

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID



Universidad
Carlos III de Madrid

Comportamiento estructural de pórticos con secciones fisuradas

Grado en Ingeniería Mecánica
Trabajo Final de Grado

Autor: Elena Mata Guerrero

Tutor: José Fernández Sáez

Índice

1. Introducción y objetivo.....	3
1.1. Breve historia del análisis estructural.....	3
1.2. Motivación.....	4
1.3. Objetivo.....	5
1.4. Estructura del trabajo.....	6
2. Cálculo de movimientos en piezas prismáticas.....	8
2.1. Introducción al Método de Navier-Bresse.....	8
2.2. Fórmulas de Navier-Bresse.....	10
3. Breve introducción al cálculo matricial de estructuras.....	13
3.1. Introducción.....	13
3.2. Hipótesis.....	15
3.3. Método de la rigidez.....	16
3.4. Ejemplos con MATLAB.....	28
Ejemplo 1. Viga en voladizo con carga puntual en un nodo.....	29
Ejemplo 2: pórtico con carga puntual en un nodo.....	34
4. Construcción de la matriz de rigidez en una barra fisurada.....	42
4.1. Comportamiento de una viga fisurada.....	42
4.2. Cálculo de Cm	43
4.3. Matriz de rigidez de una barra fisurada.....	44
5. Aplicación del método de la rigidez a pórticos fisurados.....	56
5.1. Ejemplos analizados.....	56
Ejemplo 3. Pórtico fisurado con carga en un nodo.....	56
Ejemplo 4. Pórtico fisurado con carga distribuida.....	59
Ejemplo 5. Pórtico con carga puntual a lo largo de una barra y varias barras fisuradas.....	63
Ejemplo 6. Pórtico empotrado de cuatro barras con carga lateral distribuida.....	67
5.2. Validación del código desarrollado.....	69
5.3. Influencia de la presencia de una fisura en un pórtico.....	73
6. Conclusiones y trabajos futuros.....	75
6.1. Conclusiones.....	75
6.2. Trabajos futuros.....	75
7. Anexo I.....	77

Índice de figuras

Figura 1. Diferentes tipos de pórticos	5
Figura 2. Deformación inducida por el esfuerzo axial en una rebanada de un prisma	8
Figura 3. Deformación inducida por el esfuerzo cortante en una rebanada de un prisma	9
Figura 4. Deformación inducida por el esfuerzo flector en una rebanada de un prisma	10
Figura 5. Ejes globales y ejes locales en una barra.....	17
Figura 6. Numeración de nodos, barras y grados de libertad en un pórtico.....	18
Figura 7. Ejemplo de ejes locales en un pórtico.....	18
Figura 8. Desplazamientos y fuerzas en barra articulada	19
Figura 9. Problema unitario en barra articulada.....	20
Figura 10. Problema unitario en una barra reticulada.....	21
Figura 11. Problema unitario en una barra reticulada.....	21
Figura 12. Problema unitario en una barra reticulada.....	22
Figura 13. Ángulo que forman los ejes globales y locales.....	24
Figura 14. Ejemplo de estructura bi-apoyada	26
Figura 15. Ejemplo de viga bi-apoyada con cargas aplicadas	27
Figura 16. Ejemplo 1. Grados de libertad.....	29
Figura 17. Ejemplo 1. Carga aplicada	29
Figura 18. Ejemplo 2. Pórtico con carga puntual en un nodo	34
Figura 19. Esfuerzos en una barra fisurada	42
Figura 20. Ejemplo de viga fisurada	43
Figura 21. Sección de la viga	43
Figura 22. Profundidad de la fisura	43
Figura 23. Problema unitario en barra fisurada	45
Figura 24. Problema unitario en barra fisurada	45
Figura 25. Problema unitario en barra fisurada	47
Figura 26. Problema unitario en barra fisurada	49
Figura 27. Problema unitario en barra fisurada	50
Figura 28. Problema unitario en barra fisurada	52
Figura 32. Ejemplo 3. Pórtico fisurado con carga en un nodo	56
Figura 33. Ejemplo 4. Pórtico fisurado con carga distribuida	59
Figura 34. Principio de superposición aplicado a un pórtico con carga distribuida aplicada	60
Figura 35. Ejemplo 5. Pórtico con carga puntual a lo largo de una barra y varias barras fisuradas	63
Figura 36. Principio de superposición aplicado a un pórtico con carga a lo largo de una barra	64
Figura 37. Ejemplo 6. Pórtico empotrado de cuatro barras con carga lateral distribuida	67
Figura 30. Reacciones.....	70
Figura 31. Diagrama de esfuerzo flector	70

Capítulo 1

Introducción y objetivo.

1.1. Breve historia del análisis estructural

La historia del Análisis Estructural comienza mucho antes de nuestros días, ya a finales del siglo XV, Leonardo Da Vinci (1452-1519) introduce el concepto de fuerza y de momento sentando la base fundamental para el estudio de las estructuras. Galileo Galilei (1564-1642) analiza algunas estructuras simples, como la viga en voladizo, en su libro *Dos Nuevas Ciencias* (1638).

Durante los siglos XVII y XVIII se hace un gran avance matemático en el campo del análisis estructural. Hooke (1635-1703) formula las *Leyes de elasticidad de Hooke*, que relacionan los esfuerzos y los desplazamientos; Euler (1707-1783), estudia el pandeo y cargas críticas en soportes verticales y Bernouilli (1700-1782) analiza las vibraciones en las barras, entre muchos otros que contribuyen con sus trabajos al avance del estudio estructural.

Cabe destacar el trabajo de Navier (1785-1836) y Bresse (1822-1883), que, entre otras aportaciones, desarrollaron las llamadas *Ecuaciones de Navier-Bresse*, que describen el estado de deformación de un sólido rígido deformable, mediante una ecuación de desplazamientos y otra ecuación de giros.

En 1857, Clapeyron presentó el "*Teorema de los tres Momentos*" en el que se analizan las vigas continuas.

Maxwell (1830-1879), publicó el primer estudio de análisis para estructuras estáticamente indeterminadas. Este método se basa en igualar la energía interna de deformación de una estructura en la que se aplican cargas y el trabajo externo realizado por las dichas cargas.

Fue importante la aportación a la Teoría de Estructuras del alemán Mohr (1835-1918), que desarrolló el método de las cargas elásticas que estudia la deflexión en vigas, o su aportación al método de Maxwell para estructuras indeterminadas introduciendo el principio de los trabajos virtuales.

En 1873 Castigliano publicó su *Primer Teorema de Castigliano* o principio del trabajo mínimo. Más tarde, publicaría el *Segundo Teorema de Castigliano*. En ellos, relaciona la energía de deformación con las fuerzas exteriores aplicadas y el desplazamiento en el punto de aplicación.

A principio del siglo XX se empezó a trabajar en la idea de la necesidad de incorporar otros métodos más prácticos para el cálculo de estructuras indeterminadas. Fue muy importante el trabajo de Cross (1885-1959) que presentó en 1932 su método de distribución de momentos.

Con el nacimiento de los ordenadores, se abren las puertas a otros métodos de cálculos más rápidos y automáticos, como son los métodos matriciales, basados en las ideas anteriores pero que no habían podido ser desarrollados ya que supondría la resolución a mano de numerosas ecuaciones, aun tratándose de estructuras sencillas. Algunos de los hombres que desarrollan estos métodos fueron Turner, Clough, Martin y Topp.

Las ventajas que el método matricial proporciona, es decir, la resolución rápida y sistemática de las ecuaciones y el estudio de la estructura sin necesidad de laboriosos cálculos, hacen que hoy en día sean los métodos más usados por ingenieros, junto al método de los elementos finitos, en el análisis estructural.

1.2. Motivación

La motivación que lleva al desarrollo de este trabajo es la importancia del estudio de las estructuras que forman parte de los edificios y construcciones industriales así como su comportamiento después de que distintos factores, como el tiempo o el exceso de carga, puedan llegar a dañar las barras que componen dichas estructuras apareciendo fisuras que varíen los esfuerzos y movimientos que dicha estructura es capaz de soportar.

El análisis estructural nos permite calcular los desplazamientos y esfuerzos que soportan las estructuras cuando son sometidas a distintas solicitaciones.

El cálculo matricial es un tipo de análisis estructural en el que se modelizan los parámetros del problema organizándolos en matrices para obtener un conjunto de ecuaciones cuyo resultado es la solución que buscamos.

Existen diferentes métodos de cálculo matricial de estructuras. En este proyecto se utilizará el método de la rigidez. Para ello, deben relacionarse un número finito de variables entre sí, en este caso, las fuerzas que soporta la estructura con los desplazamientos en cada grado de libertad, teniendo en cuenta las condiciones de contorno de la estructura.

La gran ventaja de los métodos matriciales para la resolución de estructuras es su rápida y automática aplicación, gracias a los programas informáticos de cálculo que nos permiten obtener la solución de los sistemas de ecuaciones. Por ello, hoy en día, los cálculos sobre estructuras en ingeniería se realizan con dichos métodos.

1.3. Objetivo

El objetivo principal de este trabajo es el estudio mediante el método de la rigidez del comportamiento bajo cargas de un tipo especial de estructura: los pórticos, cuando presentan una sección fisurada en alguna o en varias barras. Un pórtico es una estructura formada por tres o más barras diseñada para soportar tanto cargas verticales como laterales. Se estudiará cómo actúa un pórtico cuando presenta fisuras y se comparará con uno que no está dañado así como se desarrollarán diferentes ejemplos, utilizando como herramienta de cálculo el programa MATLAB, una interfaz sencilla que nos ayudará a resolver de manera automática los distintos sistemas de ecuaciones, introduciendo distintos parámetros como las dimensiones geométricas de las barras, número de barras, tipo de apoyos, altura y dimensión de la fisura, etc...

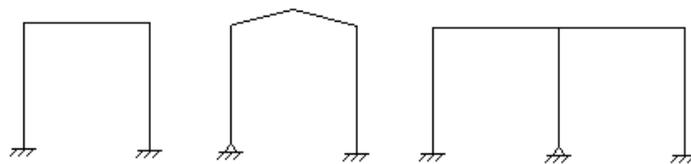


Figura 1. Diferentes tipos de pórticos

Resumiendo, los objetivos son:

- Desarrollar un método de cálculo de estructuras que nos permita entender el comportamiento de las barras cuando presentan alguna o varias secciones fisuras y son sometidas a cargas que pueden ser puntuales o distribuidas.
- Calcular la matriz de rigidez de una estructura que tiene una o más barras fisuradas.
- Construir un programa sencillo utilizando MATLAB que nos permita obtener resultados para cada uno de los ejemplos, simplemente introduciendo los datos del problema.

- Aplicar dicho programa a pórticos con distinto número de barras y que presentan fisuras en alguna de dichas barras.
- Comparar los resultados con distintos métodos de análisis estructural para dar validez a nuestro programa.
- Estudiar las diferencias en el comportamiento de un pórtico sin fisuras y otro que presenta una sección fisurada.

1.4. Estructura del trabajo

Para empezar a comprender el análisis de los pórticos fisurados, en el capítulo 2 se hará una breve introducción del cálculo de movimientos en piezas prismáticas mediante el método de Navier-Bresse, ya que sus ecuaciones se utilizarán como herramienta para el desarrollo del método de cálculo y serán mencionadas a lo largo del trabajo.

En el capítulo 3 se inicia la descripción del cálculo matricial de estructuras, mediante el método de la rigidez, que será el método que se utilizará en capítulos posteriores para el estudio de vigas fisuradas.

El primer apartado de este capítulo consta de una introducción en la que se exponen las ecuaciones y principios en las que se basarán dicho cálculo.

En el apartado 3.2. se describen las hipótesis que se han supuesto para el desarrollo del trabajo, que nos permitirán llegar al objetivo final de una manera sencilla siendo el resultado óptimo.

El apartado 3.3. describe el método de la rigidez de una forma general y explica los pasos a seguir para la resolución de la ecuación matricial, incluyendo la construcción de la matriz de rigidez.

Para terminar este capítulo se desarrollarán dos ejemplos sencillos para entender mejor todo el proceso e introducir el código utilizado en MATLAB, que será el que se utilizará también en el caso de pórticos fisurados, variando la matriz de rigidez de las barras afectadas.

En el capítulo 4 se construirá la matriz de rigidez de una barra que presenta una sección fisurada.

Para ello, en primer lugar se describirán las hipótesis que se han tenido en cuenta en el comportamiento de una viga fisurada.

En los apartados 4.2. y 4.3. se harán los cálculos necesarios para obtener la matriz de rigidez en caso de una barra fisurada, el cual es el objetivo principal de este trabajo.

Una vez calculada la matriz de rigidez se aplicarán los resultados a pórticos en el capítulo 5. En él, se desarrollarán diferentes ejemplos y se mostrarán los resultados obtenidos mediante el código desarrollado en MATLAB.

En el apartado 5.2. se comprueba que los resultados no difieren de los obtenidos con otros métodos.

El apartado 5.3. trata de la influencia que tiene la fisura sobre la estructura.

Este proyecto termina con un capítulo de conclusiones y, además, se propondrán trabajos futuros que puedan continuar el desarrollo de este estudio.

Capítulo 2

Cálculo de movimientos en piezas prismáticas

2.1. Introducción al Método de Navier-Bresse

En capítulos anteriores ya se han utilizado las expresiones de Navier-Bresse para calcular desplazamientos. En este apartado se desarrollarán de una manera más minuciosa para poder entenderlas y utilizarlas como método de comprobación para los resultados obtenidos mediante el cálculo matricial a través de MATLAB. Además, se resolverán por este método los ejemplos que se han realizado.

Para comenzar se verá cómo se deforma una rebanada de la barra para después, mediante integración obtener la deformación de la barra completa.

Se eligen los ejes con el mismo criterio con lo que se ha hecho durante todo el trabajo y se tiene en cuenta la hipótesis de Navier, que dice que una cara de una pieza, que era plana antes de deformarse, permanece plana después de la deformación.

- Deformación inducida por el *esfuerzo axial*:

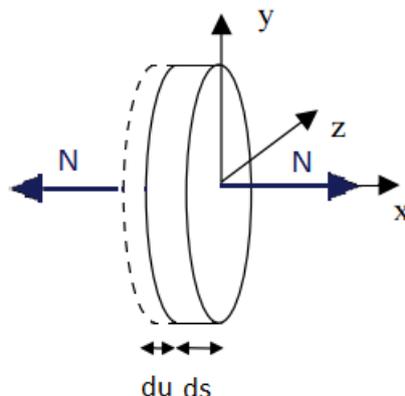


Figura 2. Deformación inducida por el esfuerzo axial en una rebanada de un prisma

Si se aplica la ley de Hooke, como se ha visto en apartados anteriores, y las definiciones de deformación y tensión:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.1)$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.2)$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (2.3)$$

Se tiene que:

$$du_x = \varepsilon \cdot dx = \frac{\sigma}{E} dx = \frac{N}{EA} dx$$

- Deformación inducida por el *esfuerzo cortante*:

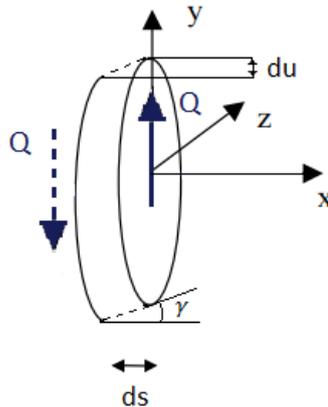


Figura 3. Deformación inducida por el esfuerzo cortante en una rebanada de un prisma

La deformación por esfuerzo cortante teniendo en cuenta pequeñas deformaciones en las que se puede considerar que la tangente del ángulo es igual al propio ángulo y aplicando de nuevo la ley de Hooke, es:

$$du_y = \gamma ds = \frac{\tau}{G} ds \quad (2.4)$$

Siendo G el módulo de cortadura y τ la tensión tangencial.

Si se define la tensión tangencial como la tensión entre el área:

$$\tau = \frac{Q_y}{\Omega_c} \quad (2.5)$$

Por lo tanto, se obtiene que:

$$du_y = \frac{Q_y}{G\Omega_c} ds$$

- Deformación inducida por el *esfuerzo flector*:

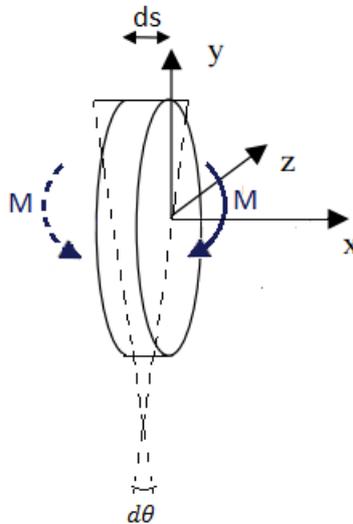


Figura 4. Deformación inducida por el esfuerzo flector en una rebanada de un prisma

La deformación por esfuerzo flector aplicando la hipótesis de Navier es:

$$du_z = \frac{M}{EI_z} ds \quad (2.6)$$

En este proyecto no se tendrá en cuenta el esfuerzo torsor.

2.2. Fórmulas de Navier-Bresse

$$\vec{\theta}_B = \vec{\theta}_A + \int_A^B d\vec{\theta} \quad (2.7)$$

Siendo:

$\vec{\theta}_A$ el giro del sólido rígido

$\int_A^B d\vec{\theta}$ la suma de los giros de todas las rebanadas

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \vec{\theta}_A \wedge \vec{r}_{A \rightarrow B} + \int_A^B d\vec{u} + \int_A^B d\vec{\theta} \wedge \vec{r} \quad (2.8)$$

$$\downarrow v_B = \downarrow v_A + \vec{\theta}_A \wedge \vec{r}_{A \rightarrow B} + \int_A^B \downarrow dv + \int_A^B d\vec{\theta} \wedge \vec{r} \quad (2.9)$$

Siendo:

$\uparrow v_A + \vec{\theta}_A \wedge \vec{r}_{A \rightarrow B}$ y $\vec{u}_A + \vec{\theta}_A \wedge \vec{r}_{A \rightarrow B}$ los desplazamientos vertical y horizontal del sólido rígido.

$\int_A^B d\vec{u}$ la suma de los desplazamientos de todas las rebanadas

$\int_A^B d\vec{\theta} \wedge \vec{r}$ el desplazamiento debido al giro de las rebanadas

Si particularizamos para una barra plana con las cargas en su plano, las condiciones serán las siguientes:

$$Q_z = M_x = M_y = 0$$

$$u_z = v_z = \theta_x = \theta_y = 0$$

$$M_z = M$$

$$Q_y = Q$$

$$v_y = v$$

$$u_x = u$$

$$\theta_x = \theta$$

Las expresiones quedan:

$$\vec{\theta}_B = \vec{\theta}_A + \int_A^B \frac{M}{EI} \cdot ds \quad (2.10)$$

$$\downarrow v_B = \downarrow v_A + \vec{\theta}_A (X_B - X_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dY + \frac{Q}{E\Omega_c} dX \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (X_B - X) ds \quad (2.11)$$

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \vec{\theta}_A (Y_B - Y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dX + \frac{Q}{E\Omega_c} dY \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (Y_B - Y) ds \quad (2.12)$$

En la práctica se puede observar que la aportación del esfuerzo cortante y el esfuerzo axial es mucho más pequeña que la del esfuerzo flector, por lo que podemos considerarla despreciable, quedando las ecuaciones de Navier-Bresse:

$$\vec{\theta}_B = \vec{\theta}_A + \int_A^B \frac{M}{EI} \cdot ds$$

$$\downarrow v_B = \downarrow v_A + \vec{\theta}_A(X_B - X_A) + \int_A^B \frac{M}{EI} (X_B - X) ds$$

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \vec{\theta}_A(Y_B - Y_A) + \int_A^B \frac{M}{EI} (Y_B - Y) ds$$

Capítulo 3

Breve introducción al cálculo matricial de estructuras

3.1. Introducción

El desarrollo del cálculo matricial se basa en la utilización de las ecuaciones generales de la mecánica de los medios continuos, es decir, las *ecuaciones de equilibrio*, que relacionan las fuerzas nodales con las tensiones; las *ecuaciones de comportamiento o constitutivas*, que relacionan las tensiones con las deformaciones; y las *ecuaciones de compatibilidad* que relacionan las deformaciones con los desplazamientos que sufre la estructura.

- *Ec. de equilibrio en el contorno:*

$$f_x = \sigma_x \cdot m + \tau_{xy} \cdot n + \tau_{xz} \cdot l \quad (3.1)$$

$$f_y = \tau_{yx} \cdot m + \sigma_y \cdot n + \tau_{yz} \cdot l \quad (3.2)$$

$$f_z = \tau_{zx} \cdot m + \tau_{zy} \cdot n + \sigma_z \cdot l \quad (3.3)$$

Donde

f_x, f_y, f_z son las componentes de las fuerzas externas.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ son las componentes del vector tensión normal.

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ son las componentes del vector tensión tangencial.

m, n, l son las componentes del vector director unitario.

- *Ec. de comportamiento o constitutivas (Leyes de Hooke):*

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y - \sigma_z) \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x - \sigma_z) \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x - \sigma_y) \quad (3.6)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G \quad (3.7)$$

$$\gamma_{xz} = \tau_{xz}/G \quad (3.8)$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G \quad (3.9)$$

Donde

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ son las componentes de la deformación.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ son las componentes de la tensión normal.

ν es el coeficiente de Poisson.

E es el módulo de elasticidad.

G es el módulo de rigidez y su expresión es $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

- *Ec. de compatibilidad:*

$$2 \frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta y \delta z} = \frac{\delta}{\delta x} \left(-\frac{\delta \gamma_{yz}}{\delta x} + \frac{\delta \gamma_{xz}}{\delta y} + \frac{\delta \gamma_{xy}}{\delta z} \right) \quad (3.10)$$

$$2 \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta x \delta z} = \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta \gamma_{yz}}{\delta x} - \frac{\delta \gamma_{xz}}{\delta y} + \frac{\delta \gamma_{xy}}{\delta z} \right) \quad (3.11)$$

$$2 \frac{\delta^2 \varepsilon_z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta}{\delta z} \left(\frac{\delta \gamma_{yz}}{\delta x} + \frac{\delta \gamma_{xz}}{\delta y} - \frac{\delta \gamma_{xy}}{\delta z} \right) \quad (3.12)$$

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y} \quad (3.13)$$

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta z^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_z}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 \gamma_{yz}}{\delta y \delta z} \quad (3.14)$$

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta z^2} = \frac{\delta^2 \gamma_{xz}}{\delta x \delta z} \quad (3.15)$$

Dentro del cálculo matricial existen varios métodos de resolución de estructuras como el método de la flexibilidad o las fuerzas y el método de la rigidez o los desplazamientos, que es el que se desarrollará en estas páginas. En el método de la flexibilidad las incógnitas son las fuerzas, que se relacionan con los desplazamientos a través de la llamada Matriz de Flexibilidad, partiendo de las ecuaciones de equilibrio, utilizando después las ecuaciones de comportamiento y, finalmente, las de compatibilidad; mientras que en el método de la rigidez se realiza el camino inverso: calculamos los desplazamientos a través de la Matriz de Rigidez, siendo la ecuación matricial:

$$\{F\} = K \cdot \{D\} \quad (3.16)$$

Donde

$\{f\}$ es el vector de fuerzas.

K es la matriz de rigidez.

$\{d\}$ es el vector desplazamiento.

El procedimiento que seguimos para obtener la ecuación matricial en el método de la rigidez es:



3.2. Hipótesis

Para este proyecto, las hipótesis que se tendrán en cuenta para desarrollar el trabajo son las siguientes:

- Se supondrán barras rectas de sección transversal constante que responden a la *Ley de Hooke*.

- Se considerarán pequeñas deformaciones en comparación con las dimensiones de las barras.
- Hay una relación lineal entre las fuerzas y los desplazamientos, por lo que es aplicable el principio de superposición. Según este principio se puede descomponer un problema inicial en problemas simples para su resolución y cuyo resultado será la suma de los resultados obtenidos en cada uno de los "subproblemas"

Además, se supondrá que se trabaja con vigas de Euler-Bernoulli, que son aquellas que cumplen las siguientes hipótesis:

- Hipótesis de comportamiento elástico. El material de la viga es elástico lineal, con módulo de Young E y coeficiente de Poisson despreciable.
- Hipótesis de la flecha vertical. En cada punto el desplazamiento vertical solo depende de x : $u_y(x, y) = w(x)$.
- Hipótesis de la fibra neutra. Los puntos de la fibra neutra solo sufren desplazamiento vertical y giro: $u_x(x, 0) = 0$.
- La tensión perpendicular a la fibra neutra se anula: $\sigma_y = 0$.
- Hipótesis de Bernoulli. Las secciones planas inicialmente perpendiculares al eje de la viga, siguen siendo perpendiculares al eje de la viga una vez curvado.

3.3. Método de la rigidez.

Para resolver este tipo de problemas se siguen una serie de pasos que permiten obtener las reacciones y los desplazamientos en cada uno de los nodos.

Elección del sistema de ejes globales.

Es importante tener en cuenta que la estructura completa vendrá definida dentro de un sistema de coordenadas que llamaremos *global*, necesario para poder aplicar las condiciones de contorno y definir los movimientos y fuerzas en los nodos de la estructura, pero que para cada barra o elemento se deberá elegir un sistema de coordenadas que permita utilizar las ecuaciones de cálculo matricial de la manera más fácil para su resolución, a este sistema de coordenadas le llamaremos *local*.

En el sistema de coordenadas local será definido como eje x el eje longitudinal que recorre toda la pieza y como ejes y y z los ejes perpendiculares entre sí que pertenecen a la sección transversal.

Por lo tanto, el primer paso en el método de la rigidez es elegir el sistema de coordenadas global de toda la estructura, que denominaremos como X , Y , Z .

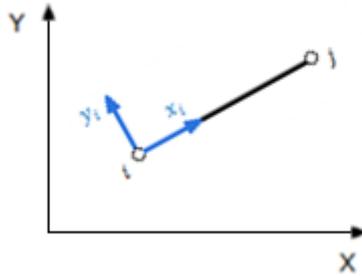


Figura 5. Ejes globales y ejes locales en una barra

Numeración de nodos y grados de libertad

Éste es un paso importante no sólo por fijar cada nodo, sino para definir la conectividad de cada elemento. La conectividad está relacionada con los ejes locales de cada barra. Los nodos serán:

- Nodos que unen dos o más barras
- Nodos de los apoyos.
- Nodos en los que esté actuando alguna carga o momento de forma puntual.

Cada nodo tendrá un número de grados de libertad dependiendo si se trata de una estructura articulada o reticulada, y será necesario numerar dichos grados de libertad para poder identificarlos fácilmente e introducirlos correctamente en nuestro cálculo matricial.

Numeración de las barras

Cada barra tendrá su propia matriz de rigidez que se deberá ensamblar con las demás para formar la matriz de rigidez global, por lo que es conveniente que cada barra quede identificada.

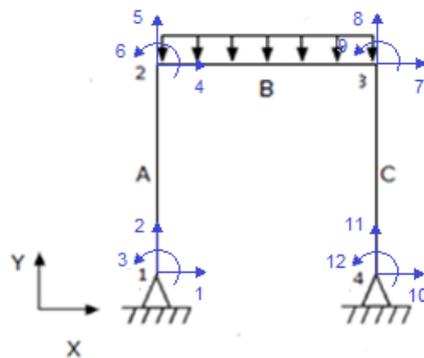


Figura 6. Numeración de nodos, barras y grados de libertad en un pórtico

Elección del sistema de ejes locales en cada barra

Una vez identificados los nodos, se lleva a cabo la definición de los ejes locales en cada elemento. La conectividad nos dará el sentido del eje x local de cada barra, siendo sentido positivo desde el nodo con numeración más baja, nodo inicial, hacia el de mayor numeración, nodo final. En la siguiente figura se muestra cómo se eligen los ejes locales en la estructura de la Figura 2.

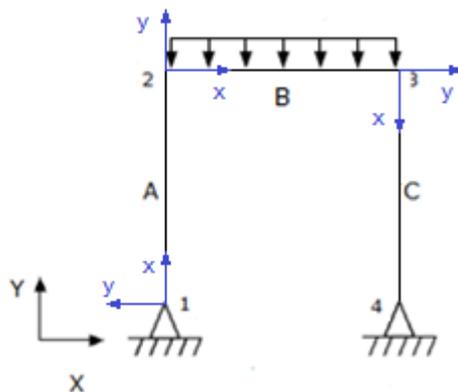


Figura 7. Ejemplo de ejes locales en un pórtico

Construcción de la matriz de rigidez de cada barra en ejes locales

En primer lugar se construye la matriz de rigidez de una barra en sus ejes locales, para más tarde, mediante rotación de ejes, obtener dicha matriz en los ejes globales de la estructura.

- Matriz de una barra articulada

Para el cálculo de la matriz de rigidez se tomará como sistemas de coordenadas los vistos en el apartado anterior.

En una barra articulada los grados de libertad son dos en cada nodo y el único esfuerzo que soporta la barra es el esfuerzo axial, como puede verse en la siguiente figura. Por lo tanto, los movimientos en los nodos serán desplazamientos horizontales según el eje x :

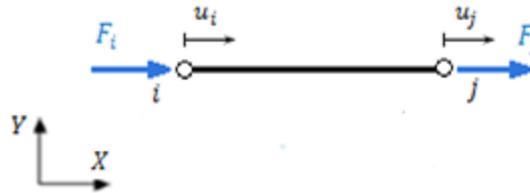


Figura 8. Desplazamientos y fuerzas en barra articulada

El alargamiento de la barra será, por tanto, la diferencia de los desplazamientos en los nodos. Es decir,

$$\Delta L = u_j - u_i$$

Además, si aplicamos las ecuaciones de Navier-Bresse, a nuestro caso, tenemos:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

Por lo tanto, a lo largo de la barra L ,

$$u = \frac{F_x}{EA} L \quad (3.16)$$

Siendo E el módulo de elasticidad o módulo de Young, A el área transversal de la barra.

Para la construcción de la matriz debemos calcular la fuerza necesaria para causar un desplazamiento unitario en el extremo libre, siendo cero los demás movimientos en los nodos. Es decir, resolvemos un problema unitario por cada grado de libertad. En este caso, como se ha comentado anteriormente, sabemos que el elemento sólo soporta esfuerzo axial, por lo que las componentes de las fuerzas en el eje y serán nulas y, aplicando condiciones de equilibrio en el eje x , sólo será necesario suponer $u_i = 1$, con los demás movimientos iguales a cero.

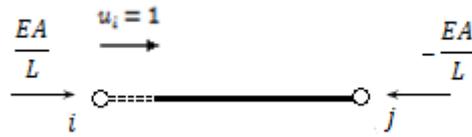


Figura 9. Problema unitario en barra articulada

Por tanto,

$$F_{x,i} = \frac{EA}{L}$$

$$F_{x,i} + F_{x,j} = 0 \quad (3.17)$$

Las expresiones generales quedarán de la siguiente manera:

$$F_{x,i} = \frac{EA}{L}(u_i - u_j) \quad (3.18)$$

$$F_{x,j} = \frac{EA}{L}(u_j - u_i) \quad (3.19)$$

Si ponemos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos:

$$\begin{pmatrix} F_{x,i} \\ F_{x,j} \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez de la barra en ejes locales queda definida como:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

➤ Matriz de rigidez de una barra reticulada

En el caso de una barra reticulada, tendremos tres grados de libertad en cada nodo, es decir, además de aparecer los movimientos de translación en los ejes x e y , habrá un movimiento de rotación en el eje z . Por lo tanto, los esfuerzos que tendrán que soportar las barras son axil, cortante y flexión. Si resolvemos los problemas unitarios, obtendremos los valores de la matriz de rigidez $[k]$ de la barra.

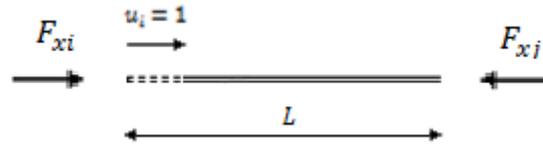


Figura 10. Problema unitario en una barra reticulada

Si

$$u_i = \frac{F_{x,i}}{EA} L = 1$$

$$F_{x,i} + F_{x,j} = 0$$

Entonces,

$$F_{x,i} = \frac{EA}{L}$$

$$F_{x,j} = -\frac{EA}{L}$$

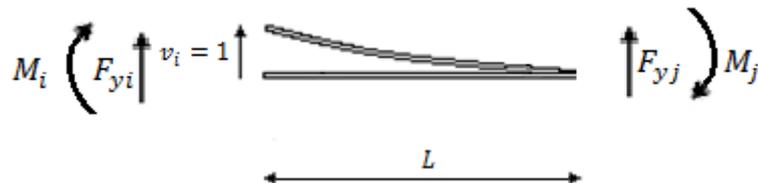


Figura 11. Problema unitario en una barra reticulada

En este caso, que aparecen esfuerzos cortantes y flectores, si se utilizan las ecuaciones de Navier-Bresse para el cálculo de desplazamientos y, suponiendo el movimiento vertical en el nodo j igual a la unidad siendo los demás movimientos nulos, se tendrá:

$$v_j = v_i + \theta_i xL + \int_i^j \frac{M(x)}{EI} (L - x) dx$$

$$\theta_j = \theta_i + \int_i^j \frac{M(x)}{EI} dx$$

Las ecuaciones de Navier-Bresse se desarrollarán en apartados posteriores para la validación del programa en MATLAB.

Por tanto, sabiendo que la distribución de momentos es:

$$M(x) = F_{y,i} \cdot x - M_i \quad (3.22)$$

Se obtiene:

$$F_{y,i} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$M_i = \frac{6EI}{L^2}$$

$$F_{y,j} = -\frac{12EI}{L^3}$$

$$M_j = \frac{6EI}{L^2}$$

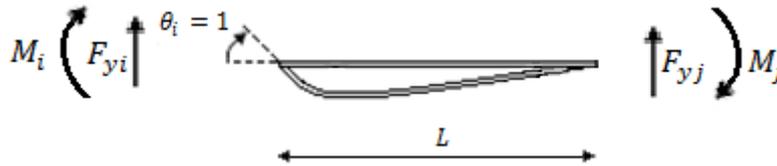


Figura 12. Problema unitario en una barra reticulada

En este caso, suponemos el giro en j igual a la unidad siendo los demás movimientos nulos, y la distribución de momentos es igual a la del caso anterior, por lo que, con las expresiones de Navier-Bresse, se tiene:

$$v_j = v_i + \theta_i xL + \int_i^j \frac{M}{EI} (L - x) dx = 0$$

$$\theta_j = \theta_i + \int_i^j \frac{M}{EI} (L - x) = 1$$

Y, por tanto,

$$F_{y,i} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$M_i = \frac{4EI}{L}$$

$$F_{y,j} = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$M_j = \frac{2EI}{L}$$

Las expresiones quedan:

$$F_{x,i} = \frac{EA}{L}(u_i - u_j)$$

$$F_{x,j} = \frac{EA}{L}(u_j - u_i)$$

$$F_{y,i} = \frac{6EI}{L^2}\theta_i + \frac{6EI}{L^2}\theta_j + \frac{12EI}{L^3}(v_i - v_j)$$

$$F_{y,j} = -\frac{6EI}{L^2}\theta_i - \frac{6EI}{L^2}\theta_j - \frac{12EI}{L^3}(v_i - v_j)$$

$$M_i = \frac{4EI}{L}\theta_i + \frac{2EI}{L}\theta_j + \frac{6EI}{L^2}(v_i - v_j)$$

$$M_j = \frac{2EI}{L}\theta_i + \frac{4EI}{L}\theta_j + \frac{6EI}{L^2}(v_i - v_j)$$

Y, si expresamos estos resultados en forma matricial, obtenemos la matriz de rigidez $[k]$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez en ejes globales mediante transformaciones de coordenadas.

Para transformar la matriz de rigidez de ejes locales a ejes globales tenemos que tener en cuenta el ángulo de diferencia que hay entre ellos.

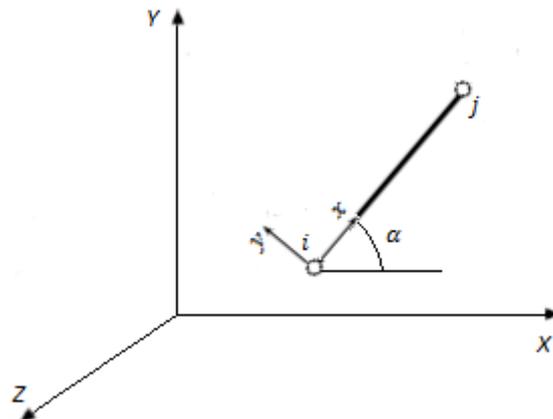


Figura 13. Ángulo que forman los ejes globales y locales

Por lo tanto, la matriz de cambio de coordenadas es aquella que proporcione la transformación:

$$\{X\} = [T]\{x\} \quad (3.23)$$

Se escribe con mayúsculas las coordenadas en ejes globales y en minúsculas, las coordenadas en ejes locales. La matriz de rotación queda:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación de coordenadas es una matriz ortogonal de tal manera que $[T]^T = [T]^{-1}$.

Si transformamos primero el vector fuerza a ejes globales y además, definimos como se ha visto anteriormente, dicho vector con la matriz de rigidez y el vector de desplazamientos., nos queda la siguiente expresión:

$$\{f\} = [T]^T \{F\} = [k] \cdot \{d\} = [k] \cdot [T]^T \cdot \{D\}$$

Por lo tanto,

$$\{F\} = [T] \cdot [k] \cdot [T]^T \cdot \{D\}$$

Como

$$\{F\} = [K] \cdot \{D\}$$

Se deduce que:

$$[K] = [T] \cdot [k] \cdot [T]^T \quad (3.24)$$

Ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos para dar lugar a la matriz de rigidez completa

Las reglas para el ensamblaje son:

Para $K_{i,j}$ con $i = j$:

- Se introduce la matriz $k_{1,1}$ de la barra de la cual el nodo 1 es su nodo inicial (menor numeración).
- Se introduce la matriz $k_{2,2}$ de la barra de la cual el nodo 2 es su nodo final (mayor numeración).

Para $K_{i,j}$ con $i \neq j$:

- Para la parte superior de la diagonal principal: se introduce la matriz $k_{1,2}$ de la barra que une los nodos i, j .
- Para la parte inferior de la diagonal principal: se introduce la matriz $k_{2,1}$ de la barra que une los nodos i, j .
- Para los nodos i, j que no estén unidos por ninguna barra, la matriz a introducir será una matriz nula.

Para comprender esto de una manera más visual se desarrollará un pequeño ejemplo. Considerando una estructura como la que aparece en la siguiente figura compuesta por dos barras con apoyos simples y unidas por el nodo 2.

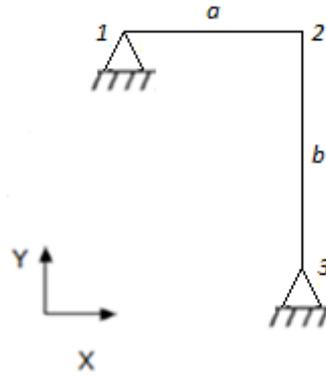


Figura 14. Ejemplo de estructura bi-apoyada

La matriz de rigidez será:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{a_{1,1}} & k_{a_{1,2}} & 0_{3 \times 3} \\ k_{a_{2,1}} & k_{a_{2,2}} + k_{b_{1,1}} & k_{b_{1,2}} \\ 0_{3 \times 3} & k_{b_{2,1}} & k_{b_{2,2}} \end{bmatrix}$$

El nodo 1 es el nodo inicial de la barra a , por lo que en el elemento de la fila 1, columna 1 se introduce la matriz $k_{a_{1,1}}$ de la barra a la que pertenece.

El nodo 2 es el nodo inicial de la barra b y el nodo final de la barra a a la vez, por lo que en la fila 2, columna 2 se suman las matrices $k_{a_{2,2}} + k_{b_{1,1}}$.

El nodo 3 es el nodo final de la barra b , por lo que se ha introducido la matriz de dicha barra $k_{b_{2,2}}$ en el elemento 3,3.

En cuanto a las demás componentes, en el elemento 1,2, como se ha visto que la barra a une los nodos 1 y 2 se introduce la $k_{a_{1,2}}$, mientras que en el 1,3, dado que no hay ninguna barra que las conecte, la matriz es la matriz nula de rango 3x3.

De la misma manera se construyen las demás componentes de la matriz, como se ha explicado anteriormente.

Construcción del vector de cargas

El cálculo matricial solo se puede utilizar cuando las cargas están aplicadas en los nodos, ya que el vector de fuerzas que se introduce en la ecuación se refiere a las fuerzas exteriores en los nodos, por lo que, en casos como carga distribuida o cargas aplicadas a lo largo de una barra, que es el caso más probable en la realidad, es necesario llevar a cabo un proceso en el que dichas cargas se "desplacen" a los nodos con cargas equivalentes y añadiendo condiciones de contorno. La manera de proceder se verá en los ejemplos que se verán al final del capítulo.

La forma de construir el vector de cargas es introduciendo las cargas externas de cada nodo según el eje x, y, z , incluyendo las reacciones que se tomarán como fuerzas desconocidas y que, por lo tanto, serán incógnitas de nuestro sistema, Como en la ecuación matricial se utiliza la matriz de rigidez en ejes globales, tanto las cargas como los desplazamientos deben llevar el mismo criterio que ésta.

Se explica con un breve ejemplo el procedimiento para la construcción del vector de cargas.

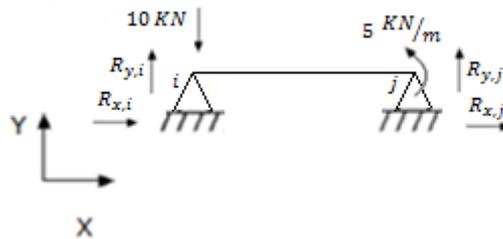


Figura 15. Ejemplo de viga bi-apoyada con cargas aplicadas

Se introduce primero las fuerzas del nodo i y después las del nodo j con los signos adecuados y teniendo en cuenta las reacciones de la siguiente manera:

$$P = \begin{Bmatrix} R_{x,i} \\ R_{y,i} - 10\text{KN} \\ 0 \\ R_{x,j} \\ R_{y,j} \\ 5\text{KN/m} \end{Bmatrix}$$

Introducción de las condiciones de contorno en la matriz de rigidez y resolución del sistema de ecuaciones.

En este paso simplemente hay que tener en cuenta los apoyos-empotramientos que tiene la estructura. Es decir, según el tipo de apoyo tendrá restringidos unos movimientos u otros y esto se refleja a la hora de anular los desplazamientos y obtener un sistema de ecuaciones reducido que nos permita calcular la estructura. En el ejemplo anterior los grados de libertad 1, 2, 4 y 5 tienen restringidos los movimientos, por lo que dichas filas y columnas no aportarán información al sistema y se quitarán de las ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} R_{x,i} \\ R_{y,i} = 10KN \\ 0 \\ R_{x,j} \\ R_{y,j} \\ 5 KN/m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & K_{1,5} & K_{1,6} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & K_{2,4} & K_{2,5} & K_{2,6} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,5} & K_{3,6} \\ K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} & K_{4,4} & K_{4,5} & K_{4,6} \\ K_{5,1} & K_{5,2} & K_{5,3} & K_{5,4} & K_{5,5} & K_{5,6} \\ K_{6,1} & K_{6,2} & K_{6,3} & K_{6,4} & K_{6,5} & K_{6,6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{i,3} \\ 0 \\ 0 \\ \theta_{6,j} \end{pmatrix}$$

De esta ecuación matricial nos quedamos con las siguientes expresiones:

$$0 = K_{3,3} \cdot \theta_{i,3} + K_{3,6} \cdot \theta_{6,j}$$

$$5 = K_{6,3} \cdot \theta_{i,3} + K_{6,6} \cdot \theta_{6,j}$$

Donde las incógnitas son los desplazamientos $\theta_{i,3}$ y $\theta_{6,j}$.

Cálculo de las reacciones en los apoyos

Una vez obtenidos los desplazamientos podemos obtener las demás incógnitas: las reacciones. En el ejemplo anterior:

$$R_{x,i} = K_{1,3} \cdot \theta_{i,3} + K_{1,6} \cdot \theta_{i,6}$$

$$R_{y,i-10} = K_{2,3} \cdot \theta_{i,3} + K_{2,6} \cdot \theta_{i,6}$$

$$R_{x,j} = K_{4,3} \cdot \theta_{i,3} + K_{4,6} \cdot \theta_{i,6}$$

$$R_{y,j} = K_{5,3} \cdot \theta_{i,3} + K_{5,6} \cdot \theta_{i,6}$$

3.4. Ejemplos con MATLAB

El programa MATLAB (Matrix Laboratory) es la herramienta que se utilizará para el cálculo de los desplazamientos, reacciones y esfuerzos a los que serán sometidas las estructuras, con la que crearemos las variables que nos permitirán el análisis de las mismas.

MATLAB es un programa de cálculo matemático que dispone de su propio lenguaje, por lo que además de ser un entorno de trabajo se pueden hacer cálculos mediante comandos o instrucciones. Normalmente, los objetos con los que trabaja MATLAB son vectores y matrices aunque dispone de un gran número de posibilidades como cadenas de caracteres y números reales y complejos. Otra característica importante son las funciones pre-programadas que pueden ser utilizadas para operar y para realizar gráficos. Además, no es necesario declarar las variables, por lo que facilita el trabajo y compacta el programa a desarrollar, reduciendo el espacio ocupado.

Por todo ello, MATLAB será de gran ayuda para el cálculo de estructuras y nos facilitará el trabajo a realizar.

Ejemplo 1. Viga en voladizo con carga puntual en un nodo

Se trata de un ejemplo sencillo de estructura reticulada en voladizo en el que los ejes de coordenadas locales coinciden con los ejes de coordenadas globales, por lo que no es necesaria la rotación de los ejes. Aun así, se tomará como ángulo de la barra nulo y se calculará de igual modo la matriz de rotación $[T]$ para que se siga el procedimiento que se debe llevar a cabo.

Datos del problema:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$W = 0.1 \text{ m}$$

$$L_a = 2 \text{ m}$$

$$ANGa = 0^\circ = 0 \text{ rad}$$

$$q = -10 \text{ KN}$$

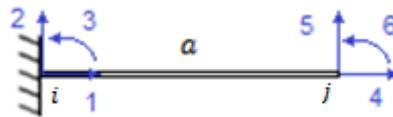


Figura 16. Ejemplo 1. Grados de libertad

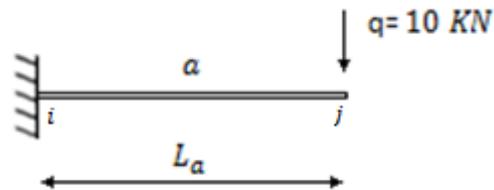


Figura 17. Ejemplo 1. Carga aplicada

El programa que se introduce en MATLAB es el siguiente:

```

>> E=210e9, W=0.1, A=W*W, I=(1/12)*W^4
EA=E*A, EI=E*I
La=2
ANGa=0
ka=[EA/La 0 0 -(EA/La) 0 0;0 (12*EI)/La^3 (6*EI)/(La^2) 0 (-12*EI)/(La^3) (6*EI)/(La^2);
0 (6*EI)/(La^2) (4*EI)/La 0 (-6*EI)/(La^2) (2*EI)/La; (-EA/La 0 0 (EA/La) 0 0;0
(-12*EA)/La^3 (-6*EI)/(La^2) 0 (12*EI)/(La^3) (-6*EI)/(La^2); 0 (6*EI)/(La^2) (2*EI)/La 0
(-6*EI)/(La^2) (4*EI)/La]
Ta=[cos(ANGa) -sin(ANGa) 0 0 0 0; sin(ANGa) cos(ANGa) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 cos(ANGa)
-sin(ANGa) 0;0 0 0 sin(ANGa) cos(ANGa) 0;0 0 0 0 0 1]
Ka=[Ta*ka*Ta']
K=zeros(6,6)
gdla=[1 2 3 4 5 6]
K_a=zeros(6,6), K_a(gdla,gdla)=Ka
K=K+K_a
gdlf=[1 2 3]', gdll=[4 5 6]'
Kf=K(gdlf,gdlf), Kl=K(gdll,gdll), Kfl=K(gdlf,gdll), Klf=K(gdll,gdlf)
P=[0 0 0 0 -10000 0]'
Pl=P(gdll)
Dl=Kl\Pl
D=zeros(6,1), D(gdll)=Dl
Pf=Kfl*Dl
Reac=Pf
Da=D(gdla)
Pa=Ka*Da

```

Como puede verse, el primer paso es introducir los datos del problema, y definir las ecuaciones de A e I para que el programa nos dé el resultado según la geometría de la barra que tengamos.

Después se introducirá la matriz de rigidez de una barra reticulada en sus ejes locales, tal y como ha quedado definida en el apartado anterior. El resultado que se obtiene en este ejemplo de k_a es

```

ka =

1.0e+009 *

    1.0500         0         0    -1.0500         0         0
         0    0.0026    0.0026         0    -0.0026    0.0026
         0    0.0026    0.0035         0    -0.0026    0.0018
   -1.0500         0         0     1.0500         0         0
         0   -3.1500   -0.0026         0    0.0026   -0.0026
         0    0.0026    0.0018         0   -0.0026    0.0035

```

Seguidamente, se define la matriz de rotación $[T_a]$ y la matriz de rigidez en ejes globales $[K_a]$. En este caso, puede comprobarse que la matriz $[T_a]$ es la matriz identidad y que las dos matrices en ejes globales y locales coinciden. Este resultado es correcto ya que el ángulo que forman los ejes es 0° .

$T_a =$

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

$K_a =$

1.0e+009 *

1.0500	0	0	-1.0500	0	0
0	0.0026	0.0026	0	-0.0026	0.0026
0	0.0026	0.0035	0	-0.0026	0.0018
-1.0500	0	0	1.0500	0	0
0	-3.1500	-0.0026	0	0.0026	-0.0026
0	0.0026	0.0018	0	-0.0026	0.0035

El siguiente paso es definir la matriz global de la estructura completa, es decir, el ensamblaje. En este caso la matriz en ejes globales de la barra $[K_a]$ también debe coincidir con la matriz de la estructura $[K]$ por tratarse de una sola barra. Aun así, el procedimiento a seguir es construir una matriz de ceros cuyo tamaño será el número de grados de libertad del problema (en este caso, cada nodo tiene tres grados de libertad, por lo que la matriz será una matriz 6x6) e ir introduciendo las matrices de rigidez de cada barra según los grados de libertad de ésta.

Los grados de libertad de la barra a son los 6 grados de libertad de la estructura, refiriéndose 1, 2 y 3 a los ejes x, y, z del nodo i , y el 4,5 y 6 a los ejes x, y y z del nodo j , según la figura 13.

Por lo tanto, la matriz de rigidez de la estructura será:

$K =$

1.0e+009 *

1.0500	0	0	-1.0500	0	0
0	0.0026	0.0026	0	-0.0026	0.0026
0	0.0026	0.0035	0	-0.0026	0.0018
-1.0500	0	0	1.0500	0	0
0	-3.1500	-0.0026	0	0.0026	-0.0026
0	0.0026	0.0018	0	-0.0026	0.0035

A partir de ahora, se deberá diferenciar según las condiciones de contorno del problema, es decir, los grados de libertad del nodo empotrado i serán los llamados grados de libertad fijos (gdlf) y los del nodo j , grados de libertad libres (gdll). K_f , K_l , K_{fl} y K_{lf} son la matriz de rigidez particularizada para los grados de libertad fijos, libres, fijo-libre o libre-fijo.

gdlf =

1
2
3

gdll =

4
5
6

El siguiente paso es introducir la carga. En este caso, se encuentra en el eje y del nodo B, por lo que será la componente 5 del vector P.

P =

0
0
0
0
-10000
0

Para obtener los desplazamientos, debemos quedarnos con la parte de la ecuación matricial "libre", es decir, aquella que permite el movimiento. El vector desplazamiento será:

D =

0
0
0
0
-0.0152
-0.0114

Las reacciones del problema se calculan una vez se tengan los desplazamientos del problema mediante la matriz K_{fl} . El resultado es:

$$P_f = 1.0e+004 * \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0000 \\ 2.0000 \end{bmatrix}$$

Para finalizar, los esfuerzos se obtendrán de multiplicar la matriz de rigidez de la barra por los desplazamientos de la misma.

$$D_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0152 \\ -0.0114 \end{bmatrix}$$

$$P_a = 1.0e+004 * \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0000 \\ 2.0000 \\ 0 \\ -1.0000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: pórtico con carga puntual en un nodo

Datos del problema:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$W = 0.1 \text{ m}$$

$$L_a = 3 \text{ m}$$

$$L_b = 2 \text{ m}$$

$$L_c = 3 \text{ m}$$

$$\text{ANGa} = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$$

$$\text{ANGb} = 0^\circ = 0 \text{ rad}$$

$$\text{ANGc} = 270^\circ = 3\pi/2$$

$$q = 40 \text{ KN}$$

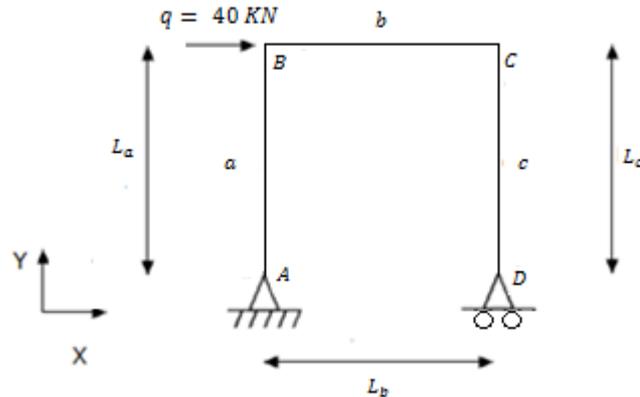


Figura 18. Ejemplo 2. Pórtico con carga puntual en un nodo

En este caso, el programa en MATLAB queda de la siguiente manera:

```
>> E=210e9, W=0.1, A=W*W, I=(1/12)*W^4
EA=E*A, EI=E*I
La=3, Lb=2, Lc=3
ANGa=pi/2, ANGb=0, ANGc=(-pi)/2
ka=[EA/La 0 0 -(EA/La) 0 0; 0 (12*EI)/La^3 (6*EI)/(La^2) 0 (-12*EI)/(La^3) (6*EI)/(La^2);
0 (6*EI)/(La^2) (4*EI)/La 0 (-6*EI)/(La^2) (2*EI)/La; (-EA)/La 0 0 (EA/La) 0 0; 0
(-12*EA)/La^3 (-6*EI)/(La^2) 0 (12*EI)/(La^3) (-6*EI)/(La^2); 0 (6*EI)/(La^2) (2*EI)/La 0
(-6*EI)/(La^2) (4*EI)/La]
kb=[EA/Lb 0 0 -(EA/Lb) 0 0; 0 (12*EI)/Lb^3 (6*EI)/(Lb^2) 0 (-12*EI)/(Lb^3) (6*EI)/(Lb^2);
0 (6*EI)/(Lb^2) (4*EI)/Lb 0 (-6*EI)/(Lb^2) (2*EI)/Lb; (-EA)/Lb 0 0 (EA/Lb) 0 0; 0
(-12*EI)/Lb^3 (-6*EI)/(Lb^2) 0 (12*EI)/(Lb^3) (-6*EI)/(Lb^2); 0 (6*EI)/(Lb^2) (2*EI)/Lb 0
(-6*EI)/(Lb^2) (4*EI)/Lb]
kc=[EA/Lc 0 0 -(EA/Lc) 0 0; 0 (12*EI)/Lc^3 (6*EI)/(Lc^2) 0 (-12*EI)/(Lc^3) (6*EI)/(Lc^2);
0 (6*EI)/(Lc^2) (4*EI)/Lc 0 (-6*EI)/(Lc^2) (2*EI)/Lc; (-EA)/Lc 0 0 (EA/Lc) 0 0; 0
(-12*EI)/Lc^3 (-6*EI)/(Lc^2) 0 (12*EI)/(Lc^3) (-6*EI)/(Lc^2); 0 (6*EI)/(Lc^2) (2*EI)/Lc 0
(-6*EI)/(Lc^2) (4*EI)/Lc]
Ta=[cos(ANGa) -sin(ANGa) 0 0 0 0; sin(ANGa) cos(ANGa) 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0; 0 0 0 0 cos(ANGa)
-sin(ANGa) 0; 0 0 0 sin(ANGa) cos(ANGa) 0; 0 0 0 0 0 1]
Tb=[cos(ANGb) -sin(ANGb) 0 0 0 0; sin(ANGb) cos(ANGb) 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0; 0 0 0 0 cos(ANGb)
-sin(ANGb) 0; 0 0 0 sin(ANGb) cos(ANGb) 0; 0 0 0 0 0 1]
Tc=[cos(ANGc) -sin(ANGc) 0 0 0 0; sin(ANGc) cos(ANGc) 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0; 0 0 0 0 cos(ANGc)
-sin(ANGc) 0; 0 0 0 sin(ANGc) cos(ANGc) 0; 0 0 0 0 0 1]
Ka=[Ta*ka*Ta']
Kb=[Tb*kb*Tb']
Kc=[Tc*kc*Tc']
```

```

K=zeros(12,12)
gdla=[1 2 3 4 5 6]
K_a=zeros(12,12), K_a(gdla,gdla)=Ka
K=K+K_a
gdlb=[4 5 6 7 8 9]
K_b=zeros(12,12), K_b(gdlb,gdlb)=Kb
K=K+K_b
gdlc=[7 8 9 10 11 12], K_c=zeros(12,12), K_c(gdlc,gdlc)=Kc
K=K+K_c
gdlf=[1 2 11]', gdll=[3 4 5 6 7 8 9 10 12]'
Kf=K(gdlf,gdlf), Kl=K(gdll,gdll), Kfl=K(gdlf,gdll), Klf=K(gdll,gdlf)
P=[0 0 0 40000 0 0 0 0 0 0 0 0]'
Pl=P(gdll)
Dl=Kl\Pl
D=zeros(12,1), D(gdll)=Dl
Pf=Kfl*Dl
Reac=Pf
Da=D(gdla), Db=D(gdlb), Dc=D(gdlc)
Pa=Ka*Da, Pb=Kb*Db, Pc=Kc*Dc

```

Se define la matriz de rigidez en ejes locales de las barras que componen el pórtico.

ka =

```

1.0e+008 *

    7.0000         0         0   -7.0000         0         0
         0    0.0078    0.0117         0   -0.0078    0.0117
         0    0.0117    0.0233         0   -0.0117    0.0117
   -7.0000         0         0    7.0000         0         0
         0   -9.3333   -0.0117         0    0.0078   -0.0117
         0    0.0117    0.0117         0   -0.0117    0.0233

```

kb =

```

1.0e+009 *

    1.0500         0         0   -1.0500         0         0
         0    0.0026    0.0026         0   -0.0026    0.0026
         0    0.0026    0.0035         0   -0.0026    0.0018
   -1.0500         0         0    1.0500         0         0
         0   -0.0026   -0.0026         0    0.0026   -0.0026
         0    0.0026    0.0018         0   -0.0026    0.0035

```

$k_c =$

1.0e+008 *

7.0000	0	0	-7.0000	0	0
0	0.0078	0.0117	0	-0.0078	0.0117
0	0.0117	0.0233	0	-0.0117	0.0117
-7.0000	0	0	7.0000	0	0
0	-0.0078	-0.0117	0	0.0078	-0.0117
0	0.0117	0.0117	0	-0.0117	0.0233

Una vez obtenidas las matrices en ejes locales, se introducen las matrices de cambio de ejes con la expresión para ellas ya conocida, particularizando el ángulo para cada barra, para después poder calcular la matriz de rigidez en ejes globales.

$K_a =$

1.0e+008 *

0.0078	0.0000	-0.0117	-0.0078	-0.0000	-0.0117
0.0000	7.0000	0.0000	-0.0000	-7.0000	0.0000
-0.0117	0.0000	0.0233	0.0117	-0.0000	0.0117
-9.3333	0.0000	0.0117	0.0078	0.0000	0.0117
0.0000	-7.0000	-0.0000	0.0000	7.0000	-0.0000
-0.0117	0.0000	0.0117	0.0117	-0.0000	0.0233

$K_b =$

1.0e+009 *

1.0500	0	0	-1.0500	0	0
0	0.0026	0.0026	0	-0.0026	0.0026
0	0.0026	0.0035	0	-0.0026	0.0018
-1.0500	0	0	1.0500	0	0
0	-0.0026	-0.0026	0	0.0026	-0.0026
0	0.0026	0.0018	0	-0.0026	0.0035

$K_c =$

$1.0e+008 *$

0.0078	-0.0000	0.0117	-0.0078	0.0000	0.0117
-0.0000	7.0000	0.0000	0.0000	-7.0000	0.0000
0.0117	0.0000	0.0233	-0.0117	-0.0000	0.0117
-0.0078	0.0000	-0.0117	0.0078	-0.0000	-0.0117
0.0000	-7.0000	-0.0000	-0.0000	7.0000	-0.0000
0.0117	0.0000	0.0117	-0.0117	-0.0000	0.0233

Para el ensamblaje de $[K]$, introducimos las matrices de rigidez de cada barra en ejes globales según los grados de libertad que corresponda a cada una, esto es:

$gd1a =$

1 2 3 4 5 6

$gd1b =$

4 5 6 7 8 9

$gd1c =$

7 8 9 10 11 12

La matriz $[K]$ global queda:

1.0e+009 *

Columns 1 through 8

0.0008	0.0000	-0.0012	-0.0008	-0.0000	-0.0012	0	0
0.0000	0.7000	0.0000	-0.0000	-0.7000	0.0000	0	0
-0.0012	0.0000	0.0023	0.0012	-0.0000	0.0012	0	0
-0.9333	0.0000	0.0012	1.0508	0.0000	0.0012	-1.0500	0
0.0000	-0.7000	-0.0000	0.0000	0.7026	0.0026	0	-0.0026
-0.0012	0.0000	0.0012	0.0012	0.0026	0.0058	0	-0.0026
0	0	0	-1.0500	0	0	1.0508	-0.0000
0	0	0	0	-0.0026	-0.0026	-0.0000	0.7026
0	0	0	0	0.0026	0.0018	0.0012	-0.0026
0	0	0	0	0	0	-0.0008	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000	-0.7000
0	0	0	0	0	0	0.0012	0.0000

Columns 9 through 12

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.0026	0	0	0
0.0018	0	0	0
0.0012	-0.0008	0.0000	0.0012
-0.0026	0.0000	-0.7000	0.0000
0.0058	-0.0012	-0.0000	0.0012
-0.0012	0.0008	-0.0000	-0.0012
-0.0000	-0.0000	0.7000	-0.0000
0.0012	-0.0012	-0.0000	0.0023

Al tener un apoyo simple y un carrito, los grados de libertad fijos estarán en los ejes x e y del nodo A y el eje y del nodo D .

$gdlf=[1\ 2\ 11]'$, $gdll=[3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 12]'$

gdlf =

1
2
11

gdll =

3
4
5
6
7
8
9
10
12

Si la carga que soporta la estructura está aplicada en el nodo B y se trata de una fuerza puntual en sentido horizontal de valor 20 KN , el vector fuerza tendrá la siguiente forma:

P =

0
0
0
40000
0
0
0
0
0
0
0
0
0

Los resultados del vector desplazamiento son:

D =

```

    0
    0
-0.1487
 0.3431
 0.0001
-0.0458
 0.3431
-0.0001
 0.0228
 0.4114
    0
 0.0228

```

Las tres primeras componentes del vector desplazamiento se refieren a los movimientos del nodo A, en los ejes x e y y el giro. los tres siguientes son los movimientos en el nodo B, después vienen los del nodo C par finalizar con los del nodo D, tal y como se observa en la figura.

Las reacciones serán:

Pf =

```

 1.0e+004 *
-4.0000
-6.0000
 6.0000

```

Y, por último, el resultado que ofrece MATLAB para los esfuerzos es:

Pa =

```

 1.0e+005 *
-0.4000
-0.6000
 0.0000
 0.4000
 0.6000
 1.2000

```

Pb =

1.0e+005 *

0
-0.6000
-1.2000
0
0.6000
0.0000

Pc =

1.0e+004 *

-0.0000
-6.0000
-0.0000
0.0000
6.0000
-0.0000

Capítulo 4

Construcción de la matriz de rigidez en una barra fisurada

4.1. Comportamiento de una viga fisurada

El procedimiento para construir la matriz de rigidez en una barra que presenta una fisura se llevará a cabo de la misma manera que se ha construido cuando la barra no estaba fisurada. Es decir, se resuelven los problemas suponiendo un desplazamiento unitario cuando los demás son nulos.

La diferencia con el caso anterior es que se tendrá que tener en cuenta la aportación de la fisura, es decir, a los movimientos que ya aparecen en la estructura como consecuencia de la propia aplicación de las cargas, se suma un incremento de desplazamiento debido al efecto de los propios esfuerzos en la fisura.

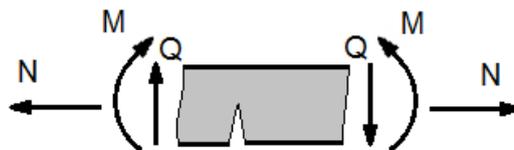


Figura 19. Esfuerzos en una barra fisurada

La relación entre este incremento de desplazamiento y los esfuerzos viene definida por una constante \$C\$ que dependerá de la geometría y material de la barra y la profundidad de la fisura, a través de una matriz de flexibilidad.

$$\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_n & C_{nq} & C_{nm} \\ C_{qn} & C_q & C_{qm} \\ C_{mn} & C_{mq} & C_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix}$$

En este proyecto se ha simplificado el problema de tal manera que considera C_m distinto de cero mientras los demás elementos de la matriz de flexibilidad son nulos, es decir, se desprecian con respecto a C_m , ya que su efecto es menor. Por lo tanto, se considera el efecto que tiene el esfuerzo flector sobre la estructura, aumentando el giro en ese punto. El incremento de giro que tendremos en la estructura será:

$$\Delta\theta = C_m \cdot M(L_f) \quad (4.1)$$

4.2. Cálculo de C_m

Se considera una viga de sección constante, de lado W y longitud L , tal y como se muestra en la figura

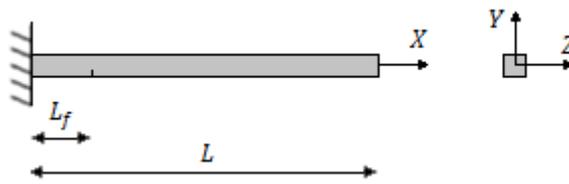


Figura 20. Ejemplo de viga fisurada

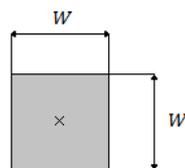


Figura 21. Sección de la viga

La distancia de la fisura al origen será L_f y su profundidad, a .



Figura 22. Profundidad de la fisura

Como se ha citado anteriormente, la aportación de la fisura será un diferencial de ángulo que es proporcional al momento en la sección fisurada, de tal manera que

$$\Delta\theta = C_m \cdot M(L_f)$$

Siendo k la constante de torsión del muelle, C_m la inversa de k y $M(L_f)$ el momento flector que se transmite en la sección en la que la figura presenta la fisura, considerando L_f la distancia al origen de la sección fisurada.

$$C_m = \frac{W}{EI} \cdot m \quad (4.2)$$

Donde E es el módulo de Young e I , el momento de inercia. Para vigas con sección cuadrada se tiene que

$$I = \frac{1}{12} W^4 \quad (4.3)$$

Se denomina m a una constante que dependerá de la geometría de la sección y de la profundidad de la barra, a la que se ha llamado a . Para una sección cuadrada de lado W , m toma la expresión:

$$m\left(\frac{a}{W}\right) = 2 \left(\frac{a}{W}\right)^2 \left[5.93 - 19.69 \left(\frac{a}{W}\right) + 37.17 \left(\frac{a}{W}\right)^2 - 35.84 \left(\frac{a}{W}\right)^3 + 13.12 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right] \quad (4.4)$$

4.3. Matriz de rigidez de una barra fisurada

Para construir la matriz de rigidez en caso de vigas fisuradas se consideran los mismos problemas unitarios que con vigas que no presentan fisura, por lo que la ecuación matricial tiene la forma:

$$\begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ M_i \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Donde $F_{x,i}, F_{y,i}$ son las fuerzas en el nodo i según los ejes x e y , M_i es el momento en el nodo i , $F_{x,j}, F_{y,j}$, son las fuerzas en el nodo j y M_j el momento en el nodo j .

En cuanto al vector desplazamiento, u_i y v_i son los desplazamientos horizontal y vertical en el nodo i , θ_i es el giro en i . De la misma manera, u_j y v_j son los desplazamientos horizontal y vertical en el nodo j y θ_j es el giro en j .

Por lo tanto, imponiendo que algún desplazamiento sea igual a la unidad mientras que los demás son nulos, se podrán calcular los diferentes elementos de la matriz de rigidez. Es decir, tendremos seis casos diferentes en los que se calcularán las seis columnas de la matriz.

Dado que no se tendrá en cuenta el efecto del esfuerzo axial, los elementos de la matriz de rigidez de las columnas uno y cuatro serán iguales que en el caso de vigas no fisuradas, es decir:

- Si $u_i = 1$

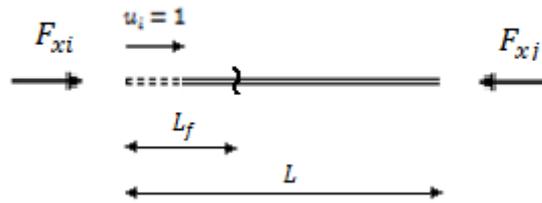


Figura 23. Problema unitario en barra fisurada

$$u_i = \frac{F_{x,i}}{EA} L = 1$$

$$F_{x,i} + F_{x,j} = 0$$

Entonces,

$$F_{x,i} = \frac{EA}{L} ; F_{x,j} = -\frac{EA}{L}$$

- Si $u_j = 1$

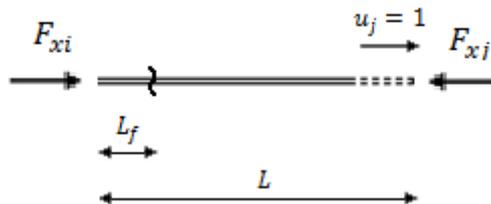


Figura 24. Problema unitario en barra fisurada

$$u_j = \frac{F_{x,j}}{EA} L = 1$$

$$F_{x,i} + F_{y,j} = 0$$

Entonces,

$$F_{x,i} = -\frac{EA}{L}; \quad F_{x,j} = \frac{EA}{L}$$

Por lo tanto,

$$k_{11} = k_{44} = EA/L$$

$$k_{14} = k_{41} = -EA/L$$

$$k_{21} = k_{31} = k_{51} = k_{61} = 0$$

$$k_{24} = k_{34} = k_{54} = k_{64} = 0$$

Para el cálculo de los demás elementos de la matriz de rigidez se tendrán que tener en cuenta las ecuaciones de Navier-Bresse con el término relativo a la fisura y la propia definición de $\Delta\theta$

$$v_j = v_i + \theta_i xL + \int_i^j \frac{M(x)}{EI} (L-x) dx + \Delta\theta(L-L_f)$$

$$\theta_j = \theta_i + \int_i^j \frac{M(x)}{EI} (L-x) + \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = C_m \cdot M(L_f) = \frac{W}{EI} m \cdot M(L_f)$$

La distribución de momentos en la barra es

$$M(x) = F_{yi} \cdot x - M_i$$

Por tanto,

$$\Delta\theta = \frac{W}{EI} m \cdot (F_{yi} \cdot L_f - M_i)$$

Se denomina $\gamma = W \cdot m$ para facilitar los cálculos

- Si $v_i = 1$ siendo los demás movimientos nulos, tal y como se muestra en la siguiente figura

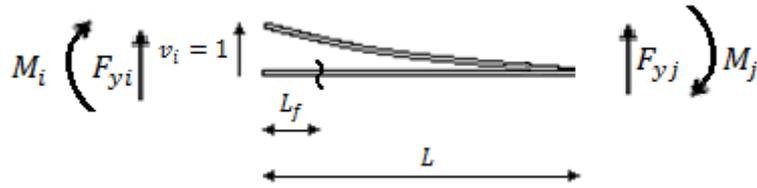


Figura 25. Problema unitario en barra fisurada

Las ecuaciones que se obtienen son

$$0 = 1 + \int_0^L \frac{F_{y,i} \cdot x - M_i}{EI} (L - x) dx + \frac{\gamma}{EI} (F_{y,i} \cdot L_f - M_i)(L - L_f)$$

$$0 = \int_0^L \frac{F_{y,i} \cdot x - M_i}{EI} dx + \frac{\gamma}{EI} (F_{y,i} \cdot L_f - M_i)$$

De la segunda ecuación se obtiene la relación entre el momento y la fuerza.

$$\frac{F_{y,i} L^2}{2} - M_i L + \gamma (F_{y,i} \cdot L_f - M_i) = 0$$

$$M_i = \frac{F_{y,i} L}{2} \cdot \frac{1 + \frac{2\gamma L_f}{L^2}}{1 + \gamma/L}$$

A partir de ahora se tomará

$$k = \frac{1 + \frac{2\gamma L_f}{L^2}}{1 + \gamma/L} \quad (4.5)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación relativa a los desplazamientos se obtiene:

$$F_{y,i} = \frac{-12EI}{(2-3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)}$$

Y, por tanto,

$$M_i = \frac{-12EI}{(2-3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)} \cdot \frac{L}{2}k$$

Ya que estamos suponiendo el caso en el que el desplazamiento vertical es la unidad, todos estos resultados nos dan los elementos de la columna 2 de la matriz de rigidez. Es decir,

$$k_{22} = \frac{-12EI}{(2-3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)}$$

$$k_{32} = K_{22} \cdot \frac{L}{2}k$$

Dado que las fuerzas deben estar en equilibrio y la suma de momentos en los nodos debe ser nula:

$$F_{y,i} + F_{y,j} = 0$$

$$M_j = F_{y,i}L - M_i$$

$$k_{52} = -k_{22} = \frac{12EI}{(2-3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)}$$

$$k_{62} = k_{22}L\left(1 - \frac{k}{2}\right)$$

.Por último, al no tener en cuenta el esfuerzo axial, $F_{xi} = F_{xj} = 0$, y , por tanto:

$$k_{12} = k_{42} = 0$$

- Si $v_j = 1$ siendo los demás desplazamientos nulos

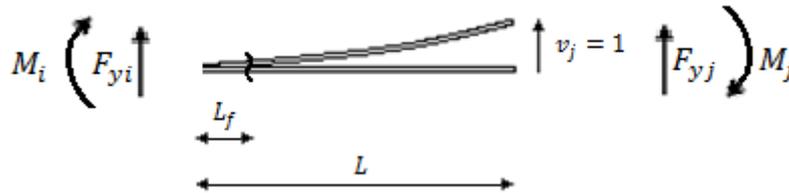


Figura 26. Problema unitario en barra fisurada

$$1 = 0 + \int_0^L \frac{F_{y,i} \cdot x - M_i}{EI} (L - x) dx + \frac{\gamma}{EI} (F_{y,i} \cdot L_f - M_i)(L - L_f)$$

$$0 = \int_0^L \frac{F_{y,i} \cdot x - M_i}{EI} dx + \frac{\gamma}{EI} (F_{y,i} \cdot L_f - M_i)$$

De la misma forma que en el caso anterior, dado que ambos giros son nulos, la relación entre el momento y la fuerza en el nodo i será

$$M_i = \frac{F_{y,i} L}{2} k; \text{ siendo } k = \frac{1 + \frac{2\gamma L_f}{L^2}}{1 + \gamma/L}$$

Por lo que la fuerza vertical en el nodo i , tendrá la siguiente expresión:

$$F_{y,i} = \frac{12EI}{(2 - 3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)}$$

Es decir,

$$k_{25} = \frac{12EI}{(2 - 3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)}$$

Por equilibrio de fuerzas

$$k_{55} = -k_{25}$$

En cuanto a los momentos se tiene que

$$M_i = \frac{F_{y,i}L}{2}k ; M_j = F_{y,i}L - M_i$$

Y, por lo tanto,

$$k_{35} = k_{25} \frac{L}{2}k$$

$$k_{65} = k_{25}L \left(1 - \frac{k}{2}\right)$$

Los elementos k_{15} y k_{45} son nulos por no tener en cuenta el axil.

- Si $\theta_i = 1$ y los demás desplazamientos nulos.

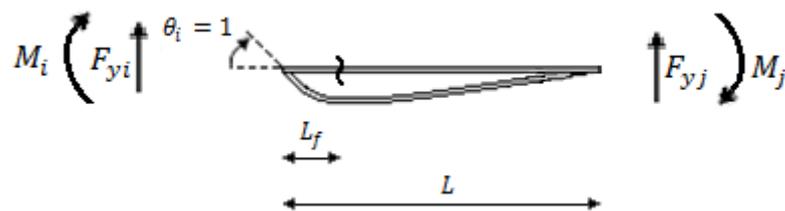


Figura 27. Problema unitario en barra fisurada

Las ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$0 = 1 \cdot L + \int_0^L \frac{F_{y,i} \cdot x - M_i}{EI} (L - x) dx + \frac{\gamma}{EI} (F_{y,i} \cdot L_f - M_i)(L - L_f)$$

$$0 = 1 + \int_0^L \frac{F_{y,i} \cdot x - M_i}{EI} dx + \frac{\gamma}{EI} (F_{y,i} \cdot L_f - M_i)$$

En este caso, en la relación entre el momento y la fuerza aparecerá un término proporcional a EI.

$$M_i = \frac{F_{y,i}L}{2}k + \frac{EI}{\gamma + L}$$

Al introducir la expresión de M_i en la ecuación de desplazamientos, se obtiene:

$$F_{y,i} = \frac{12EI \left(\frac{-L^2 + 2\gamma(2L - L_f)}{2(\gamma + L)} \right)}{(2 - 3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)}$$

El término que multiplica EI se denominará d .

Por lo tanto,

$$k_{23} = \frac{12EId}{(2 - 3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)}$$

Por equilibrio de fuerzas,

$$k_{53} = -k_{23}$$

Introduciendo la fuerza en la expresión del momento,

$$k_{33} = k_{23} \frac{L}{2}k + \frac{EI}{\gamma + L}$$

$$k_{63} = k_{23}L - k_{33}$$

Como en casos anteriores, los elementos referidos al axil:

$$k_{13} = k_{43} = 0$$

- Si $\theta_j = 1$, con los demás desplazamientos igual a cero.

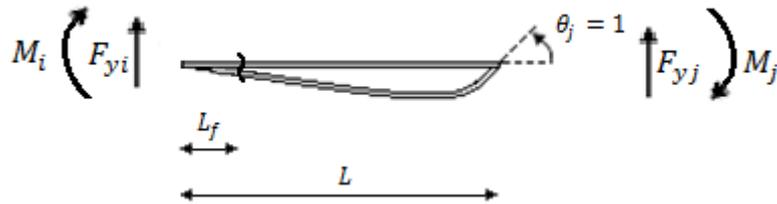


Figura 28. Problema unitario en barra fisurada

$$0 = \int_0^L \frac{F_{y,i} \cdot x - M_i}{EI} (L - x) dx + \frac{\gamma}{EI} (F_{y,i} \cdot L_f - M_i)(L - L_f)$$

$$1 = \int_0^L \frac{F_{y,i} \cdot x - M_i}{EI} dx + \frac{\gamma}{EI} (F_{y,i} \cdot L_f - M_i)$$

En estas condiciones, se obtiene:

$$M_i = \frac{F_{y,i} L}{2} k - \frac{EI}{\gamma + L}$$

$$F_{y,i} = \frac{12EI \left(\frac{L^2 + 2\gamma(2L - L_f)}{2(\gamma + L)} \right)}{(2 - 3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)}$$

En la que el término que multiplica a EI se llamará c por simplicidad.

Por lo tanto, considerando el equilibrio de fuerzas, la ecuación de suma de momentos en los nodos igual a cero y despreciando el axil, los elementos de la sexta columna tendrán las siguientes expresiones:

$$k_{26} = \frac{-12EIc}{(2 - 3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)}$$

$$k_{56} = -k_{26}$$

$$k_{36} = k_{26} \frac{L}{2} k - \frac{EI}{\gamma + L}$$

$$k_{66} = k_{26}L - k_{36}$$

$$k_{16} = k_{46} = 0$$

Si se tuviera en cuenta el caso en el que no existe una sección fisurada, es decir, la profundidad de la fisura es $a = 0$, se puede comprobar que:

$$m(a/W) = 2 \left(\frac{(a/W)}{1 - (a/W)} \right)^2 \left[5.93 - 19.69 \left(\frac{a}{W} \right) + 37.17 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 35.84 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 13.12 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \right] = 0$$

Por tanto,

$$\gamma = W \cdot m = 0$$

Y

$$k = \frac{1 + \frac{2\gamma L_f}{L^2}}{1 + \gamma/L} = 1$$

Por lo que, los elementos de la matriz de rigidez quedarían:

$$k_{22} = \frac{-12EI}{(2 - 3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{32} = K_{22} \cdot \frac{L}{2} k = \frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{52} = -k_{22} = \frac{12EI}{(2-3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)} = -\frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{62} = k_{22}L\left(1 - \frac{k}{2}\right) = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{25} = \frac{12EI}{(2-3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)} = -\frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{55} = -k_{25} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{35} = k_{25} \frac{L}{2} k = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{65} = k_{25}L\left(1 - \frac{k}{2}\right) = \frac{6EI}{L^2}$$

Además

$$d = \left(\frac{-L^2 + 2\gamma(2L - L_f)}{2(\gamma + L)} \right) = \frac{-L^2}{2L} = \frac{-L}{2}$$

$$c = \left(\frac{L^2 + 2\gamma(2L - L_f)}{2(\gamma + L)} \right) = \frac{L^2}{2L} = \frac{L}{2}$$

Por lo tanto,

$$k_{23} = \frac{12EId}{(2-3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{53} = -k_{23} = \frac{-6EI}{L^2}$$

$$k_{33} = k_{23} \frac{L}{2} k + \frac{EI}{\gamma + L} = \frac{4EI}{L}$$

$$k_{63} = k_{23}L - k_{33} = \frac{2EI}{L}$$

$$k_{26} = \frac{-12Eic}{(2 - 3k)L^3 - 6\gamma(Lk - 2L_f)(L - L_f)} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{56} = -k_{26} = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{36} = k_{26} \frac{L}{2} k - \frac{EI}{\gamma + L} = \frac{4EI}{L}$$

$$k_{66} = k_{26}L - k_{36} = \frac{2EI}{L}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Es decir, la matriz de rigidez introduciendo una profundidad de fisura nula queda igual que la que habíamos calculado sin tener en cuenta daños en las vigas. Por lo tanto, se comprueba que la matriz calculada es válida.

Capítulo 5

Aplicación del método de la rigidez a pórticos fisurados

En este capítulo se verá cómo se aplican los resultados obtenidos anteriormente en estructuras reales, en este caso, en pórticos. Se utilizará el programa desarrollado para vigas que no presentan fisura introduciendo la nueva matriz de rigidez en la barra que donde se encuentre dicha fisura.

5.1. Ejemplos analizados

Ejemplo 3. Pórtico fisurado con carga en un nodo

Datos del problema:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$W = 0.1 \text{ m}$$

$$a = 0.02 \text{ m}$$

$$L_f = 0.5 \text{ m}$$

$$L_a = 3 \text{ m}$$

$$L_b = 2 \text{ m}$$

$$L_c = 3 \text{ m}$$

$$ANGa = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$$

$$ANGb = 0^\circ = 0 \text{ rad}$$

$$ANGc = 270^\circ = 3\pi/2$$

$$q = 40 \text{ KN}$$

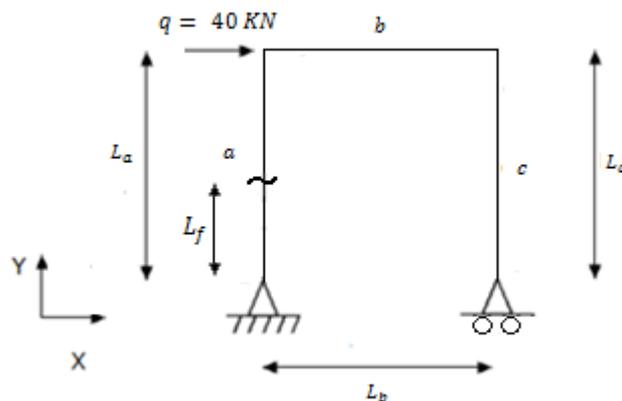


Figura 29. Ejemplo 3. Pórtico fisurado con carga en un nodo

Los datos de este problema son los mismos que los del ejemplo 2. La diferencia es que una de las barras está fisurada a una distancia L_f del origen. Por lo tanto, el programa que se introduce en MATLAB es el mismo pero ahora la matriz de la barra fisurada será la calculada en el capítulo anterior. Es decir, la programación de la matriz de rigidez en ejes locales de la barra a será:

```
>> E=210e9, W=0.1, A=W*W, I=(1/12)*W^4
EA=E*A, EI=E*I
La=3, Lb=2, Lc=3
ANGa=pi/2, ANGb=0, ANGc=(3*pi)/2
Lf=0.5
L=La
m=0.401484
g=W*m
k=(1+((2*g*Lf)/L^2))/(1+(g/L))
b=((2-3*k)*(L^3))-((6*g)*((L*k)-(2*Lf))*(L-Lf))
d=(-L^2+(2*g*((2*L)-Lf)))/(2*(L+g))
c=(L^2+(2*g*(L-Lf)))/(2*(L+g))
k22=(-12*EI)/b
k52=-k22
k32=k22*(L/2)*k
k62=k22*L*(1-(k/2))
k23=(12*EI*d)/b
k53=-k23
k33=(k23*(L/2)*k)+(EI/(L+g))
k63=(k23*L)-k33
k25=(12*EI)/b
k55=-k25
k35=k25*(L/2)*k
k65=k25*L*(1-(k/2))
k26=(-12*EI*c)/b
k56=-k26
k36=(k26*(L/2)*k)-(EI/(L+g))
k66=(k26*L)-k36
ka=[(EA/L) 0 0 (-EA/L) 0 0;0 k22 k23 0 k25 k26;0 k32 k33 0 k35 k36;(-EA/L) 0 0 (EA/L) 0
0;0 k52 k53 0 k55 k56;0 k62 k63 0 k65 k66]
```

La solución que se obtiene para el vector desplazamiento, las reacciones y los esfuerzos son:

D =

```
      0
      0
    -0.1491
      0.3315
      0.0001
    -0.0458
      0.3315
    -0.0001
      0.0228
      0.3998
      0
      0.0228
```

Pf =

```
  1.0e+004 *
    -4.0000
    -6.0000
     6.0000
```

Pa =

```
  1.0e+005 *
    -0.4000
    -0.6000
    -0.0000
     0.4000
     0.6000
     1.2000
```

Pb =

```
  1.0e+005 *
      0
    -0.6000
    -1.2000
      0
     0.6000
     0.0000
```

$P_c =$

1.0e+004 *

-0.0000

-6.0000

-0.0000

0.0000

6.0000

-0.0000

Ejemplo 4. Pórtico fisurado con carga distribuida

Datos del problema:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$W = 0.1 \text{ m}$$

$$a = 0.02 \text{ m}$$

$$L_f = 0.5 \text{ m}$$

$$L_a = 3 \text{ m}$$

$$L_b = 2 \text{ m}$$

$$L_c = 3 \text{ m}$$

$$ANGa = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$$

$$ANGb = 0^\circ = 0 \text{ rad}$$

$$ANGc = 270^\circ = 3\pi/2$$

$$q = 20 \text{ KN/m}$$

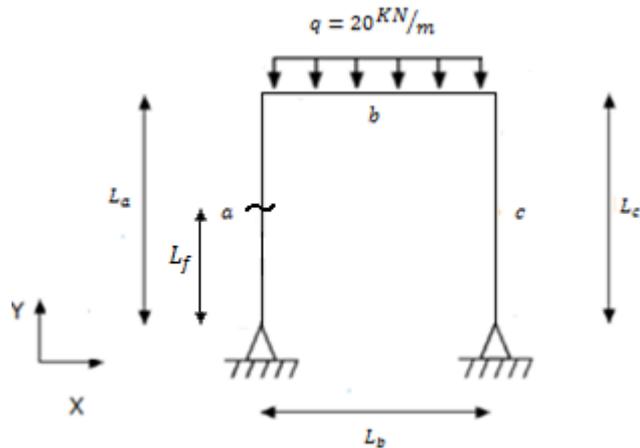


Figura 30. Ejemplo 4. Pórtico fisurado con carga distribuida

Como se ha comentado anteriormente, el cálculo matricial se aplica a estructuras con cargas en los nodos, por lo tanto, cuando se tiene una carga distribuida o una carga a lo largo de la barra se tiene que desarrollar un procedimiento que permita tener cargas en los nodos equivalentes a éstas. Para ello se utiliza el *principio de superposición*, es decir, se tendrán tantos subproblemas como cargas no nodales más uno con todas las cargas equivalentes en los nodos, el cual se puede resolver mediante cálculo matricial. Según este principio, la suma de los desplazamientos y las reacciones de los

subproblemas serán igual a los desplazamientos y los esfuerzos del problema que se quiere resolver.

Si imponemos igual a cero los desplazamientos de los subproblemas con las cargas no nodales, se tiene que los desplazamientos de nuestro problema son los desplazamientos del subproblema con las cargas en los nodos.

La manera de imponer que los desplazamientos sean nulos es introduciendo empotramientos. De esta manera, aparecerán reacciones en dichos empotramientos que tendremos que tener en cuenta en los demás subproblemas para que la suma no difiera con el problema original, es decir, debemos introducir el valor de las reacciones pero con sentido contrario como si fueran fuerzas exteriores.

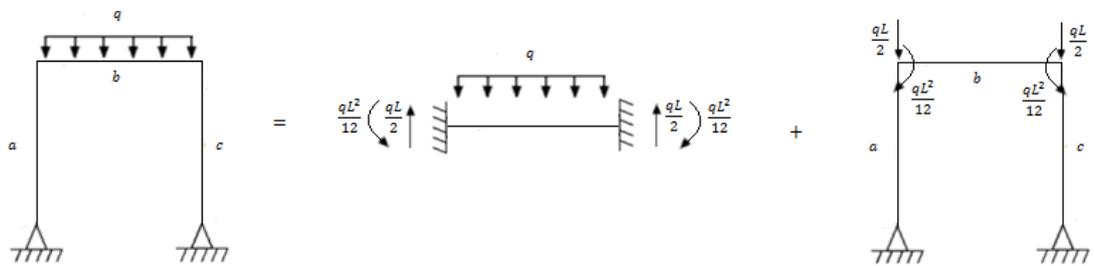


Figura 31. Principio de superposición aplicado a un pórtico con carga distribuida aplicada

El primer subproblema se puede resolver mediante la Resistencia de materiales, y el segundo, mediante el método matricial en el que el vector de fuerzas exteriores será:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La inserción de los datos y la construcción de la matriz de rigidez tienen la misma expresión que en los ejemplos anteriores. Además, las condiciones de contorno son las mismas, por lo que los grados de libertad fijos y libres también se desarrollan como en el apartado anterior. La diferencia con respecto al caso de carga puntual es el método en el que definimos la carga que soporta la estructura para que sea equivalente a una estructura con carga distribuida.

```

q=20
rb=[0; q*Lb/2; q*Lb^2/12; 0; q*Lb/2; -q*Lb^2/12]
R_b=zeros(12,1), R_b(gdlb)=rb
R=R_b
RI=R(gdll)
DI=KI\(-RI)

```

Si se introduce en la barra fisurada la matriz de rigidez correspondiente, los resultados obtenidos mediante MATLAB son:

D =

```

    0
    0
    0.0010
    0.0000
   -0.0000
   -0.0019
    0.0000
   -0.0000
    0.0019
     0
     0
   -0.0010
  
```

Pf =

```

  1.0e+004 *

    0.1115
    2.0000
   -0.1115
    2.0000
  
```

Pa =

```

  1.0e+004 *

    0.1115
    2.0000
     0
   -0.1115
   -2.0000
   -0.3344
  
```

Pb =

```

  1.0e+003 *

    1.1145
   -0.0000
   -3.3231
   -1.1145
    0.0000
    3.3231
  
```

$$P_c =$$

$$1.0e+004 *$$

$$0.1115$$

$$-2.0000$$

$$0.3344$$

$$-0.1115$$

$$2.0000$$

$$0$$

Ejemplo 5. Pórtico con carga puntual a lo largo de una barra y varias barras fisuradas

Datos del problema:

$$E=210 \text{ GPa}$$

$$W = 0.1 \text{ m}$$

$$a = 0.02 \text{ m}$$

$$L_{fa} = 0.5 \text{ m}$$

$$L_{fc} = 0.2 \text{ m}$$

$$L_a=3 \text{ m}$$

$$L_b=2 \text{ m}$$

$$L_c=3 \text{ m}$$

$$ANGa = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$$

$$ANGb = 0^\circ = 0 \text{ rad}$$

$$ANGc = 270^\circ = 3\pi/2$$

$$q = 40 \text{ KN}$$

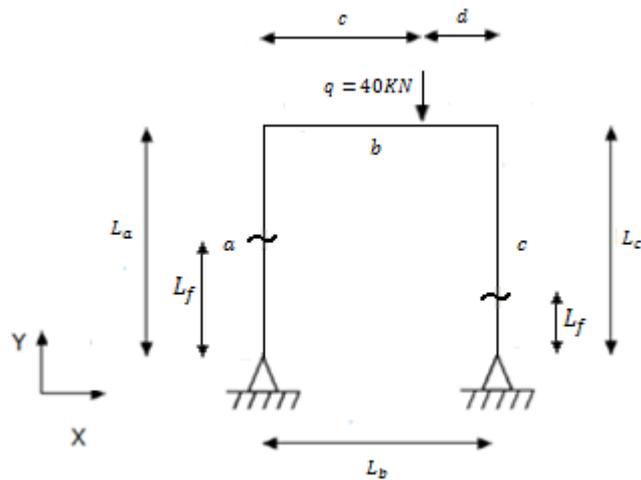


Figura 32. Ejemplo 5. Pórtico con carga puntual a lo largo de una barra y varias barras fisuradas

En cuanto a la matriz de rigidez, en este ejemplo las barras afectadas son las barras a y c , por lo que serán las matrices de dichas barras la que tengamos que particularizar. Otra manera de proceder podría ser calcular la matriz de

rigidez en caso de vigas fisuradas de todas las barras y, en el caso, de la barra b introducir un valor nulo en la profundidad de la fisura.

En cuanto a las cargas, se procede como en el ejemplo anterior, siendo el vector de fuerzas externas:

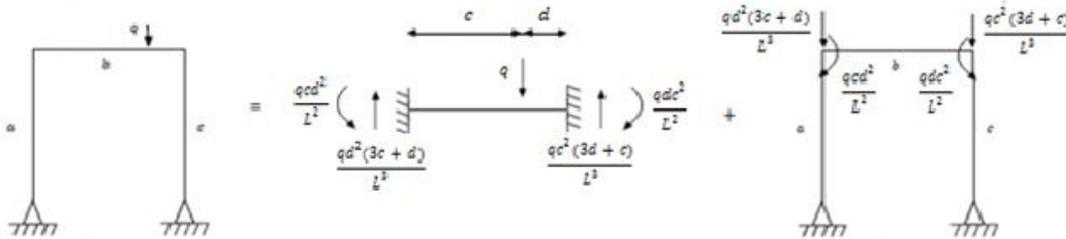


Figura 33. Principio de superposición aplicado a un pórtico con carga a lo largo de una barra

El vector de fuerzas externas del subproblema 2 será:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{qd^2(3c+d)}{L^3} \\ -\frac{qcd^2}{L^2} \\ 0 \\ -\frac{qc^2(3d+c)}{L^3} \\ -\frac{qdc^2}{L^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El lenguaje en MATLAB para la introducción del vector de fuerzas y el cálculo de desplazamientos, reacciones y esfuerzos queda:

$$Q=40, L=2, c=1.5, d=0.5$$

$$rb=[0; Q*d^2*(3*c+d)/Lb^3; Q*c*d^2/Lb^2;0;Q*c^2*(3*d+c)/Lb^3;-Q*d*c^2/Lb^2]$$

$$R_b=zeros(12,1), R_b(gdlb)=rb$$

$$R=R_b$$

$$Rl=R(gdll)$$

$$Dl=Kl(-Rl)$$

$$D=zeros(12,1), D(gdll)=Dl$$

$$Pf=Kfl*Dl$$

$$Da=D(gdla), Db=D(gdlb), Dc=D(gdlc)$$

$$Pa=Ka*Da, Pb=Kb*Db, Pc=Kc*Dc$$

```
rb =
      0
    6.2500
    3.7500
      0
   33.7500
  -11.2500
```

```
R_b =
      0
      0
      0
      0
    6.2500
    3.7500
      0
   33.7500
  -11.2500
      0
      0
      0
```

Además, en este ejemplo se ha variado el tipo de apoyo en el nudo D , por lo que los grados de libertad fijos deben incluir también el giro en dicho nudo, y el vector de las reacciones incluirá la componente relativa al momento. Los resultados obtenidos son:

D =

```
1.0e-005 *  
    0  
    0  
    0.1961  
   -0.2333  
   -0.0015  
   -0.1410  
   -0.2335  
   -0.0043  
    0.2872  
    0  
    0  
    0
```

Pf =

```
1.3049  
10.1608  
-1.3049  
29.8392  
0.3216
```

Pa =

```
1.3049  
10.1608  
0.0000  
-1.3049  
-10.1608  
-3.9146
```

Pb =

```
1.3049  
3.9108  
0.1646  
-1.3049  
-3.9108  
7.6570
```

$E_c =$

1.3049
 -29.8392
 3.5930
 -1.3049
 29.8392
 0.3216

Ejemplo 6. Pórtico empotrado de cuatro barras con carga lateral distribuida

Datos del problema:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$W = 0.1$$

$$a = 0.1 \text{ m}$$

$$L_f = 0.5 \text{ m}$$

$$L_a = 4 \text{ m}$$

$$L_b = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

$$L_c = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

$$L_d = 4 \text{ m}$$

$$ANGa = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$$

$$ANGb = 45^\circ = \pi/4 \text{ rad}$$

$$ANGc = -45^\circ = -\pi/4 \text{ rad}$$

$$ANGd = -90^\circ = -\pi/2 \text{ rad}$$

$$q = 20 \text{ KN/m}$$

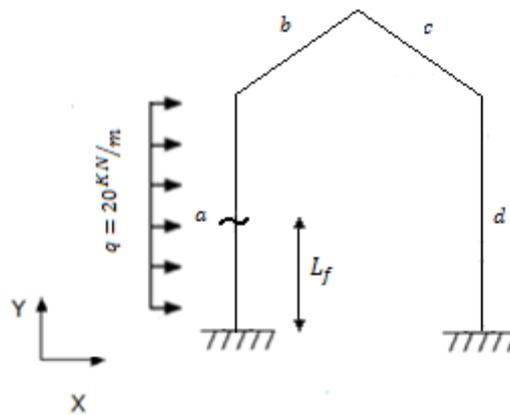


Figura 34. Ejemplo 6. Pórtico empotrado de cuatro barras con carga lateral distribuida

En este ejemplo se ha cambiado la geometría de la estructura, ya que, como se ha comentado durante el trabajo, el cálculo matricial permite el estudio de cualquier pórtico indicando los datos geométricos y los tipos de apoyos.

Se ha introducido una nueva barra, indicando su longitud y el ángulo que forman sus ejes locales con los ejes globales de la estructura. Además, se debe indicar los grados de libertad de la barra y si son fijos o libres.

En lo referente a las cargas, se introduce de la misma manera que en el ejemplo 4, de tal forma que podamos realizar el cálculo aunque la carga aplicada sea distribuida.

La matriz de rigidez que tiene en cuenta la fisura será aquella de la matriz a .

El resultado de este ejemplo será:

D =

```

      0
      0
    -0.0324
      0.0223
    -0.0001
      0.0148
      0.0111
      0.0111
    -0.0026
      0
      0
    -0.0041
      0
      0
      0
  
```

Pf =

```

1.0e+004 *

      0.3140
      4.4932
     -2.6667
      0.2688
      0.0000
     -0.3584
  
```

Pa =

```
1.0e+004 *
  0.3140
  4.4932
 -2.6667
 -0.3140
 -4.4932
  1.4106
```

Pb =

```
1.0e+004 *
  0.3140
  0.4932
  1.2561
 -0.3140
 -0.4932
 -0.8977
```

Pc =

```
1.0e+003 *
  3.1401
  4.9321
  8.9767
 -3.1401
 -4.9321
  7.1678
```

5.2. Validación del código desarrollado

En este apartado se calcularán los movimientos de la estructura del Ejemplo 3 mediante las ecuaciones de Navier-Bresse y se compararán los resultados con los obtenidos con el código desarrollado en MATLAB.

Datos:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$W = 0.1 \text{ m}$$

$$L_a = 3 \text{ m}; L_b = 2 \text{ m}; L_c = 3 \text{ m}$$

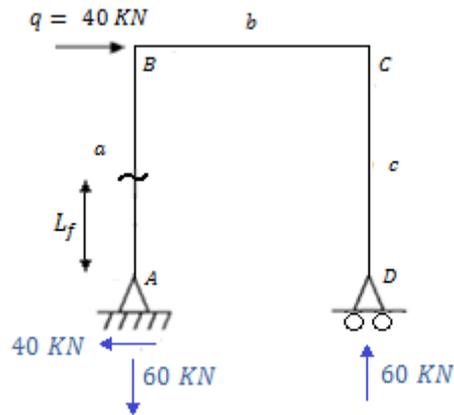


Figura 35. Reacciones

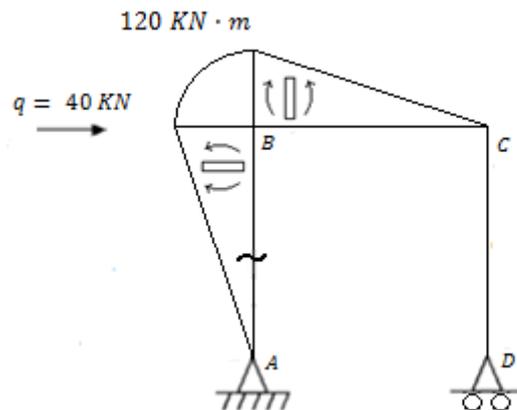


Figura 36. Diagrama de esfuerzo flector

Se considera una fisura de 0.02 m de profundidad que se encuentra a 0.5 m del nodo A, por lo tanto:

$$m(a/W) = 0.401484$$

$$C_m = \frac{W}{EI} m = 2.294 \cdot 10^{-8} \frac{1}{N \cdot m}$$

$$\Delta\theta = C_m \cdot M(L_f) = 4.58838 \cdot 10^{-4}$$

Dado que $\downarrow v_D$, $\downarrow v_A$ y u_A son nulos, las ecuaciones con los datos del ejemplo 3 quedan:

$$\downarrow v_D = \downarrow v_A + \overrightarrow{\theta}_A \cdot L - \int_0^2 \frac{(40x) \cdot 10^3}{EI} (2-x) dx + \Delta\theta x^2$$

$$\overrightarrow{\theta}_A = 0.149 \text{ rad}$$

$$u_B = \overrightarrow{\theta}_A \cdot 3 - \int_0^3 \frac{(40y) \cdot 10^3}{EI} (3-y) dy - \Delta\theta x(3-0.5)$$

$$u_B = 0.331 \text{ m}$$

$$\downarrow v_B \sim 0 \text{ m}$$

$$\overrightarrow{\theta}_B = \overrightarrow{\theta}_A - \int_0^3 \frac{(40y) \cdot 10^3}{EI} \cdot dy - \Delta\theta = 0.045$$

$$u_C = u_B + \overrightarrow{\theta}_B \cdot 2 - \int_0^2 \frac{60(2-x) \cdot 10^3}{EI} (2-x) dx = 0.331 \text{ m}$$

$$\downarrow v_C \sim 0 \text{ m}$$

$$v_A = v_D + \overrightarrow{\theta}_D \cdot 2 - \int_0^2 \frac{60(2-x) \cdot 10^3}{EI} (x) dx = 0$$

$$\overrightarrow{\theta}_D = 0.0228 \text{ rad}$$

$$\overrightarrow{\theta}_C = \overrightarrow{\theta}_D = 0.0228 \text{ rad}$$

$$u_D = u_C + \overrightarrow{\theta}_C \cdot 3 = 0.399 \text{ m}$$

Los resultados que se obtienen con el código en MATLAB son:

D =

```

      0
      0
    -0.1491
      0.3315
      0.0001
    -0.0458
      0.3315
    -0.0001
      0.0228
      0.3998
      0
      0.0228
    
```

Pf =

```

    1.0e+004 *
      -4.0000
      -6.0000
       6.0000
    
```

Pa =

```

    1.0e+005 *
      -0.4000
      -0.6000
      -0.0000
       0.4000
       0.6000
       1.2000
    
```

Pb =

```

    1.0e+005 *
      0
      -0.6000
      -1.2000
      0
       0.6000
       0.0000
    
```

Pc =

```

1.0e+004 *

-0.0000
-6.0000
-0.0000
 0.0000
 6.0000
-0.0000

```

Se puede verificar que la matriz de rigidez y el código desarrollado para vigas fisuradas proporcionan resultados correctos.

5.3. Influencia de la presencia de una fisura en un pórtico

Si comprobamos los resultados obtenidos en el Ejemplo 2 y el Ejemplo 3, en los que se estudia el mismo pórtico con la diferencia de que en el Ejemplo 3 la barra llamada a presenta una sección fisurada, se observa que el efecto que tiene dicha fisura afecta a los movimientos de la estructura:

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1487 \\ 0.3431 \\ 0.0001 \\ -0.0458 \\ 0.3431 \\ -0.0001 \\ 0.0228 \\ 0.4114 \\ 0 \\ 0.0228 \end{pmatrix}; d_{fisurada} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1491 \\ 0.3315 \\ 0.0001 \\ -0.0458 \\ 0.3315 \\ -0.0001 \\ 0.0228 \\ 0.4114 \\ 0 \\ 0.0228 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que en el nodo A, perteneciente a la barra donde se encuentra la fisura, se incrementan los desplazamientos.

El incremento de giro se ha calculado directamente con el momento flector en la sección de la barra donde está presente la fisura, por lo que el signo de dicho incremento, dependerá del signo del momento. Por este motivo el desplazamiento en el nodo B disminuye.

Cabe destacar que en el nodo D, los desplazamientos no varían, no afectándole así la presencia de la fisura.

Estamos ante dos pórticos isostáticos, por lo que las reacciones y los esfuerzos no varían aunque alguna de las barras se encuentre fisurada. Esta situación cambiará en el caso de estructuras hiperestáticas, cuyo cálculo de reacciones y esfuerzos está directamente ligado con los desplazamientos.

Por lo tanto, se puede concluir, que una estructura fisurada puede necesitar una menor sollicitación para que ésta se desplace, y los esfuerzos que soporta pueden ser mayores, por lo que se tendrá que tener en cuenta para la seguridad de la misma.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

6.1. Conclusiones

El cálculo matricial es una herramienta muy útil para el análisis de estructuras, por lo que su desarrollo es imprescindible para los estudios de estructuras reales, en las que es común que aparezcan pequeñas fisuras o daños.

La ventaja con respecto a otros métodos de cálculo es que una vez automatizado el programa, se puede resolver cualquier problema simplemente introduciendo los datos del mismo, éstos son: tipo de material, geometría de las barras, número de barras, etc...

Por lo tanto, se puede concluir que el código obtenido, introduciendo la matriz de rigidez calculada en barras fisuradas, es una herramienta que permite calcular cualquier estructura de manera automática, ahorrando tiempo y trabajo que se tendría que realizar utilizando otros métodos de cálculo, obteniendo los mismos resultados.

Además, se ha visto que una estructura fisurada puede necesitar una menor sollicitación para que ésta se desplace, y los esfuerzos que soporta pueden ser mayores, por lo que se tendrá que tener en cuenta para la seguridad de la misma.

6.2. Trabajos futuros

Para continuar con este proyecto se proponen una serie de trabajos futuros que continúen con el estudio de pórticos fisurados con el fin de ampliar el conocimiento en este campo y facilitar el cálculo de estructuras. Se propone:

- Considerar un mayor número de coeficientes en la matriz de flexibilidad que relaciona los incrementos de desplazamientos y los esfuerzos alrededor de la fisura. Como se ha señalado anteriormente, este trabajo tiene en cuenta el coeficiente relativo al incremento de ángulo y el momento flector, pero podría ser interesante introducir, al menos, los elementos de la diagonal principal de dicha matriz.
- Analizar dinámicamente los pórticos fisurados, calculando las frecuencias de vibración de las barras que componen los pórticos.
- Considerar los pórticos 3D. En este trabajo se ha limitado el estudio a pórticos planos pero se podría ampliar los resultados a pórticos con varios vanos.

El estudio de estructuras mediante análisis matricial es un campo relativamente nuevo, desde que los ordenadores nos han ayudado a la resolución de las numerosas ecuaciones que este método presenta, por lo que el desarrollo de esta herramienta de cálculo es importante para obtener resultados de manera más rápida y sistemática y pueden contribuir a ampliar el conocimiento del comportamiento de estructuras fisuradas a nivel industrial.

Anexo I

Ejemplo 1

```
>> E=210e9, W=0.1, A=W*W, I=(1/12)*W^4
EA=E*A, EI=E*I
La=2
ANGa=0
ka=[EA/La 0 0 -(EA/La) 0 0;0 (12*EI)/La^3 (6*EI)/(La^2) 0 (-12*EI)/(La^3) (6*EI)/(La^2);
0 (6*EI)/(La^2) (4*EI)/La 0 (-6*EI)/(La^2) (2*EI)/La; (-EA)/La 0 0 (EA/La) 0 0;0
(-12*EA)/La^3 (-6*EI)/(La^2) 0 (12*EI)/(La^3) (-6*EI)/(La^2); 0 (6*EI)/(La^2) (2*EI)/La 0
(-6*EI)/(La^2) (4*EI)/La]
Ta=[cos(ANGa) -sin(ANGa) 0 0 0 0; sin(ANGa) cos(ANGa) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 cos(ANGa)
-sin(ANGa) 0;0 0 0 sin(ANGa) cos(ANGa) 0;0 0 0 0 0 1]
Ka=[Ta*ka*Ta']
K=zeros(6,6)
gdla=[1 2 3 4 5 6]
K_a=zeros(6,6), K_a(gdla,gdla)=Ka
K=K+K_a
gdlf=[1 2 3]', gdll=[4 5 6]'
Kf=K(gdlf,gdlf), Kl=K(gdll,gdll), Kf1=K(gdlf,gdll), Kl1=K(gdll,gdlf)
P=[0 0 0 0 -10000 0]'
P1=P(gdll)
D1=Kl\P1
D=zeros(6,1), D(gdll)=D1
Pf=Kf1*D1
Reac=Pf
Da=D(gdla)
Pa=Ka*Da
```

Ejemplo 2

```

>> E=210e9, W=0.1, A=W*W, I=(1/12)*W^4
EA=E*A, EI=E*I
La=3, Lb=2, Lc=3
ANGa=pi/2, ANGb=0, ANGc=(-pi)/2
ka=[EA/La 0 0 -(EA/La) 0 0;0 (12*EI)/La^3 (6*EI)/(La^2) 0 (-12*EI)/(La^3) (6*EI)/(La^2);
0 (6*EI)/(La^2) (4*EI)/La 0 (-6*EI)/(La^2) (2*EI)/La; (-EA)/La 0 0 (EA/La) 0 0;0
(-12*EA)/La^3 (-6*EI)/(La^2) 0 (12*EI)/(La^3) (-6*EI)/(La^2); 0 (6*EI)/(La^2) (2*EI)/La 0
(-6*EI)/(La^2) (4*EI)/La]
kb=[EA/Lb 0 0 -(EA/Lb) 0 0;0 (12*EI)/Lb^3 (6*EI)/(Lb^2) 0 (-12*EI)/(Lb^3) (6*EI)/(Lb^2);
0 (6*EI)/(Lb^2) (4*EI)/Lb 0 (-6*EI)/(Lb^2) (2*EI)/Lb; (-EA)/Lb 0 0 (EA/Lb) 0 0;0
(-12*EI)/Lb^3 (-6*EI)/(Lb^2) 0 (12*EI)/(Lb^3) (-6*EI)/(Lb^2); 0 (6*EI)/(Lb^2) (2*EI)/Lb 0
(-6*EI)/(Lb^2) (4*EI)/Lb]
kc=[EA/Lc 0 0 -(EA/Lc) 0 0;0 (12*EI)/Lc^3 (6*EI)/(Lc^2) 0 (-12*EI)/(Lc^3) (6*EI)/(Lc^2);
0 (6*EI)/(Lc^2) (4*EI)/Lc 0 (-6*EI)/(Lc^2) (2*EI)/Lc; (-EA)/Lc 0 0 (EA/Lc) 0 0;0
(-12*EI)/Lc^3 (-6*EI)/(Lc^2) 0 (12*EI)/(Lc^3) (-6*EI)/(Lc^2); 0 (6*EI)/(Lc^2) (2*EI)/Lc 0
(-6*EI)/(Lc^2) (4*EI)/Lc]
Ta=[cos(ANGa) -sin(ANGa) 0 0 0 0; sin(ANGa) cos(ANGa) 0 0 0 0;0 0 0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 cos(ANGa)
-sin(ANGa) 0;0 0 0 sin(ANGa) cos(ANGa) 0;0 0 0 0 1]
Tb=[cos(ANGb) -sin(ANGb) 0 0 0 0; sin(ANGb) cos(ANGb) 0 0 0 0;0 0 0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 cos(ANGb)
-sin(ANGb) 0;0 0 0 sin(ANGb) cos(ANGb) 0;0 0 0 0 1]
Tc=[cos(ANGc) -sin(ANGc) 0 0 0 0; sin(ANGc) cos(ANGc) 0 0 0 0;0 0 0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 cos(ANGc)
-sin(ANGc) 0;0 0 0 sin(ANGc) cos(ANGc) 0;0 0 0 0 1]
Ka=[Ta*ka*Ta']
Kb=[Tb*kb*Tb']
Kc=[Tc*kc*Tc']

K=zeros(12,12)
gdla=[1 2 3 4 5 6]
K_a=zeros(12,12), K_a(gdla,gdla)=Ka
K=K+K_a
gdlb=[4 5 6 7 8 9]
K_b=zeros(12,12), K_b(gdlb,gdlb)=Kb
K=K+K_b
gdlc=[7 8 9 10 11 12], K_c=zeros(12,12), K_c(gdlc,gdlc)=Kc
K=K+K_c
gdldf=[1 2 11]', gdll=[3 4 5 6 7 8 9 10 12]'
Kf=K(gdldf,gdldf), Kl=K(gdll,gdll), Kfl=K(gdldf,gdll), Klfd=K(gdll,gdldf)
P=[0 0 0 40000 0 0 0 0 0 0 0 0]'
Pl=P(gdll)
Dl=Kl\Pl
D=zeros(12,1), D(gdll)=Dl
Pf=Kfl*Dl
Reac=Pf
Da=D(gdla), Db=D(gdlb), Dc=D(gdlc)
Pa=Ka*Da, Pb=Kb*Db, Pc=Kc*Dc

```

Ejemplo 3

```

>> E=210e9, W=0.1, A=W*W, I=(1/12)*W^4
EA=E*A, EI=E*I
La=3, Lb=2, Lc=3
ANGa=pi/2, ANGb=0, ANGc=(3*pi)/2
Lf=0.5
L=La
m=0.401484
g=W*m
k=(1+(2*g*Lf/L^2))/(1+(g/L))
b=((2-3*k)*(L^3))-((6*g)*((L*k)-(2*Lf))*(L-Lf))
d=(-L^2)+(2*g*(2*L-Lf))/(2*(L+g))
c=(L^2)+(2*g*(L-Lf))/(2*(L+g))
k22=(-12*EI)/b
k52=-k22
k32=k22*(L/2)*k
k62=k22*L*(1-(k/2))
k23=(12*EI*d)/b
k53=-k23
k33=(k23*(L/2)*k)+(EI/(L+g))
k63=(k23*L)-k33
k25=(12*EI)/b
k55=-k25
k35=k25*(L/2)*k
k65=k25*L*(1-(k/2))
k26=(-12*EI*c)/b
k56=-k26
k36=(k26*(L/2)*k)-(EI/(L+g))
k66=(k26*L)-k36

ka=[(EA/La) 0 0 (-EA/La) 0 0;0 k22 k23 0 k25 k26;0 k32 k33 0 k35 k36;(-EA/La) 0 0 (EA/La)
0 0;0 k52 k53 0 k55 k56;0 k62 k63 0 k65 k66]
kb=[EA/Lb 0 0 -(EA/Lb) 0 0;0 (12*EI)/Lb^3 (6*EI)/(Lb^2) 0 (-12*EI)/(Lb^3) (6*EI)/(Lb^2);
0 (6*EI)/(Lb^2) (4*EI)/Lb 0 (-6*EI)/(Lb^2) (2*EI)/Lb; (-EA)/Lb 0 0 (EA/Lb) 0 0;0
(-12*EI)/Lb^3 (-6*EI)/(Lb^2) 0 (12*EI)/(Lb^3) (-6*EI)/(Lb^2); 0 (6*EI)/(Lb^2) (2*EI)/Lb 0
(-6*EI)/(Lb^2) (4*EI)/Lb]
kc=[EA/Lc 0 0 -(EA/Lc) 0 0;0 (12*EI)/Lc^3 (6*EI)/(Lc^2) 0 (-12*EI)/(Lc^3) (6*EI)/(Lc^2);
0 (6*EI)/(Lc^2) (4*EI)/Lc 0 (-6*EI)/(Lc^2) (2*EI)/Lc; (-EA)/Lc 0 0 (EA/Lc) 0 0;0
(-12*EI)/Lc^3 (-6*EI)/(Lc^2) 0 (12*EI)/(Lc^3) (-6*EI)/(Lc^2); 0 (6*EI)/(Lc^2) (2*EI)/Lc 0
(-6*EI)/(Lc^2) (4*EI)/Lc]
Ta=[cos(ANGa) -sin(ANGa) 0 0 0 0; sin(ANGa) cos(ANGa) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 cos(ANGa)
-sin(ANGa) 0;0 0 0 sin(ANGa) cos(ANGa) 0;0 0 0 0 0 1]
Tb=[cos(ANGb) -sin(ANGb) 0 0 0 0; sin(ANGb) cos(ANGb) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 cos(ANGb)
-sin(ANGb) 0;0 0 0 sin(ANGb) cos(ANGb) 0;0 0 0 0 0 1]
Tc=[cos(ANGc) -sin(ANGc) 0 0 0 0; sin(ANGc) cos(ANGc) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 cos(ANGc)
-sin(ANGc) 0;0 0 0 sin(ANGc) cos(ANGc) 0;0 0 0 0 0 1]
Ka=[Ta*ka*Ta']
Kb=[Tb*kb*Tb']
Kc=[Tc*kc*Tc']
K=zeros(12,12)
gdla=[1 2 3 4 5 6]
K_a=zeros(12,12), K_a(gdla,gdla)=Ka
K=K+K_a
gdlb=[4 5 6 7 8 9]
K_b=zeros(12,12), K_b(gdlb,gdlb)=Kb
K=K+K_b
gdlc=[7 8 9 10 11 12], K_c=zeros(12,12), K_c(gdlc,gdlc)=Kc

```

```
K=K+K_c
gdlf=[1 2 11]', gdl1=[3 4 5 6 7 8 9 10 12]'
Kf=K(gdlf,gdlf), Kl=K(gdl1,gdl1), Kfl=K(gdlf,gdl1), Klf=K(gdl1,gdlf)
P=[0 0 0 40000 0 0 0 0 0 0 0 0]'
Pl=P(gdl1)
Dl=Kl\Pl
D=zeros(12,1), D(gdl1)=Dl
Pf=Kfl*Dl
Reac=Pf
Da=D(gdl1a), Db=D(gdl1b), Dc=D(gdl1c)
Pa=Ka*Da, Pb=Kb*Db, Pc=Kc*Dc
```

Ejemplo 4

```

>> E=210e9, W=0.1, A=W*W, I=(1/12)*W^4
EA=E*A, EI=E*I
La=3, Lb=2, Lc=3
ANGa=pi/2, ANGb=0, ANGc=(3*pi)/2
Lf=0.5
L=La
m=0.401484
g=W*m
k=(1+((2*g*Lf)/L^2))/(1+(g/L))
b=((2-3*k)*(L^3))-((6*g)*((L*k)-(2*Lf))*(L-Lf))
d=(-L^2)+(2*g*((2*L)-Lf))/(2*(L+g))
c=(L^2)+(2*g*(L-Lf))/(2*(L+g))
k22=(-12*EI)/b
k52=-k22
k32=k22*(L/2)*k
k62=k22*L*(1-(k/2))
k23=(12*EI*d)/b
k53=-k23
k33=(k23*(L/2)*k)+(EI/(L+g))
k63=(k23*L)-k33
k25=(12*EI)/b
k55=-k25
k35=k25*(L/2)*k
k65=k25*L*(1-(k/2))
k26=(-12*EI*c)/b
k56=-k26
k36=(k26*(L/2)*k)-(EI/(L+g))
k66=(k26*L)-k36

ka=[(EA/L) 0 0 (-EA/L) 0 0;0 k22 k23 0 k25 k26;0 k32 k33 0 k35 k36;(-EA/L) 0 0 (EA/L) 0
0;0 k52 k53 0 k55 k56;0 k62 k63 0 k65 k66]
kb=[EA/Lb 0 0 -(EA/Lb) 0 0;0 (12*EI)/Lb^3 (6*EI)/(Lb^2) 0 (-12*EI)/(Lb^3) (6*EI)/(Lb^2);
0 (6*EI)/(Lb^2) (4*EI)/Lb 0 (-6*EI)/(Lb^2) (2*EI)/Lb; (-EA)/Lb 0 0 (EA/Lb) 0 0;0
(-12*EI)/Lb^3 (-6*EI)/(Lb^2) 0 (12*EI)/(Lb^3) (-6*EI)/(Lb^2); 0 (6*EI)/(Lb^2) (2*EI)/Lb 0
(-6*EI)/(Lb^2) (4*EI)/Lb]
kc=[EA/Lc 0 0 -(EA/Lc) 0 0;0 (12*EI)/Lc^3 (6*EI)/(Lc^2) 0 (-12*EI)/(Lc^3) (6*EI)/(Lc^2);
0 (6*EI)/(Lc^2) (4*EI)/Lc 0 (-6*EI)/(Lc^2) (2*EI)/Lc; (-EA)/Lc 0 0 (EA/Lc) 0 0;0
(-12*EI)/Lc^3 (-6*EI)/(Lc^2) 0 (12*EI)/Lc^3 (-6*EI)/(Lc^2); 0 (6*EI)/(Lc^2) (2*EI)/Lc 0
(-6*EI)/(Lc^2) (4*EI)/Lc]
Ta=[cos(ANGa) -sin(ANGa) 0 0 0 0; sin(ANGa) cos(ANGa) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 cos(ANGa)
-sin(ANGa) 0;0 0 0 sin(ANGa) cos(ANGa) 0;0 0 0 0 1]
Tb=[cos(ANGb) -sin(ANGb) 0 0 0 0; sin(ANGb) cos(ANGb) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 cos(ANGb)
-sin(ANGb) 0;0 0 0 sin(ANGb) cos(ANGb) 0;0 0 0 0 1]
Tc=[cos(ANGc) -sin(ANGc) 0 0 0 0; sin(ANGc) cos(ANGc) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 cos(ANGc)
-sin(ANGc) 0;0 0 0 sin(ANGc) cos(ANGc) 0;0 0 0 0 1]
Ka=[Ta*ka*Ta']
Kb=[Tb*kb*Tb']
Kc=[Tc*kc*Tc']
K=zeros(12,12)
gdla=[1 2 3 4 5 6]
K_a=zeros(12,12), K_a(gdla,gdla)=Ka
K=K+K_a
gdlb=[4 5 6 7 8 9]
K_b=zeros(12,12), K_b(gdlb,gdlb)=Kb
K=K+K_b
gdlc=[7 8 9 10 11 12], K_c=zeros(12,12), K_c(gdlc,gdlc)=Kc
K=K+K_c
gdlf=[1 2 10 11]', gdll=[3 4 5 6 7 8 9 12]'

```

```

Kf=K(gdlf,gdlf), Kl=K(gdll,gdll), Kfl=K(gdlf,gdll), Klf=K(gdll,gdlf)
q=20000
rb=[0; q*Lb/2; q*Lb^2/12; 0; q*Lb/2; -q*Lb^2/12]
R_b=zeros(12,1), R_b(gdlb)=rb
R=R_b
Rl=R(gdll)
Dl=Kl\(-Rl)
D=zeros(12,1), D(gdll)=Dl
Pf=Kfl*Dl
Reac=Pf
Da=D(gdla), Db=D(gdlb), Dc=D(gdlc)
Pa=Ka*Da, Pb=Kb*Db, Pc=Kc*Dc

```

Ejemplo 5

```

>> E=210e9, W=0.1, A=W*W, I=(1/12)*W^4
EA=E*A, EI=E*I
La=3, Lb=2, Lc=3
ANGa=pi/2, ANGb=0, ANGc=(3*pi)/2
Lf=0.5
L=La
m=0.401484
g=W*m
k=(1+((2*g*Lf)/L^2))/(1+(g/L))
b=((2-3*k)*(L^3))-((6*g)*(L*k)-(2*Lf))*(L-Lf)
d=(-L^2)+(2*g*((2*L)-Lf))/(2*(L+g))
c=((L^2)+(2*g*(L-Lf)))/(2*(L+g))
k22=(-12*EI)/b
k52=-k22
k32=k22*(L/2)*k
k62=k22*L*(1-(k/2))
k23=(12*EI*d)/b
k53=-k23
k33=(k23*(L/2)*k)+(EI/(L+g))
k63=(k23*L)-k33
k25=(12*EI)/b
k55=-k25
k35=k25*(L/2)*k
k65=k25*L*(1-(k/2))
k26=(-12*EI*c)/b
k56=-k26
k36=(k26*(L/2)*k)-(EI/(L+g))
k66=(k26*L)-k36

```

```

ka=[(EA/L) 0 0 (-EA/L) 0 0;0 k22 k23 0 k25 k26;0 k32 k33 0 k35 k36;(-EA/L) 0 0 (EA/L) 0
0;0 k52 k53 0 k55 k56;0 k62 k63 0 k65 k66]
kb=[EA/Lb 0 0 -(EA/Lb) 0 0;0 (12*EI)/Lb^3 (6*EI)/(Lb^2) 0 (-12*EI)/(Lb^3) (6*EI)/(Lb^2);
0 (6*EI)/(Lb^2) (4*EI)/Lb 0 (-6*EI)/(Lb^2) (2*EI)/Lb; (-EA)/Lb 0 0 (EA/Lb) 0 0;0
(-12*EI)/Lb^3 (-6*EI)/(Lb^2) 0 (12*EI)/(Lb^3) (-6*EI)/(Lb^2); 0 (6*EI)/(Lb^2) (2*EI)/Lb 0
(-6*EI)/(Lb^2) (4*EI)/Lb]
Lf=0.2
L=Lc
kc=[(EA/L) 0 0 (-EA/L) 0 0;0 k22 k23 0 k25 k26;0 k32 k33 0 k35 k36;(-EA/L) 0 0 (EA/L) 0
0;0 k52 k53 0 k55 k56;0 k62 k63 0 k65 k66]
Ta=[cos(ANGa) -sin(ANGa) 0 0 0 0; sin(ANGa) cos(ANGa) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 0 0 cos(ANGa)
-sin(ANGa) 0;0 0 0 sin(ANGa) cos(ANGa) 0;0 0 0 0 0 1]
Tb=[cos(ANGb) -sin(ANGb) 0 0 0 0; sin(ANGb) cos(ANGb) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 0 0 cos(ANGb)
-sin(ANGb) 0;0 0 0 sin(ANGb) cos(ANGb) 0;0 0 0 0 0 1]
Tc=[cos(ANGc) -sin(ANGc) 0 0 0 0; sin(ANGc) cos(ANGc) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 0 0 cos(ANGc)
-sin(ANGc) 0;0 0 0 sin(ANGc) cos(ANGc) 0;0 0 0 0 0 1]
Ka=[Ta*ka*Ta']
Kb=[Tb*kb*Tb']
Kc=[Tc*kc*Tc']
K=zeros(12,12)
gdla=[1 2 3 4 5 6]
K_a=zeros(12,12), K_a(gdla,gdla)=Ka
K=K+K_a
gdlb=[4 5 6 7 8 9]
K_b=zeros(12,12), K_b(gdlb,gdlb)=Kb
K=K+K_b
gdlc=[7 8 9 10 11 12], K_c=zeros(12,12), K_c(gdlc,gdlc)=Kc
K=K+K_c

gdldf=[1 2 10 11 12]', gdll=[3 4 5 6 7 8 9]'
Kf=K(gdldf,gdldf), Kl=K(gdll,gdll), Kfl=K(gdldf,gdll), Klfd=K(gdll,gdldf)
Q=40, L=2, c=1.5, d=0.5
rb=[0; Q*d^2*(3*c+d)/Lb^3; Q*c*d^2/Lb^2;0;Q*c^2*(3*d+c)/Lb^3;-Q*d*c^2/Lb^2]
R_b=zeros(12,1), R_b(gdlb)=rb
R=R_b
Rl=R(gdll)
Dl=Kl\(-Rl)
D=zeros(12,1), D(gdll)=Dl
Pf=Kfl*Dl
Reac=Pf
Da=D(gdla), Db=D(gdlb), Dc=D(gdlc)
Pa=Ka*Da, Pb=Kb*Db, Pc=Kc*Dc

```

Ejemplo 6

```

>> E=210e9, W=0.1, A=W*W, I=(1/12)*W^4
EA=E*A, EI=E*I
La=4, Lb=2*sqrt(2), Lc=2*sqrt(2), Ld=4
ANGa=pi/2, ANGb=pi/4, ANGc=-pi/4, ANGd=-pi/2
Lf=0.5
L=La
m=0.401484
g=W*m
k=(1+((2*g*Lf)/L^2))/(1+(g/L))
b=((2-3*k)*(L^3))-((6*g)*((L*k)-(2*Lf))*(L-Lf))
d=(-L^2)+(2*g*((2*L)-Lf))/(2*(L+g))
c=(L^2)+(2*g*(L-Lf))/(2*(L+g))
k22=(-12*EI)/b
k52=-k22
k32=k22*(L/2)*k
k62=k22*L*(1-(k/2))
k23=(12*EI*d)/b
k53=-k23
k33=(k23*(L/2)*k)+(EI/(L+g))
k63=(k23*L)-k33
k25=(12*EI)/b
k55=-k25
k35=k25*(L/2)*k
k65=k25*L*(1-(k/2))
k26=(-12*EI*c)/b
k56=-k26
k36=(k26*(L/2)*k)-(EI/(L+g))
k66=(k26*L)-k36

ka=[(EA/L) 0 0 (-EA/L) 0 0;0 k22 k23 0 k25 k26;0 k32 k33 0 k35 k36;(-EA/L) 0 0 (EA/L) 0
0;0 k52 k53 0 k55 k56;0 k62 k63 0 k65 k66]
kb=[EA/Lb 0 0 -(EA/Lb) 0 0;0 (12*EI)/Lb^3 (6*EI)/(Lb^2) 0 (-12*EI)/(Lb^3) (6*EI)/(Lb^2);
0 (6*EI)/(Lb^2) (4*EI)/Lb 0 (-6*EI)/(Lb^2) (2*EI)/Lb; (-EA)/Lb 0 0 (EA/Lb) 0 0;0
(-12*EI)/Lb^3 (-6*EI)/(Lb^2) 0 (12*EI)/(Lb^3) (-6*EI)/(Lb^2); 0 (6*EI)/(Lb^2) (2*EI)/Lb 0
(-6*EI)/(Lb^2) (4*EI)/Lb]
kc=[EA/Lc 0 0 -(EA/Lc) 0 0;0 (12*EI)/Lc^3 (6*EI)/(Lc^2) 0 (-12*EI)/(Lc^3) (6*EI)/(Lc^2);
0 (6*EI)/(Lc^2) (4*EI)/Lc 0 (-6*EI)/(Lc^2) (2*EI)/Lc; (-EA)/Lc 0 0 (EA/Lc) 0 0;0
(-12*EI)/Lc^3 (-6*EI)/(Lc^2) 0 (12*EI)/(Lc^3) (-6*EI)/(Lc^2); 0 (6*EI)/(Lc^2) (2*EI)/Lc 0
(-6*EI)/(Lc^2) (4*EI)/Lc]
kd=[EA/Ld 0 0 -(EA/Ld) 0 0;0 (12*EI)/Ld^3 (6*EI)/(Ld^2) 0 (-12*EI)/(Ld^3) (6*EI)/(Ld^2);
0 (6*EI)/(Ld^2) (4*EI)/Ld 0 (-6*EI)/(Ld^2) (2*EI)/Ld; (-EA)/Ld 0 0 (EA/Ld) 0 0;0
(-12*EI)/Ld^3 (-6*EI)/(Ld^2) 0 (12*EI)/(Ld^3) (-6*EI)/(Ld^2); 0 (6*EI)/(Ld^2) (2*EI)/Ld 0
(-6*EI)/(Ld^2) (4*EI)/Ld]
Ta=[cos(ANGa) -sin(ANGa) 0 0 0 0; sin(ANGa) cos(ANGa) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 cos(ANGa)
-sin(ANGa) 0;0 0 0 sin(ANGa) cos(ANGa) 0;0 0 0 0 1]
Tb=[cos(ANGb) -sin(ANGb) 0 0 0 0; sin(ANGb) cos(ANGb) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 cos(ANGb)
-sin(ANGb) 0;0 0 0 sin(ANGb) cos(ANGb) 0;0 0 0 0 1]
Tc=[cos(ANGc) -sin(ANGc) 0 0 0 0; sin(ANGc) cos(ANGc) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 cos(ANGc)
-sin(ANGc) 0;0 0 0 sin(ANGc) cos(ANGc) 0;0 0 0 0 1]
Td=[cos(ANGd) -sin(ANGd) 0 0 0 0; sin(ANGd) cos(ANGd) 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 cos(ANGd)
-sin(ANGd) 0;0 0 0 sin(ANGd) cos(ANGd) 0;0 0 0 0 1]

```

```

Ka=[Ta*ka*Ta']
Kb=[Tb*kb*Tb']
Kc=[Tc*kc*Tc']
Kd=[Td*kd*Td']
K=zeros(15,15)
gdla=[1 2 3 4 5 6]
K_a=zeros(15,15), K_a(gdla,gdla)=Ka
K=K+K_a
gdlb=[4 5 6 7 8 9]
K_b=zeros(15,15), K_b(gdlb,gdlb)=Kb
K=K+K_b
gdlc=[7 8 9 10 11 12], K_c=zeros(15,15), K_c(gdlc,gdlc)=Kc
K=K+K_c
gdld=[10 11 12 13 14 15]
K_d=zeros(15,15), K_d(gdld,gdld)=Kd
K=K+K_d

gd1f=[1 2 3 13 14 15]', gd1l=[3 4 5 6 7 8 9 12]'
Kf=K(gd1f,gd1f), K1=K(gd1l,gd1l), Kf1=K(gd1f,gd1l), K1f=K(gd1l,gd1f)
q=20000
ra=[0; q*La/2; q*La^2/12; 0; q*La/2; -q*La^2/12]
R_a=zeros(15,1), R_a(gdla)=ra
R=R_a
R1=R(gd1l)
D1=K1\(-R1)
D=zeros(15,1), D(gd1l)=D1
Pf=Kf1*D1
Reac=Pf
Da=D(gdla), Db=D(gdlb), Dc=D(gdlc), Dd=D(gdld)
Pa=Ka*Da, Pb=Kb*Db, Pc=Kc*Dc, Pd=Kd*Dd

```