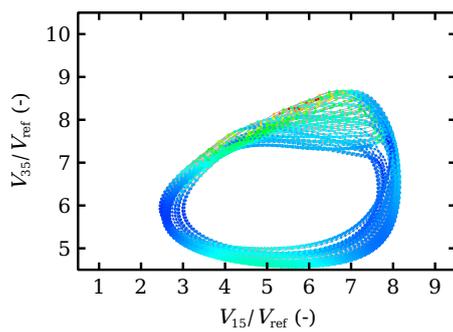
Fig. C.5 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 0.965 V$



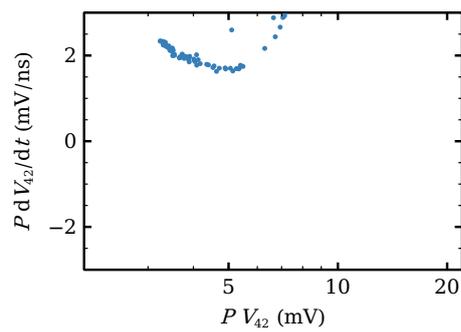
(a) Evolución de las caídas de potencial en cada barrera.



(b) Evolución de la corriente total.

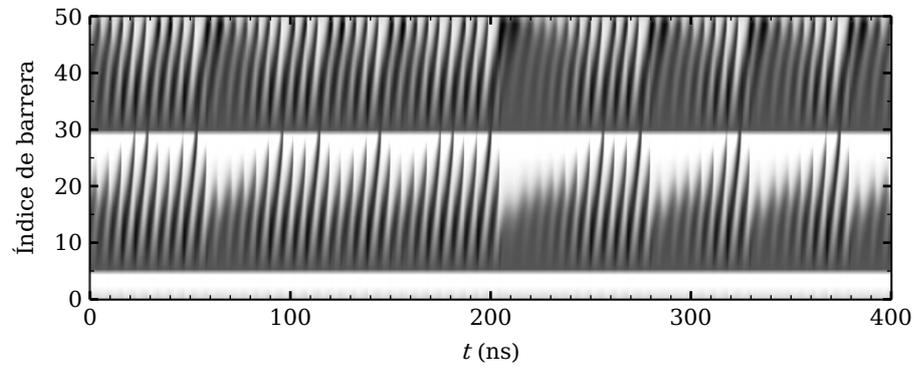


(c) Atractor.

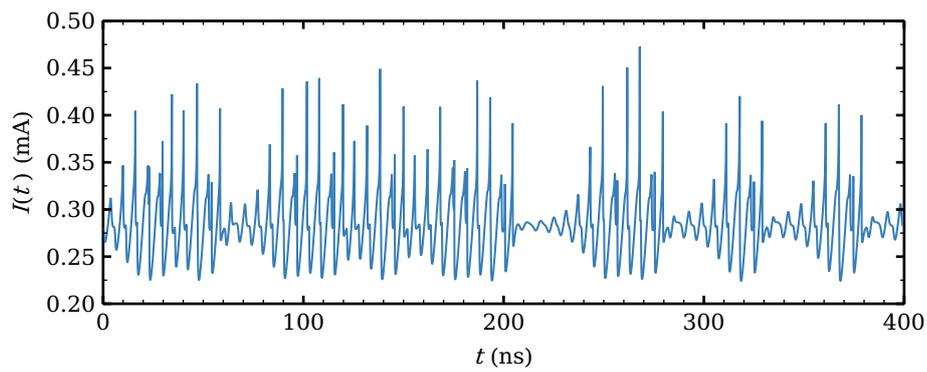


(d) Sección de Poincaré.

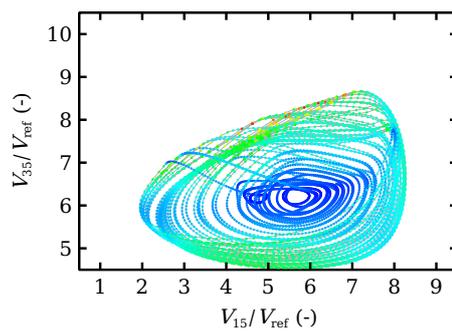
Fig. C.6 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.01$ V



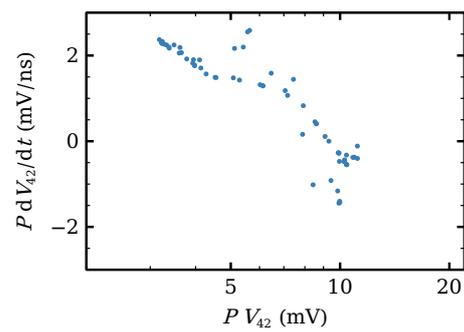
(a) Evolución de las caídas de potencial en cada barrera.



(b) Evolución de la corriente total.

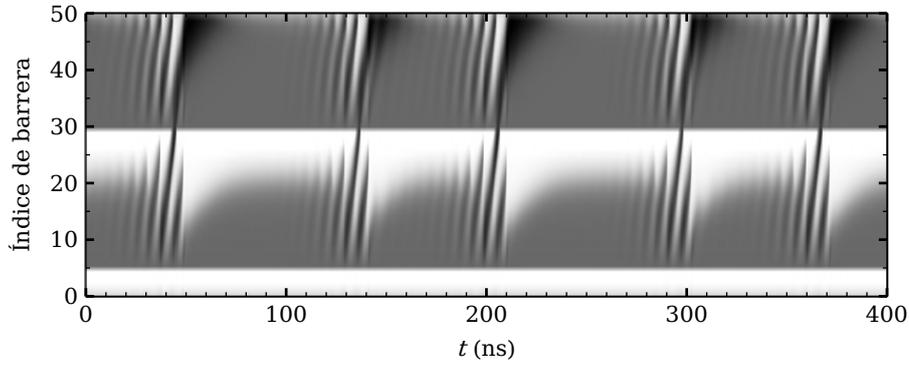


(c) Atractor.

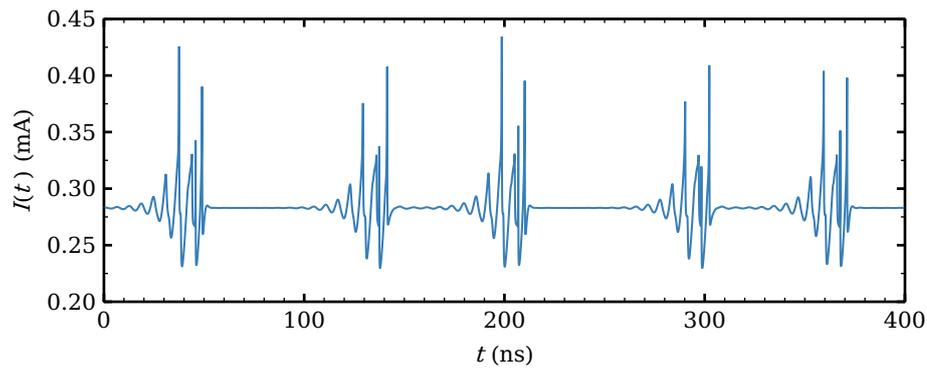


(d) Sección de Poincaré.

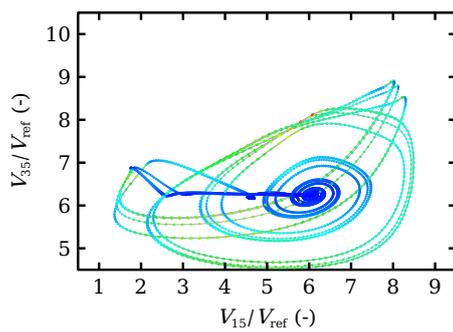
Fig. C.7 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.03V$



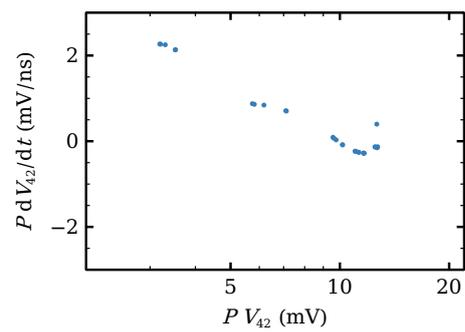
(a) Evolución de las caídas de potencial en cada barrera.



(b) Evolución de la corriente total.

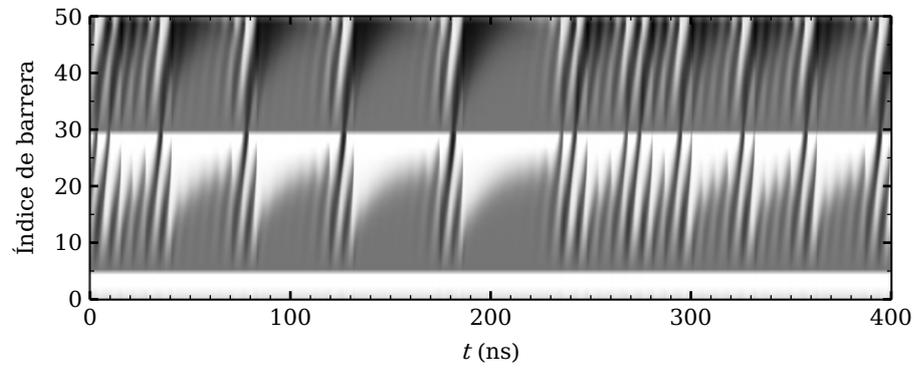


(c) Atractor.

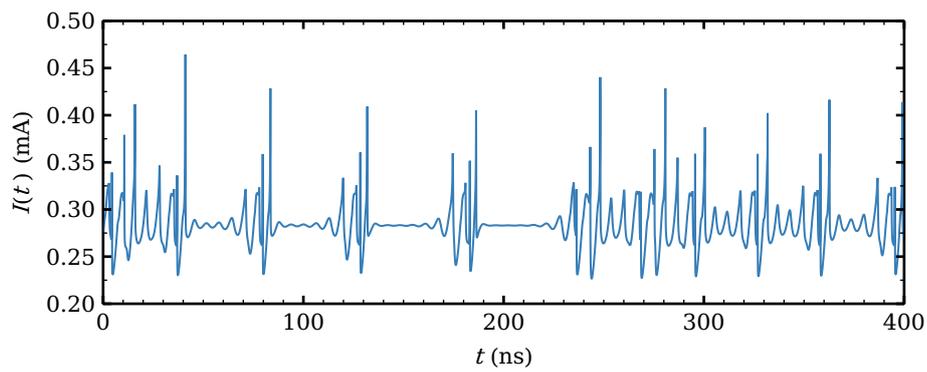


(d) Sección de Poincaré.

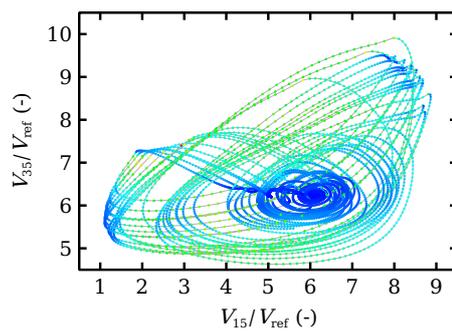
Fig. C.8 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.1 V$



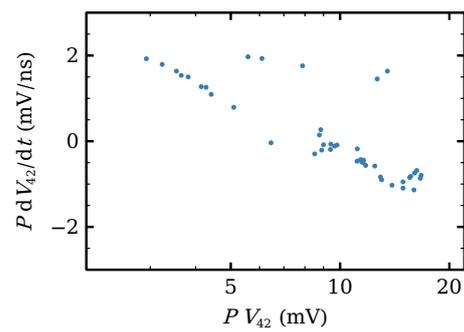
(a) Evolución de las caídas de potencial en cada barrera.



(b) Evolución de la corriente total.

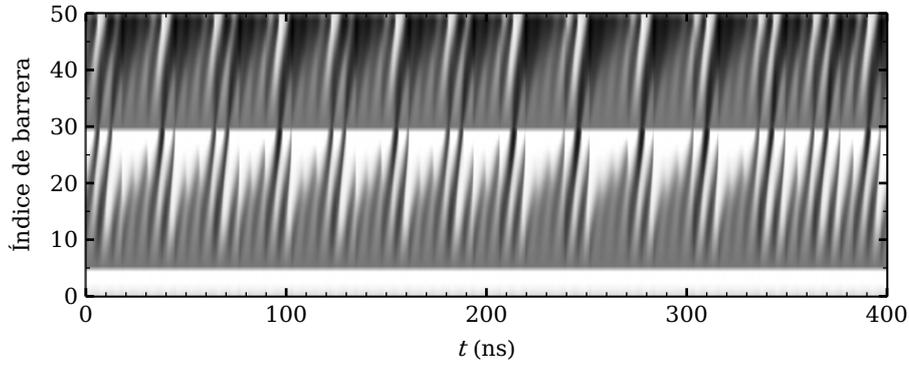


(c) Atractor.

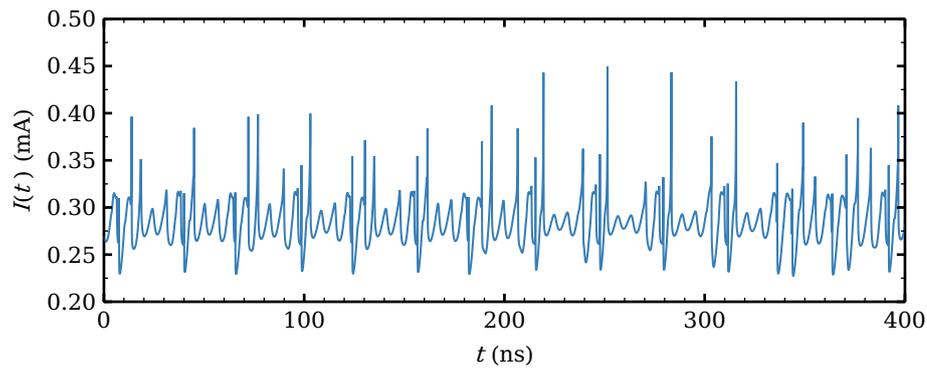


(d) Sección de Poincaré.

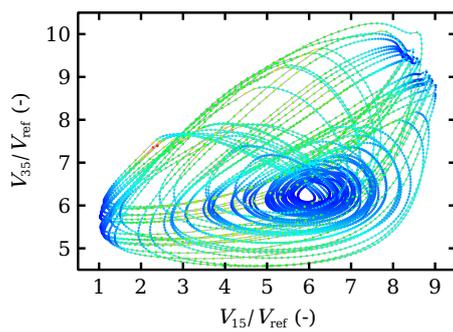
Fig. C.9 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.2V$



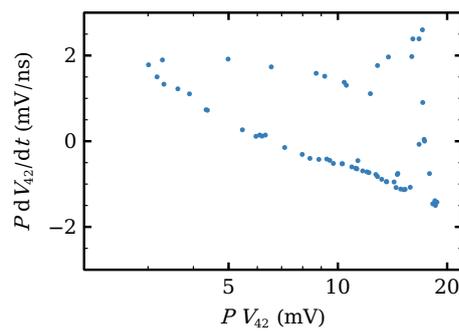
(a) Evolución de las caídas de potencial en cada barrera.



(b) Evolución de la corriente total.

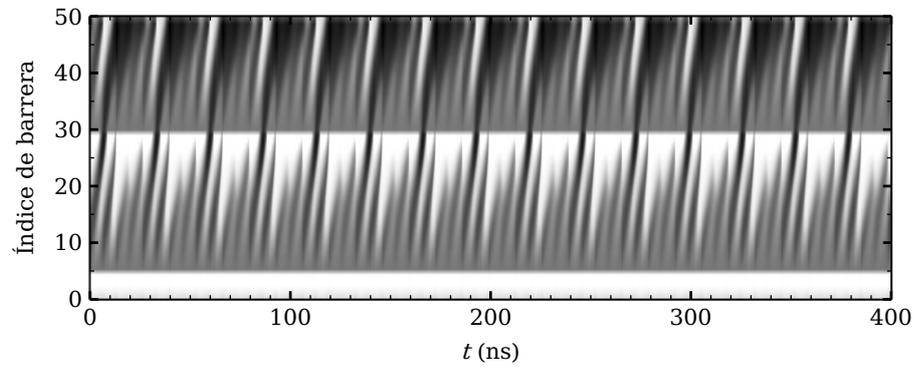


(c) Atractor.

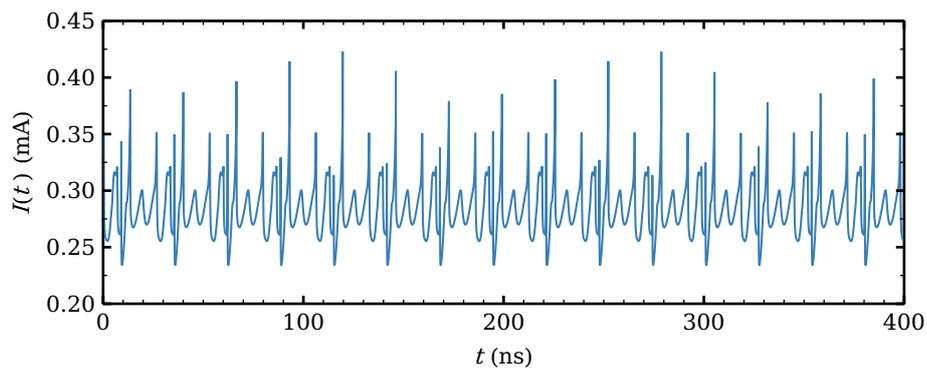


(d) Sección de Poincaré.

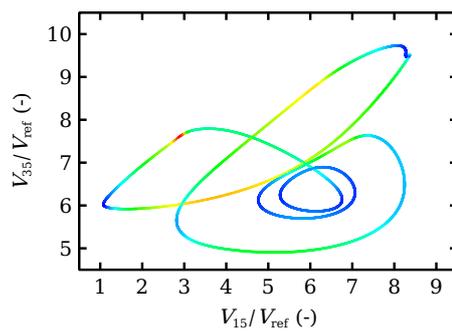
Fig. C.10 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.275 V$



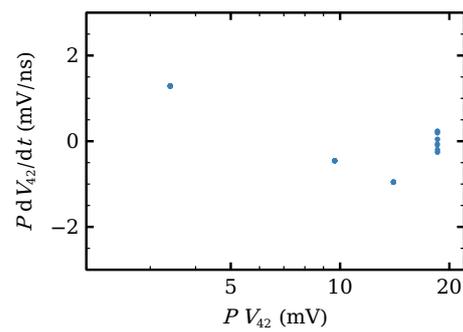
(a) Evolución de las caídas de potencial en cada barrera.



(b) Evolución de la corriente total.

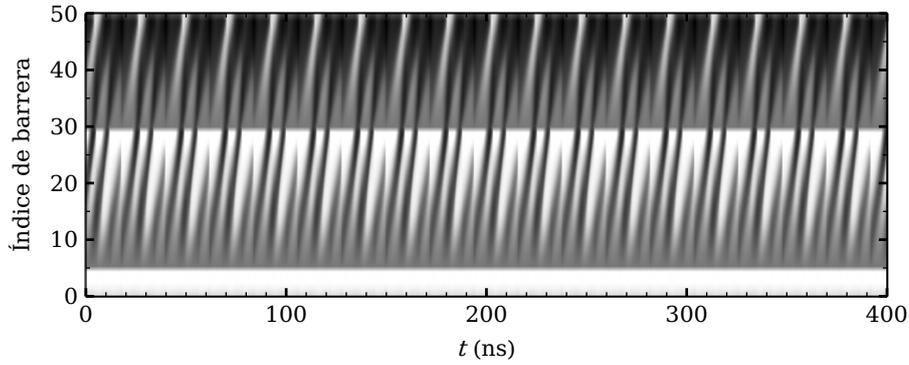


(c) Atractor.

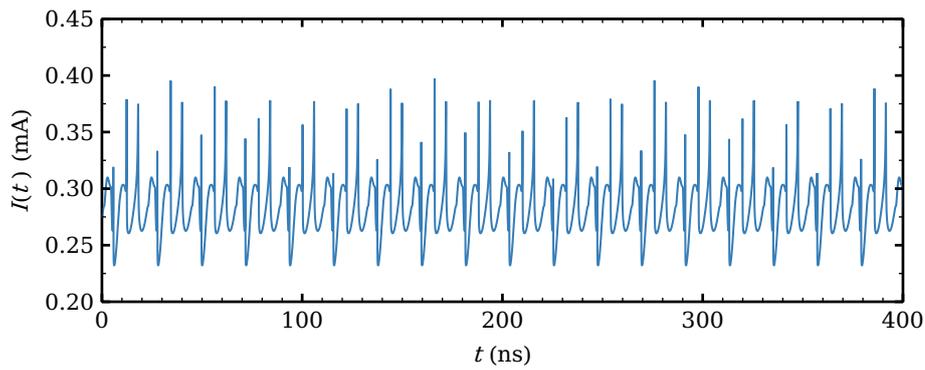


(d) Sección de Poincaré.

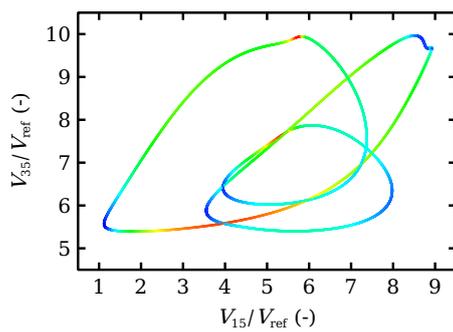
Fig. C.11 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.3V$



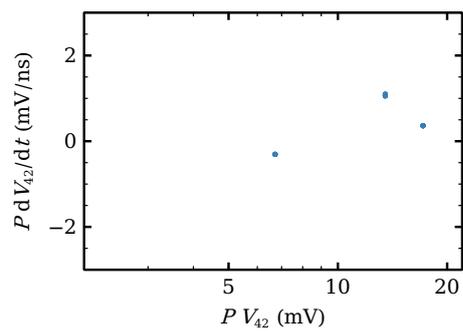
(a) Evolución de las caídas de potencial en cada barrera.



(b) Evolución de la corriente total.

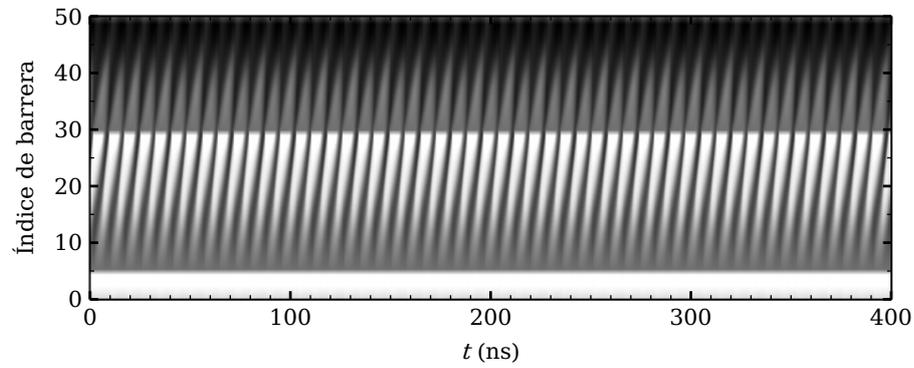


(c) Atractor.

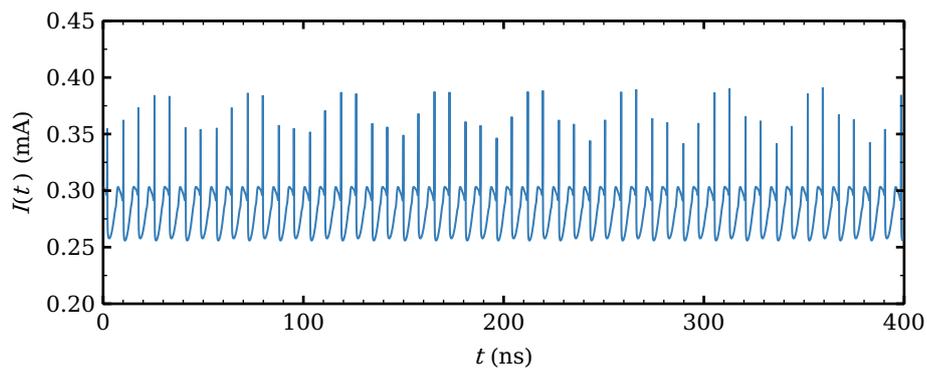


(d) Sección de Poincaré.

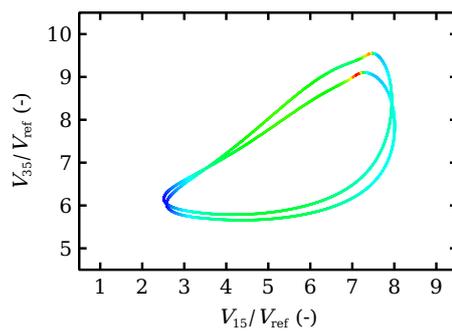
Fig. C.12 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.4V$



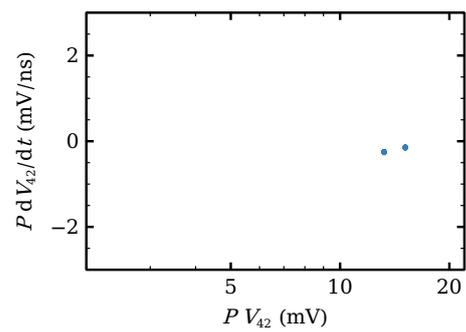
(a) Evolución de las caídas de potencial en cada barrera.



(b) Evolución de la corriente total.

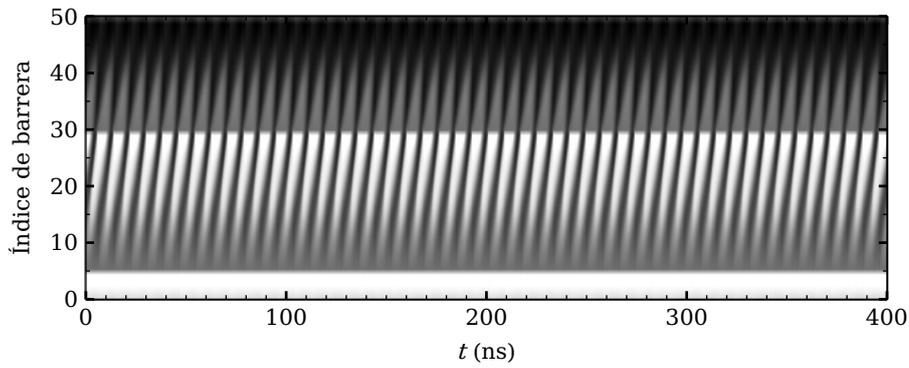


(c) Atractor.

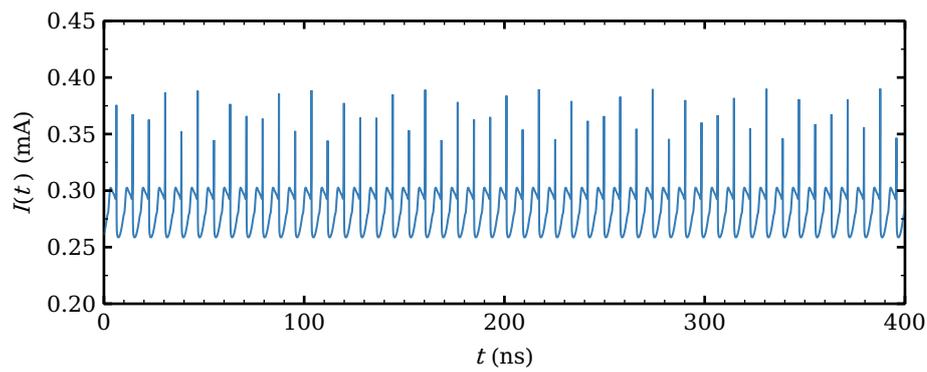


(d) Sección de Poincaré.

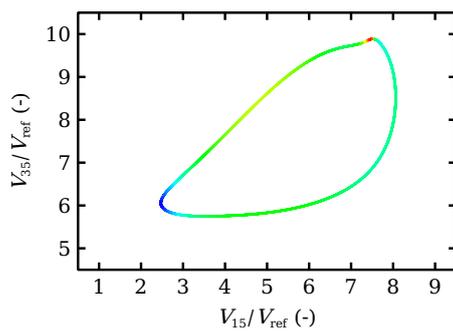
Fig. C.13 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.45V$



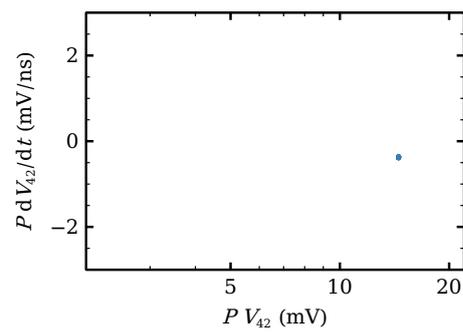
(a) Evolución de las caídas de potencial en cada barrera.



(b) Evolución de la corriente total.



(c) Atractor.



(d) Sección de Poincaré.

Fig. C.14 Diseño de dos pozos modificados. $V_{dc} = 1.5V$

“So long, and thanks for all the fish!” – Hitchhiker’s Guide to the Galaxy

