

Una Teoría de Inmunización de Carteras de Bonos

Tesis Doctoral

Alfredo Ibáñez Rodríguez

Departamento de Economía de la Empresa
Universidad Carlos III de Madrid

Director: Dr. Alejandro Balbás de la Corte

Getafe, 10 de Diciembre de 1996.

Memoria para optar al grado de Doctor en Economía.

A mis padres,

Una Teoría de Inmunización de Carteras de Bonos

Introducción

Referencias

1. ¿Cuándo se puede Inmunizar una Cartera de Bonos?

Resumen

Introducción

1.1 El puzzle de Inmunización

1.2 El problema de Inmunización

1.3 El Activo Sombra Libre de Riesgo y La Condición Débil de Inmunización

1.4 El conjunto de los peores shocks. Una cota superior de las pérdidas de una cartera no inmunizada

1.6 Trabajando con shocks acotados. Una nueva medida de dispersión

1.5 Conclusiones

Apéndice

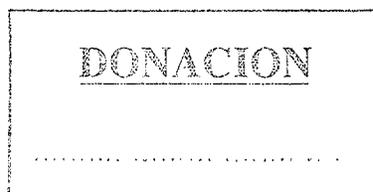
Referencias

Tablas

2. Medidas de Dispersión como Medidas del Riesgo de Inmunización

Resumen

Introducción



2.1 Cualquier medida de Dispersión es una medida del Riesgo de Inmunización

2.2 Escogiendo una Medida de Dispersión

2.3 Conclusiones

Referencias

Tablas

3. Carteras Maximin en Modelos donde Inmunización no es Factible.

Resumen

Introducción

3.1 Existencia de Carteras Maximin

3.2 Condiciones de Punto de Silla

3.3 ¿Es minimizar medidas de dispersión equivalente a buscar carteras Maximin?

A. El caso de bonos de descuento puro

B. El caso de bonos con cupón

4. Calculando las carteras Maximin en algunos ejemplos

A. Las Medidas del Riesgo de Inmunización M^2 y \tilde{N}

B. Carteras Maximin entre bonos

C. Carteras Maximin entre las carteras con la duración ajustada

5. Conclusiones

Apéndice

Referencias

Tablas

4. Carteras Maximin en Cualquier Modelo de Cobertura de dos Periodos.

Resumen

Introducción

4.1 Planteamientos Generales

4.2 Condiciones de Punto de Silla

4.3 Existencia y determinación de las carteras Maximin

4.4 Inmunización cuando no hay Restricciones de Endeudamiento

4.5 Ejemplos de carteras Maximin

A. Carteras Maximin sin restricciones de endeudamiento en un modelo de Inmunización

B. Carteras Maximin cubriendo una opción en el modelo de Black & Scholes

4.6 Conclusiones

Apéndice

Referencias

Tablas

5. Conclusiones

Agradecimientos

Quisiera agradecer en primer lugar a mi director de tesis, Dr. Alejandro Balbás, su constante apoyo y dirección en la realización de estas tesis doctoral, sin la cual nunca hubiera podido ser realizada. También debo mi gratitud a Earla Marshall, por su generosidad, y a Santiago Velilla y Fernando Zapatero por sus comentarios y sugerencias. Por supuesto, a todos los compañeros de esta Universidad, que con su buen humor y generosidad han hecho que todo el tiempo que hemos pasado aquí haya sido más fácil y agradable.

Introducción

La presente tesis tiene por objeto el estudio de la inmunización de carteras de bonos libres de ejercicio de opción y libres de riesgo de incumplimiento. Decimos que una cartera está "inmunizada" en el horizonte de planificación del inversor cuando garantiza una rentabilidad independientemente de los cambios que sufran los tipos de interés.

Inmunizar o "to hedge" una cartera de bonos es un problema muy concreto dentro de lo que podemos conocer como literatura de "Asset Pricing Models". La literatura en inmunización, como mucha otra literatura en economía financiera o en "Asset Pricing Models", modeliza este problema a partir de uno (o varios) "factores" que resumen la incertidumbre y luego trata de estudiar la relación entre el precio de un bono y estos factores. Dicha relación es la elasticidad del precio con respecto a los factores. Además, esta aproximación, que uno o varios factores contengan toda la incertidumbre, se ha mostrado muy válida en muchos problemas de Asset Pricing Models,

- El modelo de Black & Scholes
- El modelo de Cox, Ingersoll & Ross sobre la Estructura Temporal de los tipos de interés
- APT
- estrategias de inmunización (ajustar la duración)
- ...,

Repasemos ahora brevemente como la literatura de inmunización ha modelizado los factores que resumen la incertidumbre y las estrategias de inmunización a las que han dado lugar.

Macaulay (1938) fue quien definió por primera vez el término duración para medir la vida media de un bono. Aunque fueron Hicks (1939), Samuelson (1945) y Redington

(1952) quienes asumiendo una estructura plana de los tipos de interés primero calculan la elasticidad del precio con respecto al tipo de interés y muestran como al igualar la duración de activos y pasivos una cartera esta inmunizada. Fisher y Weil (1971) probaron formalmente el resultado anterior para cualquier estructura inicial de los tipos de interés; una cartera está inmunizada en el horizonte de planificación del inversor si la duración de Macaulay de la cartera es igual al horizonte de planificación. Bierwag (1977), Bierwag (1978), Khang (1979) y otros proponen otro tipo de cambios no paralelos y derivan medidas de duración alternativas a la de Macaulay. Chambers *et al.* (1988) y Prisman y Shores (1988) describen los cambios con un polinomio de grado n , por lo tanto n factores, ya que un polinomio puede aproximar cualquier cambio y muestran que la condición necesaria para inmunizar es igualar un vector de medidas de duración. Cox *et al.* (1979), Brennan y Schwartz (1983), Nelson y Schaefer (1983) y otros estudian como cambian los tipos de interés dentro de un modelo de equilibrio de la estructura temporal de los tipos de interés de uno o dos factores y obtienen medidas de duración también alternativas a la de Macaulay. Otra aproximación más reciente ha sido determinar empíricamente los factores que mueven la estructura temporal de los tipos de interés como Elton *et al.* (1990), Litterman y Scheinkman (1991), Ilmanen (1992) y otros. Por ejemplo Elton *et. al* (1990) realizan un análisis de regresión, y proponen como factores empíricos al tipo (tipos) de interes spot que mejor expliquen todos los cambios de la estructura. Litterman y Scheinkman (1991) realizan un análisis factorial y encuentran tres factores: cambios de nivel, cambios de pendiente y cambios de curvatura. Estos tres factores explican un 96% de los cambios totales y los cambios de nivel explican hasta un 80%.

Además hay otros dos trabajos que se apartan de los anteriores en esta literatura de inmunización. El primero es Bierwag y Khang (1979) que muestran como antes shocks paralelos estas estrategias de ajustar la duración son estrategias "maximin", son las que garantizan una rentabilidad más alta. El segundo es de Fong y Vasicek (1984). Ellos no asumen que existan unos factores que muevan los tipos de interés, ya que los

modelos de factores sólo permiten la inmunización ante los factores asumidos, sino que parten de un conjunto muy amplio de posibles cambios sobre los tipos de interés y dan una cota inferior del valor de una cartera de bonos con la duración ajustada, ante estos posibles cambios. Esta cota es la medida de dispersión cuadrática, M^2 , y por lo tanto al minimizarla se minimizan las posibles pérdidas de la cartera.

Por último, esta literatura presenta un "puzzle" fascinante y bien definido que dura por muchos años a pesar, de como hemos visto, de los muchos trabajos en esta literatura y en las literaturas relacionadas de los modelos de equilibrio de la estructura temporal de los tipos de interés y de los estudios empíricos de los factores que mueven los tipos de interés. El puzzle es el siguiente. En estudios empíricos de inmunización, las carteras con la duración ajustada, carteras que igualan la duración de Macaulay con el horizonte de planificación del inversor, funcionan tan bien como las carteras derivadas en modelos más complicados a pesar de dos fuertes críticas. Primero, estas carteras son derivadas en un modelo inconsistente con equilibrio. Segundo los desplazamientos en la estructura temporal de los tipos de interés están lejos de ser paralelos como se presume en el modelo de donde se derivan¹.

Por lo tanto, a partir de esta breve exposición vemos que existen al menos cuatro preguntas principales en los modelos de inmunización:

- ¿Es la modelización de este problema, a partir de unos factores y la elasticidad del precio de los bonos a los factores, la correcta?
- De las muchas estrategias propuestas, ¿cuál es la más correcta desde un punto de vista teórico? ¿Existe alguna estrategia nueva que sea mejor?
- ¿Cuál es la relación de los resultados de Bierwag y Khang (1979) y Fong y Vasicek (1984) con la tradicional modelización de factores de esta literatura?

¹Este puzzle, así como la literatura relacionada, es discutido extensivamente en el capítulo 1.

- ¿Se puede resolver el puzzle de las carteras con la duración ajustada?

La principal conclusión de esta tesis es que aunque la relación entre precios de bonos y factores sea válida, existe otra relación mucho más fuerte y determinante entre los precios de los bonos y los cambios que pueden sufrir los tipos de interés. Esta tesis prueba tal relación y la aplica al problema de inmunización. De esta manera podemos contestar a las preguntas anteriores y hacer una serie de contribuciones útiles a esta literatura.

Ahora ya podemos resumir el trabajo que hemos hecho en esta tesis.

La relación entre el precio de un bono y los cambios en los tipos de interés que probamos en el capítulo 1 es la siguiente. Sea m el horizonte de planificación del inversor, K el conjunto convexo de shocks factibles sobre los tipos de interés² y R la rentabilidad del bono de cupón cero con vencimiento m que observamos en el mercado. Definimos la "condición débil de inmunización" como sigue. Para cada shock factible existe al menos un bono, que depende del shock, tal que la rentabilidad de este bono, cuando este shock ocurre, es al menos R . Entonces, mostramos que esta condición es equivalente a la existencia de un Activo Sombra Libre de Riesgo (ASLR) que garantiza una rentabilidad R cuando los precios de los activos (bonos) son funciones convexas de los tipos de interés o de otras variables estado. Además, este lema admite una segunda lectura. No existe una cartera inmunizada si y sólo si existe un shock, k^* , tal que la condición débil de inmunización no se verifica.

El otro resultado matemático que probamos en este primer capítulo es el siguiente. Existe un ASLR que garantiza una rentabilidad más alta, es decir, existe una estrategia maximin.

Los modelos de factores prueban que si uno identifica los factores que mueven la estructura temporal de los tipos de interés y se cubre contra los factores entonces

²Suponemos que hay un cambio instantáneo sobre toda la curva de tipos de interés, y por lo tanto este cambio (shock) viene dado por una función.

está inmunizado. ¿Pero qué sucede si los tipos de interés no cambian de acuerdo a los factores? ¿La cartera cubierta contra los factores esta protegida todavía contra estos nuevos shocks? La respuesta es no lo sabemos utilizando esta teoría. Aunque en principio pensaríamos que no está protegida, porque para eso identificamos los factores y calculamos la relación. El lema que presentamos dice que la cartera cubierta contra los factores está también cubierta contra cualquier conjunto convexo que contenga a los factores y para el que la condición se verifique.

De la segunda lectura de este lema, podemos ver que cuando estas carteras fallan no es porque no hayamos identificado correctamente los factores, si no porque existen unos "peores shocks" que hacen que la condición débil de inmunización no se verifique y por lo tanto no se pueda garantizar la rentabilidad de una cartera inmunizada. De esta manera introducimos un nuevo concepto, los peores shocks. En un problema de inmunización lo importante no serían los factores del conjunto de shocks factibles sino los peores shocks dentro de dicho conjunto.

Intentemos ahora aplicar estos resultados matemáticos a inmunizar una cartera de bonos.

Supongamos que partimos de un modelo con un factor de desplazamientos paralelos. Entonces sabemos que una cartera con la duración ajustada está inmunizada y además es una cartera maximin, Bierwag y Khang (1979). Ampliemos ahora el conjunto de shocks de manera que haya shocks no paralelos que puedan reflejar cambios razonables sobre los tipos de interés, y hagámonos las siguientes preguntas. ¿Cuál es ahora la rentabilidad máxima que podemos garantizar? ¿Cómo es la cartera que garantiza esa máxima rentabilidad? La respuesta es que una cartera específica con la duración ajustada sigue garantizando una rentabilidad cercana a la de la cartera inmunizada. Esto es lo que mostramos en el capítulo 1, proponemos un conjunto de shocks muy razonable, que incluye shocks paralelos y no paralelos y encontramos una cartera específica con la duración ajustada que garantiza una rentabilidad cercana a la de una

cartera inmunizada. Las carteras con la duración ajustada se comportan bien en estudios empíricos de inmunización, no sólo porque hayamos identificado correctamente los factores y hayamos determinado la elasticidad entre el precio de los bonos y los factores, si no porque dichas carteras estan cubiertas contra un conjunto convexo muy amplio de shocks que contiene a shocks razonables que pueden sufrir los tipos de interés. Además mostramos que en este conjunto de shocks no es posible el tipo de arbitraje al que nos referimos en el puzzle. De esta manera a partir del lema presentado en este primer capítulo explicamos y resolvemos el puzzle de inmunización y presentamos una nueva estrategia de inmunización.

Ahora también podemos ver que los resultados de Bierwag y Khang (1979) y Fong y Vasicek (1984) están más cerca del lema discutido. En estos modelos de inmunización donde se intenta cubrir el valor de una función convexa, siempre existe una estrategia maximin, una estrategia que garantiza una rentabilidad más alta. Fong y Vasicek (1984) es una aplicación del lema para el conjunto muy amplio de shocks que ellos proponen, aunque queda por determinar la relación entre la estrategia que proponen y la cartera maximin de su conjunto de shocks.

En el capítulo 1 expresamos de una manera formal estas ideas. Discutimos el puzzle de inmunización, la teoría que presentamos incluye como casos particulares a la mayoría de los resultados de esta literatura y desarrollamos a partir de un conjunto particular de shocks una nueva estrategia de inmunización; ajustar la duración de la cartera y minimizar la medida de dispersión lineal \tilde{N} . Esta medida de dispersión lineal sería una alternativa a la medida de dispersión cuadrática M^2 de Fong y Vasicek (1984).

En el capítulo 2 mostramos que cualquier ^{concluye} "medida de dispersión" es una medida del riesgo de inmunización, en las que como caso particular se encuentran la medida cuadrática M^2 de Fong y Vasicek (1984) y la medida lineal \tilde{N} del capítulo 1. Luego argumentamos que la medida lineal \tilde{N} puede ser la mejor medida del riesgo de inmunización. Algunos ejemplos muestran como la cartera que minimiza la medida \tilde{N}

puede ser una bullet portfolio o incluir un "bono con la duración igual al periodo de planificación" y por lo tanto esta estrategia explica el último resultado empírico sobre inmunización de Bierwag *et al.* (1993).

En el capítulo 3 calculamos las carteras maximin en modelos donde ^{lo}inmunización no es factible. Damos un algoritmo para calcular dichas carteras. Los ejemplos que calculamos de estas carteras maximin, considerando los shocks a partir de los cuales se desarrollan las medidas de dispersión M^2 y \tilde{N} , muestran que tienen una duración cercana al horizonte de planificación, pueden incluir un bono con el horizonte de planificación y garantizan una rentabilidad cercana a la de una cartera inmunizada. Por lo tanto, podemos explicar el puzzle de la duración ajustada y los resultados empíricos de Bierwag *et al.* (1993) adelantados en los capítulos 1 y 2.

En el capítulo 4 generalizamos el modelo del capítulo 1. Relajamos las hipótesis de convexidad del valor de los activos (bonos) y permitimos posiciones a corto. Damos un lema equivalente al lema del capítulo 1 y un nuevo algoritmo para calcular la cartera maximin. Luego, volvemos a un modelo de inmunización y estudiamos la relación de las carteras maximin cuando hay posiciones a corto y cuando no las hay. Presentamos dos ejemplos. El primero para inmunizar una cartera de bonos, sin restricciones a corto. El segundo para cubrir una opción en el modelo de Black & Scholes. Aunque el alcance de los resultados de este capítulo necesita de mayor investigación.

Referencias

- Bierwag, G.O., (1977), "Immunization, Duration, and the Term Structure of Interest Rates." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, pp. 725-742.
- Bierwag, G.O., (1978), "Measures of Duration", *Economic Inquiry*, pp. 497-507.
- Bierwag, G.O., and C. Khang, (1979), "An Immunization Strategy is a maxmin Strategy." *The Journal of Finance*, 37, May, pp. 379-389.
- Bierwag, G.O., I. Fooladi, and G.S. Roberts, (1993), "Designing an Immunized Portfolio: Is M-squared the key?." *Journal of Banking and Finance*, 17, pp. 1147-1170.
- Brennan, M.J., and E. Schwartz, (1983), "Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization." In G. Bierwag, G. Kaufman, and A. Toevs, *Duration, Bond Pricing and Portfolio Management*. Greenwich: JAI Press.
- Chambers, D.R., W.T. Carleton, and R.C. McEnally, (1988), "Immunizing Default-Free Bond Portfolios with a Duration Vector." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, 1, pp. 89-104.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, (1979), "Duration and the Measurement of Basis Risk." *Journal of Business*, 52, pp. 51-61.
- Elton, E.J., M.J. Gruber, and R. Michaely, (1990), "The Structure of Spot Rates and Immunization," *Journal of Finance*, 45, June, 2, pp. 629-642.
- Fisher, L., and R. Weil, (1971), "Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies." *Journal of Business*, 52, pp. 51-61.
- Fong, H.G., and O.A. Vasicek, (1984), "A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization." *The Journal of Finance*, 39, Dec, 5, pp. 1541-1546.
- Hicks, J.R., (1939) *Value and Capital*, Oxford: Clarendon Press.

- Ilmanen, A., (1992), "How well does Duration Measure Interest Rate Risk?." *Journal of Fixed Income*, 1, Mar, 4, pp. 43-51.
- Khang, C., (1979) "Bond Immunization when Short-Term Interest Rates Fluctuate more than Long Rates." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 14, Dec, 5, pp. 1085-1090.
- Litterman, R., and J.A. Scheinkman, (1991), "Common Factors affecting Bond Returns." *The Journal of Fixed Income*, 1, June, 1, pp. 54-61.
- Macaulay, F. R., (1938), *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856*. New York: Columbia University Press.
- Nelson, J., and S. Schaefer., (1983), "Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization." In G. Bierwag, G. Kaufman, and A. Toevs, *The Dynamics of the Term Structure and Alternative Portfolio Immunization Strategies*, Greenwich: JAI Press.
- Prisman, E.Z., and M.R. Shores, (1988), "Duration Measures for specific term structure estimations and applications to bond portfolio immunization." *Journal of Banking and Finance*, 12, pp. 493-504.
- Redington, F.M., (1952), "Review of the Principles of Life-Office Valuations," *Journal of the Institute of Actuaries*, 18.
- Samuelson, P.A., (1945), "The Effects of Interest Rate Increases on the Banking System," *American Economic Review*, March.

Capítulo 1

¿Cuándo se puede Inmunizar una Cartera de Bonos?

Resumen

Este capítulo presenta una condición equivalente a la existencia de un activo sombra libre de riesgo que garantiza una rentabilidad mínima cuando los precios de los activos son funciones convexas de los tipos de interés o de otras variables de estado. Aplicamos este lema para inmunizar bonos con cupón libres de riesgo de incumplimiento y libres de ejercicio de opción y se alcanzan dos conclusiones principales. Primero, este lema nos permite resolver un antiguo puzzle: ¿Por qué simples carteras con la duración ajustada trabajan bien en estudios empíricos de inmunización a pesar de ser derivadas en un modelo inconsistente con equilibrio y de que los desplazamientos en la estructura temporal de los tipos de interés no son paralelos como en principio se asume? Segundo, este lema nos permite desarrollar un marco que incluye a los principales resultados de esta literatura como casos especiales. A continuación, desarrollamos una nueva estrategia de inmunización. Introducimos un nuevo conjunto de shocks sobre los tipos de interés forward. Estos shocks están acotados y dependen de un parámetro que puede

ser entendido como una medida de volatilidad de los tipos de interés. Este conjunto de shocks parece más apropiado que otros previamente propuestos. A partir de este conjunto, utilizamos el lema para desarrollar una nueva medida lineal del riesgo de inmunización.

Introducción

INMUNIZAR UNA CARTERA de bonos es un problema muy estudiado en la literatura financiera desde los años setenta. Una solución consensuada al problema es igualar la duración de la cartera con el horizonte de planificación del inversor. De todas las maneras, vamos a presentar dos razones para seguir estudiando inmunización.

La primera es desde un punto de vista práctico. Muchos ahorros son invertidos en bonos del gobierno con cupón, libres de riesgo de incumplimiento y libres de ejercicio de opción. Además, la exposición al riesgo de los tipos de interés de carteras de renta fija más complejas también es típicamente medida a través de su duración. Por lo tanto, es importante desarrollar mejores estrategias de inmunización.

La segunda es para intentar resolver un puzzle. La literatura sobre inmunización presenta un puzzle fascinante y bien definido que dura muchos años, a pesar de un extenso trabajo en esta literatura, y en las literaturas relacionadas de los modelos de equilibrio de la estructura temporal de los tipos de interés y de los estudios empíricos de los factores que mueven la estructura temporal de los tipos de interés. El puzzle es el siguiente. En estudios empíricos de inmunización, las carteras con la duración ajustada (carteras que igualan la duración de Macaulay con el periodo de planificación del inversor) funcionan tan bien como carteras derivadas en modelos más complicados, a pesar de dos fuertes críticas. Primero, estas carteras son derivadas en un modelo inconsistente con equilibrio. Segundo, los desplazamientos en la estructura temporal de los tipos de interés están lejos de ser paralelos, como se presume en el modelo en el que se deriva.

Este capítulo presenta una condición equivalente a la existencia de un Activo Sombra Libre de Riesgo que garantiza un rendimiento mínimo cuando los precios de los activos son funciones convexas de los tipos de interés o de otras variables de estado. Utilizamos este lema para contestar al puzzle y para desarrollar una nueva estrategia de inmunización.

Antes de presentar nuestro modelo, discutiremos por una parte el puzzle de inmunización y por otra el problema de inmunizar una cartera de bonos.

1.1 El Puzzle de Inmunización

Vamos a empezar describiendo el lema previo. Denotemos al horizonte de planificación del inversor como m , y definamos el rendimiento de un bono como su precio en m dividido por su precio hoy. R es la rentabilidad del bono de cupón cero con vencimiento m que observamos en el mercado. Una cartera está inmunizada si garantiza una rentabilidad R . Considera un conjunto de shocks factibles sobre la curva de tipos de interés y el mercado de bonos. Ahora podemos definir la condición débil de inmunización como sigue: para cada shock factible existe un bono, que depende del shock, tal que la rentabilidad del bono, cuando este shock ocurre, es al menos R . Vamos a mostrar que esta condición es equivalente a la existencia de una cartera que garantiza una rentabilidad R . Este lema invita a una segunda lectura. No existe una cartera que garantice una rentabilidad R , si y sólo si, la condición no se cumple. El lema es derivado bajo las hipótesis de que el conjunto de shocks factibles es un conjunto convexo, el precio del bono es una función convexa de los tipos de interés y posiciones a corto están prohibidas. Ingersoll *et al.* (1978) han señalado que la hipótesis de convexidad del precio del bono implica una violación de arbitraje muy conocida. Sin embargo, esta hipótesis la cumple cualquier bono y es la propiedad esencial para probar el lema. Ahora podemos empezar a discutir el puzzle.

La inconsistencia con equilibrio o violación de arbitraje es debida al hecho de que la rentabilidad (o el valor) de una cartera de bonos es una función convexa de los tipos de interés, implicando que la rentabilidad de una cartera inmunizada dominará la rentabilidad del bono de cupón cero con vencimiento m . Por lo tanto, para resolver este arbitraje, tendremos que asumir que una cartera inmunizada no existe. De la segunda lectura al lema vemos que una cartera inmunizada no existe, si y sólo si, la condición débil de inmunización no se verifica. *I.e.*, existe un shock factible tal que ningún bono alcanza la rentabilidad R . ¿Cómo podría ser este shock? Los tipos de interés forward instantáneos deben caer antes de m y deben subir después de m . Por lo tanto, cuando consideremos un conjunto de shocks en los cuales estudiar un problema de inmunización, incluiremos shocks tales que la condición débil de inmunización no se cumple, y equivalentemente, inmunización no será factible. Prisman y Shores (1988) tienen un argumento similar al señalar que con shocks polinómicos no se puede inmunizar.

Para resolver la segunda crítica, cambios en los tipos de interés están lejos de ser paralelos, vamos a volver al lema. El lema nos dice que para garantizar una rentabilidad R , es suficiente que la condición débil de inmunización se verifique. Pero en realidad, el lema está diciendo que no estamos limitados sólo a inmunizar o cubrirnos contra los shocks que estamos considerando en el modelo (por ejemplo, shocks paralelos). Por lo tanto, una cartera puede ser muy efectiva contra un conjunto convexo de shocks más amplio (por ejemplo, un modelo que incluye shocks no paralelos). ¿Qué cartera es esta? Es la cartera maximin, la cartera que garantiza una rentabilidad más alta.

Para resolver definitivamente el puzzle bastaría mostrar que la cartera maximin es una cartera con la duración ajustada. Nosotros no vamos a mostrar esto aquí, porque en primer lugar es importante reconocer que la cartera maximin dependerá del modelo que utilicemos. En cualquier caso, conjeturamos que una cartera con la duración ajustada estaría muy cerca de la cartera maximin en un modelo donde inmunización

no es factible. Supongamos por ejemplo que empezamos con un modelo con shocks paralelos, pero ampliamos el conjunto de shocks. Entonces, aunque la cartera maximín permanecerá muy cerca de una cartera con la duración ajustada, aun permite inmunizar contra un conjunto de shocks más amplio. De cualquier manera, dejamos el estudio y el cálculo de las carteras maximín para el capítulo número tres.

Para resolver el problema del arbitraje hemos introducido un problema adicional. Existe un shock tal que la condición débil de inmunización no se verifica, y por lo tanto, no existe una cartera inmunizada. Sin embargo, si el efecto de este shock es pequeño, o la probabilidad de que suceda es también pequeña, entonces estudios empíricos de inmunización podrían reportar que la cartera está prácticamente inmunizada.

Por otra parte, al final de este capítulo, introduciremos un conjunto de shocks, a partir de los cuales propondremos una nueva estrategia de inmunización, que incluye shocks que no son paralelos. Este conjunto de shocks contiene un shock tal que la condición libre de inmunización no se verifica, y por lo tanto, seremos consistentes con equilibrio. Para este conjunto de shocks, con un ejemplo, mostraremos una cartera con la duración ajustada, que no siendo la cartera maximin, sin embargo, proporciona una rentabilidad cercana a una cartera inmunizada. Interpretamos este ejemplo como una confirmación de las ideas previamente discutidas y de que hemos resuelto el puzzle.

El lema señala que dada la definición de una cartera inmunizada, la propiedad de convexidad de los bonos y por lo tanto de las carteras es la más importante en la formulación del problema. Por otra parte, los modelos de factores, tanto teóricos basados en equilibrio como empíricos, ignoran esta propiedad. Estos modelos son reminiscentes del análisis de Black-Scholes, y sólo se centran en cubrirse contra los factores del modelo. Aplicando este lema vamos a mostrar que no tenemos que limitarnos a un conjunto específico de factores. Podemos cubrir contra un conjunto más amplio de shocks, y por lo tanto, no dependeremos de la exactitud y estacionariedad de los factores considerados. Además, otra importante diferencia aparece cuando aplicamos este lema. Sólo

tenemos que cubrirnos contra los peores shocks en el conjunto de shocks factibles. En general, ellos serían los únicos shocks relevantes en cualquier problema de cobertura. Sin embargo, en los modelos de factores, ya que todos los shocks, buenos y malos, son generados por los factores del modelo, intentamos cubrirnos contra los factores. Una segunda diferencia importante que también aparece es que al cubrirnos contra los factores del modelo sólo lo hacemos localmente.

Fisher and Weil (1971), Bierwag *et al.* (1981), y otros, han documentado un mejor comportamiento de las carteras con la duración ajustada que simples carteras de bonos con vencimiento igual al horizonte de planificación, carteras de bonos con vencimiento a corto plazo y carteras de bonos con vencimiento a muy largo plazo. Si además de ajustar la duración de la cartera, minimizamos la medida de dispersión M^2 (Fong and Fabozzi (1985), Lacey and Nawalkha (1993)), o si incluimos un bono con el vencimiento del horizonte de planificación (Bierwag *et al.* (1993)) entonces estos autores muestran que estas estrategias aun funcionan mejor. Ingersoll (1983) parece ser el único trabajo que no muestra un mejor comportamiento de las estrategias con la duración ajustada cuando las comparamos con simples estrategias de bonos con vencimiento igual al horizonte de planificación.

Por otra parte, en primer lugar, Brennan and Schwartz (1983), Nelson and Schaefer (1983) y Babbel (1983) muestran que los movimientos en los tipos de interés spot no son paralelos. A continuación, proponen y estiman un modelo de uno o dos factores que explica mejor los cambios de los tipos de interés. Finalmente, contrastan si estos modelos inmunizan mejor que simples carteras con la duración ajustada. La conclusión es que las carteras con la duración ajustada inmunizaban tan bien como esos modelos más complicados.

Sin embargo, otros trabajos han apuntado la limitación de estos modelos. Ingersoll *et al.* (1978) señaló el problema del arbitraje. Merton (1993) and Cox *et al.* (1978) mostraron que estos modelos asumen que el tipo de interés a corto sigue un paseo

aleatorio, y por lo tanto, los tipos de interés pueden ser fácilmente negativos implicando precios de bonos absurdos. Bierwag (1977) o Khang (1983) entre otros, muestran que asumiendo diferentes cambios sobre los tipos de interés obtenemos medidas de duración distintas a la de Macaulay.

Ilmanen (1992) mostró que la duración es una buena medida del riesgo de los tipos de interés. Sin embargo, los siguientes trabajos entre otros señalan que los cambios en los tipos de interés no son paralelos como en principio es asumido. Chambers *et al.* (1988) señalan que un polinomio de grado cinco o siete describiría mejor los desplazamientos en los tipos de interés. Elton *et al.* (1990) mostraron que incluso si asumimos un modelo de un factor, los cambios en cada tipo spot dependen del vencimiento y el modelo de duración funciona pobremente explicando tales cambios. Además, señalan que un modelo de dos factores sería más adecuado. Finalmente, Litterman and Scheinkman (1991) encuentran que los cambios en los tipos de interés pueden ser descompuestos en tres factores: cambios en el nivel, en la pendiente y en la curvatura. El primer factor, cambios paralelos, explica un 80% de los cambios totales. D'eclesia y Zenios (1994) encuentran los mismos factores para el mercado de bonos italiano. Sin embargo, ningún trabajo contrastó si cada modelo inmunizaba mejor que carteras con la duración ajustada.

Brennan y Schwartz (1983) y Schaefer (1992) han abordado también este puzzle pero desde un punto de vista más empírico. Ellos muestran que en un modelo empírico de dos factores, un factor es similar a duración, y la relación entre ambos factores es aproximadamente lineal en duración para un ejemplo con bonos con cupón. Este hecho implica, entre otras cosas, que la cartera cubriendo ambos factores será una cartera con la duración ajustada. Sin embargo, esta respuesta es sólo parcial. Primero, porque no reconoce que entre carteras con la duración ajustada hay una mejor cartera, como Fong y Vasicek (1984) y nosotros al final del capítulo mostramos teóricamente y Bierwag *et al.* (1993) y otros empíricamente. Además, como estos mismos autores reconocen,

este resultado depende de que la relación empírica entre ambos factores y duración sea lineal.

1.2 El problema de inmunización

Una vez que el puzzle de inmunización ha sido abordado, nos vamos a centrar en el mismo problema de inmunización. Muchos modelos en esta literatura están dedicados a caracterizar la existencia de una cartera inmunizada por medio de medidas de duración. Nosotros vamos a resolver este problema sin el uso de medidas de duración, a través del lema previamente discutido. Este lema implica la existencia de un activo sombra libre de riesgo. Este activo sombra libre de riesgo puede ser considerado como una cartera maximin, y por lo tanto en este trabajo se extienden algunos de los resultados obtenidos por Bierwag y Khang (1979) y Prisman (1986), ya que estos autores nunca trabajaron en un modelo para el que total inmunización no sea posible. En realidad, ellos muestran que una cartera inmunizada es siempre maximin, y es importante recalcar que en nuestro modelo, lo contrario es generalmente falso.

Mostraremos en este capítulo que la condición débil de inmunización es una manera simple de analizar la existencia de una cartera de bonos inmunizada. En realidad, es de lejos más fácil aplicar esta condición que trabajar con técnicas analíticas, normalmente basadas en medidas de duración. Merece la pena también resaltar que para poder aplicar la condición débil de inmunización no es necesario ningún supuesto especial sobre la naturaleza de los cambios que sufren los tipos de interés. Además, como ha sido previamente señalado, si inmunización no es factible, es posible encontrar un shock k^* sobre los tipos de interés forward instantáneos tal que todos los bonos (y por lo tanto todas las carteras) pierden valor en el horizonte de planificación del inversor. También mostraremos, analizando los shocks k^* anteriores, como es posible encontrar una cota superior sobre las posibles pérdidas de una cartera de bonos no inmunizada siguiendo

las líneas de Fong y Vasicek (1984).

Después de este análisis previo, el siguiente objetivo es proponer una estrategia de inmunización bajo supuestos razonables sobre los shocks que sufren los tipos de interés forward. De esta manera, vamos a introducir el conjunto de shocks en el cual las diferencias

$$|k(t_1) - k(t_2)|$$

están acotadas por un parámetro $\lambda > 0$, donde $k(t)$ es un shock arbitrario y t_1, t_2 son dos instantes arbitrarios. El parámetro λ puede ser entendido como una medida de volatilidad de los tipos de interés, mostrando en cuánto pueden diferir los tipos de interés forward instantáneos entre dos instantes. Vamos a argumentar que este conjunto de shocks es más razonable que cualquier conjunto de shocks aparecidos en la literatura (modelos factoriales, shocks polinómicos y lo vamos a relacionar especialmente con el conjunto de shocks con derivada acotada de Fong y Vasicek (1984)). En este nuevo conjunto de shocks, los peores shocks k^* son también encontrados, permitiendo desarrollar una nueva medida de dispersión lineal, la medida \tilde{N} . Consecuentemente, una posible estrategia para minimizar el riesgo de inmunización es igualar la duración de la cartera con el horizonte de planificación del inversor y minimizar la medida de dispersión \tilde{N} .

Además, mostraremos la conexión entre el lema dado en este capítulo y la estrategia de minimizar la medida de dispersión \tilde{N} . Minimizando la medida \tilde{N} , se minimiza el efecto del peor shock, entre los shocks acotados previamente discutidos, que causa que la condición débil de inmunización no se verifique.

El resto del capítulo está organizado como sigue. La tercera sección presenta un marco general que incluye y generaliza los principales resultados relacionados a la literatura sobre inmunización. Un conjunto mínimo de hipótesis es propuesto, y a partir de ellas, un activo sombra libre de riesgo y la condición débil de inmunización son probadas. La cuarta sección está dedicada a introducir el conjunto de los peores



shocks para los cuales una cota superior general de las posibles pérdidas de una cartera no inmunizada es obtenida. La quinta sección introduce un nuevo conjunto de shocks que dependen de un parámetro λ y a partir de los resultados de la sección previa, una nueva medida del riesgo de inmunización es desarrollada. La última sección concluye el capítulo.

1.3 El Activo Sombra Libre de Riesgo y la Condición Débil de Inmunización

Sea $[0, T]$ un intervalo de tiempo con $t = 0$ el momento presente. Consideremos n bonos libres de ejercicio de opción y libres de riesgo de incumplimiento con vencimiento menor o igual que T , y con precios P_1, P_2, \dots, P_n respectivamente. Representaremos por K el conjunto de shocks admisibles sobre la curva de tipos de interés forward instantáneos, y por lo tanto K será un subconjunto del espacio vectorial de las funciones de valor real definidas en $[0, T]$. Si los elementos de K son únicamente funciones constantes, estaremos trabajando con shocks paralelos como Fisher y Weil (1971). Si estos elementos son polinómicos, entonces tendremos shocks polinómicos como los considerados por Chambers *et al.* (1988) or Prisman and Shores (1988) entre otros, y si estos elementos son funciones continuamente diferenciables estaremos bajo los supuestos de Fong y Vasicek (1984). Claramente más situaciones sobre las funciones en K podrían ser consideradas.

Sea m , $0 < m < T$, el horizonte de planificación del inversor y considera n funcionales de valor real

$$V_i : K \rightarrow R, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

tal que $V_i(k)$ (donde $k \in K$ es cualquier shock admisible) es el valor del bono i -th en el horizonte m , el cual incluye los cupones pagados antes de m , si el shock k tiene lugar.

1.3. El Activo Sombra Libre de Riesgo y la Condición Débil de Inmunización²³

Vamos a asumir las siguientes tres hipótesis:

H1: K es un conjunto convexo.

H2: V_i es un funcional convexo para $i = 1, 2, \dots, n$.

H3: $V_i(k) > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y para todo $k \in K$.

H1 es una hipótesis de regularidad. Asumimos que el valor de cualquier bono verifica H2. Si un bono sólo paga cantidades positivas, H3 es una condición necesaria si no queremos que exista arbitraje.

Si $C > 0$ representa la cantidad total que queremos invertir, y el vector $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ nos da el número de unidades q_i del bono i -ésimo que el inversor ha comprado, entonces las carteras satisfaciendo las siguientes restricciones

$$\sum_{i=1}^n q_i P_i = C, \quad q_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

serán llamadas carteras factibles. El funcional

$$V(q, k) = \sum_{i=1}^n q_i V_i(k) \quad (1.2)$$

nos da el valor en m de la cartera q si ocurre el shock k . Obviamente, V es un funcional convexo en la variable k puesto que (1.1) garantiza que es una combinación lineal no negativa de funcionales convexos.

Vamos a introducir el valor garantizado por la cartera q el cual será

$$\bar{V}(q) = \text{Inf}\{V(q, k); k \in K\} \quad (1.3)$$

esto es, el infimo de todos los posibles valores (en m) de la cartera q dependiendo de los shocks $k \in K$.

El siguiente lema es un resultado principal, alrededor del cual gira el resto del capítulo.

Lema 3.1. Sea $\mu_0 \geq 0$. Entonces, existe una cartera factible q^* tal que

$$\frac{\bar{V}(q^*)}{C} \geq \mu_0$$

si y sólo si para todo shock admisible $k \in K$ existe al menos un bono i -ésimo, el cual depende de k , tal que

$$\frac{V_i(k)}{P_i} \geq \mu_0$$

Prueba. Ver Apéndice. □

Como se puede observar, el lema 3.1 establece una condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de un Activo Sombra Libre de Riesgo¹ tal que su rentabilidad es al menos μ_0 . A este número lo llamamos una Rentabilidad Sombra Libre de Riesgo. El lema es probado con técnicas de análisis convexo, las cuales han sido también aplicadas a teoría de inmunización por Prisman [1986].

Una cartera se denomina maximin si garantiza tanta rentabilidad como sea posible. Para introducir este concepto formalmente, vamos a considerar el siguiente programa de optimización.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } \bar{V}(q) \\ q \text{ sujeto a (1.1)} \end{array} \right\} (P1)$$

Definición 3.2. Una cartera factible q^* es maximin si soluciona el programa (P1).

La primera consecuencia interesante que podemos derivar del lema 3.1 es que bajo las hipótesis H1, H2 y H3 siempre se puede encontrar una cartera maximin.

Teorema 3.3. El Programa (P1) tiene solución, *i.e.*, siempre existe una cartera maximin.

Prueba. Ver Apéndice. □

¹Hemos tomado este nombre de Ingersoll [1987], página 48.

1.3. El Activo Sombra Libre de Riesgo y la Condición Débil de Inmunización25

El teorema anterior nos da el valor más alto de μ_0 para el cual es posible encontrar un Activo Sombra Libre de Riesgo. Este valor está dado por $\mu_0^* = \frac{\bar{V}(q^*)}{C}$ donde q^* es una cartera maximin.

Ahora podemos contestar a la pregunta propuesta en el título de este capítulo. Dejamos denotar por R la rentabilidad del bono de cupón cero con vencimiento m que observamos en la estructura temporal de los tipos de interés. Entonces, diremos que RC es la cantidad prometida. Una cartera factible q^* se dice que está inmunizada cuando garantiza al menos RC , la cantidad prometida. Formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 3.4. Una cartera factible q^* está inmunizada si $\bar{V}(q^*) \geq RC$.

Introduzcamos ahora la "condición débil de inmunización".

Definición 3.5. Diremos que el conjunto de shocks factibles K y los n bonos considerados verifican la condición débil de inmunización si para cualquier shock $k \in K$ existe al menos un bono i -ésimo, el cual depende de k , tal que

$$\frac{V_i(k)}{P_i} \geq R$$

Podemos interpretar este concepto como sigue. Consideremos un inversor interesado en una cartera inmunizada, *i.e.*, una cartera que garantiza la cantidad prometida RC . Si nuestro inversor conociese el futuro real shock k entonces compraría un bono que no pierde valor, *i.e.*, un bono tal que $\frac{V_i(k)}{P_i} = R$. Si el inversor puede encontrar este bono para cualquier shock factible, entonces conseguiremos la "condición débil de inmunización", llamada así porque podemos inmunizar si la condición se cumple y conociésemos el futuro shock.

Ahora vamos a presentar un resultado sorprendente que muestra que inmunización es posible si se verifica la condición débil de inmunización, obviamente sin asumir que conocemos el futuro shock k .

Teorema 3.6. La condición débil de inmunización es necesaria y suficiente para garantizar la existencia de una cartera inmunizada.

Prueba. Es una consecuencia inmediata del lema 3.1 tomando $\mu_0 = R$. \square

El anterior teorema tiene otra interpretación. "Inmunización no es posible, si y sólo si, hay un shock admisible para el cual todos los bonos pierden valor en m , *i.e.*, no alcanzan el valor RC en m ".

El teorema 3.3 y el anterior teorema tienen interesantes consecuencias sobre el conjunto K de shocks admisibles. Vamos a asumir momentaneamente que además de los n bonos considerados, el bono de cupón cero con vencimiento m también se encuentra en el mercado. Considera que su precio hoy es P y sea 1 su valor al vencimiento. Ingersoll *et al.* (1978) muestran que en modelos convexos de inmunización, una cartera inmunizada, *i.e.*, una cartera q^* tal que $\frac{\bar{V}(q^*)}{C} \geq \frac{1}{P}$ no puede existir porque sino el inversor compraría esta cartera y vendería el bono de cupón cero. Esto es claramente un arbitraje. Por otra parte, en el teorema 3.3 acabamos de probar que la rentabilidad sombra libre de riesgo más alta existe y las hipótesis bajo cuales ha sido probado son suficientemente generales como para que siempre se cumplan en la práctica. Por lo tanto, ya que este tipo de arbitraje no puede ser aceptado, debe existir un shock k^* en el conjunto K tal que

$$\frac{V_i(k^*)}{P_i} < \frac{1}{P} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La última condición resuelve la existencia de arbitraje vendiendo a corto el bono de cupón cero, y por lo tanto, resuelve la primera parte del puzzle.

Profundicemos ahora en la segunda parte del puzzle. Denotemos por μ_0^* , la rentabilidad de la cartera maximin para un conjunto dado de shocks K . El lema 3.1 está diciendo que podemos garantizar la rentabilidad μ_0^* no sólo contra K , sino contra cualquier conjunto convexo que contenga al conjunto K y para el que las hipótesis del lema se verifiquen. Por lo tanto, estamos inmunizando o cubriendo contra un conjunto

1.3. El Activo Sombra Libre de Riesgo y la Condición Débil de Inmunización 27

de shocks más amplio que K , aunque no nos demos cuenta de ello. Sería necesario ahora mostrar que μ_0^* está cerca de R , y que la cartera que garantiza μ_0^* esta cerca de una cartera con la duración ajustada. No haremos ninguna de las dos cosas. Dejaremos el estudio de las carteras maximin para el tercer capítulo. Sin embargo, al final de este capítulo mostraremos una cartera que no siendo la cartera maximin, es una cartera con la duración ajustada y garantiza un valor cercano a R . Dejamos la discusión del puzzle hasta el final del capítulo, y de ahora en adelante, nos vamos a centrar en el mismo problema de inmunización.

Una vez sabemos que una cartera maximin siempre existe y las condiciones bajo las cuales existe una cartera inmunizada, podemos analizar la relación entre ambos conceptos. Sin embargo, con este nivel de generalidad, no podemos decir mucho sobre la relación entre ellos, porque μ_0^* puede ser más grande, menor o igual que R . Por lo tanto, necesitamos una hipótesis adicional en el modelo, que será mantenida hasta el final del capítulo.

H4: El conjunto K contiene el shock cero, denotado por $k = 0$, y existe un número $R > 0$ tal que $V_i(0) = RP_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

La hipótesis H4 significa que si no ocurre ningún shock sobre los tipo de interés forward, entonces todos los bonos producen la misma rentabilidad R , la cual es la rentabilidad del bono de cupón cero con vencimiento m que observamos en la estructura inicial de los tipos de interes forward instantáneos. Esta hipótesis no presume ninguna teoría de la hipótesis de expectativas sobre la estructura temporal. No hay ninguna esperanza envuelta en H4. Mostraremos que H4 se cumple en casi todos modelos de inmunización. Hay otros activos en los que su valor o rentabilidad en m es también un funcional convexo que no estamos considerando, como por ejemplo opciones sobre bonos, para los cuales el lema 3.1 también se verifica. Sin embargo, estos activos no verifican hipótesis H4 y un modelo para calcular su precio es necesario. En este capítulo, preferimos centrarnos únicamente en bonos libres de opción y de ejercicio de

incumplimiento.

Vamos en primer lugar a verificar la siguiente relación.

Proposición 3.7. Las siguientes expresiones se verifican para cualquier cartera factible q .

$$0 \leq \bar{V}(q) \leq RC$$

Prueba. La primera desigualdad se sigue de H3. Además

$$\bar{V}(q) = \text{Inf}\{V(q, k); k \in K\} \leq V(q, 0) = \sum_{i=1}^n q_i V_i(0) = \sum_{i=1}^n q_i RP_i = RC. \quad \square$$

Podemos ver a RC de nuevo como la cantidad prometida. Expresemos ahora la relación exacta entre una cartera inmunizada y una cartera maximin.

Proposición 3.8. Si q^* es una cartera inmunizada, entonces es maximin.

Prueba. Definición 3.4 y proposición 3.7 implican $\bar{V}(q^*) = RC$ y aplicando proposición 3.7 a cualquier cartera factible q tenemos

$$\bar{V}(q) \leq RC = \bar{V}(q^*)$$

y por lo tanto q^* resuelve (P1). □

El anterior resultado ha sido probado de una manera extraordinariamente simple y en un contexto muy general debido al aparente poder de la notación introducida. Este resultado fue establecido inicialmente por Bierwag y Khang (1979) en un modelo con shocks aditivos. El modelo de Bierwag y Khang (1979), donde una estrategia de inmunización siempre existe, fue extendido por Prisman (1986), quien relajó la hipótesis H4, permitiendo $V_i(0) \leq RP_i$ for $i = 1, 2, \dots, n$, para tener en cuenta un mercado de bonos con impuestos. Sin embargo, puesto que nos centramos en un modelo donde una cartera inmunizada no necesariamente existe y una cartera maximin siempre existe, preferimos no relajar hipótesis H4 y separar los efectos impositivos sobre inmunización

1.3. El Activo Sombra Libre de Riesgo y la Condición Débil de Inmunización²⁹

en el modelo. En cualquier caso las proposiciones 3.7 y 3.8 seguirían siendo ciertas en nuestro modelo con la hipótesis H4 relajada y las distorsiones observadas por Prisman (1986) estarían también presentes en dicho modelo.

Queremos apuntar que lo contrario de la Proposición 3.8 es generalmente falso. En realidad, la cartera maximin (*i.e.*, una cartera que maximiza la cantidad garantizada en el horizonte m) siempre existe pero mostraremos más adelante que la condición débil de inmunización no siempre es satisfecha, y por lo tanto, una cartera inmunizada no existe. Además, es bien conocido que en la literatura se pueden encontrar muchos modelos donde inmunización no es posible. De cualquier modo, puede ser fácilmente probado en nuestro contexto general que si una cartera inmunizada existe, entonces una cartera inmunizada y otra maximin son equivalentes. La condición débil de inmunización podría ser interpretada como una condición necesaria y suficiente para garantizar que R es la rentabilidad sombra libre de riesgo más alta. Cuando esta condición falla, esta rentabilidad sombra libre de riesgo es menor que R .

Para mostrar como la condición débil de inmunización funciona en la práctica, vamos analizar algunos resultados obtenidos por la literatura previa.

Bierwag y Khang (1979), trabajando con shocks aditivos, probaron que un bono con duración mayor que m aumenta su valor (en m) si hay un shock negativo. Además, si el bono es de una duración más corta que m , incrementa su valor si el shock es positivo. Por lo tanto, si tenemos ambos bonos, estamos bajo las hipótesis del Teorema 3.6, y así podemos concluir (como Bierwag y Khang mostraron bajo otros argumentos) que una cartera inmunizada existe porque se verifica la condición débil de inmunización.

Prisman y Shores (1988) probaron que el modelo con shocks polinómicos de Chambers *et al.* (1988) no tiene solución si los polinomios tienen un grado igual o mayor que uno. Así, inmunización contra shocks polinómicos no es posible. Su prueba está basada en el hecho de que no es posible ajustar un vector de duración con restricciones para vender a corto. Sin embargo, nosotros vamos a ofrecer una prueba simple pero

muy diferente. Un ejemplo de shock polinómico está dado por $k^*(t) = \lambda(t - m)$ donde λ es cualquier número positivo. Puesto que $k^*(t) < 0$ si $t < m$ y $k^*(t) > 0$ si $t > m$, tenemos que los tipos de interés forward instantáneos van a caer desde $t = 0$ hasta $t = m$ y van a aumentar para $t > m$. Así, los cupones que tenemos que capitalizar (los cupones pagados antes de m) perderán valor en m y lo mismo ocurrirá con los que tenemos que descontar, los pagados después de m . En esta situación sólo el bono de cupón cero con vencimiento m no perderá valor en m , pero si este bono no está en el mercado, anticipar el shock k^* no nos permitiría protegernos ante él. Por lo tanto, la condición débil de inmunización falla e inmunización no es posible.

Esta situación aparecerá frecuentemente, no sólo para shocks polinómicos, ya que en muchos modelos podemos encontrar un shock $k(t)$ tal que $k(t) < 0$ si $t < m$ y $k(t) > 0$ si $t > m$. Este hecho muestra que la condición débil de inmunización puede ser más apropiada para estudiar la existencia de carteras inmunizadas que técnicas analíticas.

1.4 El conjunto de los peores shocks. Una cota superior de las pérdidas de una cartera no inmunizada

Dada la definición de una cartera inmunizada, *i.e.*, la cual garantiza la rentabilidad más alta; dado que el valor de una cartera de bonos es un funcional convexo; y finalmente, el significado de la condición débil de inmunización, la cual señala que inmunización falla cuando hay algunos shocks con un efecto negativo sobre todos los bonos, entonces, parece que en un contexto de inmunización, los peores shocks en el conjunto de shocks factibles son los únicos a tener en cuenta.

En esta sección, vamos a introducir una definición de peores shocks y vamos a mostrar que este concepto no sólo puede ser definido en cualquier modelo de inmu-

1.4 El conjunto de los peores shocks. Una cota superior de las pérdidas... 31

nización, sino que es también el más importante en un contexto de inmunización. En general, cualquier modelo de cobertura tiene que explicar cual son las peores situaciones. El resto de los estados serían irrelevantes. Fisher y Weil (1971) y Bierwag y Khang (1979) han ya trabajado con el concepto de peor shock, puesto que para una cartera inmunizada, el peor shock es el shock nulo.

Junto con este concepto y la propiedad de que una función convexa está acotada por abajo por su tangente, daremos una prueba muy simple de la cota superior de las posibles pérdidas de una cartera no inmunizada obtenidas por varios autores. Entre ellos están la medida M^2 de Fong y Vasicek (1984) y Prisman y Shores (1988).

Definición 4.1. Diremos que un conjunto k_1, k_2, \dots, k_h de shocks factibles es un conjunto de peores shocks, si dado cualquier shock $k \in K$ existen h números reales, que dependen de k , $\lambda_1(k), \lambda_2(k), \dots, \lambda_h(k)$, tales que

$$\sum_{j=1}^h \lambda_j(k) k_j \in K \quad \text{and}$$
$$V_i(k) \geq V_i \left(\sum_{j=1}^h \lambda_j(k) k_j \right) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Este concepto simplemente significa que el valor en m de los n bonos considerados está siempre acotado por abajo por sus valores considerando combinaciones lineales de elementos en el conjunto de los peores shocks.

De ahora en adelante, tendremos en cuenta la siguiente hipótesis adicional.

H5: El conjunto K de shocks admisibles es un subconjunto de un espacio normado X cuyos elementos son funciones de valor real en el intervalo $[0, T]$. El shock cero es interior al conjunto K . Los funcionales V_i , $i = 1, 2, \dots, n$, son diferenciables de Gateaux con respecto a la variable k en un conjunto abierto que contiene al shock cero.

Los conceptos de espacio normado y diferenciable de Gateaux pueden ser encontrados por ejemplo en Luenberger (1969). La hipótesis de que V_i es diferenciable de

Gateaux podría ser fácilmente escrita si consideramos shocks k que dependen de $p + 1$ parámetros (por ejemplo, shocks polinómicos de grado p). Si esta dependencia es lineal, entonces significa que V_i es diferenciable con respecto a los parámetros. Como es bien conocido, una función convexa está siempre acotada por abajo por su plano tangente. Esto es también cierto para funcionales convexos en espacios normados (ver Luenberger (1969)) y podemos aplicar este hecho para obtener algunas propiedades del funcional V .

Sea q una cartera factible y sean ν_j , $j = 1, 2, \dots, h$ el valor de la diferencial de Gateaux de $V(q, k)$ con respecto a su variable k , evaluada en $k = 0$, y aplicada sobre k_j (ver Luenberger (1969)). Entonces tenemos el siguiente resultado.

Theorem 4.2. Bajo los supuestos H1, ..., H5 se verifica la siguiente desigualdad para cualquier cartera factible q y cualquier shock factible $k \in K$.

$$\frac{V(q, k) - RC}{RC} \geq \sum_{j=1}^h \frac{\nu_j}{RC} \lambda_j \quad (1.4)$$

donde, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ son los valores dados por la definición 4.1., y donde la dependencia de k ha sido omitida.

Proof. Obviamente se sigue de la definición 4.1 y de la expresión (1.2) que

$$V(q, k) \geq V(q, \sum_{j=1}^h \lambda_j k_j).$$

Puesto que V es convexo en su segunda variable, está acotado por abajo por su diferencial.

$$V(q, \sum_{j=1}^h \lambda_j k_j) \geq V(q, 0) + \sum_{j=1}^h \nu_j \lambda_j.$$

Y el resultado obviamente sigue de la igualdad $V(q, 0) = RC$. □

Ahora vamos a aplicar la definición 4.1 y teorema 4.2 para fácilmente explicar algunos resultados de la literatura sobre inmunización.

1.4 El conjunto de los peores shocks. Una cota superior de las pérdidas... 33

Primero, vamos a considerar los shocks con derivada acotada por $\lambda > 0$ de Fong y Vasicek (1984). Esto es, $\frac{dk(t)}{dt} \leq \lambda$ para todo $t \in [0, T]$. Se puede mostrar fácilmente que la condición débil de inmunización falla porque existe un shock $\lambda(t - m)$ tal que todos los bonos pierden valor cuando este shock tiene lugar. Además, se deduce inmediatamente de la fórmula de Taylor que

$$\begin{cases} k(t) \geq k(m) + \lambda(t - m) \text{ if } t \leq m \\ k(t) \leq k(m) + \lambda(t - m) \text{ if } t > m \end{cases}$$

Puesto que la última desigualdad muestra que el shock $k(m) + \lambda(t - m)$ tiene un efecto más negativo sobre todos los cupones que el shock $k(t)$, tenemos que

$$V_i(k) \geq V_i(k(m) + \lambda(t - m))$$

Entonces, la definición 4.1 se verifica. $\{1, \lambda(t - m)\}$ es un conjunto de peores shocks, y sus combinaciones lineales son las rectas $k^*(t) = \lambda_0 + \lambda(t - m)$ donde λ_0 es cualquier número real. Ahora, aplicando el teorema 4.2. se puede probar fácilmente la cota superior de Fong y Vasicek² que contiene a la medida M^2 .

Considerando shocks polinómicos con un grado no mayor que p , la cota superior obtenida por Prisman y Shores (1988) puede ser también deducida de la Proposición 4.2. En este caso, un conjunto de peores shocks está dado por los polinomios $\{1, t, t^2, \dots, t^p\}$. Pero en estos modelos, los peores shocks son funciones muy irreales, dadas por $k^*(t) = \lambda(t - m)$, donde λ no está acotado.

Prisman y Shores (1988) y Bierwag *et al.* (1993) mostraron que la cota superior del modelo de Fong and Vasicek (1984), y de un shock polinómico de grado uno están relacionadas porque ambas cotas superiores dependen de la primera y segunda medidas de duración. Lacey and Nawhalka (1993) mostraron empíricamente como una cartera cubierta contra ambos factores de un polinomio de grado uno se comporta como un

²Los resultados de Fong y Vasicek (1984) fueron extendidos por Montrucchio y Pecatti (1991), ver también Shiu (1987), para shocks no diferenciables, pero shocks con la derivada de Dini acotada.

cartera inmunizada. Se puede observar que aunque los shocks de Fong y Vasicek (1984) son mucho más generales que un polinomio de grado uno con derivada acotada, sus peores shocks están dados justo por un polinomio de grado uno. Esto muestra porque ambas cotas superiores están relacionadas y señala que los peores shocks son los únicos shocks relevantes en este contexto de inmunización. En otras palabras, el lema 3.1 nos dice que cuando estamos inmunizando contra un polinomio de grado uno con derivada acotada, en realidad, estamos inmunizando contra un conjunto convexo de shocks más amplio, que son todos los shocks con derivada acotada introducidos por Fong y Vasicek (1984).

1.5 Trabajando con shocks acotados. Una nueva medida de dispersión

Después de todo el análisis anterior, ahora queremos proponer una estrategia para inmunizar una cartera de bonos. Existen dos posibles maneras de analizar el mejor criterio para conseguir una cartera inmunizada. La primera podría estar basada en la evidencia empírica, pero vamos a seguir un segundo método basado en argumentos teóricos. Si observamos la definición de una cartera inmunizada, vemos que las diferentes estrategias de inmunización dependen del conjunto de shocks considerado. Por lo tanto, si cambiamos el conjunto de shocks, las estrategias de inmunización también cambian. Lo que significa que escoger el conjunto de shocks apropiado es una de las claves para la estrategia correcta.

Como Fong and Vasicek (1984) argumentan, los modelos de un factor *i.e.* Fisher and Weil (1971), Bierwag (1977), Khang (1983) y otros, o los modelos de equilibrio, *i.e.*, Cox *et al.* [1978], Brennan y Schwartz (1983), Nelson and Schaefer (1983) y otros, son demasiado restrictivos porque sólo permiten la cobertura contra la dinámica que es compatible con el modelo.

Los modelos multifactoriales polinómicos de Chambers *et al.* (1988) y Prisman y Shores (1988) parecen apropiados porque un polinomio puede aproximar cualquier función continua. Estos modelos dan lugar a estrategias adecuadas. Sin embargo, están demasiado sin restringir. Un simple polinomio de grado uno contiene un shock dado por $k^*(t) = \lambda(t - m)$, que es muy irreal si $\lambda \rightarrow \infty$ o $|t - m|$ es grande. Si λ está acotado, entonces estamos en la situación de Fong y Vasicek [1984], pero el segundo problema aun existe.

Los modelos factoriales empíricos, tales como Litterman y Scheinkman [1991], serían también apropiados. En cualquier caso, requieren que no haya restricciones a corto, y dependen del hecho de que los factores estimados sean estacionarios.

La última sección ha mostrado en un contexto general que si una cartera inmunizada no existe, uno tiene que buscar el conjunto de los peores shocks para poder obtener una cota superior de las posibles pérdidas de capital. Dejanos considerar que el conjunto de shocks admisibles es el conjunto de las funciones integrables y acotadas definidas en $[0, T]$ y dejanos probar que no existe una cartera inmunizada.

Puesto que estamos trabajando con funciones integrables y acotadas $k(t)$, un shock admisible está dado por

$$k(t) = \begin{cases} -\lambda_1 & \text{if } t \leq m \\ \lambda_1 & \text{if } t \geq m \end{cases} \quad (1.5)$$

donde λ_1 es arbitrario pero positivo. Este shock es negativo antes de m y positivo después de m , y asumiendo que el bono de cupón cero con vencimiento m no está en el mercado, la condición débil de inmunización no se cumple, y por lo tanto, una cartera inmunizada no existe.

Dejanos considerar una constante $\lambda > 0$ y de ahora en adelante vamos a asumir que el conjunto de shocks admisibles es el conjunto de funciones integrables y acotadas

$$K = \{k(t); |k(t_1) - k(t_2)| \leq \lambda, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T\} \quad (1.6)$$

En esta situación, el conjunto

$$k_0(t) = 1$$

$$k_1(t) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2} & \text{if } t < m \\ \frac{\lambda}{2} & \text{if } t \geq m \end{cases}$$

es un conjunto de peores shocks en el sentido dado por definición 4.1 puesto que dado cualquier $k(t)$ tenemos que

$$\begin{cases} k(t) \geq \lambda_0 - \frac{\lambda}{2} & \text{if } t < m \\ k(t) \leq \lambda_0 + \frac{\lambda}{2} & \text{if } t \geq m \end{cases} \quad (1.7)$$

siendo

$$\lambda_0 = \frac{\sup\{k(t); t \in [0, T]\} + \inf\{k(t); t \in [0, T]\}}{2} \quad (1.8)$$

Siguiendo los supuestos usuales, consideraremos que la cartera q paga un cupón continuo $c(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$. Si $g(t)$, $0 \leq t \leq T$ representa los tipos de interés forward instantáneos y $k(t)$ es un shock sobre $g(t)$, entonces el valor de la cartera q en m está dado por

$$V(q, k) = \int_0^T c(t) \exp \left[\int_t^m (g(s) + k(s)) ds \right] dt \quad (1.9)$$

Denotando la rentabilidad entre 0 y m por

$$R = \exp \left[\int_0^m g(s) ds \right] \quad (1.10)$$

y el valor presente del cupón por

$$c(t, 0) = c(t) \exp \left[- \int_0^t g(s) ds \right] \quad (1.11)$$

tenemos que

$$V(q, k) = R \int_0^T c(t, 0) \exp \left[\int_t^m k(s) ds \right] dt \quad (1.12)$$

El diferencial del funcional V con respecto a su variable k evaluado en el shock cero y aplicado sobre el shock k (*i.e.*, la derivada del funcional V evaluada en el shock cero y en la dirección dada por el shock k) estará dada por

$$R \int_0^T c(t, 0) \left(\int_t^m k(s) ds \right) dt \quad (1.13)$$

Teorema 5.1. Para cualquier cartera factible q y para cualquier shock admisible k se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{V(q, k) - RC}{RC} \geq \lambda_0(m - D) - \frac{\lambda}{2} \tilde{N} \quad (1.14)$$

donde λ_0 está dado por (1.8), D es la duración de Macaulay de la cartera q y \tilde{N} es la medida de dispersión dada por

$$\tilde{N} = \int_0^T \frac{c(t, 0)}{C} |t - m| dt \quad (1.15)$$

Prueba. Ver el Apéndice. □

Inmediatamente se sigue que para una cartera q con $D = m$, tenemos la siguiente cota superior de las posibles pérdidas después de un shock sobre los tipos de interés forward

$$\frac{V(q, k) - RC}{RC} \geq -\frac{\lambda}{2} \tilde{N} \quad (1.16)$$

La expresión (1.16) muestra una nueva estrategia para inmunizar una cartera de bonos, *i.e.*, escoger la cartera con la mínima medida \tilde{N} entre las carteras con la duración ajustada. Comprando una cartera con la duración ajustada, el inversor está cubierto ante desplazamientos paralelos de los tipos de interés, los cuales son un porcentaje importante de los cambios totales que sufren los tipos de interés, como han mostrado empíricamente Litterman y Scheinkman [1991] y otros.

Podemos también ver la conexión existente entre esta estrategia y el teorema 3.6; minimizando la medida \tilde{N} , estamos minimizando el efecto debido al shock, para el cual

la condición débil de inmunización no se cumple. El efecto de este peor shock sobre el cupón pagado en t está dado por $\frac{\lambda}{2} |t - m|$, y tal efecto está ponderado por $c(t, 0)$. Tenemos también una situación paralela para la medida M^2 de Fong y Vasicek (1984) y sus peores shocks.

Si trabajamos con shocks diferenciables con una derivada acotada por un parámetro λ , entonces podemos seguir la estrategia propuesta por Fong y Vasicek (1984). Pero creemos que hay tres importantes razones para trabajar con los shocks integrables y acotados previamente propuestos, que dependen de un parámetro λ .

Primero, los shocks acotados tienen un argumento teórico a su favor con respecto a los shocks de Fong y Vasicek. En los shocks acotados, el parámetro λ puede ser entendido como una medida de volatilidad, en cuanto se pueden diferenciar los shocks sobre los tipos de interés forward instantáneos entre dos instantes. Este parámetro puede ser estimado. Por otra parte, el parámetro de los shocks de Fong y Vasicek, una derivada, tiene un significado económico más complejo y es más difícil de estimar.

Segundo, shocks con una derivada acotada están también acotados, pero lo contrario es falso. Shocks con pequeñas variaciones podrían tener una derivada muy grande. Entonces, tenemos que los shocks acotados incluyen la mayoría de los shocks de Fong y Vasicek, pero lo contrario es falso.

Tercero, los peores shocks en el caso de Fong y Vasicek son poco realistas porque implican valores muy grandes cuando t está lejos de m . En el caso acotado, los peores shocks sobre la estructura temporal de los tipos de interés están dados por

$$\frac{1}{t} \int_0^t \begin{cases} \lambda_0 - \frac{\lambda}{2} & \text{if } s \leq m \\ \lambda_0 + \frac{\lambda}{2} & \text{if } s > m \end{cases} ds = \begin{cases} \lambda_0 - \frac{\lambda}{2} & \text{if } t \leq m \\ \lambda_0 + \frac{\lambda}{2} - \lambda \frac{m}{t} & \text{if } t > m \end{cases} \quad (1.17)$$

y en el caso de Fong y Vasicek por

$$\frac{1}{t} \int_0^t (\lambda_0 + \lambda(s - m)) ds = \lambda_0 + \lambda \left(\frac{t}{2} - m \right) \quad (1.18)$$

Podemos también observar para ambos conjuntos que los peores shocks son apalancamientos de la estructura temporal de los tipos de interés en el término³ $2m$.

En resumen, los shocks acotados que dependen de un parámetro λ pueden ser considerados como la suma de dos componentes. Un desplazamiento paralelo de toda la curva y un segundo cambio tal que los tipos de interés se mueven en una banda de anchura λ . Este parámetro λ puede representar una medida de volatilidad. Estos dos componentes parecen un escenario adecuado para describir los cambios en los tipos de interés en este contexto de inmunización.

Para traer más luz a la estrategia desarrollada, vamos a presentar un ejemplo simple para calcular las carteras que minimizan ambas medidas de dispersión. Tomaremos un horizonte de planificación de cinco años, $m = 5$, y asumiremos una estructura temporal de los tipos de interés plana, $r = 10\%$, para facilitar los cálculos.

Dejanos considerar el conjunto de bonos con cupón presentados en la Tabla 1. La primera columna en la Tabla 1 es el número del bono, la segunda es su vencimiento, la tercera es el cupón (en tanto por ciento), la cuarta es la periodicidad del cupón (en meses), la quinta es la duración del bono (en meses), la sexta es su medida M^2 y la última es su medida \tilde{N} .

En la Tabla 2 damos las carteras con la duración ajustada. La primera columna es el número de la cartera, la segunda es el primer bono en la cartera, la tercera es el segundo bono en la cartera, la cuarta es el porcentaje del primer bono y las últimas columnas son sus medidas de dispersión M^2 y \tilde{N} . Las carteras están ordenadas de acuerdo con su medida \tilde{N} .

Podemos observar que la cartera 1, la cual es una cartera formada con los bonos de duraciones concentradas alrededor del horizonte de planificación del inversor, minimiza

³Ahora podemos utilizar los trabajos empíricos que estudian los factores que mueven los tipos de interés, por ejemplo Litterman y Scheinkman (1991), y comprobar si efectivamente los apalancamientos en la estructura temporal tienen lugar en el término $2m$.

ambas medidas de dispersión, y por lo tanto, es una cartera muy interesante. Sin embargo, las carteras 3,5 y 6 también minimizan la medida \tilde{N} . Estas carteras incluyen un bono de vencimiento igual al horizonte de planificación del inversor y no son carteras con bonos de duraciones cerca del horizonte de planificación del inversor.

La estrategia propuesta puede ser contrastada empíricamente y explica el resultado empírico de Bierwag *et al.* (1993) y otros, los cuales señalan que la mejor estrategia de inmunización consiste en ajustar la duración pero incluyendo un bono de vencimiento igual al horizonte de planificación. Este bono estaría en la cartera con la duración ajustada que minimiza la medida \tilde{N} .

Vale la pena destacar que en general, los shocks acotados incluyen los shocks descritos por los factores empíricos que mueven la estructura temporal de los tipos de interés como en Litterman and Scheinkman (1991). Además, también incluye la cobertura por el método GAP que consiste en dividir la curva de los tipos de interés en secciones y desplazar independientemente a cada una de las secciones⁴. Sin embargo, hemos mostrado que sólo es necesario tener en cuenta los peores shocks de dicho conjunto.

Volvamos ahora al puzzle. Es necesario mostrar que una cartera con la duración ajustada se comporta como una cartera inmunizada en un modelo que incluye shocks lejos de ser paralelos. Dejanos tomar el conjunto de bonos previamente descrito, y dejanos suponer que los shocks acotados son un marco adecuado para describir los shocks sobre los tipos de interés. Dejanos también asumir que nuestra medida de volatilidad no es muy alta, por ejemplo $\lambda = 2\%$. Entonces los tipos de interés pueden sufrir un movimiento paralelo y además se pueden mover de cualquier manera en una banda de anchura 2% . Si ahora utilizamos la cota desarrollada en el teorema 4.1, entonces las seis primeras carteras garantizan un 98.32% del valor prometido en m . Esto corresponde a un interés continuamente compuesto del 9.66% contra el 10.00%

⁴Hull (1993), páginas 103 y 408.

prometido. Si además, este shock tiene una probabilidad de ocurrir muy pequeña, entonces la rentabilidad puede estar mucho más cerca del $R=10.00\%$ prometido.

Finalmente, dejamos apuntar que el conjunto de shocks propuesto y la medida de dispersión desarrollada son una consecuencia natural de los resultados obtenidos en las secciones tres y cuatro. Sin embargo, estas secciones prueban importantes resultados que deberían ser tomados en cuenta.

Primero, el activo sombra libre de riesgo o la cartera maximin existe y un interesante resultado sería obtenerla. Además, la condición débil de inmunización fácilmente muestra porque completa inmunización no es posible en la mayoría de los modelos. Pero esta condición también muestra que inmunización contra shocks (los cuales podían ser no aditivos) en conjuntos convexos muy generales podría ser posible si hay apropiados bonos en el mercado. Consecuentemente, los resultados de la sección tres permitirían obtener cotas superiores para posibles pérdidas de capital si el shock real sobre los tipos de interés forward no está en el conjunto convexo considerado.

Cuando inmunizamos contra shocks aditivos y minimizamos la medida \tilde{N} , estamos escogiendo una manera posible entre muchas otras que podían ser analizadas. Para minimizar la medida \tilde{N} hemos tenido en cuenta muchas consideraciones sobre los posibles shocks sobre los tipos de interés, pero otro análisis sería bienvenido.

1.6 Conclusiones

Este capítulo presenta una condición equivalente a la existencia de un activo sombra libre de riesgo que garantiza una rentabilidad mínima cuando los activos son funciones convexas. A partir de este lema, mostramos que la condición débil de inmunización es equivalente a la existencia de una cartera de bonos inmunizada. Si estamos interesados en inmunizar una cartera de bonos, pero si desafortunadamente no confiamos en el proceso estocástico teórico, o estimado empíricamente, que mueve la estructura tem-

poral de los tipos de interés, entonces podemos usar la última condición para abordar el problema.

Por lo tanto, consideraremos shocks tales que la condición débil de inmunización no se verifica, y no podremos conseguir una cartera inmunizada, pero seremos consistentes con equilibrio. Sin embargo, una cartera con la duración ajustada y por ejemplo, minimizando la medida \tilde{N} sería muy efectiva. Estaría muy cerca de una cartera inmunizada contra un conjunto convexo de shocks amplio que incluye shocks lejos de ser paralelos. De esta manera, hemos contestado el puzzle de inmunización y hemos propuesto una nueva estrategia de inmunización que parece muy robusta teóricamente a falta de ser empíricamente contrastada.

La condición débil de inmunización ofrece una simple (y nueva) manera de analizar la existencia de una cartera de bonos inmunizada. Si la condición no se verifica, las posibles pérdidas de capital son medidas analizando los shocks sobre los tipos de interés forward que hacen que la condición no se verifique.

Ofrecemos un nuevo conjunto de shocks, con diferencias acotadas entre dos instantes arbitrarios. Ellos dependen de un parámetro que puede ser entendido como una medida de volatilidad de los tipos de interés. Este conjunto parece ser un conjunto más razonable para describir los cambios en los tipos de interés. Estos cambios pueden ser considerados como la suma de dos componentes. Un desplazamiento paralelo de los tipos de interés y un segundo cambio donde los tipos de interés se mueven en una banda de anchura λ . A partir de estos shocks, la medida \tilde{N} es desarrollada, y una nueva estrategia para minimizar el riesgo de inmunización es propuesta, ajustar la duración de la cartera y minimizar la medida \tilde{N} . Siguiendo esta estrategia el inversor tiene una cota superior de las posibles pérdidas de capital.

El conjunto de shocks considerado y la medida \tilde{N} son desarrolladas teniendo en mente la condición débil de inmunización, pero no es la única manera, puesto que la teoría desarrollada es bastante general y la cota superior del teorema 4.2 nos permiten

analizar muchas otras situaciones.

Apéndice

Prueba del Lema 3.1. Dejanos asumir la existencia de la cartera q^* . Entonces

$$V(q^*, k) \geq \mu_0 C$$

para cualquier shock admisible k . De (1.1) y (1.2)

$$\sum_{i=1}^n q_i^* V_i(k) \geq \sum_{i=1}^n q_i^* \mu_0 P_i$$

para cualquier k . Puesto que las expresiones en ambos lados de la última desigualdad no son negativas, esto es sólo posible si al menos para un i -ésimo tenemos

$$V_i(k) \geq \mu_0 P_i.$$

Inversamente, dejamos considerar que la condición dada se cumple y dejamos probar la existencia de la cartera q^* .

El siguiente conjunto es obviamente convexo en R^n

$$A = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \alpha_j \leq \mu_0 P_j \quad j = 1, 2, \dots, n\}$$

Considera también el conjunto

$$B = \{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n); \exists k \in K \text{ with } \beta_j \geq V_j(k) \quad j = 1, 2, \dots, n\}$$

Dejanos probar que B es un conjunto convexo. En realidad, si $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ y $(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)$ están en B , podemos encontrar dos shocks k y k' en K tales que

$$\beta_j \geq V_j(k), \quad \beta'_j \geq V_j(k') \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Puesto que K es un conjunto convexo, dado τ con $0 \leq \tau \leq 1$, $\tau k + (1 - \tau)k' \in K$ y siendo V_j un funcional convexo para cualquier j , tenemos que

$$\tau \beta_j + (1 - \tau) \beta'_j \geq \tau V_j(k) + (1 - \tau) V_j(k') \geq V_j(\tau k + (1 - \tau)k') \quad j = 1, 2, \dots, n$$

and $\tau(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) + (1 - \tau)(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) \in B$.

Ahora vamos a probar que no hay puntos en A° (interior de A) y B simultaneamente. En realidad, si $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ estuviese a la vez en A° y B entonces $\alpha_j < \mu_0 P_j$ $j = 1, 2, \dots, n$ y podríamos encontrar un shock k tal que

$$\alpha_j \geq V_j(k) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Por lo tanto

$$\mu_0 P_j > \alpha_j \geq V_j(k) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

y es una contradicción con los supuestos realizados.

Los teoremas de separación (ver Luenberger (1969)) muestran que podemos encontrar n números reales q'_1, q'_2, \dots, q'_n tales que q'_i no es cero para al menos un i y

$$\sum_{j=1}^n q'_j \alpha_j \leq \sum_{j=1}^n q'_j \beta_j$$

si $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ está en A y $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ está en B . En particular, tomando $\alpha_j = \mu_0 P_j$ y $\beta_j = V_j(k) + r_j$ $j = 1, 2, \dots, n$ donde k es cualquier shock admisible y r_j es cualquier número no negativo,

$$\mu_0 \sum_{j=1}^n q'_j P_j \leq \sum_{j=1}^n q'_j (V_j(k) + r_j) \tag{1.19}$$

Tenemos que $q'_1 \geq 0$ porque si tuviesemos $q'_1 < 0$ entonces la expresión derecha en la última desigualdad tendería a menos infinito si r_1 tiende a infinito y esto no es compatible con la desigualdad. Análogamente $q'_2 \geq 0, \dots, q'_n \geq 0$. Puesto que al menos un q'_i no es cero,

$$S = \sum_{j=1}^n q'_j P_j > 0$$

y entonces, tomando $q_j^* = \frac{C}{S} q'_j$ $j = 1, 2, \dots, n$ tenemos que $(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ verifica (1.1) y de (1.2) y (1.19) (con $r_j = 0$ para cualquier j)

$$\mu_0 C \leq V(q^*, k)$$



para cualquier shock k . □

Prueba del Teorema 3.3. Dejanos considerar el siguiente funcional de valor real sobre los shocks admisibles

$$U(k) = \text{Max} \left\{ \frac{V_1(k)}{P_1}, \frac{V_2(k)}{P_2}, \dots, \frac{V_n(k)}{P_n} \right\} \quad \text{para } k \in K$$

Define

$$\mu_0^* = \text{Inf}\{U(k); k \in K\}$$

entonces, para cualquier shock k tenemos que $U(k) \geq \mu_0^*$ y entonces existe un bono i -ésimo (el cual depende de k) tal que

$$\frac{V_i(k)}{P_i} \geq \mu_0^*$$

El Lema 3.1 muestra que podemos encontrar una cartera q^* tal que $V(q^*, k) \geq \mu_0^* C$ para cualquier $k \in K$ y entonces

$$\bar{V}(q^*) = \text{Inf}\{V(q^*, k); k \in K\} \geq \mu_0^* C$$

Habremos probado que q^* es una solución de (P1) si mostramos que $\bar{V}(q) \leq \mu_0^* C$ para cualquier cartera $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ sujeta a (1.1).

Claramente, para cualquier shock factible k tenemos

$$\begin{aligned} \bar{V}(q) &\leq V(q, k) = \sum_{i=1}^n q_i V_i(k) = \sum_{i=1}^n q_i P_i \frac{V_i(k)}{P_i} \\ &\leq U(k) \sum_{i=1}^n q_i P_i = C U(k) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\bar{V}(q) \leq C \text{Inf}\{U(k); k \in K\} = C \mu_0^*. \quad \square$$

Prueba del Teorema 5.1. Puesto que $\{k_0(t), k_1(t)\}$ es un conjunto de peores shocks, se sigue de (1.7) y Proposición 4.2 que

$$\frac{V(q, k) - RC}{RC} \geq \lambda_0 \frac{\nu_0}{RC} + \frac{\nu_1}{RC} \quad (1.20)$$

donde λ_0 está dado por (1.8) y $\nu_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(q, hk_i) - V(q, 0)}{h}$, $i = 0, 1$.

De (1.13)

$$\nu_0 = R \int_0^T c(t, 0)(m - t)dt = RC(m - D) \quad (1.21)$$

$$\nu_1 = R \int_0^T c(t, 0) \left[-\frac{\lambda}{2} |m - t| \right] dt = -RC \frac{\lambda}{2} \tilde{N} \quad (1.22)$$

y (1.14) trivialmente sigue. □

Referencias

- Babbel, D.F., (1983), "Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization." In G. Bierwag, G. Kaufman, and A. Toevs, *Duration and the Term Structure Volatility of Interest rates*. Greenwich: JAI Press.
- Bierwag, G.O., (1977), "Immunization, Duration, and the Term Structure of Interest Rates." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, pp. 725-742.
- Bierwag, G.O., G.G. Kaufman, R. Schweitzer, and A. Toevs, (1981), "The Art of Risk Management in Bond Portfolios." *Journal of Portfolio Management*, Spring, pp. 27-36.
- Bierwag, G.O., and C. Khang, (1979), "An Immunization Strategy is a maxmin Strategy." *The Journal of Finance*, 37, May, pp. 379-389.
- Bierwag, G.O., I. Fooladi, and G.S. Roberts, (1993), "Designing an Immunized Portfolio: Is M-squared the key?." *Journal of Banking and Finance*, 17, pp. 1147-1170.
- Brennan, M.J., and E. Schwartz, (1983), "Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization." In G. Bierwag, G. Kaufman, and A. Toevs, *Duration, Bond Pricing and Portfolio Management*. Greenwich: JAI Press.
- Chambers, D.R., W.T. Carleton, and R.C. McEnally, (1988), "Immunizing Default-Free Bond Portfolios with a Duration Vector." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, 1, pp. 89-104.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, (1979), "Duration and the Measurement of Basis Risk." *Journal of Business*, 52, pp. 51-61.
- D'ecclesia, R.L., and S.A. Zenios, (1994), "Risk Factor Analysis and Portfolio Immunization in the Italian Bond Market." *Journal of Fixed Income*, 4, 2, pp. 51-58.
- Elton, E.J., M.J. Gruber, and R. Michaely, (1990), "The Structure of Spot Rates and Immunization," *Journal of Finance*, 45, June, 2, pp. 629-642.

- Fisher, L., and R. Weil, (1971), "Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies." *Journal of Business*, 52, pp. 51-61.
- Fong, H.G., and F.J. Fabozzi, (1985), *Fixed Income Portfolio Management*, Dow-Jones Irwin, Homewood, IL.
- Fong, H.G., and O.A. Vasicek, (1984), "A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization." *The Journal of Finance*, 39, Dec, 5, pp. 1541-1546.
- Hull J.C., (1993), *Options, Futures, and other Derivatives Securities*, Second Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- Ilmanen. A., (1992), "How well does Duration Measure Interest Rate Risk?." *Journal of Fixed Income*, 1, Mar, 4, pp. 43-51.
- Ingersoll. J.E., (1987), *Theory of Financial Decision Making*. Totowa, New Jersey: Rowman and Littlefield.
- Ingersoll, J.E., J. Skelton, and R. Weil, (1978), "Duration forty years later." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13, pp. 627-650.
- Ingersoll. J.E. (1983), "Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization." In G. Bierwag, G. Kaufman, and A. Toevs, *Is Immunization Feasible?*. Greenwich: JAI Press.
- Khang. C., (1979), "Bond Immunization when Short-Term Interest Rates Fluctuate more than Long Rates." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 14, Dec, 5. pp. 1085-1090.
- Lacey. N., and S. Nawhalka, (1993). "Convexity, Risk and Returns." *Journal of Fixed Income*, 3, Dec, 3, pp. 72-79.
- Litterman. R., and J.A. Scheinkman (1991), "Common Factors affecting Bond Returns." *The Journal of Fixed Income*, 1, June, 1, pp. 54-61.

- Luenberger, D.G., (1969), *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons Inc.
- Merton, R.C., (1993), "Continuous-Time Finance." *A Dynamic General Equilibrium Model of the Asset Market and Its Application to the Pricing of the capital Structure of the Firm*. Blackwell.
- Montrucchio, L., and L. Peccati, (1991), "A Note on Shiu-Fisher-Weil Immunization Theorem." *Insurance Mathematics and Economics*, 10, pp. 125-131.
- Nelson, J., and S. Schaefer, (1983), "Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization." In G. Bierwag, G. Kaufman, and A. Toevs, *The Dynamics of the Term Structure and Alternative Portfolio Immunization Strategies*. Greenwich: JAI Press.
- Prisman, E.Z, (1986), "Immunization as a Maxmin Strategy a New Look," *Journal of Banking and Finance*, 10, pp. 491-509.
- Prisman, E.Z., and M.R. Shores, (1988), "Duration Measures for specific term structure estimations and applications to bond portfolio immunization." *Journal of Banking and Finance*, 12, pp. 493-504.
- Schaefer, S.M, (1992), "The Revolution in Corporate Finance." In J.M. Stern and D.H. Chew Jr., 2nd ed., *Immunisation and Duration: A Review of Theory, performance and Applications*. Blackwell.
- Shiu, S.W, (1987), "On the Fisher-Weil Immunization Theorem," *Insurance Mathematics and Economics*, 6, pp. 259-266.

Tabla 1: Conjunto de Bonos

Número del bono	Vencimiento (años)	cupon en %	cupon (meses)	Duracion (años)	M^2	\tilde{N}
1	4	10	12	3.48232	3.27130	1.51767
2	5	10	12	4.16101	2.59822	0.83898
3	6	10	12	4.77597	3.22315	1.45880
4	7	10	12	5.33285	4.90932	2.02011
5	8	10	12	5.83689	7.45157	2.52818
6	9	10	12	6.29287	10.6728	2.98782

Table 2: Carteras con la Duración ajustada.

número	bono n.1	bono n.2	% bono n.1	M^2	\tilde{N}
1	3	4	59.77	3.901	1.6846132
2	3	5	78.88	4.116	1.6846172
3	2	4	28.40	4.252	1.6846198
4	3	6	85.23	4.323	1.6846211
5	2	5	49.93	5.027	1.6846342
6	2	6	60.64	5.775	1.6846482
7	1	4	17.98	4.614	1.9297429
8	1	5	35.54	5.965	2.1690124
9	1	6	46.00	7.268	2.3115433

Capítulo 2

Medidas de Dispersión como Medidas del Riesgo de Inmunización

Resumen

Las medidas del riesgo de inmunización M^2 y \tilde{N} son unas medidas de dispersión cuadrática y lineal respectivamente de flujos de caja desarrolladas para construir carteras de bonos inmunizadas. Este capítulo muestra que cualquier medida de dispersión es una medida del riesgo de inmunización. Cada medida es derivada asumiendo un conjunto de shocks diferentes y cada una depende específicamente de la forma de los peores shocks en el conjunto asumido. Consecuentemente, un criterio para decidir que medidas de dispersión son las más apropiadas para usarlas como medidas del riesgo de inmunización es tomar aquellas implicadas por los más razonables conjuntos de shocks y peores shocks. Según este criterio, medidas de dispersión entre la lineal y la cuadrática son las más adecuadas. Entre ellas, la lineal guarda las mejores propiedades.

Introducción

LA MEDIDA DEL RIESGO DE INMUNIZACIÓN M^2 fue introducida por Fong y Vasicek (1984) para superar la principal limitación de la tradicional teoría de inmunización tal como la formalizaron Fisher y Weil (1971). Podemos asumir que los tipos de interés cambian de varias maneras maneras: desplazamientos paralelos, por otros tipos de desplazamientos (Bierwag (1977), Khang (1983) y otros), o por desplazamientos en un contexto de modelos de equilibrio (Cox *et al.* (1979), Brennan y Schwartz (1983) y otros), y a partir de ellos desarrollar medidas de duración alternativas. De cualquier manera, teóricamente inmunización es sólo conseguida si los tipos de interés cambian conforme al proceso específico asumido.

Fong y Vasicek (1984) mostraron que si la derivada de los cambios sobre los tipos de interés forward instantaneos está acotada por una constante, entonces la rentabilidad de una cartera con la duración ajustada (igualada al horizonte de planificación del inversor) está acotada inferiormente por menos la medida de dispersión cuadrática de flujos de caja M^2 , la cual depende sólo de la estructura de la cartera. Por lo tanto, minimizando la medida M^2 , se minimiza el riesgo de inmunización porque estamos considerando desplazamientos en los tipos de interés que no son paralelos.

En el capítulo 1 hemos tomado una aproximación diferente al problema de inmunización. Denota por m el horizonte de planificación del inversor, y por R la rentabilidad del bono de cupón cero con vencimiento m . Y llamemos a los cambios o desplazamientos sobre los tipos de interés forward instantaneos como shocks. En el capítulo 1 definimos la condición débil de inmunización como sigue; para todos los shocks factibles existe un bono, el cual depende del shock, tal que la rentabilidad del bono, cuando este shock ocurre, es al menos R . En este capítulo 1 se muestra que esta condición es equivalente a la existencia de una cartera inmunizada. Este lema implica dos ideas principales. Primero, una cartera convexa apropiada puede ser muy efectiva contra un conjunto más amplio de shocks. Segundo, en un problema de inmunización

los únicos shocks a tener en cuenta son los peores shocks. Además, este lema invita a una segunda lectura. Cuando esta condición falla, y equivalentemente una cartera inmunizada no existe, entonces existe un peor shock tal que ningún bono alcanza la rentabilidad R .

Otra de las contribuciones del capítulo 1 es el desarrollo de la medida de dispersión lineal \tilde{N} . Esta medida es desarrollada considerando el atractivo conjunto de shocks en los cuales las diferencias entre cualquiera dos shocks sobre los tipos de interés forward instantaneos están acotadas por una constante. La cartera con la duración ajustada que minimiza la medida \tilde{N} también minimiza el riesgo de inmunización.

En el capítulo 1 también se muestra la conexión entre el lema y ambas estrategias. Minimizando cualquiera, la medida M^2 o la medida \tilde{N} , estamos minimizando el efecto del peor shock, para cada conjunto particular de shocks, que causa a la condición débil de inmunización fallar. Sin embargo, es importante señalar que no sólo estamos inmunizando o cubriendo contra los peores shocks, sino contra el completo conjunto de shocks asumido.

Con estas ideas en mente, vamos a mostrar en este capítulo que cualquier medida de dispersión es una medida del riesgo de inmunización. Entonces, veremos los peores shocks, cuyo efecto estamos minimizando. Finalmente, daremos el conjunto convexo completo de shocks contra el cual estamos cubriendo. Merece la pena señalar que cada medida de dispersión está derivada a partir de un conjunto de shocks particular, y depende específicamente de los peores shocks en el conjunto considerado. Por lo tanto, el criterio para escoger una medida de dispersión como la más apropiada para usar como una medida del riesgo de inmunización es tomar aquella implicada por el más razonable conjunto de shocks y peores shocks.

Chambers *et al.* (1988) y Prisman and Shores (1988) asumieron que los cambios en los tipos de interés están dados por un polinomio; por lo tanto, estos shocks polinómicos pueden aproximar una amplia clase de posibles shocks y no están limitados a uno

(o varios) factores específicos como los tradicionales modelos de inmunización. Sin embargo, como mostramos en el capítulo 1, shocks polinómicos son modelos muy poco restringidos, y si los restringimos, entonces están muy relacionados al modelo de Fong y Vasicek (1984). Por lo tanto, todos los modelos que consideramos en este capítulo son importantes porque no están relacionados con ningún otro modelo.

Lacey y Nawalkha (1993) mostraron empíricamente la efectividad de minimizar la medida M^2 , y Bierwag *et al.* (1993) mostraron que entre carteras con la duración ajustada, la que incluye un bono con vencimiento del horizonte de planificación del inversor es la que funciona mejor empíricamente. En el capítulo 1 mostramos con un ejemplo como la cartera que minimiza la medida \tilde{N} puede incluir un bono con el vencimiento ajustado. Por lo tanto, debido a ambos resultados empíricos, de la M^2 y del bono con el vencimiento igual al horizonte de planificación, merece también la pena estudiar la relación entre medidas de dispersión y medidas del riesgo de inmunización.

Finalmente, todos los modelos de este capítulo proponen minimizar medidas de dispersión y están restringidos a ajustar la duración; aunque otras estrategias con la duración no ajustada podían ser propuestas como en Prisman y Shores (1988) con respecto a la propuesta por Fong y Vasicek (1984). Sin embargo, como Litterman y Scheinkman (1991), Ilmanen (1992) y otros mostraron, los desplazamientos paralelos son el factor empírico más importante sobre los tipos de interés, y además, al minimizar medidas de dispersión, se minimiza el efecto del peor shock que causa la condición débil de inmunización fallar.

Este capítulo está organizado como sigue. La segunda sección prueba que cualquier medida de dispersión es una medida del riesgo de inmunización. La tercera sección estudia que medidas de dispersión son las más razonables. La última sección concluye el artículo.

2.1 Cualquier Medida de Dispersión es una Medida del Riesgo de Inmunización

En esta sección seguiremos la notación introducida en el capítulo 1. Dejanos denotar por m el horizonte de planificación del inversor, por C el capital a invertir, y por K el conjunto de shocks factibles sobre los tipos de interés forward instantaneos. Siguiendo los supuestos habituales, consideraremos que la cartera q paga un cupón continuo $c(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$. Si $g(t)$, $0 \leq t \leq T$ representa los tipos de interés forward instantaneos y $k(t) \in K$ es un shock sobre $g(t)$, entonces el valor de la cartera q en m , incluídos los cupones pagados antes de m , está dado por

$$V(q, k) = \int_0^T c(t) \exp \left[\int_t^m (g(s) + k(s)) ds \right] dt \quad (2.1)$$

y donde el precio de esta cartera es igual al capital invertido

$$C = \int_0^T c(t) \exp \left[- \int_0^t g(s) ds \right] dt$$

Denotando la rentabilidad del bono de cupón cero con vencimiento m por

$$R = \exp \left[\int_0^m g(s) ds \right] \quad (2.2)$$

y el valor presente del cupón por

$$c(t, 0) = c(t) \exp \left[- \int_0^t g(s) ds \right] \quad (2.3)$$

tenemos que

$$V(q, k) = R \int_0^T c(t, 0) \exp \left[\int_t^m k(s) ds \right] dt \quad (2.4)$$

La función $V(q, k)$ es convexa en k . positiva, y todos los bonos producen la misma rentabilidad bajo el shock nulo ($k = 0$). Estas son las hipótesis H2, H3 y H4 asumidas en el capítulo 1.

Diremos que una cartera está inmunizada si su rentabilidad es al menos R , esto es,

$$\frac{V(q, k)}{C} \geq R \text{ para todo } k \in K$$

Dejanos considerar los siguientes conjuntos de shocks sobre los tipos de interés forward instantaneos, K_n , $n > 0$. A partir de cada uno, desarrollaremos una medida de dispersión diferente. Distinguiremos dos casos: $n > 1$ y $n \leq 1$. Para $n > 1$ cada conjunto acota la derivada del shock, y λ es un parámetro de tal derivada. Para $n > 1$ tenemos los siguientes conjuntos de shocks

$$K_n = \left\{ k(t); \frac{dk(t)}{dt} \leq \lambda(n-1) |t-m|^{n-2}, t \geq 0, t \neq m \right\} \quad (2.5)$$

Todos los conjuntos anteriores son convexos como en la hipótesis H1 del capítulo 1. La razón por la que en cada K_n la derivada está acotada, es para prevenir un shock tal como $k(t) = \lambda(t-m)$ cuando λ es muy grande. Tal shock es un simple polinomio de grado uno, y ante él, cualquier bono perderá todo su valor en m . Cuando $n = 2$ estamos en el caso de Fong y Vasicek (1984), donde ahora λ es la máxima derivada que el shock sobre los tipos de interés forward instantaneos puede tomar para cualquier instante t .

Integrando, obtenemos equivalentemente

$$K_n = \left\{ \begin{array}{l} k(t); k(m) - k(t) \leq \lambda |t-m|^{n-1}, 0 \leq t \leq m \\ k(t) - k(m) \leq \lambda |t-m|^{n-1}, t > m \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

donde ahora hemos acotado la variación de los shocks entre dos instantes.

Para el caso $n \leq 1$ dejamos considerar los siguientes conjuntos de shocks, los cuales acotan la variación entre dos instantes (mayor y menor que m)

$$K_n = \left\{ \begin{array}{l} k(t); k(t_2) - k(t_1) \leq \lambda[(t_2 - m)^{n-1} + (m - t_1)^{n-1}], \\ 0 \leq t_1 < m < t_2 \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

El caso $n = 1$ es un caso límite, y para $n \leq 1$ no podemos acotar la derivada como en (2.5) para $n > 1$, sino la variación de los shocks entre dos instantes (más grande

y más pequeño que m) como en (2.7). Los shocks considerados por en el capítulo 1 permiten cualquier derivada sobre los shocks, pero acotan la variación absoluta de los shocks entre dos instantes cualquiera por el parámetro λ . Este conjunto de shocks está incluido en el conjunto K_1 .

Siguiendo el capítulo 1, dejamos ahora definir el conjunto de los peores shocks $K_n^* \subset K_n$ como aquellos shocks factibles tales que cualquier bono pierde más valor en m cuando uno de estos peores shocks ocurre. Si observamos (2.4), estos peores shocks están dados por la más alta caída de los tipos de interés forward instantaneos antes de m , y por la más alta subida después de m . Tenemos que para cada $n > 0$

$$K_n^* = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 - \lambda(m - t)^{n-1} \text{ if } t < m, \\ \lambda_0 + \lambda(t - m)^{n-1} \text{ if } t > m; \\ \text{siendo } \lambda_0 \text{ cualquier número real} \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

Theorem 1.1 Para cada $n > 0$ y para cada $k \in K_n$ existe un $k^* \in K_n^*$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} k^*(t) \leq k(t) \text{ if } t < m \\ k^*(t) \geq k(t) \text{ if } t > m \end{array} \right. \quad (2.9)$$

donde para $n > 1$

$$\lambda_0 = k(m) \quad (2.10)$$

y para¹ $n \leq 1$

$$\{t_1, t_2\} = \underset{\text{argmin}}{\left\{ \begin{array}{l} \lambda[(t_2 - m)^{n-1} + (m - t_1)^{n-1}] - [k(t_2) - k(t_1)]; \\ 0 \leq t_1 < m < t_2 \end{array} \right\}} \quad (2.11)$$

$$\lambda_0 = k(t_2) - \lambda(t_2 - m)^{n-1} \quad (2.12)$$

¹Podemos ver que las variables t_1 y t_2 minimizando la expresión (2.11) son los dos momentos del shock $k(t)$ más cercanos de no verificar la expresión (2.7). Una vez conocemos t_1 o t_2 , podemos definir a λ_0 como en (2.12).

Prueba. Considera primero que $n > 1$.

Si $0 \leq t \leq m$, tenemos de (2.6)

$$k(t) \geq k(m) - \lambda(m-t)^{n-1}$$

y de (2.8) y (2.10)

$$k(t) \geq k^*(t)$$

Si $t > m$ tenemos de (2.6)

$$k(t) \leq k(m) + \lambda(m-t)^{n-1}$$

y de (2.8) y (2.10)

$$k(t) \leq k^*(t)$$

Considera ahora el caso $n \leq 1$.

Si $0 \leq t < m$, tenemos de (2.8)

$$\begin{aligned} k^*(t) &= \lambda_0 - \lambda(t-m)^{n-1} \\ &= k(t_2) - \lambda(t_2-m)^{n-1} - \lambda(m-t)^{n-1} \\ &= k(t) - [\lambda[(t_2-m)^{n-1} + (m-t)^{n-1}] - [k(t_2) - k(t)]] \\ &\leq k(t) \end{aligned}$$

de (2.7) y (2.12).

Si $t > m$, tenemos de (2.8)

$$\begin{aligned} k^*(t) &= \lambda_0 + \lambda(t-m)^{n-1} \\ &= k(t_2) - \lambda(t_2-m)^{n-1} + \lambda(t-m)^{n-1} \\ &= k(t) + [\lambda[(t-m)^{n-1} + (m-t_1)^{n-1}] - [k(t) - k(t_1)]] \\ &\quad - [\lambda[(t_2-m)^{n-1} + (m-t_1)^{n-1}] - [k(t_2) - k(t_1)]] \\ &\geq k(t) \end{aligned}$$

de (2.7), (2.11) y (2.12). □

En el caso de Fong y Vasicek (1984), $n = 2$, los peores shocks están dados por el polinomio de grado uno

$$k^*(t) = \lambda_0 + \lambda(t - m)$$

y en el caso $n = 1$ por la función escalón

$$k^*(t) = \begin{cases} \lambda_0 - \lambda & \text{if } t < m \\ \lambda_0 + \lambda & \text{if } t > m \end{cases}$$

Aunque los shocks considerados en el capítulo 1 están incluidos en el conjunto K_1 , ambos conjuntos de shocks tienen los mismos peores shocks.

Ahora podemos demostrar el principal resultado de este capítulo.

Teorema 1.2 Para todo $k \in K_n$ y para toda cartera q factible de precio C , se verifica la siguiente acotación

$$\frac{V(q, k) - RC}{RC} \geq \lambda_0(m - D) - \frac{\lambda}{n} M^n \tag{2.13}$$

donde D es la duración de Macaulay de la cartera q y M^n es la medida de dispersión

$$M^n = \int_0^T \frac{c(t, 0)}{C} |t - m|^n dt \tag{2.14}$$

Prueba. A partir del teorema 1.1 y (2.4), inmediatamente sigue que para cualquier $k \in K$ existe un $k^* \in K_n^*$ tal que

$$V(q, k) \geq V(q, k^*)$$

Asumiendo ahora que $V(q, k)$ es diferenciable de Gateaux con respecto a la variable k y teniendo en cuenta que un funcional convexo está siempre acotado por abajo por su

plano tangente (como en Fong y Vasicek (1984) o en el capítulo 1), tenemos que para cada $k^* \in K_n^*$

$$\begin{aligned} \frac{V(q, k^*) - RC}{RC} &\geq \int_0^T \frac{c(t, 0)}{C} \int_t^m k^*(s) ds \\ &= \int_0^T \frac{c(t, 0)}{C} (\lambda_0(m-t) - \frac{\lambda}{n} |t-m|^n) \lambda_0(m-D) - \frac{\lambda}{n} M^n. \quad \square \end{aligned}$$

Si ahora inmunizamos contra shocks paralelos, $D = m$, tenemos que

$$\frac{V(q, k) - RC}{RC} \geq \frac{-\lambda}{n} M^n$$

y por lo tanto, cualquier medida de dispersión es una medida del riesgo de inmunización.

Podemos ver de la prueba del teorema 1.2 que cada medida de dispersión es una ponderación del efecto de un peor shock (con $\lambda_0 = 0$) sobre cada cupón, donde los pesos son el valor presente de los cupones. Minimizando una medida de dispersión minimizamos tales efectos. Sin embargo, no sólo estamos intentando inmunizar contra el conjunto K_n^* , sino contra el más amplio conjunto de shocks K_n . Por otra parte, si para cada conjunto de peores shocks consideramos el peor shock (con $\lambda_0 = 0$) entonces la condición débil de inmunización no es verificada, y por lo tanto, podemos ver de nuevo la conexión entre el lema del capítulo 1 y las estrategias de minimizar medidas de dispersión. Minimizando cualquier medida de dispersión, se minimiza el efecto del peor shock, para cada particular conjunto de shocks, que causa la condición débil de inmunización fallar. La medida M^1 es la medida \tilde{N} del capítulo 1.

Ahora tenemos que decidir que medida de dispersión es la más apropiada para usar como una medida del riesgo de inmunización.

2.2 Escogiendo una Medida de Dispersión

Hemos mostrado que cada medida de dispersión es derivada a partir de un conjunto diferente de shocks, y depende específicamente del conjunto de los peores shocks en

el conjunto asumido. Consecuentemente, consideraremos como medidas de dispersión más apropiadas aquellas implicadas por los más razonables conjuntos de shocks y sus peores shocks. Llevaremos a cabo este análisis mirando a cada conjunto de shocks (ecuaciones (2.5),(2.6) y (2.7)) y peores shocks (ecuación (2.8)).

Aunque el caso $n \leq 0$ es correcto matemáticamente, no tiene sentido económico. Si para este caso los conjuntos K_n son definidos por (2.7), serían muy irreales. Además estos conjuntos dan lugar a absurdos peores shocks y medidas del riesgo de inmunización que no son medidas de dispersión. El efecto del peor shock sobre cualquier cupón es menos infinito. Si ahora componemos este efecto, entonces el valor de cualquier bono en m es cero.

Las medidas de dispersión que están en $0 < n < 1$ están también dadas por irreales peores shocks tan bien como por el completo conjunto de shocks. Por lo tanto, tampoco las consideramos como medidas adecuadas del riesgo de inmunización.

Cuando $n > 2$, los peores shocks que dan lugar a estas medidas no son muy razonables. Están restringidos a tener una derivada igual a cero en $t = m$ y son muy grandes cuando t está lejos de m . Además, los conjuntos de shocks K_n también restringen la derivada de los shocks en los puntos t cercanos a m .

Por lo tanto, nos quedamos con las medidas de dispersión cuando $1 \leq n \leq 2$, esto es, las medidas de dispersión entre la medida lineal y la cuadrática. Ahora vamos a repetir tres argumentos dados en el capítulo 1 sobre las mejores propiedades de los shocks cuando $n = 1$ más bien que cuando $n = 2$. Estas críticas son también válidas para los casos $1 < n < 2$. Sin embargo, son más débiles cuando n se acerca a 1. Cuando n se acerca a 1, las medidas de dispersión tienden a la medida lineal porque el conjunto K_n también se acerca a K_1 .

Primero, los shocks cuando $n = 1$ tienen un argumento teórico a su favor con respecto a los shocks cuando $1 < n \leq 2$. Para $n = 1$ el parámetro de los shocks λ

puede ser entendido como una medida de volatilidad, mostrando en cuanto los shocks sobre los tipos de interés forward instantaneos pueden diferir entre dos instantes. Este parámetro puede ser estimado. Por otra parte, el parámetro λ en el caso $1 < n \leq 2$ es una derivada y tiene un significado económico más complejo y es más difícil de estimar.

Segundo, aunque shocks con una derivada acotada están también acotados, lo contrario es falso. Shocks con pequeñas variaciones podrían tener una derivada muy grande. Consecuentemente, shocks acotados (el caso $n = 1$) incluyen en general a los shocks con la derivada acotada, los casos $1 < n \leq 2$, pero lo contrario es falso.

Tercero, los peores shocks en el la situación $1 < n \leq 2$ son irreales porque conllevan valores muy grandes cuando t está lejos de m . En el caso acotado los peores shocks sobre la estructura temporal de los tipos de interés están dados por

$$\frac{1}{t} \int_0^t k^*(s) ds = \begin{cases} \lambda_0 - \lambda & \text{if } t < m \\ \lambda_0 + \lambda - 2\lambda \frac{m}{t} & \text{if } t > m \end{cases} \quad (2.15)$$

y en el caso $1 < n \leq 2$ por

$$\frac{1}{t} \int_0^t k^* ds = \lambda_0 + \frac{\lambda}{n} \frac{|t - m|^n - m^n}{t} \quad (2.16)$$

Aquí, también es importante señalar que los peores shocks son apalancamientos de la estructura temporal de los tipos de interés en la fecha $2m$.

En breve, los shocks acotados para $n = 1$, los cuales dependen de un parámetro λ , pueden ser considerados como la suma de dos componentes: un desplazamiento paralelo de todos los tipos de interés y un segundo cambio tal que los tipos de interés se mueven en una banda de anchura 2λ . Este parámetro λ puede representar una medida de volatilidad de los tipos de interés. Estos dos componentes parecen un escenario apropiado para describir los cambios en los tipos de interés en este contexto de inmunización.

Para $1 < n < 2$, estas medidas podían compartir algunas de las propiedades de las medidas de dispersión cuadrática y linear. Por ejemplo, no restringen la derivada

del shock tanto como la medida cuadrática cuando t está cerca de m . Por otra parte, permitirían mayores variaciones cuando t está lejos de m que lo que la medida lineal permite. Sin embargo, las dos medidas lineal y cuadrática tienen una ventaja con respecto a las medidas entre ellas; los conjuntos K_1 en (2.7) y K_2 en (2.5), a partir de los cuales se deducen estas medidas, no dependen del parámetro m .

Para traer más luz al problema, vamos a presentar un simple ejemplo para ver que como son las carteras que minimizan las medidas de dispersión. Este ejemplo considera los mismos bonos que en el ejemplo de Balbás e Ibáñez (1996). Tomaremos un horizonte de planificación del inversor de cinco años, $m = 5$, y asumiremos una estructura temporal de los tipos de interés plana, $r = 10\%$, para facilitar los cálculos.

Dejamos considerar el conjunto de bonos con cupón presentados en la tabla 1. La primera columna en tabla 1 es número del bono, la segunda es su vencimiento, la tercera es el cupón (en porcentaje), la cuarta es la periodicidad del cupón (en meses), la quinta es la duración del bono (en años), y las últimas cinco columnas corresponden a las medidas de dispersión dadas por $n = 0.5$, $n = 1$, $n = 1.5$, $n = 2$ y $n = 2.5$.

En la tabla 2 damos las carteras con la duración ajustada. La primera columna es el número de la cartera, la segunda es el primer bono en la cartera, la tercera es el segundo bono en la cartera, la cuarta es el porcentaje del primer bono y las últimas cinco columnas corresponden a las medidas de dispersión dadas por $n = 0.5$, $n = 1$, $n = 1.5$, $n = 2$ y $n = 2.5$. Las carteras están ordenadas de acuerdo a su medida M^1 .

Como Bierwag *et al.* (1993) mostraron, una cartera con dos bonos de duraciones concentradas alrededor del horizonte de planificación no siempre minimiza la medida M^2 . Sin embargo, en este ejemplo sencillo estamos bajo las condiciones donde dicha cartera minimiza la medida M^2 . Podemos ver que cuanto más pequeña es la medida de dispersión más grande es la posibilidad de que la cartera óptima incluya un bono con el vencimiento igual al horizonte de planificación (bono 2) porque las carteras incluyendo el bono 2 están más cerca de la cartera óptima. Sin embargo, cuanto más

grande sea la medida de dispersión mayor es la posibilidad de que la cartera óptima sea una cartera con las duraciones de los bonos concentrados entorno al horizonte de planificación. El siguiente interesante resultado parece seguirse de este ejemplo. La medida lineal, *ceteris paribus*, es el límite entre la cartera óptima, incluyendo un bono con el vencimiento ajustado o siendo una cartera compuesta por bonos con la duraciones concentradas entorno al horizonte de planificación. Ambas carteras, una de bonos con duración concentrada entorno al horizonte de planificación y una cartera que incluye un bono con el vencimiento igual al horizonte de planificación minimizan la medida \tilde{N} .

Dejanos ahora centrarnos en las medidas M^2 y \tilde{N} , y dejanos comparar por ejemplo las carteras 1 y 3 en la tabla 2. El bono 2, tiene las mínimas medidas M^2 y \tilde{N} en la tabla 1. Sin embargo, la cartera 3 incluye al bono 2, minimiza la medida \tilde{N} , pero tiene una alta M^2 . Una explicación de esto podría ser la siguiente. El bono 2 en la cartera 3 tiene una duración más baja que el bono 3 en la cartera 1. Por lo tanto, la cartera 3 debe invertir más dinero en el segundo bono, bono 4, para igualar la duración con m . Puesto que M^2 es una medida de dispersión cuadrática, el segundo bono causa que aumente enormemente, mientras la medida lineal \tilde{N} no crece tan rápido en este segundo bono. Además, la medida M^2 del bono 2 es el 80.61% del bono 3. La medida \tilde{N} del bono 2, sin embargo, es sólo un 57.51% del bono 3. Esto significa que incluir el bono 2 en lugar del bono 3, es más útil para minimizar la medida \tilde{N} que la medida M^2 .

La cartera 1, una cartera de bono con duraciones concentradas entorno al horizonte de planificación, es muy interesante porque minimiza ambas medidas de dispersión. Por otra parte, algunas de las carteras que minimizan la medida lineal incluyen un bono con el vencimiento igual al horizonte de planificación. Estas carteras pueden explicar el resultado empírico de Bierwag *et al.* (1993) que señala que la mejor estrategia de inmunización consiste en ajustar la duración pero también incluye un bono con vencimiento igual al horizonte de planificación.

2.3 Conclusiones

Hemos mostrado que cualquier medida de dispersión en una medida del riesgo de inmunización. Primero, el conjunto de shocks factibles y después el conjunto de los peores shocks son aquellos que determinan la forma de la medida de dispersion como medida del riesgo de inmunización. Cualquier medida de dispersión que no se encuentra entre la linear y la cuadrática parece muy poco razonable porque viene implicada por un irreal conjunto de shocks o de peores shocks.

La medida linear contaría con dos argumentos favorables con respecto a las medidas M_n , $1 < n \leq 2$. El primer argumento es el mismo utilizado para rechazar las otras medidas de dispersión. El conjunto de shocks que da lugar a la medida linear acota la variación de los shocks por una constante. Tiene un significado económico, y es más razonables que acotar la derivada de los shocks. Por otra parte, las carteras con la duración ajustada que minimizan la medida \tilde{N} podrían incluir un bono con el vencimiento igual al horizonte de planificación.

Del ejemplo mostrado en este capítulo parece desprenderse el siguiente interesante resultado. La medida linear, *ceteris paribus*, es el límite entre la cartera óptima, incluyendo un bono con el vencimiento ajustado o siendo una cartera compuesta por bonos con la duración concentrada entorno al horizonte de planificación. Ambas carteras, una de bonos con duración concentrada entorno al horizonte de planificación y una cartera que incluye un bono con el vencimiento igual al horizonte de planificación minimizan la medida \tilde{N} .

En resumen, son necesarios más estudios para mostrar que conjunto de shocks es más razonable, aquellos con una derivada acotada o aquellos acotados entre dos instantes. También se necesitan más trabajos empíricos sobre la efectividad de la medida \tilde{N} y más investigaciones sobre que medidas se comportan mejor empíricamente. Aunque de la discusión en este capítulo, la medida linear parece una mejor medida del riesgo de

inmunización.

Por otra parte, este capítulo podía ser extendido para desarrollar medidas del riesgo de inmunización que no son medidas de dispersión o para desarrollar medidas del riesgo de inmunización que son combinación de medidas de dispersión, por ejemplo la lineal y la cuadrática. Sin embargo, no sabemos del sentido económico de tales medidas.

Referencias

- Bierwag, G.O., (1977), "Immunization, Duration, and the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, 725-742.
- Bierwag, G.O., I. Fooladi and G.S. Roberts, (1993), "Designing an Immunized Portfolio is M-square the key?," *Journal of Banking and Finance*, 17, 1147-1170.
- Brennan, M.J., and E. Schwartz, (1983), "Duration, Bond Pricing and Portfolio Management," in: G.G. Kaufman *et al.* eds., *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*. (JAI Press, Greenwich, CN).
- Chambers, D.R., W.T. Carleton and R.C. McEnally, (1988), "Immunizing Default-Free Bond Portfolios with a Duration Vector," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, 1, 89-104.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross. (1979), "Duration and the Measurement of Basis Risk," *Journal of Business*, 52, 51-61.
- Fisher, L. and R. Weil, (1971), "Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies," *Journal of Business*, 52, 51-61.
- Fong, H.G. and O.A. Vasicek, (1984), "A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization," *The Journal of Finance*, 39, 5, December, 1541-1546.
- Ilmanen, A., (1992), "How well does Duration Measure Interest Rate Risk?," *Journal of Fixed Income*, 1, Mar, 4, 43-51.
- Khang, C., (1979), "Bond Immunization when Short-Term Interest Rates Fluctuate more than Long Rates," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 14, 5, December, 1085-1090.
- Lacey, N., and S. Nawhalka, (1993), "Convexity, Risk and Returns," *Journal of Fixed Income*, 3, Dec, 3, 72-79.

Litterman, R. and J.A. Scheinkman, (1991), "Common Factors affecting Bond Returns," *The Journal of Fixed Income*, June, 54-61.

Prisman, E.Z. and M.R. Shores, (1988), "Duration Measures for specific term structure estimations and applications to bond portfolio immunization," *Journal of Banking and Finance*, 12, 493-504.

Tabls 1: Conjunto de Bonos

Bono número	Vencimiento (años)	cupón en %	copón (meses)	Duración (años)	$M^{0.5}$	M^1	$M^{1.5}$	M^2	$M^{2.5}$
1	4	10	12	3.4823	1.1840	1.5176	2.1307	3.2713	5.4159
2	5	10	12	4.1610	0.5043	0.8389	1.4539	2.5982	4.7497
3	6	10	12	4.7759	1.1231	1.4588	2.0755	3.2231	5.3809
4	7	10	12	5.3328	1.3555	2.0201	3.1025	4.9093	8.0007
5	8	10	12	5.8368	1.5168	2.5281	4.3060	7.4515	13.051
6	9	10	12	6.2928	1.6398	2.9878	5.5957	1.0672	20.606

Tabla 2: Carteras con la Duración Ajustada.

número	bono n.1	bono n.2	% bono n.1	$M^{0.5}$	M^1	$M^{1.5}$	M^2	$M^{2.5}$
1	3	4	59.77	1.2166	1.6846132	2.4887	3.9014	6.4348
2	3	5	78.88	1.2063	1.6846172	2.5465	4.1160	7.0007
3	2	4	28.40	1.1137	1.6846198	2.6342	4.2528	7.0773
4	3	6	85.23	1.1994	1.6846211	2.5954	4.3233	7.0773
5	2	5	49.93	1.0112	1.6846342	2.8817	5.0279	8.9059
6	2	6	60.64	0.9511	1.6846482	3.0839	5.7759	10.990
7	1	4	17.98	1.3246	1.9297429	2.9277	4.6146	7.5358
8	1	5	35.54	1.3985	2.1690124	3.5328	5.9657	10.3377
9	1	6	46.00	1.4301	2.3115433	4.0018	7.2680	13.6187

Capítulo 3

Carteras Maximin en Modelos donde Immunization no es Factible

Resumen

Este artículo extiende la literatura existente sobre inmunización calculando las carteras maximin en modelos donde completa inmunización no es posible. Estos modelos son importantes porque no permiten arbitraje, y sin embargo permiten muchos cambios diferentes sobre los tipos de interés. Además, las carteras maximin parecen las más adecuadas de calcular en estos modelos debido a la cercana relación entre los conceptos de cartera inmunizada y cartera maximin. Mostraremos que las carteras maximin están caracterizadas por condiciones de punto de silla y a partir de ellas daremos un algoritmo para calcular las carteras maximin. Nuestro modelo está especializado en los conjuntos de shocks muy generales a partir de los cuales las medidas de dispersión M^2 y \tilde{N} han sido desarrolladas. Calculando algunos ejemplos de estas carteras maximin, se sigue que están cerca de carteras con la duración ajustada, y se comportan casi como una cartera inmunizada. Consecuentemente, podemos contestar alguno de los puzzles de esta literatura.

Introducción

LAS ESTRATEGIAS CON LA DURACIÓN AJUSTADA se han mostrado muy efectivas cubriendo o inmunizando el riesgo de los tipos de interés de carteras de bonos libres de opción y libres de riesgo de incumplimiento. Una cartera inmunizada es definida como una cartera que garantiza en una fecha específica del horizonte, la rentabilidad del bono de cupón cero con vencimiento de la fecha del horizonte que observamos en el mercado. Fisher y Weil (1971) mostraron que una cartera con la duración ajustada es una cartera inmunizada ante desplazamientos paralelos de los tipos de interés. Además, Bierwag y Khang (1979) (ver también Khang (1983) y Prisman (19986)) mostraron que estas carteras son también carteras maximin, garantizan la rentabilidad más alta en la fecha del horizonte. Un modelo de desplazamientos paralelos de los tipos de interés puede ser considerado en la clase más general de modelos de los tipos de interés donde inmunización es factible. En tales modelos, en el capítulo 1 se muestra que una cartera inmunizada es siempre una cartera maximin.

Sin embargo, debido a que los desplazamientos en los tipos de interés no tienen por que ser paralelos, modelos que contienen cambios más generales han sido propuestos. Además, para cada uno de estos modelos más generales, una o varias estrategias diferentes han sido desarrolladas para cubrir el riesgo de los tipos de interés. Por ejemplo, Fong y Vasicek (1984) (ver también Montrucchio y Peccati (1991)), Chambers *et al.* (1988), Prisman and Shores (1988), Bierwag *et al.* (1993), las estrategias propuestas en los capítulos 1 y 2 y otros. Como una ilustración, Fong y Vasicek (1984) consideran un conjunto de shocks donde la derivada de los tipos de interés forward instantaneos está acotada, y proponen ajustar la duración y minimizar la medida del riesgo de inmunización M^2 . Por el contrario, una característica común de todos estos modelos es que en cada modelo inmunización no es factible, *i.e.*, no existe una cartera inmunizada. Ver por ejemplo Prisman y Shores (1988) o el capítulo 1.

Aunque en estos modelos no existe una cartera inmunizada, el capítulo 1 prueba que

una cartera maximin siempre existe. Estas carteras maximin garantizan la rentabilidad más alta en el modelo, aunque esta rentabilidad es inferior a la rentabilidad de una cartera inmunizada. Por lo tanto, (ver también el capítulo 1) tenemos la relación exacta entre los conceptos de cartera inmunizada y cartera maximin. Una cartera inmunizada es siempre una cartera maximin, pero lo opuesto es falso en modelos donde inmunización no es factible. Sin embargo, en estos modelos, donde inmunización no es factible, las carteras maximin nunca han sido calculadas.

Este capítulo extiende la literatura existente sobre inmunización calculando las carteras maximin en modelos donde inmunización no es factible. Estos modelos son importantes, porque no permiten arbitraje, y sin embargo permiten muchos cambios diferentes sobre los tipos de interés. Además, las carteras maximin parecen las más adecuadas de calcular en estos modelos debido a la cercana relación entre los conceptos de una cartera inmunizada y una maximin. Ahora vamos a desarrollar estas ideas.

Primero, independientemente de si inmunización es factible o no, una característica importante de estos modelos es que el valor de los bonos es una función convexa de los tipos de interés. Ingersoll *et al.* (1978) señalan que si inmunización es factible entonces estos modelos implican arbitraje. Por lo tanto, sólo modelos donde inmunización no es factible son apropiados para estudiar un problema de inmunización. Segundo, estos modelos permiten muchos desplazamientos diferentes sobre los tipos de interés, y por lo tanto, no dependen de la exactitud y estacionariedad de los factores que mueven la estructura temporal de los tipos de interés.

Por otra parte, en el capítulo 1 se discute de manera extensiva un viejo puzzle de esta literatura. ¿Porque en estudios empíricos de inmunización las carteras con la duración ajustada trabajan tan bien como modelos más complejos aunque sean derivadas en un modelo inconsistente con equilibrio y los desplazamientos en los tipos de interés no sean paralelos. como se asume? Denotemos por m el horizonte de planificación del inversor y por R la rentabilidad del bono de cupón cero con vencimiento m que

observamos en el mercado. Entonces, se definió en el capítulo 1 la condición débil de inmunización como sigue; para todos los shocks factibles existe un bono, el cual depende del shock, tal que la rentabilidad del bono, cuando este shock ocurre, es al menos R . Se mostró como esta condición es equivalente a la existencia de una cartera inmunizada. Este lema implica dos ideas principales. Primero, una apropiada cartera convexa puede ser muy efectiva contra un conjunto convexo de shocks más amplio. Segundo, en un problema de inmunización los únicos shocks para tener en cuenta son los peores shocks. La cartera convexa apropiada sería la cartera maximin, y el conjunto de shocks amplio sería un modelo donde inmunización no es factible que incluye shocks lejos de ser paralelos. Allí se sugiere que una cartera con la duración ajustada estaría muy cerca de esta cartera maximin, y por lo tanto, resolvería el puzzle.

Calculando las carteras maximin en estos modelos, podemos también hacer una serie de contribuciones útiles a la literatura sobre inmunización. Primero, para cada modelo, podemos establecer la relación entre las estrategias propuestas por la literatura y las carteras maximin. Por ejemplo, en el modelo de Fong y Vasicek (1984), ¿es la estrategia de igualar la duración y minimizar la medida M^2 la cartera maximin en tal modelo?. O quizás, en el mismo modelo de Fong y Vasicek (1984), ¿sería la cartera maximin una de las estrategias que no ajustan la duración propuestas por Prisman y Shores (1988)?

Segundo, la literatura sobre inmunización presenta algunos puzzles. Por ejemplo, Bierwag *et al.* (1993) y otros mostraron que entre carteras con la duración ajustada, la cartera que incluye un bono con el vencimiento ajustado es la cartera que se comporta mejor empíricamente. En el capítulo 1 mostramos con un ejemplo que una cartera minimizando la medida del riesgo de inmunización \tilde{N} podría incluir un bono de vencimiento igual al horizonte de planificación. ¿Hay un modelo donde la cartera maximin contiene un bono de vencimiento igual al horizonte de planificación? ¿Cuál es el mejor modelo para calcular la cartera maximin?

En este capítulo seguimos el modelo del capítulo 1. Allí se prueba la existencia de las carteras maximin entre bonos bajo tres supuestos muy generales. Empezaremos el capítulo extendiendo los resultados de existencia entre bonos a un subconjunto convexo de carteras factibles, con un número finito de puntos extremos, *e.g.*, carteras con la duración ajustada. Entonces, siguiendo una aproximación muy común en teoría de juegos, mostramos que las carteras maximin están caracterizadas por condiciones de punto de silla, y por lo tanto, por medio de un sistema de ecuaciones. Este sistema es no lineal y más difícil de resolver que el que habitualmente aparece en teoría de juegos. Además, el sistema no puede ser resuelto con un programa lineal y consecuentemente, un algoritmo es desarrollado, el cual conduce hasta la cartera de bonos maximin.

A continuación, tenemos que considerar el conjunto de shocks para calcular las carteras maximin. En el capítulo 1 se muestra que shocks dados por un simple polinomio de grado uno contienen un peor shock tal que el valor de cualquier bono en la fecha del horizonte es cero. Por lo tanto, modelos polinómicos no son adecuados para estudiar carteras maximin.

Primero, calculamos las carteras maximin en el caso no muy realista de sólo bonos de cupón cero, porque podemos obtener una solución explícita de las carteras maximin. Consideramos los conjuntos de shocks que dan lugar a todas las medidas de dispersión como medidas del riesgo de inmunización, como mostramos en el capítulo 2. Mostramos que una cartera con la duración ajustada que consiste de dos bonos con vencimientos mayor y menor, pero lo más cercanos al horizonte de planificación es la cartera maximin para todos los conjuntos de shocks y minimiza todas las medidas de dispersión cuando consideramos los conjuntos de shocks que dan lugar a las medidas de dispersión más grande o igual que la linear.

Entre bonos con cupón, especializamos el modelo en el conjunto de shocks a partir de los cuales las medidas de dispersión M^2 (Fong y Vasicek (1984)) y \tilde{N} (ver capítulo 1) son desarrolladas. Estos conjuntos de shocks tienen derivada acotada y tienen variaciones

acotadas entre dos instantes arbitrarios, respectivamente. Representamos ambas cotas por el parámetro λ . Ambos conjuntos de shocks son muy generales y permiten casi cualquier cambio sobre los tipos de interés forward instantáneos.

Finalmente, calculamos la carteras maximin en dos ejemplos para ambos conjuntos de shocks con bonos con cupón, entre bonos y también entre carteras con la duración ajustada porque este es el resultado teórico y empírico clásico, *i.e.*, Fisher y Weil (1971). Calculando la cartera maximin podemos obtener el peor shock y el valor garantizado por esta cartera. Estos dos valores pueden ser muy interesantes para el inversor. Calculamos la cartera maximin para muchos valores del parámetro λ para ver el camino de las carteras maximin.

Como una consecuencia de los resultados obtenidos y de las ventajas teóricas de los shocks acotados, dos nuevas estrategias son propuestas para los shocks introducidos en el capítulo 1. Primero, estimar el parámetro λ y calcular la cartera maximin entre bonos, que es teóricamente la mejor estrategia. Esta estrategia estaría muy cerca de una cartera con la duración ajustada y puede incluir un bono con el vencimiento igual al horizonte de planificación. Segundo, estimar el parámetro λ y calcular la cartera maximin entre carteras con la duración ajustada. Porque estas carteras trabajan bien en estudios empíricos, y en los ejemplos calculados no dependen casi del parámetro λ y garantizan un valor muy cercano a la cartera maximin entre bonos. Ambas estrategias proporcionan una explicación al puzzle de la duración ajustada y a los resultados empíricos del bono con vencimiento igual al horizonte de planificación de Bierwag *et al.* (1993).

Este capítulo está organizado como sigue. La primera sección establece el conjunto de hipótesis, y a partir de ellas, la existencia de carteras maximin es probada en un contexto general. La segunda sección está dedicada a caracterizar las carteras maximin por medio de condiciones de punto de silla. La tercera estudia la relación entre carteras maximin y carteras con la duración ajustada que minimizan medidas de dispersión.

En la cuarta sección resolvemos la cartera maximin bajo dos ejemplos con bonos con cupón, aplicando un algoritmo previamente. Finalmente, la última sección concluye el capítulo.

3.1 Existencia de Carteras Maximin

En esta sección seguiremos la notación introducida en el capítulo 1. Sea $[0, T]$ un intervalo de tiempo, siendo $t = 0$ el momento presente. Dejanos considerar n bonos libres de opción y libres de ejercicio de incumplimiento con vencimiento menor o igual que T , y con precios P_1, P_2, \dots, P_n respectivamente. Sea K el conjunto de shocks admisibles sobre los tipos de interés, siendo K un subconjunto del espacio vectorial de funciones de valor real definido en $[0, T]$.

Sea m , ($0 < m < T$), el horizonte de planificación del inversor, y los funcionales de valor real

$$V_i : K \rightarrow R \quad i = 1, 2, \dots, n$$

sean tales que $V_i(k)$ (donde $k \in K$ es cualquier shock admisible) es el valor del bono i -ésimo en el instante m , que incluye los cupones pagados antes de m , si el shock k tiene lugar.

En el capítulo 1 fueron asumidas las siguientes tres hipótesis:

H1: K es un conjunto convexo.

H2: V_i es un funcional convexo de k para $i = 1, 2, \dots, n$.

H3: $V_i(k) > 0$ para $i = 1, \dots, n$ y para cualquier $k \in K$.

Estas hipótesis son bastante simples y claras

Sea $C > 0$ la cantidad total a invertir, y sea $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ un vector tal que q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, representa el número de unidades del bono i -ésimo que el inversor



está comprando. Las restricciones

$$\sum_{i=1}^n q_i P_i = C, \quad q_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

están claras, y representaremos por Q el conjunto de carteras q tales que expresión (3.1) se cumple.

El funcional

$$V(q, k) = \sum_{i=1}^n q_i V_i(k) \quad (3.2)$$

nos da el valor en el instante m de la cartera q si el shock k toma lugar, y es lineal en la variable q y convexo en la k .

Definimos la cantidad garantizada por la cartera q como sigue

$$\bar{V}(q) = \text{Inf}\{V(q, k); k \in K\}$$

Diremos que q^* es una cartera maximin en Q si resuelve el programa

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } \bar{V}(q) \\ q \in Q \end{array} \right\} (PQ)$$

Ahora introduciremos el concepto de cartera maximin en cualquier subconjunto cerrado y convexo de Q .

Si Q^* es un subconjunto cerrado y convexo de Q entonces q^* es una cartera maximin en Q^* si resuelve

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } \bar{V}(q) \\ q \in Q^* \end{array} \right\} (PQ^*)$$

Dejanos apuntar que si q' es maximin en Q y q^* es maximin en Q^* entonces

$$\bar{V}(q^*) \leq \bar{V}(q')$$

i.e., la cantidad garantizada por las carteras en Q es mayor o igual que la garantizada en Q^* . En el capítulo 1 se muestra que el programa (PQ) siempre tiene solución, *i.e.*, siempre existe una cartera maximin. Ahora estamos interesados en generalizar este resultado a un subconjunto convexo Q^* con un número finito de puntos extremos.

Teorema 1.1.

Si Q^* tiene un número finito de puntos extremos, entonces el programa (PQ^*) tiene solución, *i.e.*, siempre existe una cartera maximin $q^* \in Q^*$.

Prueba. Ver el Apéndice. □

El interés del último resultado estará más claro si consideramos al conjunto Q^* como al conjunto de carteras factibles con duración igual al horizonte de planificación del inversor. Ésta es la estrategia clásica para inmunizar una cartera de bonos ante desplazamientos paralelos. Si los shocks son continuamente diferenciables (como en Fong y Vasicek (1984)) entonces una cartera inmunizada no existe, pero existen carteras maximin en Q y también en Q^* . Tenemos una situación análoga si consideramos los shocks integrables y acotados (del capítulo 1).

3.2 Condiciones de Punto de Silla

Una vez sabemos que las carteras maximin existen, estudiaremos las condiciones generales para caracterizarlas. Si cuidadosamente analizamos la prueba del teorema 1.1, obtendremos que para una cartera maximin q^* en Q^*

$$\bar{V}(q^*) = \text{Inf}\{U(k); k \in K\}C \quad (3.3)$$

donde U es el funcional de valor real dado en (3.25). Por lo tanto, si consideramos el programa de minimización

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } U(k) \\ k \in K \end{array} \right\} (PK)$$

y $k^* \in K$ es su solución, entonces

$$\bar{V}(q^*) = U(k^*)C \tag{3.4}$$

El funcional U podría estar también dado por

$$U(k) = \text{Max} \left\{ \frac{V(q, k)}{C}; q \in Q^* \right\} \tag{3.5}$$

puesto que fijado un shock k , V es lineal en la variable q y entonces su máximo debe ser obtenido en un punto extremo de Q^* . Por lo tanto, (3.4) podría ser escrito como

$$\text{Max}_{\{q \in Q^*\}} \text{Inf}_{\{k \in K\}} V(q, k) = \text{Inf}_{\{k \in K\}} \text{Max}_{\{q \in Q^*\}} V(q, k) \tag{3.6}$$

La última igualdad es bien conocida en teoría de juegos y caracteriza la existencia de puntos de silla para juegos de dos personas de suma cero. Este hecho podría ser aplicado en inmunización para obtener las carteras maximin por medio de condiciones de punto de silla.

Definición 2.1. Diremos que un par $(q^*, k^*) \in Q^* \times K$ es un punto de silla del funcional V en $Q^* \times K$ si para cualquier cartera $q \in Q^*$ y para cualquier shock admisible $k \in K$ tenemos

$$V(q, k^*) \leq V(q^*, k^*) \leq V(q^*, k)$$

Prisman (1986) muestra que una cartera q está inmunizada si y sólo si $(q, 0)$ es un punto de silla de V . El siguiente resultado podría ser considerado como una extensión de Prisman (1986) en modelos donde inmunización no es factible.

Teorema 2.2.

Dada una cartera $q^* \in Q^*$ y un shock $k^* \in K$, entonces q^* es maximin en Q^* y k^* resuelve $(PK)^1$ si y sólo si (q^*, k^*) es un punto de silla de V en $Q^* \times K$.

Prueba. Ver el Apéndice². □

Dejanos introducir un sistema de ecuaciones para caracterizar los puntos de silla de $V(q, k)$ en $Q^* \times K$. Para hacer esto, vamos a considerar que el conjunto $\{q^1, q^2, \dots, q^l\}$ de puntos extremos de Q^* es conocido, y por lo tanto, las carteras en Q^* están dadas por sus combinaciones lineales convexas. Vamos también a asumir, que el conjunto K está incluido en un espacio normado, que todos sus puntos son interiores, y que los funcionales V_1, V_2, \dots, V_n son diferenciables de Gateaux (ver Luenberger (1968)).

Puede probarse fácilmente que (q^*, k^*) es un punto de silla de V si y sólo si

$$q^* = \sum_{i=1}^l \alpha_i^* q^i$$

$$y$$

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i^* = 1 \tag{3.7}$$

$$\alpha_i^* [V(q^i, k^*) - \text{Max}\{V(q^j, k^*); j = 1, \dots, l\}] = 0 \quad i = 1, \dots, l \tag{3.8}$$

$$\alpha_i^* \geq 0 \quad i = 1, \dots, l \tag{3.9}$$

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i^* \left. \frac{\partial V(q^i, k)}{\partial k} \right|_{k=k^*} = 0 \tag{3.10}$$

donde la derivada en ecuación (3.10) es la diferencial de Gateaux del funcional V con respecto a su variable k evaluada en $k = k^*$ (ver el capítulo 1). Como mostraremos, sólo son las derivadas parciales con respecto a los parámetros del shock cuando trabajamos con razonables tipos de shocks.

¹De ahora en adelante, si k^* resuelve (PK) es llamado el "peor shock".

²Vamos a mostrar la prueba aunque es muy similar a una prueba muy bien conocida en teoría de juegos.

Para probar las ecuaciones (3.7) hasta (3.10) dejamos apuntar que si (q^*, k^*) es un punto de silla entonces (3.10) claramente sigue de $V(q^*, k) \geq V(q^*, k^*)$, (3.7) y (3.9) son obvias, y (3.8) es debida al hecho de que $V(q^*, k^*) \geq V(q, k^*)$ y para un programa linear, cualquier maximo es una combinación convexa linear de puntos los cuales son extremos y máximos.

Conversamente, si el sistema de ecuaciones se cumple, entonces para poder probar que (q^*, k^*) es un punto de silla sólo tenemos que tener en mente que las condiciones de optimalidad necesarias para programas de minimización convexos (o programas de maximización lineares) son también suficientes.

3.3 ¿Es Minimizar Medidas de Dispersión equivalente a buscar Carteras Maximin?

Tenemos ahora que decidir que conjuntos de shocks son adecuados para calcular las carteras maximin. Un conjunto que permite muchos desplazamientos sobre los tipos de interés sería adecuado. En el capítulo 1 se apuntó que los peores shocks, en el conjunto de los shocks factibles, son los únicos shocks a considerar en un modelo de inmunización. Por esta razón shocks polinómicos no son razonables para estudiar las carteras maximin. En el capítulo 1 se muestra que shocks polinómicos son modelos muy poco restringidos. Un simple polinomio de grado uno contiene un peor shock,

$$k(t) = \lambda(t - m), \lambda \rightarrow +\infty,$$

tal que el valor de cualquier bono en el horizonte de planificación es cero. Además, si acotamos la derivada de los shocks para evitar este peor shock, estamos bajo el modelo de Fong y Vasicek (1984). En el capítulo 2 se obtienen como caso particular las medidas M^2 de Fong y Vasicek (1984) y \tilde{N} del capítulo 1, ver también Alexander y Resnick (1985), mostrando que cualquier medida de dispersión puede ser considerada

3.3 ¿Es Minimizar Medidas de Dispersión equivalente a buscar Carteras...85

como una medida del riesgo de inmunización. Los conjuntos de shocks que dan lugar a todas estas medidas de dispersión (al menos las incluídas entre la lineal y la cuadrática) son razonables conjuntos de shocks porque permiten muchos diferentes shocks sobre los tipos de interés, y por lo tanto, nos vamos a quedar con ellos. Consequentemente, es útil empezar estudiando la relación entre carteras que ajustan la duración y minimizan medidas de dispersión con las carteras maximin.

Siguiendo los supuestos usuales en inmunización, dejemos considerar que la cartera q paga un cupón continuo $c(t)$ ($0 \leq t \leq T$). Si $g(s)$ ($0 \leq s \leq T$) representa los tipos de interés forward instantaneos y $k(s)$ es un shock sobre $g(s)$, entonces el valor de la cartera q en el instante m está dado por

$$V(q, k) = \int_0^T c(t) \exp \left[\int_t^m (g(s) + k(s)) ds \right] dt \quad (3.11)$$

Denotando la rentabilidad del bono de cupón cero con vencimiento m por

$$R = \exp \left[\int_0^m g(s) ds \right] \quad (3.12)$$

y el valor presente del cupón por

$$c(t, 0) = c(t) \exp \left[- \int_0^t g(s) ds \right] \quad (3.13)$$

tenemos que³

$$V(q, k) = R \int_0^T c(t, 0) \exp \left[\int_t^m k(s) ds \right] dt \quad (3.14)$$

En el capítulo 2 se consideran los siguientes conjuntos de shocks para $l > 1$, los cuales acotan la derivada de los shocks,

$$K_l = \left\{ k(t); \frac{dk(t)}{dt} \leq \lambda(l-1) |t-m|^{l-2}, t \geq 0 \right\} \quad (3.15)$$

³Observamos que habiendo definido $V(q, k)$ como en (3.11), la hipótesis **H4** del capítulo 1 se cumple. la cual dice que $V_i(0) = RP_i$, $i = 1, \dots, n$.

y para $0 < l \leq 1$ consideran los siguientes conjuntos de shocks, los cuales acotan la variación entre dos instantes (mayor y menor que m),

$$K_l = \left\{ \begin{array}{l} k(t); k(t_2) - k(t_1) \leq \lambda[(t_2 - m)^{l-1} + (m - t_1)^{l-1}], \\ 0 \leq t_1 < m < t_2 \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

En el capítulo 2 también se muestra que para $l > 0$ el conjunto de los peores shocks está dado por

$$K_l^* = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 - \lambda(m - t)^{l-1} \text{ if } t \leq m, \\ \lambda_0 + \lambda(t - m)^{l-1} \text{ if } t > m; \\ \text{donde } \lambda_0 \text{ es cualquier número real} \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

Podemos ver que para cada $l > 0$ si fijamos λ_0 , los peores shocks están dados por la mayor subida de los tipos de interés forward instantaneos después de m y por la mayor bajada antes de m . A partir de estos conjuntos, prueban que las medidas de dispersión

$$M^l = \int_0^T \frac{c(t, 0)}{C} |t - m|^l dt \quad (3.18)$$

son medidas del riesgo de inmunización. $l = 2$ es la medida de dispersión cuadrática de Fong y Vasicek (1984), y $l = 1$ es la medida de dispersión lineal del capítulo 1.

Dejanos ahora definir las siguientes dos estrategias para cada $l > 0$.

- a) Buscar la cartera maximin en K_l .
- b) Ajustar la duración y minimizar la medida de dispersión M^l .

Dejanos analizar dos situaciones diferentes. Primero, será probado que si trabajamos con bonos de descuento puro, entonces estrategias a) o b) producen la misma solución (la misma cartera final). Además, esta solución no depende de l si $l \geq 1$. Sin embargo, en el caso general (esto es, si consideramos bonos con cupón) entonces a) o b) no son equivalentes y dependen de l , como será mostrado en algunos ejemplos.

3.3 ¿Es Minimizar Medidas de Dispersión equivalente a buscar Carteras...87

Dejamos probar que el programa (PK) tiene una solución interior para cada conjunto K_l . El significado de los conjuntos K_l^* es que para cualquier $k \in K_l$ existe un $k^* \in K_l^*$ tal que

$$\begin{cases} k^*(s) \leq k(s) & \text{if } s \leq m \\ k^*(s) \geq k(s) & \text{if } s > m \end{cases} \quad (3.19)$$

Por lo tanto, de (3.14) y (3.19) obtenemos

$$V(q, k) \geq V(q, k^*) \quad (3.20)$$

para cualquier cartera q , lo cual implica

$$U(k) \geq U(k^*) \quad (3.21)$$

siendo U el funcional introducido en (3.25). Puesto que U es un funcional convexo (es el máximo de un número finito de funcionales convexos como se observa en la expresión (3.25)), para poder probar que el programa (PK) tiene una solución interior, es suficiente mostrar que $U(k^*) \rightarrow +\infty$ si $\lambda_0 \rightarrow +\infty$ o $\lambda_0 \rightarrow -\infty$. Esto podría ser fácilmente probado si tenemos en cuenta (3.14) y (3.17) para evaluar $V(q, k^*)$, y también entre los n bonos factibles hay al menos un cupón pagado antes de m y otro pagado después de m .

A. El caso de bonos de descuento puro

Aunque un mercado de bonos de cupón cero no es muy habitual, encontramos dos razones para estudiar las carteras maximin entre ellos. Primero, entre bonos de cupón cero y para el conjunto K_l , $l \geq 1$, podemos derivar una solución explícita para la cartera maximin y para sus peores shocks asociados. Además, en el capítulo 2 se muestra que los conjuntos de shocks K_l , $1 \leq l \leq 2$, son muy adecuados para estudiar inmunización. Segundo Prisman y Shores (1988) ilustraron con ejemplos sobre bonos de cupón cero estrategias alternativas, que no ajustan la duración, a la estrategia de

Fong y Vasicek (1984), el caso $l = 2$. Estas estrategias alternativas son importantes porque son derivadas asumiendo que los shocks son polinómicos. De esta manera, podemos relacionar de una manera muy cercana ambas estrategias.

Proposición 3.1. Dejanos asumir que los n bonos considerados son bonos de descuento puro, y sea $q^* \in Q$ una cartera factible. Entonces, las dos siguientes condiciones son equivalentes para todo $l > 0$. Además, no dependen de l , si $l \geq 1$.

- i) q^* es maximin en Q si consideramos el conjunto de shocks K_l
- ii) q^* resuelve el programa

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } M^l \\ q \in Q^* \end{array} \right\}$$

donde M^l está dada por (3.18) y Q^* es el conjunto de carteras con la duración ajustada en Q .

Prueba. Ver el Apéndice. □

Podemos ver que entre bonos de cupón cero, las carteras con la duración ajustada minimizando la medida de dispersión l son también las carteras maximin en el el conjunto K_l , para todo $l > 0$. Además, para todo $l \geq 1$ tenemos lo siguiente. Si $T_1 < T_2 \dots < T_n$ representa el vencimiento de los n bonos considerados, y si $T_i \neq m$ para $i = 1, \dots, n$, se muestra en la prueba de la proposición 3.1 que la cartera q^* satisfaciendo cualquiera de ambas condiciones tiene una duración igual a m , hay sólo dos bonos en q^* , y estos dos bonos tienen un par (T_i, T_j) de vencimientos tales que $T_i < m < T_j$, T_i es el vencimiento más largo entre los más pequeños que m , y T_j es el vencimiento más pequeño entre los más grandes que m .

El sorprendente resultado derivado de la Proposición 3.1 es que entre bonos de cupón cero y para los conjuntos de shocks considerados la cartera maximin siempre tiene una duración igual al horizonte de planificación del inversor. A partir de esto, es claro que algunas estrategias propuestas en Prisman y Shores (1988) como estrategias

3.3 ¿Es Minimizar Medidas de Dispersión equivalente a buscar Carteras...89

alternativas a la propuesta por Fong y Vasicek (1984), al menos entre bonos de cupón cero, no son las más razonables, ya que la estrategia de Fong y Vasicek (1984) es la estrategia maximin para $l = 2$.

B. El caso de bonos con cupón

Si los bonos pagan cupón la situación es bastante diferente, y las carteras maximin deben ser determinadas por las ecuaciones (3.7) hasta la (3.10). Podría ser difícil en la práctica resolver este sistema de ecuaciones, puesto que tenemos que determinar simultáneamente el shock k^* y los pesos de las carteras extremas. De cualquier manera, el sistema es de lejos más fácil de resolver si conocemos el shock k^* .

Ahora vamos a presentar un algoritmo para encontrar las carteras maximin para cualquier conjunto de shocks K_l , $l > 0$. Como ha sido afirmado, $U(k)$ es un funcional convexo que puede ser analizado a través de la función real⁴ $U(\lambda_0)$ para la cual siempre tenemos un mínimo global λ_0^* . Una vez que conocemos el conjunto $\{q^1, q^2, \dots, q^l\}$ de puntos extremos de Q^* (o de Q) podemos evaluar $U(\lambda_0)$ mediante

$$U(\lambda_0) = \text{Max} \left\{ \frac{V(q^1, \lambda_0)}{C}, \dots, \frac{V(q^l, \lambda_0)}{C} \right\} \quad (3.22)$$

Para calcular λ_0^* empezamos en un valor inicial $\lambda_0(1)$ y consideramos la secuencia

$$\lambda_0(1), \lambda_0(2), \lambda_0(3), \dots,$$

donde $\lambda_0(i+1) = \lambda_0(i) + s$ siendo $s > 0$ el paso. Este paso se puede tomar tan pequeño como se quiera. Entonces consideramos la secuencia

$$U(\lambda_0(1)), U(\lambda_0(2)), U(\lambda_0(3)), \dots \quad (3.23)$$

donde $U(\lambda_0(i))$ está dado por (22).

⁴ $U(\lambda_0)$ representa el número denotado por $U(k)$ en la segunda sección.

Puesto que U es una función convexa, λ_0^* será determinado cuando la secuencia (3.23) empiece a aumentar.

Una vez que tengamos λ_0^* , la cartera maximin podría ser fácilmente determinada del sistema de ecuaciones desde (3.7) hasta (3.10).

3.4 Calculando las carteras maximin en algunos ejemplos

Vamos ahora a aplicar el último algoritmo para calcular las carteras maximin en una serie de ejemplos. Sin embargo, para no alargar la longitud del capítulo, limitaremos nuestro análisis a los conjuntos de shocks que dan lugar a las medidas de dispersión cuadrática y linear. Estos conjuntos acotan la derivada y la variación entre dos instantes de los tipos de interés forward instantáneos, respectivamente. En el capítulo 1 se muestra que ellos son los conjuntos de shocks más razonables. Allí se muestra que los conjuntos K_l con $0 < l < 1$ y $l > 2$ no son muy adecuados. Además, ya que los otros conjuntos de shocks razonables K_l con $1 < l < 2$ dan lugar a las medidas de dispersión que se encuentran entre la linear y la cuadrática, esperaríamos que sus carteras maximin estarían entre las carteras maximin derivadas de K_2 y de K_1 .

Vamos a tomar un horizonte de planificación del inversor de 5 años, $m = 5$, siguiendo las líneas de la mayor parte de los estudios empíricos de inmunización. Vamos a asumir una estructura plana de los tipos de interés, $r = 10\%$, para facilitar los cálculos.

Dejamos considerar el conjunto de bonos con cupón presentados en la Tabla 1 y denota por Q_1 (respectivamente Q_2) el conjunto de carteras factibles (ver (3.1)) (respectivamente, el conjunto de carteras factibles que no contienen al bono 13). La primera columna en la Tabla 1 es el número del bono, la segunda es su vencimiento, la tercera su cupón (en porcentaje), la cuarta la periodicidad del cupón (en meses) la

quinta es la duración del bono (en años) la sexta es su medida M^2 , y la última es su medida \tilde{N} .

En la Tabla 2 (respectivamente 3) damos las carteras extremas de Q_1^* (respectivamente Q_2^*), las cuales son las carteras de Q_1 (Q_2) con la duración ajustada. La primera columna es el número de la cartera, la segunda es el primer bono en la cartera, la tercera es el segundo en la cartera, la cuarta es el porcentaje del primer bono y las últimas columnas son sus medidas de dispersión M^2 y \tilde{N} . Las carteras están ordenadas de acuerdo a su medida \tilde{N} .

Aplicando el algoritmo, hemos resuelto las siguientes cinco preguntas, y los resultados están en las tablas desde la (4) a la (11). Las tablas desde la (4) a la (7) contienen los resultados para los conjuntos de bonos Q_1, Q_2, Q_1^* and Q_2^* respectivamente, y los shocks K_1 . Las tablas (8) a la (11) lo hacen para los shocks K_2 .

- i) La cartera maximin
- ii) Los pesos de los diferentes bonos (o carteras) en la cartera maximin.
- iii) El peor shock, *i.e.*, el número λ_0^* .
- iv) El valor en m garantizado por la cartera maximin en porcentaje con respecto a la cantidad prometida.
- v) La duración de la cartera maximin

El motivo para estudiar dos situaciones diferentes, (*i.e.*, incluir o no incluir el bono 13) es que este bono debe jugar un papel importante en estrategias de inmunización. En realidad, su vencimiento es justo cinco años, lo cual significa (de acuerdo al resultado empírico de Bierwag *et al.* 1993) que este bono estará probablemente en la mejor estrategia. Por otra parte, este bono paga el cupón más bajo (sólo un 9% anualmente) lo cual será útil para minimizar medidas de dispersión. El resto de los bonos pueden considerarse bonos normales que se encuentran en el mercado. La diferencias entre ellos vienen de su vencimiento y de su periodicidad pagando el cupón (anual o semestral).

A. Las Medidas del Riesgo de Inmunización M^2 y \tilde{N}

Antes de empezar el análisis de las carteras maximin, podemos dedicar unas pocas líneas discutiendo las medidas M^2 y \tilde{N} .

Vale la pena recordar ambos conjuntos de shocks que dan lugar a las dos medidas M^2 y \tilde{N} . Ellos son

$$K_2 = \left\{ k(t); \frac{dk(t)}{dt} \leq \lambda, 0 \leq t \leq T \right\}$$

$$K_1 = \{k(t); k(t_2) - k(t_1) \leq \lambda, 0 \leq t_1 \leq m < t_2 \leq T\}$$

respectivamente. Como en el capítulo 1 se apunta, el parámetro λ en K_1 puede ser entendido como una medida de volatilidad para los tipos de interés. Mostrando en cuanto los shocks sobre los tipos de interés forward instantaneos entre dos instantes pueden diferir, y este parámetro puede ser estimado. Por otra parte, el parámetro λ de K_2 , el cual acota la derivada, tiene un significado económico más complejo y es más difícil de estimar. Esta es una importante diferencia entre ambos conjuntos de shocks que será tenida en cuenta cuando decidamos buscar las carteras maximin en K_2 o en K_1 .

Un resultado inicial que podemos observar en la tabla 2 es que la cartera minimizando la medida \tilde{N} incluye un bono con el vencimiento del horizonte de planificación (el bono número 13). Si trabajamos sin el bono número 13 (ver la tabla 3) entonces obtenemos 6 carteras con casi la misma medida \tilde{N} y las carteras 1,5 y 6 (las cuales incluyen un bono con el vencimiento del periodo de planificación) tienen una medida \tilde{N} muy cercana al valor mínimo de esta medida de dispersión. Por otra parte, la cartera con la mínima medida M^2 , la cual es una cartera con las duraciones más cercanas al periodo de planificación, también minimiza la medida \tilde{N} , pero está lejos de incluir un bono con el vencimiento del horizonte de planificación.

Vamos ahora a analizar los resultados obtenidos de las carteras maximin.

B. Carteras Maximin entre bonos.

En todas las situaciones consideradas (shocks K_2 , shocks K_1 , trabajando con o sin el bono 13) podemos ver en las tablas 4,5,8 y 9 los caminos de las carteras maximin. Pensamos que estos caminos son muy robustos puesto que no parecen depender ni de los bonos considerados ni de la estructura temporal plana inicialmente tomada. Cuando el parámetro λ es suficientemente grande, la cartera maximin está casi sólo compuesta por un bono con vencimiento igual al periodo de planificación. Sin embargo, siempre existe un pequeño porcentaje invertido en un bono con vencimiento mayor de cinco años para evitar un shock ($\lambda_0 \rightarrow -\infty$) que implica que el valor de la carteras sería cero en m . Si λ decrece, el porcentaje invertido en el bono con el vencimiento del periodo de planificación decrece y la duración de la cartera aumenta. Esta duración es siempre menor que cinco años, ya que los bonos pagan su cupón antes que su principal. Cuando λ se acerca a cero la cartera maximin converge a la cartera con la duración ajustada que minimiza la medida M^2 (para los shocks K_2) o a la que casi minimiza la medida \tilde{N} (para los shocks K_1).

Con respecto a los shocks K_1 , podemos ver en la tabla 4 que la cartera maximin está siempre compuesta por los mismos bonos (12 y 13) y sólo el porcentaje de los bonos en la cartera cambia. En la tabla 5, cuando el parámetro λ es menor que 0.11 entonces la cartera maximin no es única. Bonos 8 o 9 combinados con bonos 10,11 o 12 también forman una cartera maximin, aunque sólo una solución aparece en la tabla 5. Para los shocks K_2 , en las tablas 8 y 9, podemos ver que las carteras maximin no siguen un camino tan robusto. Hay un valor para el parámetro λ para el cual un bono con el vencimiento del periodo de planificación aparece en la cartera maximin. El bono con el vencimiento del periodo de planificación que aparece en todas las tablas es el bono con el cupón anual más bajo.

La presencia de un bono con el vencimiento del periodo de planificación es muy clara si tenemos en cuenta que λ toma valores grandes, entonces los peores shocks son

grandes y el principal pagado por este bono está completamente libre de riesgo.

Podemos ver que los bonos con cupón semestral no aparecen en las carteras maximin, *ceteris paribus*, estos bonos tienen mayor dispersión que los bonos con cupón anual.

El camino de los peores shocks, independientemente del tipo de shocks es también muy fácil de entender. Si λ crece, entonces el porcentaje invertido en el bono con el vencimiento del horizonte de planificación o en el bono 9 también crece. Por lo tanto, la duración de la cartera maximin decrece, lo cual implica que el peor shock será un tipo de interés más bajo.

Consecuentemente, a partir de los resultados de las tablas 4 y 5 y de las ventajas teóricas de los shocks K_1 proponemos la siguiente estrategia. El inversor debe estimar el parámetro λ para el conjunto K_1 y calcular la cartera maximin para el parámetro estimado y para el conjunto de bonos disponibles. Esta estrategia tendría una duración un poco menor que m , y puede incluir un bono con el vencimiento ajustado o ser una cartera con las duraciones de los bonos concentrados en torno al horizonte de planificación dependiendo de los bonos considerados.

C. Carteras maximin entre las carteras con la duración ajustada

Los motivos para buscar la cartera maximin entre las carteras con la duración ajustada son claras si recordamos que una cartera con la duración ajustada es el resultado clásico en inmunización. También, desplazamientos paralelos sobre los tipos de interés son un porcentaje importante de los cambios totales como han mostrado empíricamente Litterman and Scheinkman (1991), Ilmanen (1992) y otros. Finalmente, si consideramos el más reciente estudio empírico sobre inmunización de Bierwag *et al.* (1993). Cinco de las seis estrategias que contrastan empíricamente para ver cual es la mejor estrategia de inmunización tienen una duración igual a m , y la sexta, una cartera formada por bonos con el vencimiento del horizonte de planificación, tiene una duración menor y es la que se comporta peor empíricamente. Bierwag *et al.* (1993) mostraron

que la mejor estrategia de inmunización consiste en ajustar la duración e incluir un bono con el vencimiento del horizonte de planificación. Esta estrategia es mejor que una cartera con las duraciones de sus bonos muy dispersas, que una con las duraciones muy concentradas y que la estrategia⁵ M^2 . En el momento que este trabajo fue hecho la medida \tilde{N} no estaba desarrollada.

Con respecto a los shocks K_1 podemos observar en las tablas 6 y 7 que la cartera maximin es independiente del parámetro λ (lo cual es una propiedad muy interesante). Esta cartera incluye un bono de vencimiento igual al horizonte de planificación, con el cupón anual más bajo y en el porcentaje más alto. Así, una estrategia alternativa a la mencionada arriba puede ser estimar el parámetro λ para los shocks K_1 y calcular la cartera maximin entre las carteras con la duración ajustada. Cuando hay varias carteras minimizando la medida \tilde{N} (ver la tabla 3, carteras desde la 1 a la 6), esta estrategia permitiría seleccionar una de estas carteras para un valor pequeño del parámetro λ . Esta estrategia explica el resultado empírico de Bierwag *et al.* (1993).

Si consideramos los shocks K_2 , la cartera maximin minimiza M^2 para pequeños valores del parámetro λ . Cuando el parámetro λ es suficientemente largo, podemos ver en las tablas 10 y 11 que la cartera maximin contiene la solución de la cartera maximin para shocks K_1 (tablas 6 y 7) la cual aumenta proporcionalmente con λ .

Vale la pena enfatizar que el valor garantizado por la cartera maximin entre las carteras con la duración ajustada (para valores razonables del parámetro λ) está muy cerca al valor garantizado por la cartera maximin entre bonos. Sin embargo, estas carteras no parecen depender demasiado del parámetro λ para ambos conjuntos de shocks, K_2 y K_1 .

Finalmente, algunas carteras maximin tienen asociados peores shocks que producen

⁵Prisman y Tian (1994) en un estudio empírico sobre los efectos de impuestos en inmunización señalan que no hay una teoría subyacente en la estrategia propuesta por Bierwag *et al.* (1993), y consecuentemente, no hay unas líneas que seguir con respecto a los pesos de tal bono en la cartera.

tipos de interés negativos. Esto es una propiedad indeseable del modelo. Pero pensamos que no es importante porque los tipos de interés negativos sólo aparecen cuando λ es muy largo, lo cual no es muy razonable para ambos tipos de shocks, K_2 y K_1 . Si prevenimos al peor shock de tomar valores negativos, entonces, la cartera maximin, y su valor garantizado sólo cambiarían ligeramente. Entonces, desde un punto de vista cualitativo, las cosas no cambiarían. También asumimos que los tipos de interés pueden ir a más infinito o menos infinito para probar fácilmente que existe un mínimo global, pero la teoría desarrollada en la primera y segunda sección es lo suficiente general como para analizar situaciones más complicadas.

3.5 Conclusiones

Este capítulo extiende la actual literatura sobre inmunización calculando las carteras maximin en modelos donde inmunización no es factible. Estos modelos son importantes porque no implican arbitraje, pero permiten muchos shocks diferentes sobre los tipos de interés. Además, las estrategias maximin parecen las más adecuadas de calcular en estos modelos debido a la estrecha relación entre los conceptos de una cartera inmunizada y una cartera maximin.

Una vez la existencia de las carteras maximin ha sido probada, las hemos caracterizado por medio de condiciones de punto de silla y también por medio de un sistema de ecuaciones.

Hemos considerado los conjuntos de shocks, a partir de los cuales se obtienen las medidas de dispersión como medidas del riesgo de inmunización, como adecuados porque estos conjuntos permiten muchos desplazamientos diferentes sobre los tipos de interés. Entre bonos de cupón cero, podemos derivar una solución explícita de la cartera maximin y del peor shock. Estas carteras maximin son carteras con la duración ajustada y coinciden con las carteras que minimizan medidas de dispersión.

En el caso más realista de bonos con cupón, hemos dado un algoritmo para resolver el sistema de ecuaciones. A partir de este algoritmo, el peor shock también es obtenido. Sólo hemos considerado los conjuntos de shocks que dan lugar a las medidas de dispersión cuadrática y linear. Entre bonos con cupón, las estrategias de ajustar la duración y minimizar medidas de dispersión no son estrategias maximin, pues resuelven diferentes programas. Con dos ejemplos (dos conjuntos de bonos), hemos calculado la cartera maximin entre bonos, entre carteras con la duración ajustada y para ambos conjuntos de shocks, y obtenemos conclusiones más interesantes.

Para shocks acotados, el parámetro λ tiene un significado económico robusto. Puede ser entendido como un parámetro de volatilidad para los tipos de interés. De los resultados obtenidos de las carteras maximin entre bonos (tablas 4 y 5), hemos sugerido estimar el parámetro λ y calcular la cartera maximin. Esta estrategia tiene una duración un poco menor que el horizonte de planificación del inversor y puede incluir un bono de duración igual al horizonte de planificación o ser una cartera formada por bonos con duraciones cercanas al horizonte de planificación, dependiendo de los bonos considerados.

Si deseamos inmunizar contra desplazamientos paralelos, entonces una estrategia alternativa es estimar el parámetro λ para shocks acotados y calcular la cartera maximin entre las carteras con la duración ajustada. Esta estrategia podía ser una estrategia alternativa a minimizar la medida \tilde{N} , y explica el resultado empírico de Bierwag *et al.* (1993). Además, parece tener dos propiedades importantes. Garantiza un valor muy cercano a la cartera maximin entre bonos, y no depende mucho del parámetro λ .

Una vez calculado la cartera maximin y el peor shock, es fácil calcular cuanta rentabilidad puede ser perdida. Este hecho es otra propiedad interesante de este modelo.

Los shocks con la derivada acotada tienen una desventaja, que es el significado del parámetro λ . ¿Es un valor grande o pequeño razonable para el parámetro λ ? Para estos shocks, y para un λ pequeño la cartera maximin entre bonos o entre carteras con

la duración ajustada y la cartera con la mínima M^2 pueden ser obtenidas comprando los mismos bonos. Si λ aumenta, un bono con el vencimiento ajustado aparece en la cartera maximin, y su porcentaje aumenta con λ .

Finalmente, las carteras maximin calculadas en estos ejemplos están cerca de carteras con la duración ajustada y garantizan un valor muy cercano al de una cartera inmunizada, aunque los shocks no son paralelos. Por lo tanto, estas estrategias proporcionan una respuesta al puzzle de la duración como se sugería en el capítulo 1.

Apéndice

Prueba del Teorema 1.1. Sea $\{q^1, q^2, \dots, q^l\}$ el conjunto de puntos extremos en Q^* . Entonces los funcionales $V(q^i, k)$ $i = 1, \dots, l$ son convexos y positivos en la variable k . Por lo tanto las hipótesis H2 y H3 aún se cumplen y estamos bajo los supuestos del Lema 3.1 en el capítulo 1.

Puesto que Q^* es la envoltura convexa de $\{q^1, q^2, \dots, q^l\}$, entonces dado cualquier $q \in Q^*$ se pueden encontrar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ números reales no negativos tales que

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=1}^l \alpha_i q^i \\ 1 &= \sum_{i=1}^l \alpha_i \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dejamos considerar el funcional

$$U(k) = \text{Max} \left\{ \frac{V(q^i, k)}{C}; i = 1, \dots, l \right\} \quad (3.25)$$

y permite

$$\mu_0^* = \text{Inf} \{U(k); k \in K\} \quad (3.26)$$

Claramente $\mu_0^* \geq 0$ y vamos a probar que

$$\bar{V}(q) \leq \mu_0^* C \quad (3.27)$$

se cumple para cualquier $q \in Q^*$.

Para cualquier $k \in K$ tenemos que

$$V(q, k) = \sum_{i=1}^l \alpha_i V(q^i, k) \leq C \sum_{i=1}^l \alpha_i U(k) = CU(k)$$

y por lo tanto

$$\bar{V}(q) = \text{Inf} \{V(q, k); k \in K\} \leq \text{Inf} \{U(k); k \in K\} C = \mu_0^* C.$$

Se sigue de (3.27), que si podemos encontrar una cartera q^* en Q^* tal que $\bar{V}(q^*) = \mu_0^* C$ entonces q^* será maximin en Q^* y el teorema será probado. Para encontrar este q^* , dejamos remarcar que para cualquier $k \in K$ tenemos

$$U(k) \geq \mu_0^*$$

y por lo tanto, puesto que $U(k)$ está dado por (3.25) existe $i \in \{1, \dots, l\}$ (el cual depende de k) tal que

$$\frac{V(q^i, k)}{C} \geq \mu_0^*$$

Ahora, la existencia de q^* trivialmente sigue del Lema 3.1 del capítulo 1. \square

Prueba del Teorema 2.2. Dejamos asumir que q^* es una cartera maximin en Q^* y que k^* resuelve (PK). Entonces tenemos de (4) que $\bar{V}(q^*) = U(k^*)C$.

Para cualquier cartera q' en Q^* tenemos que

$$\begin{aligned} V(q', k^*) &\leq \text{Max}\{V(q, k^*); q \in Q^*\} = U(k^*)C = \\ &= \bar{V}(q^*) = \text{Inf}\{V(q^*, k); k \in K\} \leq V(q^*, k^*) \end{aligned}$$

Además, para cualquier shock admisible k'

$$\begin{aligned} V(q^*, k') &\geq \text{Inf}\{V(q^*, k); k \in K\} = \bar{V}(q^*) = \\ &= U(k^*)C = \text{Max}\{V(q, k^*); q \in Q^*\} \geq V(q^*, k^*) \end{aligned}$$

Conversamente, dejamos asumir que (q^*, k^*) es un punto de silla y dejamos probar que q^* es maximin. Puesto que $V(q^*, k^*) \leq V(q^*, k)$ para cualquier $k \in K$ tenemos que

$$\bar{V}(q^*) = V(q^*, k^*)$$

y q^* será maximin si mostramos que $\bar{V}(q) \leq V(q^*, k^*)$ para cualquier $q \in Q^*$. Esto es cierto puesto que

$$\bar{V}(q) = \text{Inf}\{V(q, k); k \in K\} \leq V(q, k^*) \leq V(q^*, k^*)$$

Dejanos probar finalmente que k^* resuelve (PK) . Puesto que $V(q, k^*) \leq V(q^*, k^*)$ para cualquier $q \in Q^*$ tenemos que

$$U(k^*) = \frac{V(q^*, k^*)}{C}$$

y k^* resolverá (PK) si mostramos que $U(k) \geq \frac{V(q^*, k^*)}{C}$ for any $k \in K$. Pero

$$U(k) = \text{Max}\left\{\frac{V(q, k)}{C}; q \in Q\right\} \geq \frac{V(q^*, k)}{C} \geq \frac{V(q^*, k^*)}{C}. \quad \square$$

Prueba de la Proposición 3.1. Dejanos considerar que los n bonos tienen su vencimiento en los instantes $T_1 < T_2 \cdots < T_n$ respectivamente y que los n bonos pagan una unidad monetaria al vencimiento. La proposición es obvia si existe un bono i -ésimo tal que $T_i = m$ puesto que la solución de los dos programas es invertir el capital C en este bono. Dejanos asumir que $T_i \neq m$ for $i = 1, \dots, n$.

Sean K_l , $l > 0$, los distintos conjuntos de shocks. Si asumimos que la condición i) se cumple, entonces, como ha sido afirmado, los minimos del funcional U son obtenidos en los shocks k^* con la forma dada en (3.17). Allí, $\lambda > 0$ es una constante y por lo tanto el shock está dado por λ_0 . Para poder conseguir una notación más fácil identificamos el shock con λ_0 , y puesto que todos los bonos son de descuento puro, (3.14) viene dado por

$$V((q^i, \lambda_0) = CR \exp \left[\lambda_0(m - T_i) - \frac{\lambda}{l} |m - T_i|^l \right] \quad (3.28)$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial V(q^i, \lambda_0)}{\partial \lambda_0} = CR \exp \left[\lambda_0(m - T_i) - \frac{\lambda}{l} |m - T_i|^l \right] (m - T_i) \quad (3.29)$$

donde q^i , $i = 1, \dots, n$, es cualquier punto extremo del conjunto Q , y claramente, consiste de una cartera la cual ha invertido el capital C en el bono i -ésimo. Si

$$q^* = \sum_{i=1}^h \alpha_i^* q^i$$

es la cartera maximin, las condiciones (3.7) hasta la (3.10) se deben verificar, y entonces de (3.28) y (3.29) obtenemos

$$\sum_{i=1}^h \alpha_i^* = 1 \tag{3.30}$$

$$\lambda_0(m - T_i) - \frac{\lambda}{l} |m - T_i|^l \text{ has its maximum in } i \text{ for } i = 1, \dots, h \tag{3.31}$$

$$\alpha_i^* \geq 0 \quad i = \{1, \dots, h\} \tag{3.32}$$

$$\sum_{i=1}^h \alpha_i^*(m - T_i) = 0 \tag{3.33}$$

donde hemos asumido que las carteras q^1, q^2, \dots, q^h , $h \leq n$ son las únicas en la cartera maximin, de nuevo para poder conseguir una notación más fácil.

Expresiones (3.30) y (3.33) implican que la cartera maximin q^* es una cartera con la duración ajustada, *i.e.*, $q^* \in Q^*$.

Puesto que q^* tiene una duración igual a m y ninguno de los bonos vence en m , al menos dos bonos (i y j) deben estar en la cartera maximin, y la siguiente desigualdad debe cumplirse $T_i < m < T_j$.

Tenemos de (3.31) que

$$\lambda_0(m - T_i) - \frac{\lambda}{l} |m - T_i|^l = \lambda_0(m - T_j) - \frac{\lambda}{l} |m - T_j|^l$$

de donde el peor shock será

$$\lambda_0^* = \frac{\lambda}{l} \frac{(m - T_i)^l - (T_j - m)^l}{T_j - T_i}$$

y por lo tanto

$$\lambda_0^*(m - T_i) - \frac{\lambda}{l} |m - T_i|^l = \frac{-\lambda (T_j - m)^l (m - T_i) + (m - T_i)^l (T_j - m)}{T_j - T_i}$$

puesto que esta expresión tiene que ser máxima (ver (3.31)), será probado que una cartera maximin tiene sólo dos bonos, si probamos que

$$F(T_i, T_j) = \frac{(T_j - m)^l (m - T_i) + (m - T_i)^l (T_j - m)}{T_j - T_i} \quad i, j = 1, \dots, h, \quad i \neq j \tag{3.34}$$

sólo tiene un mínimo.

Claramente

$$\frac{\partial F}{\partial T_i} = - \frac{(T_j - m)(m - T_i)^{l-1}(l(T_j - T_i) - (m - T_i)) + (T_j - m)^{l+1}}{(T_j - T_i)^2} < 0 \quad \text{si } l \geq 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial T_j} = \frac{(m - T_i)(T_j - m)^{l-1}(l(T_j - T_i) - (T_j - m)) + (m - T_i)^{l+1}}{(T_j - T_i)^2} > 0 \quad \text{si } l \geq 1$$

y F aumenta con T_j y disminuye con T_i . Dado que $T_i < m < T_j$ el mínimo es conseguido en el punto (T_i, T_j) más cercano a m . Para $l < 1$ no existe una clara relación.

Dejanos asumir que ii) se cumple y $l > 0$.

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ los porcentajes invertidos en los bonos $1, 2, \dots, n$ respectivamente y claramente q^* resuelve el siguiente programa

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{i=1}^n \alpha_i |m - T_i|^l \\ & \text{subject to } \left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i &= m \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i &= 1 \\ \alpha_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Puesto que el programa es lineal, el mínimo debe ser conseguido en un punto extremo. Por otra parte las soluciones factibles básicas (puntos extremos) tienen únicamente dos variables distintas de cero (hay sólo dos restricciones), la primera restricción muestra que los dos bonos en la solución deben tener vencimiento más pequeño y más grande que m respectivamente. Si α_i and α_j ($T_i < m < T_j$) no son cero en la solución, entonces

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i T_i + \alpha_j T_j &= m \\ \alpha_i + \alpha_j &= 1 \end{aligned} \right\}$$

de donde

$$\alpha_i |m - T_i|^l + \alpha_j |m - T_j|^l = \frac{(T_j - m)^l(m - T_i) + (m - T_i)^l(T_j - m)}{T_j - T_i}$$

y ha sido ya probado que la última expresión es mínima cuando la pareja (T_i, T_j) está tan cerca como sea posible de m para $l \geq 1$.

Para $l < 1$ ambas condiciones son equivalentes. Sin embargo, la cartera que satisface ambas condiciones depende de l . □

Referencias

- Alexander G.J., and B.G. Resnick, (1985), "Using Linear and Goal Programming to Immunize Bond Portfolios," *Journal of Banking and Finance*, 9, 1, 35-54 .
- Bierwag, G.O., Fooladi I., and G.S. Roberts, (1993), "Designing an Immunized Portfolio is M-square the key?," *Journal of Banking and Finance*, 17, 1147-1140.
- Bierwag, G.O., and C. Khang, (1979), "An Immunization Strategy is a maxmin Strategy," *The Journal of Finance*, XXXVII, May, 379-389.
- Chambers, D.R., W.T. Carleton, and R.C. McEnally, (1988), "Immunizing Default-Free Bond Portfolios with a Duration Vector," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, 1, 89-104.
- Fisher, L., and R. Weil, (1971), "Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies," *Journal of Business*, 52, 51-61.
- Fong, H.G., and O.A. Vasicek, (1984), "A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization," *The Journal of Finance*, XXXIX, 5, December, 1541-1546.
- Ilmanen, A., (1992), "How well does Duration Measure Interest Rate Risk?," *Journal of Fixed Income*, 1, Mar, 4, pp. 43-51.
- Ingersoll, J.E., J. Skelton, and R. Weil, (1978), "Duration forty years later." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13 , pp. 627-650.
- Khang, C., (1983), "A Dynamic Global Portfolio Immunization Strategy in the World of Multiple Interest Rate Changes: A Dynamic Immunization and Minimax Theorem," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, no. 3, September, 355-363.
- Litterman, R., and J.A. Scheinkman. (1991), "Common Factors affecting Bond Returns," *The Journal of Fixed Income*. 1, 54-61.

- Luemberger, D.G., (1969), "Optimization by Vector Space Methods," New York: Wiley.
- Montrucchio, L., and L. Peccati, (1991), "A note On Shiu-Fisher- Weil Immunization Theorem," *Insurance Mathematics and Economics*, 10, 125-131.
- Prisman, E.Z., (1986), "Immunization as a Maxmin Strategy a New Look," *Journal of Banking and Finance*, 10, 491-509.
- Prisman, E.Z., and M.R. Shores, (1988), "Duration Measures for specific term structure estimations and applications to bond portfolio immunization," *Journal of Banking and Finance*, 12, 493-504.
- Prisman, E.Z., and Y. Tiang, (1994), "Immunization in Markets with Tax-Clientele Effects: Evidence from the Canadian Markets," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 29, no. 2, June, 301-321.

Tabla 1: Conjunto de Bonos

Número del bono	Vencimiento (años)	cupón en %	cupón (meses)	Duración (años)	M^2	\tilde{N}
1	4	5	6	3.39029	3.78821	1.60970
2	5	5	6	4.04855	3.12539	0.95144
3	6	5	6	4.64453	3.71997	1.55018
4	7	5	6	5.18397	5.34059	2.09212
5	8	5	6	5.67211	7.78769	2.58253
6	9	5	6	6.11372	10.8897	3.02620
7	4	10	12	3.48232	3.27130	1.51767
8	5	10	12	4.16101	2.59822	0.83898
9	6	10	12	4.77597	3.22315	1.45880
10	7	10	12	5.33285	4.90932	2.02011
11	8	10	12	5.83689	7.45157	2.52818
12	9	10	12	6.29287	10.6728	2.98782
13	5	9	12	4.21496	2.43114	0.78503

Tabla 2: Carteras con la Duración Ajustada, Q_1^* .

número	bono n.1	bono n.2	% bono n.1	M^2	\bar{N}
1	12	13	37.77	5.544	1.617
2	11	13	48.40	4.861	1.628
3	10	13	70.22	4.171	1.652
4	9	10	59.77	3.901	1.684
5	9	11	78.88	4.116	1.684
6	8	10	28.40	4.252	1.684
7	9	12	85.23	4.323	1.684
8	8	11	49.93	5.027	1.684
9	8	12	60.64	5.775	1.684
10	6	13	41.34	5.928	1.711
11	6	9	16.74	4.507	1.721
12	5	9	24.99	4.364	1.739
13	2	10	25.91	4.446	1.743
14	5	13	53.87	5.316	1.753
15	6	8	42.96	6.160	1.778
16	2	11	46.79	5.427	1.790
17	3	10	48.35	4.334	1.792
18	4	9	54.90	4.385	1.806
19	5	8	55.52	5.479	1.807
20	2	12	57.60	6.325	1.814
21	3	11	70.18	4.832	1.841
22	4	13	81.01	4.788	1.843
23	3	12	78.43	5.219	1.860
24	4	8	82.01	4.847	1.866
25	3	4	34.10	4.787	1.907
26	2	4	16.20	4.981	1.907
27	3	5	65.40	5.127	1.907
28	3	6	75.80	5.454	1.907
29	2	5	41.39	5.857	1.907
30	2	6	53.92	6.702	1.907
31	7	10	17.98	4.614	1.929
32	1	10	17.13	4.717	1.949
33	4	7	89.18	5.116	2.030
34	1	4	10.25	5.181	2.042
35	7	11	35.54	5.965	2.169
36	1	11	34.20	6.198	2.214
37	5	7	69.30	6.401	2.255
38	1	5	29.45	6.609	2.295
39	7	12	46.00	7.268	2.311
40	1	12	44.54	7.606	2.373
41	6	7	57.67	7.665	2.387
42	1	6	40.89	7.985	2.446

Tabla 3: Carteras con la Duración Ajustada, Q_2^* .

número	bono n.1	bono n.2	% bono n.1	M^2	\tilde{N}
1	9	10	59.77	3.901	1.6846132
2	9	11	78.88	4.116	1.6846172
3	8	10	28.40	4.252	1.6846198
4	9	12	85.23	4.323	1.6846211
5	8	11	49.93	5.027	1.6846342
6	8	12	60.64	5.775	1.6846482
7	6	9	16.74	4.507	1.7212876
8	5	9	24.99	4.364	1.7397250
9	2	10	25.91	4.446	1.7431487
10	6	8	42.96	6.160	1.7787185
11	2	11	46.79	5.427	1.7903170
12	3	10	48.35	4.334	1.7928698
13	4	9	54.90	4.385	1.8065498
14	5	8	55.52	5.479	1.8070234
15	2	12	57.60	6.325	1.8147429
16	3	11	70.18	4.832	1.8417463
17	3	12	78.43	5.219	1.8602143
18	4	8	82.01	4.847	1.8667515
19	3	4	34.10	4.787	1.9072982
20	2	4	16.20	4.981	1.9072993
21	3	5	65.40	5.127	1.9073001
22	3	6	75.80	5.454	1.9073020
23	2	5	41.39	5.857	1.9073042
24	2	6	53.92	6.702	1.9073090
25	7	10	17.98	4.614	1.9297429
26	1	10	17.13	4.717	1.9497946
27	4	7	89.18	5.116	2.0300177
28	1	4	10.25	5.181	2.0426442
29	7	11	35.54	5.965	2.1690124
30	1	11	34.20	6.198	2.2140047
31	5	7	69.30	6.401	2.2556923
32	1	5	29.45	6.609	2.2959836
33	7	12	46.00	7.268	2.3115433
34	1	12	44.54	7.606	2.3739805
35	6	7	57.67	7.665	2.3877217
36	1	6	40.89	7.985	2.4469345

Tabla 4: Carteras Maximin entre bonos

Shocks de K_1 . Conjunto de Bonos Q_1 .

λ	bono n.1	bono n.2	% bono n.1	λ_0^*	% valor	duración
0.001	12	13	36.9774	-0.0005	99.9192	4.9833
0.002	12	13	36.8506	-0.0010	99.8388	4.9806
0.004	12	13	36.5985	-0.0021	99.6786	4.9754
0.006	12	13	36.3484	-0.0031	99.5195	4.9702
0.008	12	13	36.1004	-0.0042	99.3615	4.9651
0.010	12	13	35.8544	-0.0052	99.2045	4.9599
0.012	12	13	35.6103	-0.0063	99.0485	4.9549
0.014	12	13	35.3683	-0.0074	98.8935	4.9498
0.016	12	13	35.1281	-0.0084	98.7395	4.9448
0.018	12	13	34.8900	-0.0095	98.5866	4.9399
0.020	12	13	34.6537	-0.0105	98.4346	4.9350
0.022	12	13	34.4193	-0.0116	98.2836	4.9301
0.024	12	13	34.1868	-0.0126	98.1336	4.9253
0.026	12	13	33.9561	-0.0137	97.9845	4.9205
0.028	12	13	33.7273	-0.0148	97.8365	4.9157
0.030	12	13	33.5004	-0.0158	97.6894	4.9110
0.032	12	13	33.2752	-0.0169	97.5432	4.9063
0.034	12	13	33.0518	-0.0179	97.3980	4.9017
0.036	12	13	32.8302	-0.0190	97.2537	4.8971
0.038	12	13	32.6103	-0.0200	97.1103	4.8925
0.040	12	13	32.3922	-0.0211	96.9679	4.8880
0.042	12	13	32.1758	-0.0221	96.8264	4.8835
0.044	12	13	31.9611	-0.0232	96.6858	4.8790
0.046	12	13	31.7481	-0.0242	96.5461	4.8746
0.048	12	13	31.5368	-0.0253	96.4072	4.8702
0.050	12	13	31.3272	-0.0263	96.2693	4.8659
0.060	12	13	30.3033	-0.0316	95.5928	4.8446
0.070	12	13	29.3186	-0.0368	94.9375	4.8241
0.080	12	13	28.3716	-0.0421	94.3027	4.8045
0.090	12	13	27.4603	-0.0473	93.6877	4.7855
0.100	12	13	26.5834	-0.0525	93.0917	4.7673
0.110	12	13	25.7392	-0.0577	92.5140	4.7498
0.120	12	13	24.9264	-0.0629	91.9541	4.7329
0.130	12	13	24.1437	-0.0681	91.4113	4.7166
0.140	12	13	23.3897	-0.0733	90.8849	4.7009
0.150	12	13	22.6632	-0.0785	90.3745	4.6858
0.160	12	13	21.9631	-0.0837	89.8795	4.6713
0.170	12	13	21.2883	-0.0889	89.3992	4.6573
0.180	12	13	20.6377	-0.0940	88.9334	4.6438
0.190	12	13	20.0103	-0.0992	88.4813	4.6307
0.200	12	13	19.4052	-0.1044	88.0426	4.6181
0.250	12	13	16.6839	-0.1301	86.0341	4.5616
0.300	12	13	14.4005	-0.1557	84.2983	4.5141
0.350	12	13	12.4765	-0.1813	82.7930	4.4742
0.400	12	13	10.8490	-0.2067	81.4833	4.4404
0.450	12	13	9.46736	-0.2322	80.3400	4.4116
0.500	12	13	8.29019	-0.2575	79.3388	4.3872
0.550	12	13	7.28392	-0.2828	78.4593	4.3663
0.600	12	13	6.42096	-0.3081	77.6842	4.3483
0.650	12	13	5.67854	-0.3334	76.9990	4.3329
0.700	12	13	5.03784	-0.3586	76.3914	4.3196
0.750	12	13	4.48324	-0.3838	75.8510	4.3081
0.800	12	13	4.00172	-0.4089	75.3690	4.2981
0.850	12	13	3.58240	-0.4341	74.9379	4.2894
0.900	12	13	3.21617	-0.4592	74.5511	4.2817
0.950	12	13	2.89539	-0.4844	74.2031	4.2751
1.0	12	13	2.61358	-0.5095	73.8893	4.2692

Tabla 5: Carteras Maximin entre bonos

Shocks de K_1 . Conjunto de Bonos Q_2 .

λ	bono n.1	bono n.2	% bono n.1	λ_0^*	% valor	duración
0.001	10	9	39.8212	-0.0005	99.9159	4.9977
0.002	10	9	39.3521	-0.0010	99.8320	4.9951
0.004	10	9	38.4190	-0.0020	99.6651	4.9899
0.006	10	9	37.4922	-0.0030	99.4993	4.9847
0.008	10	9	36.5718	-0.0040	99.3344	4.9796
0.010	10	9	35.6577	-0.0050	99.1706	4.9745
0.012	10	9	34.7498	-0.0060	99.0079	4.9694
0.014	10	9	33.8482	-0.0070	98.8461	4.9644
0.016	10	9	32.9528	-0.0080	98.6853	4.9594
0.018	10	9	32.0635	-0.0090	98.5255	4.9545
0.020	10	9	31.1803	-0.0100	98.3667	4.9496
0.022	10	9	30.3031	-0.0110	98.2089	4.9447
0.024	10	9	29.4319	-0.0120	98.0521	4.9398
0.026	10	9	28.5667	-0.0130	97.8962	4.9350
0.028	10	9	27.7074	-0.0141	97.7413	4.9302
0.030	10	9	26.8540	-0.0151	97.5874	4.9255
0.032	10	9	26.0064	-0.0161	97.4344	4.9207
0.034	10	9	25.1646	-0.0171	97.2823	4.9161
0.036	10	9	24.3285	-0.0181	97.1312	4.9114
0.038	10	9	23.4981	-0.0191	96.9810	4.9068
0.040	10	9	22.6734	-0.0201	96.8317	4.9022
0.042	10	9	21.8542	-0.0211	96.6834	4.8976
0.044	10	9	21.0407	-0.0221	96.5359	4.8931
0.046	10	9	20.2327	-0.0231	96.3894	4.8886
0.048	10	9	19.4302	-0.0241	96.2438	4.8841
0.050	10	9	18.6331	-0.0251	96.0990	4.8797
0.060	10	9	14.7284	-0.0302	95.3885	4.8579
0.070	10	9	10.9541	-0.0352	94.6993	4.8369
0.080	10	9	73.0585	-0.0402	94.0308	4.8166
0.090	10	9	37.7896	-0.0453	93.3824	4.7970
0.100	10	9	36.9186	-0.0503	92.7533	4.7780
0.110	9	8	97.3620	-0.0553	92.1429	4.7597
0.120	9	8	94.4887	-0.0603	91.5505	4.7420
0.130	9	8	91.7097	-0.0654	90.9757	4.7249
0.140	9	8	89.0219	-0.0704	90.4177	4.7084
0.150	9	8	86.4220	-0.0754	89.8761	4.6924
0.160	9	8	83.9070	-0.0805	89.3503	4.6770
0.170	9	8	81.4739	-0.0855	88.8398	4.6620
0.180	9	8	79.1198	-0.0905	88.3442	4.6475
0.190	9	8	76.8420	-0.0955	87.8628	4.6335
0.200	9	8	74.6378	-0.1005	87.3953	4.6200
0.250	9	8	64.6355	-0.1256	85.2503	4.5584
0.300	9	8	56.1283	-0.1507	83.3907	4.5061
0.350	9	8	48.8776	-0.1758	81.7738	4.4615
0.400	9	8	42.6846	-0.2009	80.3640	4.4235
0.450	9	8	37.3831	-0.2259	79.1312	4.3909
0.500	9	8	32.8347	-0.2510	78.0502	4.3629
0.550	9	8	28.9233	-0.2760	77.0994	4.3388
0.600	9	8	25.5517	-0.3011	76.2607	4.3181
0.650	9	8	22.6384	-0.3261	75.5188	4.3002
0.700	9	8	20.1148	-0.3511	74.8605	4.2847
0.750	9	8	17.9233	-0.3762	74.2749	4.2712
0.800	9	8	16.0153	-0.4012	73.7524	4.2595
0.850	9	8	14.3499	-0.4262	73.2848	4.2492
0.900	9	8	12.8925	-0.4512	72.8654	4.2403
0.950	9	8	11.6136	-0.4762	72.4880	4.2324
1.0	9	8	10.4886	-0.5013	72.1477	4.2255

Tabla 6: Carteras Maximin entre Carteras con la Duración Ajustada.

Shocks de K_1 . Conjunto de Carteras Q_1^* .

λ	cartera n.1	cartera n.2	% cartera n.1	λ_0^*	% valor
0.001	1	1	100.	-.00004	99.9192
0.002	1	1	100.	-.00009	99.8385
0.004	1	1	100.	-.00019	99.6776
0.006	1	1	100.	-.00029	99.5172
0.008	1	1	100.	-.00038	99.3574
0.010	1	1	100.	-.00048	99.1982
0.012	1	1	100.	-.00058	99.0394
0.014	1	1	100.	-.00068	98.8812
0.016	1	1	100.	-.00077	98.7236
0.018	1	1	100.	-.00087	98.5664
0.020	1	1	100.	-.00097	98.4098
0.022	1	1	100.	-.00107	98.2538
0.024	1	1	100.	-.00116	98.0982
0.026	1	1	100.	-.00126	97.9432
0.028	1	1	100.	-.00136	97.7887
0.030	1	1	100.	-.00146	97.6348
0.032	1	1	100.	-.00156	97.4813
0.034	1	1	100.	-.00166	97.3284
0.036	1	1	100.	-.00175	97.1760
0.038	1	1	100.	-.00185	97.0241
0.040	1	1	100.	-.00195	96.8727
0.042	1	1	100.	-.00205	96.7218
0.044	1	1	100.	-.00215	96.5715
0.046	1	1	100.	-.00225	96.4216
0.048	1	1	100.	-.00235	96.2723
0.050	1	1	100.	-.00245	96.1234
0.060	1	1	100.	-.00295	95.3867
0.070	1	1	100.	-.00345	94.6623
0.080	1	1	100.	-.00396	93.9499
0.090	1	1	100.	-.00446	93.2495
0.100	1	1	100.	-.00498	92.5607
0.110	1	1	100.	-.00549	91.8834
0.120	1	1	100.	-.00601	91.2174
0.130	1	1	100.	-.00653	90.5624
0.140	1	1	100.	-.00705	89.9182
0.150	1	1	100.	-.00757	89.2848
0.160	1	1	100.	-.00810	88.6618
0.170	1	1	100.	-.00864	88.0491
0.180	1	1	100.	-.00917	87.4465
0.190	1	1	100.	-.00971	86.8539
0.200	1	1	100.	-.01025	86.2709
0.250	1	1	100.	-.01300	83.4968
0.300	1	1	100.	-.01583	80.9418
0.350	1	1	100.	-.01874	78.5873
0.400	1	1	100.	-.02173	76.4164
0.450	1	1	100.	-.02481	74.4136
0.500	1	1	100.	-.02797	72.5647
0.550	1	1	100.	-.03122	70.8568
0.600	1	1	100.	-.03455	69.2782
0.650	1	1	100.	-.03797	67.8182
0.700	1	1	100.	-.04148	66.4669
0.750	1	1	100.	-.04508	65.2154
0.800	1	1	100.	-.04878	64.0556
0.850	1	1	100.	-.05256	62.9800
0.900	1	1	100.	-.05644	61.9818
0.950	1	1	100.	-.06042	61.0547
1.0	1	1	100.	-.06448	60.1930

Tabla 7: Carteras Maximin entre Carteras con la Duración Ajustada.

Shocks de K_1 . Conjunto de Carteras Q_2^* .

λ	cartera n.1	cartera n.2	% cartera n.1	λ_0^*	% valor
0.001	6	6	100.	-.00004	99.9158
0.002	6	6	100.	-.00009	99.8318
0.004	6	6	100.	-.00019	99.6642
0.006	6	6	100.	-.00029	99.4971
0.008	6	6	100.	-.00038	99.3306
0.010	6	6	100.	-.00048	99.1647
0.012	6	6	100.	-.00058	98.9994
0.014	6	6	100.	-.00068	98.8346
0.016	6	6	100.	-.00077	98.6704
0.018	6	6	100.	-.00087	98.5067
0.020	6	6	100.	-.00097	98.3436
0.022	6	6	100.	-.00107	98.1810
0.024	6	6	100.	-.00116	98.0190
0.026	6	6	100.	-.00126	97.8575
0.028	6	6	100.	-.00136	97.6966
0.030	6	6	100.	-.00146	97.5362
0.032	6	6	100.	-.00156	97.3764
0.034	6	6	100.	-.00166	97.2171
0.036	6	6	100.	-.00175	97.0583
0.038	6	6	100.	-.00185	96.9001
0.040	6	6	100.	-.00195	96.7424
0.042	6	6	100.	-.00205	96.5852
0.044	6	6	100.	-.00215	96.4286
0.046	6	6	100.	-.00225	96.2725
0.048	6	6	100.	-.00235	96.1169
0.050	6	6	100.	-.00245	95.9619
0.060	6	6	100.	-.00295	95.1944
0.070	6	6	100.	-.00345	94.4398
0.080	6	6	100.	-.00396	93.6978
0.090	6	6	100.	-.00446	92.9682
0.100	6	6	100.	-.00498	92.2507
0.110	6	6	100.	-.00549	91.5451
0.120	6	6	100.	-.00601	90.8513
0.130	6	6	100.	-.00653	90.1690
0.140	6	6	100.	-.00705	89.4981
0.150	6	6	100.	-.00757	88.8382
0.160	6	6	100.	-.00810	88.1893
0.170	6	6	100.	-.00864	87.5510
0.180	6	6	100.	-.00917	86.9233
0.190	6	6	100.	-.00971	86.3060
0.200	6	6	100.	-.01025	85.6988
0.250	6	6	100.	-.01300	82.8090
0.300	6	6	100.	-.01583	80.1475
0.350	6	6	100.	-.01874	77.6949
0.400	6	6	100.	-.02173	75.4335
0.450	6	6	100.	-.02481	73.3472
0.500	6	6	100.	-.02797	71.4213
0.550	6	6	100.	-.03122	69.6422
0.600	6	6	100.	-.03455	67.9978
0.650	6	6	100.	-.03797	66.4769
0.700	6	6	100.	-.04148	65.0693
0.750	6	6	100.	-.04508	63.7657
0.800	6	6	100.	-.04878	62.5576
0.850	6	6	100.	-.05256	61.4371
0.900	6	6	100.	-.05644	60.3973
0.950	6	6	100.	-.06042	59.4316
1.0	6	6	100.	-.06448	58.5340

Tabla 8: Carteras Maximin entre bonos

Shocks de K_2 . Conjunto de bonos Q_1 .

λ	bono n.1	bono n.2	% bono n.1	λ_0^*	% valor	duración
0.001	10	9	38.6416	-.00151	99.8063	4.9911
0.002	10	9	37.0122	-.00302	99.6154	4.9820
0.004	10	9	33.8142	-.00605	99.2417	4.9642
0.006	10	9	30.6958	-.00908	98.8787	4.9469
0.008	10	9	27.6548	-.01210	98.5262	4.9299
0.010	10	9	24.6890	-.01513	98.1838	4.9134
0.012	10	9	21.7965	-.01815	97.8514	4.8973
0.014	10	9	18.9753	-.02118	97.5287	4.8816
0.016	10	9	16.2235	-.02420	97.2155	4.8663
0.018	10	9	13.5392	-.02722	96.9115	4.8513
0.020	10	9	10.9206	-.03025	96.6166	4.8367
0.022	10	9	8.36603	-.03327	96.3306	4.8225
0.024	10	9	5.87367	-.03629	96.0532	4.8086
0.026	10	9	3.44193	-.03931	95.7843	4.7951
0.028	10	9	1.06918	-.04233	95.5237	4.7819
0.030	9	9	100.	-.04251	95.2701	4.7759
0.032	9	9	100.	-.04028	95.0182	4.7759
0.034	9	9	100.	-.03806	94.7674	4.7759
0.036	9	9	100.	-.03584	94.5175	4.7759
0.038	9	9	100.	-.03362	94.2687	4.7759
0.040	9	9	100.	-.03140	94.0209	4.7759
0.042	9	9	100.	-.02919	93.7740	4.7759
0.044	9	13	98.9017	-.02949	93.5290	4.7698
0.046	9	13	97.4048	-.03077	93.2877	4.7614
0.048	9	13	95.9394	-.03205	93.0503	4.7531
0.050	9	13	94.5048	-.03332	92.8167	4.7451
0.060	9	13	87.7642	-.03960	91.7026	4.7073
0.070	9	13	81.6788	-.04579	90.6722	4.6731
0.080	9	13	76.1695	-.05189	89.7176	4.6422
0.090	9	13	71.1687	-.05790	88.8319	4.6142
0.100	9	13	66.6184	-.06385	88.0087	4.5887
0.110	9	13	62.4687	-.06973	87.2425	4.5654
0.120	9	13	58.6763	-.07555	86.5284	4.5441
0.130	9	13	55.2033	-.08131	85.8618	4.5246
0.140	9	13	52.0169	-.08702	85.2387	4.5067
0.150	9	13	49.0880	-.09269	84.6555	4.4903
0.160	9	13	46.3911	-.09831	84.1090	4.4752
0.170	9	13	43.9038	-.10390	83.5961	4.4612
0.180	9	13	41.6060	-.10945	83.1141	4.4483
0.190	9	13	39.4801	-.11497	82.6608	4.4364
0.200	9	13	37.5103	-.12045	82.2337	4.4254
0.250	9	13	29.5569	-.14751	80.4291	4.3807
0.300	9	13	23.9067	-.17408	79.0458	4.3490
0.350	9	13	19.7715	-.20031	77.9581	4.3258
0.400	9	13	16.6626	-.22631	77.0830	4.3084
0.450	9	13	14.2682	-.25212	76.3648	4.2950
0.500	9	13	12.3832	-.27780	75.7647	4.2844
0.550	9	13	10.8700	-.30337	75.2555	4.2759
0.600	9	13	9.63413	-.32887	74.8179	4.2690
0.650	9	13	8.60899	-.35430	74.4373	4.2632
0.700	9	13	7.74710	-.37968	74.1030	4.2584
0.750	9	13	7.01377	-.40501	73.8070	4.2543
0.800	9	13	6.38321	-.43031	73.5428	4.2507
0.850	9	13	5.83594	-.45558	73.3055	4.2477
0.900	9	13	5.35702	-.48082	73.0912	4.2450
0.950	9	13	4.93482	-.50604	72.8966	4.2426
1.0	9	13	4.56015	-.53124	72.7191	4.2405

Tabla 9: Carteras Maximin entre bonos

Shocks de K_2 . Conjunto de bonos de Q_2 .

λ	bono n.1	bono n.2	% bono n.1	λ_0^*	% valor	duración
0.001	10	9	38.6416	-.00151	99.8063	4.9911
0.002	10	9	37.0122	-.00302	99.6154	4.9820
0.004	10	9	33.8142	-.00605	99.2417	4.9642
0.006	10	9	30.6958	-.00908	98.8787	4.9469
0.008	10	9	27.6548	-.01210	98.5262	4.9299
0.010	10	9	24.6890	-.01513	98.1838	4.9134
0.012	10	9	21.7965	-.01815	97.8514	4.8973
0.014	10	9	18.9753	-.02118	97.5287	4.8816
0.016	10	9	16.2235	-.02420	97.2155	4.8663
0.018	10	9	13.5392	-.02722	96.9115	4.8513
0.020	10	9	10.9206	-.03025	96.6166	4.8367
0.022	10	9	8.36603	-.03327	96.3306	4.8225
0.024	10	9	5.87367	-.03629	96.0532	4.8086
0.026	10	9	3.44193	-.03931	95.7843	4.7951
0.028	10	9	1.06918	-.04233	95.5237	4.7819
0.030	9	9	100.	-.04251	95.2701	4.7759
0.032	9	9	100.	-.04028	95.0182	4.7759
0.034	9	9	100.	-.03806	94.7674	4.7759
0.036	9	9	100.	-.03584	94.5175	4.7759
0.038	9	9	100.	-.03362	94.2687	4.7759
0.040	9	9	100.	-.03140	94.0209	4.7759
0.042	9	9	100.	-.02919	93.7740	4.7759
0.044	9	9	100.	-.02698	93.5282	4.7759
0.046	9	9	100.	-.02477	93.2833	4.7759
0.048	9	8	99.3094	-.02432	93.0398	4.7717
0.050	9	8	98.0602	-.02533	92.7995	4.7640
0.060	9	8	92.1045	-.03039	91.6481	4.7274
0.070	9	8	86.6030	-.03544	90.5751	4.6935
0.080	9	8	81.5172	-.04048	89.5742	4.6623
0.090	9	8	76.8121	-.04553	88.6398	4.6333
0.100	9	8	72.4560	-.05057	87.7665	4.6065
0.110	9	8	68.4197	-.05561	86.9495	4.5817
0.120	9	8	64.6767	-.06064	86.1845	4.5587
0.130	9	8	61.2031	-.06568	85.4674	4.5373
0.140	9	8	57.9766	-.07071	84.7945	4.5175
0.150	9	8	54.9774	-.07574	84.1626	4.4991
0.160	9	8	52.1870	-.08077	83.5685	4.4819
0.170	9	8	49.5887	-.08579	83.0094	4.4659
0.180	9	8	47.1673	-.09082	82.4827	4.4510
0.190	9	8	44.9086	-.09584	81.9860	4.4371
0.200	9	8	42.8001	-.10086	81.5172	4.4242
0.250	9	8	34.1318	-.12596	79.5264	4.3709
0.300	9	8	27.8234	-.15103	77.9913	4.3321
0.350	9	8	23.1291	-.17609	76.7803	4.3032
0.400	9	8	19.5591	-.20113	75.8044	4.2812
0.450	9	8	16.7871	-.22617	75.0028	4.2642
0.500	9	8	14.5924	-.25120	74.3330	4.2507
0.550	9	8	12.8233	-.27623	73.7649	4.2398
0.600	9	8	11.3740	-.30125	73.2768	4.2309
0.650	9	8	10.1692	-.32627	72.8526	4.2235
0.700	9	8	9.15476	-.35129	72.4803	4.2173
0.750	9	8	8.29052	-.37630	72.1507	4.2120
0.800	9	8	7.54673	-.40132	71.8568	4.2074
0.850	9	8	6.90076	-.42633	71.5930	4.2034
0.900	9	8	6.33517	-.45134	71.3549	4.1999
0.950	9	8	5.83637	-.47635	71.1388	4.1969
1.0	9	8	5.39360	-.50136	70.9418	4.1941



Tabla 10: Carteras Maximin entre Carteras con la Duración Ajustada

Shocks de K_2 . Conjunto de Carteras Q_1^* .

λ	cartera n.1	cartera n.2	% cartera n.1	λ_0^*	% valor
0.001	4	4	100.	.00085	99.8052
0.002	4	4	100.	.00170	99.6110
0.004	4	4	100.	.00341	99.2245
0.006	4	4	100.	.00512	98.8404
0.008	4	4	100.	.00682	98.4587
0.010	4	4	100.	.00852	98.0793
0.012	4	4	100.	.01022	97.7023
0.014	4	4	100.	.01192	97.3276
0.016	4	4	100.	.01362	96.9553
0.018	4	4	100.	.01531	96.5852
0.020	4	4	100.	.01700	96.2174
0.022	4	4	100.	.01869	95.8519
0.024	4	4	100.	.02038	95.4887
0.026	4	4	100.	.02207	95.1277
0.028	4	4	100.	.02375	94.7689
0.030	4	4	100.	.02544	94.4123
0.032	4	4	100.	.02712	94.0579
0.034	4	4	100.	.02880	93.7056
0.036	4	4	100.	.03047	93.3556
0.038	4	4	100.	.03215	93.0076
0.040	4	4	100.	.03382	92.6618
0.042	4	4	100.	.03549	92.3181
0.044	4	4	100.	.03716	91.9765
0.046	4	4	100.	.03883	91.6370
0.048	4	4	100.	.04049	91.2995
0.050	4	4	100.	.04216	90.9641
0.060	4	4	100.	.05044	89.3173
0.070	4	4	100.	.05867	87.7197
0.080	4	4	100.	.06685	86.1694
0.090	4	4	100.	.07497	84.6649
0.100	4	4	100.	.08305	83.2046
0.110	4	7	74.9576	.08372	81.7944
0.120	4	7	27.3614	.07632	80.4794
0.130	7	7	100.	.07403	79.2619
0.140	7	7	100.	.08100	78.0996
0.150	7	7	100.	.08812	76.9793
0.160	7	7	100.	.09537	75.8983
0.170	7	7	100.	.10273	74.8540
0.180	7	7	100.	.11020	73.8442
0.190	7	7	100.	.11776	72.8666
0.200	7	1	97.3069	.12100	71.9211
0.250	7	1	71.4077	.10388	67.8691
0.300	7	1	54.0713	.08447	64.7538
0.350	7	1	42.0529	.06355	62.3297
0.400	7	1	33.4502	.04158	60.4157
0.450	7	1	27.1071	.01886	58.8805
0.500	7	1	22.3003	-.00439	57.6298
0.550	7	1	18.5660	-.02805	56.5955
0.600	7	1	15.5995	-.05200	55.7283
0.650	7	1	13.1966	-.07617	54.9917
0.700	7	1	11.2170	-.10050	54.3588
0.750	7	1	9.56230	-.12496	53.8094
0.800	7	1	8.16191	-.14952	53.3278
0.850	7	1	6.96415	-.17414	52.9023
0.900	7	1	5.93036	-.19882	52.5234
0.950	7	1	5.03104	-.22355	52.1839
1.0	7	1	4.24330	-.24830	51.8778

Tabla 11: Carteras Maximin entre Carteras con la Duración Ajustada

Shocks de K_2 . Conjunto de Carteras Q_2^* .

λ	cartera n.1	cartera n.2	% cartera n.1	λ_0^*	% valor
0.001	1	1	100.	.00085	99.8052
0.002	1	1	100.	.00170	99.6110
0.004	1	1	100.	.00341	99.2245
0.006	1	1	100.	.00512	98.8404
0.008	1	1	100.	.00682	98.4587
0.010	1	1	100.	.00852	98.0793
0.012	1	1	100.	.01022	97.7023
0.014	1	1	100.	.01192	97.3276
0.016	1	1	100.	.01362	96.9553
0.018	1	1	100.	.01531	96.5852
0.020	1	1	100.	.01700	96.2174
0.022	1	1	100.	.01869	95.8519
0.024	1	1	100.	.02038	95.4887
0.026	1	1	100.	.02207	95.1277
0.028	1	1	100.	.02375	94.7689
0.030	1	1	100.	.02544	94.4123
0.032	1	1	100.	.02712	94.0579
0.034	1	1	100.	.02880	93.7056
0.036	1	1	100.	.03047	93.3556
0.038	1	1	100.	.03215	93.0076
0.040	1	1	100.	.03382	92.6618
0.042	1	1	100.	.03549	92.3181
0.044	1	1	100.	.03716	91.9765
0.046	1	1	100.	.03883	91.6370
0.048	1	1	100.	.04049	91.2995
0.050	1	1	100.	.04216	90.9641
0.060	1	1	100.	.05044	89.3173
0.070	1	1	100.	.05867	87.7197
0.080	1	1	100.	.06685	86.1694
0.090	1	1	100.	.07497	84.6649
0.100	1	1	100.	.08305	83.2046
0.110	1	4	74.5761	.08372	81.7944
0.120	1	4	27.6143	.07632	80.4794
0.130	4	4	100.	.07403	79.2619
0.140	4	4	100.	.08100	78.0996
0.150	4	4	100.	.08812	76.9793
0.160	4	4	100.	.09537	75.8983
0.170	4	4	100.	.10273	74.8540
0.180	4	4	100.	.11020	73.8442
0.190	4	4	100.	.11776	72.8666
0.200	4	4	100.	.12541	71.9193
0.250	4	6	89.8112	.14296	67.6174
0.300	4	6	69.5939	.12617	64.2043
0.350	4	6	54.9612	.10725	61.5334
0.400	4	6	44.1790	.08684	59.4181
0.450	4	6	36.0764	.06538	57.7192
0.500	4	6	29.8635	.04315	56.3346
0.550	4	6	25.0046	.02035	55.1898
0.600	4	6	21.1332	-.00286	54.2303
0.650	4	6	17.9957	-.02640	53.4158
0.700	4	6	15.4137	-.05018	52.7165
0.750	4	6	13.2599	-.07416	52.1098
0.800	4	6	11.4416	-.09828	51.5785
0.850	4	6	9.89074	-.12252	51.1094
0.900	4	6	8.55564	-.14686	50.6921
0.950	4	6	7.39708	-.17127	50.3185
1.0	4	6	6.38452	-.19575	49.9819

Capítulo 4

Carteras Maximin en Cualquier Modelo de Cobertura de dos Periodos

Resumen

Este capítulo prueba la existencia y caracteriza a las carteras maximin en cualquier modelo de cobertura de dos periodos. Las carteras maximin han sido inicialmente estudiadas en modelos de inmunización, modelos donde el valor de los activos (bonos) es una función convexa de los tipos de interés y donde no se puede ir a corto en ningún activo (bono). Por lo tanto, este capítulo estudia las carteras maximin en modelos donde no se asume ninguna forma funcional entre el precio de los activos y las variables de estado y donde no hay ninguna restricción sobre las posiciones de endeudamiento que se pueden tomar en los diferentes activos. Después nos centramos de nuevo en modelos de inmunización para estudiar las carteras maximin cuando hay restricciones para ir a corto y cuando no las hay. Presentamos además dos ejemplos. El primero para inmunizar una cartera de bonos ante los shocks acotados propuestos en el capítulo

1, aplicando un algoritmo simplex semi-infinito. El segundo para cubrir una opción en el modelo de Black & Scholes.

Introducción

La teoría desarrollada hasta el capítulo 3 finaliza estudiando las carteras maximin en modelos de inmunización de carteras de bonos libres de ejercicio de opción y libres de riesgo de incumplimiento (vease también Bierwag y Khang (1979) y Prisman (1986)). Modelos en los que el valor (precio) de los activos (bonos) es una función convexa de las variables de estado (tipos de interés) y donde no se permiten posiciones de endeudamiento en ningún activo. El presente capítulo prueba la existencia y caracteriza a las carteras maximin en modelos en los que no se asume ninguna forma funcional entre el valor (precio) de los activos y las variables de estado, y donde no existe ninguna restricción sobre las posiciones de endeudamiento en ningún activo. De esta manera podemos estudiar las carteras maximin considerando cualquier conjunto de activos. Después de este análisis general, nos centramos de nuevo en inmunización. De esta manera podemos relacionar las carteras maximin en modelos de inmunización cuando hay restricciones de endeudamiento (capítulo 3) con las carteras maximin cuando no las hay.

En este capítulo no vamos a argumentar sobre la bondad de utilizar estrategias maximin como estrategias de cobertura. Vease Bierwag y Khang (1979) sobre cuando estas estrategias son óptimas si consideramos agentes que maximizan la utilidad esperada en modelos de inmunización.

El desarrollo de este capítulo será paralelo al del capítulo 3. En la primera sección definiremos el modelo que vamos a utilizar a lo largo del capítulo. En la segunda sección estudiaremos la existencia y la caracterización de las carteras maximin por medio de condiciones de punto de silla. En la tercera sección determinaremos las carteras maximin mediante la solución de dos programas, primal y dual, linear semi-infinito. En la

cuarta sección nos centraremos de nuevo en inmunización, y estudiamos la relación entre carteras inmunizadas y maximin cuando hay restricciones de endeudamiento (capítulo 3) y cuando no las hay. En la quinta sección, con dos ejemplos, mostraremos como son las carteras maximin en estos modelos. En el primer ejemplo calculamos la cartera maximin en un modelo de inmunización sin restricciones de endeudamiento y considerando los shocks acotados introducidos en el capítulo 1. De esta manera podemos comparar estas carteras con las carteras maximin calculadas en el capítulo 3. Hemos calculado estas carteras aplicando un algoritmo simplex semi-infinito. En el segundo ejemplo consideramos como activos a una opción del modelo de Black & Scholes. De esta manera podemos comparar la cartera maximin con la estrategia de igualar la delta de la opción. La última sección concluye el capítulo.

4.1 Planteamientos Generales

Como hasta ahora, supondremos que K es un subconjunto del espacio de funciones de $[0, T]$ en la recta real, pero ahora vamos a aceptar que está dotado de una topología que lo transforma en un espacio topológico compacto separado. Como se verá, esta hipótesis se satisface cuando trabajamos con los conjuntos de shocks usuales en la literatura, y en particular, cuando consideramos el conjunto de shocks con derivada acotada, o con diferencias acotadas, en el caso de un modelo de inmunización (vease teoremas A.1 y A.2 del Apéndice). No asumiremos de forma general que K es convexo, propiedad que asumimos en el capítulo 1, pero que ahora sólo se pedirá para probar algunos resultados particulares.

Como anteriormente, Q representará el conjunto de carteras con precio $C > 0$ que se pueden formar con los n bonos considerados, y en las que no hay posiciones a corto en ningún bono. Q^* representará el mismo conjunto sin la restricción en las posiciones

a corto. En estas condiciones se tiene que

$$Q = \{(q_1, q_2, \dots, q_n); \sum_{i=1}^n P_i q_i = C, q_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\} \quad (4.1)$$

$$Q^* = \{(q_1, q_2, \dots, q_n); \sum_{i=1}^n P_i q_i = C\} \quad (4.2)$$

donde $P_i > 0$ es el precio del activo i . Supondremos que las funciones continuas en la variable k y positivas

$$V_i : K \rightarrow R, i = 1, 2, \dots, n$$

nos dan el valor en el instante m de cada uno de los activos¹. Claramente, para cada q de Q^* , la función

$$V(q, k) = \sum_{i=1}^n q_i V_i(k) \quad (4.3)$$

de la variable $k \in K$ nos da el valor (en m) de la cartera q si se produce el shock k sobre las variables de estado. Esta función es continua en la variable k .

Consideraremos el conjunto $\mathcal{M}_+(K)$ de las medidas de Radom finitas y positivas definidas sobre la σ -álgebra de Borel de K . El teorema de representación de Riesz prueba que este conjunto es el cono dual positivo del espacio $\mathcal{C}(K)$, espacio de las funciones reales continuas definidas sobre el compacto K dotado de la norma del supremo. Cuando un elemento $p \in \mathcal{M}_+(K)$ verifique $p(K) = 1$, p será una medida de probabilidad.

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y cada medida $p \in \mathcal{M}_+(K)$ consideraremos la función $E_i : \mathcal{M}_+(K) \rightarrow R$ dado por

$$E_i(p) = \int_K V_i(k) dp(k) \quad (4.4)$$

¹Las hipótesis sobre la positividad de las P_i y de las funciones V_i $i = 1, 2, \dots, n$, pueden relajarse siguiendo técnicas habituales.

Cuando p sea una medida de probabilidad, esta función nos da el valor esperado (en m) del bono i -ésimo. Para cada cartera $q \in Q^*$ y cada medida p notaremos

$$E(q, p) = \sum_{i=1}^n q_i E_i(p) \quad (4.5)$$

En el caso de que p sea una medida de probabilidad la expresión anterior representa el valor esperado (en m) de la cartera q . Ahora de (4.4) y de (4.5) para cada cartera $q \in Q^*$

$$E(q, p) = \int_K V(q, k) dp(k) \quad (4.6)$$

Para cada $k \in K$ consideraremos la distribución de probabilidad dada por la delta de Dirac en el punto k , es decir, consideraremos la distribución δ^k que asocia probabilidad uno al shock k . El siguiente resultado tiene una interpretación obvia que no necesita comentarios.

Proposición 1.1. Para cada cartera $q \in Q^*$, y cada shock $k \in K$, se verifica que

$$V(q, k) = E(q, \delta^k) \quad (4.7)$$

Prueba. Vease Apéndice. □

La expresión anterior se puede interpretar también en el sentido de que E es una extensión de V . E se aplica sobre probabilidades y medidas, y V sobre shocks, pero cada shock se puede identificar con la distribución de probabilidad dada por su delta de Dirac asociada (le concede a este shock toda la probabilidad posible).

Como en capítulos anteriores podemos considerar el valor garantizado por una cartera q , pero ahora, $q \in Q^*$, es decir, ahora permitimos posiciones a corto en cualquier bono. Esta función está dada por

$$\bar{V}(q) = \text{Inf}\{V(q, k); k \in K\} \quad (4.8)$$

Consideraremos también otra función que intuitivamente se puede interpretar como el valor esperado para la cartera q que está garantizado, ya que independientemente de la distribución de probabilidad que se asuma sobre el conjunto de shocks, la esperanza del valor de q siempre lo va a superar. Concretamente, consideraremos

$$\bar{E}(q) = \text{Inf}\{E(q, p); p \in \mathcal{M}_+(K), p(K) = 1\} \quad (4.9)$$

Proposición 1.2. Para cada cartera $q \in Q^*$ se verifica que

$$\bar{V}(q) = \bar{E}(q) \quad (4.10)$$

Prueba. Vease Apéndice. □

Introduciremos ahora la función $\underline{E}(p)$ para cada medida de probabilidad p . Concretamente,

$$\underline{E}(p) = \text{Sup}\{E(q, p); q \in Q^*\} \quad (4.11)$$

El supremo anterior podría ser infinito, razón por la que consideraremos que la función está valorada sobre la recta ampliada. La función se puede interpretar como la que da la máxima media, supuesta la medida de probabilidad p sobre el conjunto de shocks admisibles.

Proposición 1.3. Para cada cartera $q \in Q^*$ y cada medida de probabilidad, p , tenemos

$$\bar{V}(q) \leq \underline{E}(p)$$

Prueba. Vease Apéndice. □

4.2 Condiciones de Punto de Silla

Estudiemos a continuación las condiciones de punto de silla para el funcional E , pero en esta ocasión, aceptando posiciones a corto en los diferentes activos negociables y sin

asumir ninguna forma funcional entre el valor de los activos y las variables de estado. Además, nos interesará caracterizar las "peores situaciones" que se pueden presentar, y veremos que estas peores situaciones pueden ser determinadas de forma efectiva. Estas situaciones estarán definidas por la distribución de probabilidad p^* del teorema siguiente. Por el momento, vamos a trabajar en algunos casos con valores esperados, si bien más adelante serán valores garantizados.

Teorema 2.1. Existe una medida de probabilidad p^* en la que el funcional $\underline{E}(p)$ alcanza un valor mínimo. Además,

$$\text{Sup } \{\bar{V}(q); q \in Q^*\} = \text{Min } \{\underline{E}(p); p \in \mathcal{M}_+(K), p(k) = 1\} \quad (4.12)$$

Prueba. Vease Apéndice. □

Hasta el capítulo 3 hemos trabajado con la cartera maximin que maximiza la función \bar{V} en el conjunto Q . Además, sabemos que esta cartera existe si K es un conjunto convexo y los funcionales V_i , $i = 1, 2, \dots, n$, son convexos. De momento vamos a extender el concepto de cartera maximin al caso en el que se relajen ambas hipótesis, y más adelante, nos ocuparemos de la posible existencia de esta cartera. Seguiremos entendiendo cartera maximin para el conjunto Q como hasta ahora. Introduzcamos la siguiente definición.

Definición 2.2. Diremos que q^* es la cartera Q^* -maximin si resuelve el siguiente problema de optimización

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } \bar{V}(q) \\ q \in Q^* \end{array} \right\}$$

Un teorema de punto de silla (análogo al establecido en el capítulo 3) es posible también cuando hay posiciones a corto.

Teorema 2.3. Dadas $q^* \in Q^*$, y p^* medida de probabilidad, q^* es Q^* -maximin y p^* minimiza \underline{E} si y sólo si (q^*, p^*) es un punto de silla de E , es decir,

$$E(q, p^*) \leq E(q^*, p^*) \leq E(q^*, p) \quad (4.13)$$

para cada $q \in Q^*$ y cada $p \in \mathcal{M}_+(K)$, $p(K) = 1$.

Prueba. Vease Apéndice. □

Ahora vamos a establecer las condiciones que permiten asegurar que $\underline{E}(p)$ es finito. Esto se verificará si hay una relación de proporcionalidad entre el precio de cada bono y el valor esperado que este bono tendrá en m . Este resultado será utilizado cuando queramos determinar las peores situaciones, que son las únicas relevantes en este problema.

Lema 2.4. Sea p una medida de probabilidad sobre K . Entonces, $\underline{E}(p)$ es finito si y sólo si existe λ (dependiente de p) tal que

$$E_i(p) = \lambda P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{4.14}$$

Además, en caso afirmativo se verifica que $\lambda = \frac{E_i(p)}{P_i}$ para $i = 1, 2, \dots, n$, y la función $E(q, p)$ es constante en la variable $q \in Q^*$ y toma el valor λC .

Prueba. Vease Apéndice. □

4.3 Existencia y Determinación de las Carteras Maximin

Nos interesa ahora determinar la cartera Q^* -maximin. Considérese μ_0 es el ínfimo de $\bar{V}(q)$ siendo $q \in Q^*$. Si existe la cartera maximin (recuérdese que existe si K es convexo y cada V_i , $i = 1, 2, \dots, n$, es convexa), entonces μ_0 es el valor garantizado por ella. Considérense también los programas

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } \sum_{i=1}^n q_i P_i \\ \text{s.a. } \sum_{i=1}^n q_i V_i(k) \geq 1, \text{ para todo } k \in K \end{array} \right\} \tag{4.15}$$

y

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } p(K) \\ \text{s.a. } \int_K V_i(k) dp(k) = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ p \in \mathcal{M}_+(K) \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

Aplicando la teoría desarrollada en el capítulo IX de Luenberger (1969), el segundo programa es dual del primero. Si el primal es factible (existen carteras verificando las restricciones) entonces es acotado (el valor del objetivo nunca es negativo), ya que de otra manera habría oportunidades de arbitraje en forma fuerte (habría carteras con precio negativo que garantizan al menos una unidad monetaria en m). Además, si $\mu_0 > 0$ el primal es factible, ya que si $q \in Q^*$ se verifica que

$$V(q, k) = \sum_{i=1}^n q_i V_i(k) \geq \mu_0$$

para cualquier shock k , y por consiguiente $\frac{q}{\mu_0}$ verifica todas las restricciones primales. Suponiendo desde este momento que $\mu_0 > 0$, el primal es factible y acotado, y por consiguiente el dual también. Además, el dual es resoluble y no hay hueco de dualidad (el máximo dual coincide con el ínfimo primal).

Sea C' el valor óptimo del objetivo. Claramente, $C' > 0$, porque si p' es la solución dual, $C' = p'(K) \geq 0$ ya que $p \in \mathcal{M}_+(K)$. Además $C' = p'(K) > 0$, porque si lo anterior fuera cero sería p' idénticamente nula y no podría ser factible dual (los precios de los activos son estrictamente positivos).

Damos a continuación dos resultados que permiten encontrar la peor situación (la probabilidad p^* del teorema 2.1) y el valor garantizado por la cartera Q^* -maximin.

Teorema 3.1. Sea p^* una medida de probabilidad. p^* minimiza \underline{E} si y sólo si $C'p^*$ resuelve el programa dual (4.16).

Prueba. Vease Apéndice. □

Corolario 3.2. Se verifica que

$$\text{Sup} \{ \bar{V}(q); q \in Q^* \} = \text{Min} \{ \underline{E}(p); p \in \mathcal{M}_+(K), p(K) = 1 \} = \frac{C}{C'}$$

Prueba. Vease Apéndice. □

Para encontrar la cartera maximin es suficiente resolver el programa primal (4.15). Para ello, probamos el siguiente resultado.

Teorema 3.3. Sea q^* una cartera de precio C . Entonces, q^* es Q^* -maximin si y sólo si $\frac{C'}{C}q^*$ resuelve el programa primal (4.15).

Prueba. Vease Apéndice. □

4.4 Inmunización cuando no hay Restricciones de Endeudamiento

Una vez estudiadas las carteras Q^* -maximin en un modelo muy general que no asume ninguna forma funcional del precio de los activos con respecto a los shocks, vamos a centrarnos de nuevo en un modelo de inmunización. Vamos a estudiar bajo que condiciones una cartera Q^* -maximin es una cartera inmunizada, y caracterizar las situaciones en las que coincide con la cartera maximin. Asimismo, caracterizaremos la existencia de carteras inmunizadas mediante la extensión de la condición débil de inmunización.

En la sección anterior hemos visto que resolviendo los programas (4.15) y (4.16) se tienen calculadas la cartera maximin, y la peor situación. Ahora nos preocuparemos de averiguar cuando es posible construir una cartera inmunizada, y qué cartera es esta. Como se puede observar, y teniendo en cuenta que hemos identificado cada shock con la delta de Dirac que tiene asociada, la condición de inmunización sigue siendo que cero sea el peor shock.

Proposición 4.1. Supóngase se verifican las hipótesis H1, H2, H3 y H4 del capítulo

1. Entonces $\frac{1}{C'} \leq R$. Además, las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) Existe una cartera inmunizada, es decir, existe $q^* \in Q^*$ tal que

$$\bar{V}(q^*) = RC$$

b) δ^0 minimiza \underline{E} .

c) $\frac{\delta^0}{R}$ resuelve el programa (4.16)

d) $\frac{1}{C'} = R$

Prueba. Vease Apéndice. □

Estudiemos ahora si la cartera maximin y la Q^* -maximin coinciden.

Proposición 4.2. Bajo las hipótesis H1, H2, H3 y H4, sea $\mu_0^* > 0$ el valor garantizado por la cartera maximin, y sea (q^*, k^*) un punto de silla de V en $Q \times K$ (y por consiguiente q^* es maximin a largo). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) (q^*, δ^{k^*}) es un punto de silla de E (y por consiguiente q^* es Q^* -maximin)

2) $\frac{V_i(k^*)}{P_i}$ es constante e independiente de i .

Además en caso afirmativo, $\frac{V_i(k^*)}{P_i} = \frac{1}{C'} = \mu_0^*$.

Prueba. Vease Apéndice. □

Nota. La proposición anterior da una condición necesaria y suficiente para que el punto de silla (q^*, k^*) de V lo siga siendo de E . Interesa de todas formas ver si q^* es Q^* -maximin aunque cambie el peor shock al relajar la hipótesis sobre la imposibilidad de tomar posiciones a corto. Esto lo resuelve parcialmente la siguiente proposición. Parcialmente porque supone que k^* es único e impone que no haya otro "peor shock" para la maximin a largo.

Proposición 4.3. Bajo las hipótesis H1, H2, H3 y H4, sea $\mu_0^* > 0$ el valor

garantizado por la cartera maximin, y sea (q^*, k^*) un punto de silla de V en $Q \times K$ (y por consiguiente q^* es maximin a largo). Supongamos además que $V(q^*, k) > V(q^*, k^*)$ para todo $k \in K$.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- 1) q^* es maxmin en Q^* .
- 2) $\frac{V_i(k^*)}{P_i}$ es constante e independiente de i .
- 3) (q^*, δ^{k^*}) es punto de silla de E en $Q^* \times \mathcal{M}_+(K)$.

Prueba. Vease Apéndice. □

4.5 Ejemplos de Carteras Maximin

En esta sección vamos a calcular las carteras maximin en dos pequeños ejemplos para ilustrar la teoría desarrollada.

En el primer ejemplo calcularemos la cartera maximin en el caso de que queramos inmunizar una cartera de bonos, cuando consideramos el conjunto de shocks introducido en el capítulo 1.

En el segundo ejemplo consideramos que tenemos una posición larga en una opción (cuyo precio suponemos viene dado por el modelo de Black & Scholes) y la queremos cubrir durante un periodo, vendiendo a corto la acción subyacente e invirtiendo este dinero en el activo libre de riesgo. De esta manera podemos comparar la estrategia maximin que obtenemos con la estrategia de cobertura clásica de este modelo, vender un porcentaje de acciones igual a la delta de la opción.

A. Cartera Maximin sin restricciones de endeudamiento en un modelo de Inmunización.

Vamos a considerar que queremos inmunizar el conjunto de bonos que viene dado

por la tabla 1. La estrategia que vamos a seguir es calcular la cartera maximin sin restricciones a corto, y de esta manera la podremos comparar con la estrategia maximin calculada en el capítulo 3, en el que no se permitía endeudarse en ningún bono.

La descripción de los bonos de la tabla 1 es la misma que aparece en los tres primeros capítulos, y por lo tanto no vamos a repetirla. Tan sólo vamos a señalar que estos bonos pagan un cupón anual del 10% y vencen a los 3, 4, 5, 6, 7 y 8 años.

Vamos a considerar dos casos. En el primero supondremos que el parámetro λ de los shocks introducidos en el capítulo 1 es igual a $\lambda = 0.05$, en el segundo $\lambda = 0.02$. Recordemos que este parámetro es el valor máximo en el que se pueden diferenciar dos shocks sobre los tipos de interés forward instantaneos entre dos instantes cualquiera

$$|k(t_1) - k(t_2)| \leq \lambda, \quad t_1, t_2 \in [0, T].$$

Para calcular la cartera maximin, hemos resuelto el programa dual que aparece en la ecuación (4.16). Este programa, es un program linear semi-infinito, ya que hay un número finito de bonos y un número infinito de restricciones en el programa primal (4.15). El algoritmo que hemos seguido viene descrito en Anderson y Nash (1987), y es básicamente una extensión del algoritmo del simplex, pues aunque en el programa dual el número de variables de la función objetivo es infinito, el óptimo se alcanza en una solución básica, es decir en un número finito de variables. Este número finito es el número de restricciones del programa dual, n .

Para que podamos aplicar el algoritmo es necesario suponer que el conjunto de shocks es compacto, es decir, hay que restringir los desplazamientos $|k(t)|$. Hemos supuesto un valor del 10%, $|k(t)| \leq 0.1, t \in [0, T]$.

Para aplicar el algoritmo, también es necesario discretizar el componente de shocks paralelos que pueden sufrir los tipos de interés como sucedía en el capítulo 3, y a lo que llamabamos el paso del algoritmo. En estos ejemplos hemos considerado un paso de 0.0002, porque un paso más pequeño implica mayores tiempos de cálculo.

Veamos los resultados obtenidos.

Ejemplo 1. $|k(t_1) - k(t_2)| \leq 0.05$

$|k(t)| \leq 0.10$

Tamaño del paso del algoritmo=0.0002

Periodo de planificación del inversor, $m=5$ años.

Estructura inicial de los tipos de interés, $g(t) = 0.10, t \in [0, T]$

Capital invertido, $C = 100$ pts.

Cartera solución= [-32,41% -13,60% 146,76% -0,27% -46,84% 47,65%]

Cupones de la cartera solución=

[10,129 10,129 -22,281 -0,2300 161,49 -0,2160 -46,759 52,415]

Peor shock, $k^*(t)$,

$t \in (0, 1)$, -0,0246

$t \in (1, 2)$, -0,0246 -0,025

$t \in (2, 3)$, -0,0246 -0,025

$t \in (3, 4)$, -0,0246 +0,025

$t \in (4, 5)$, -0,0246 +0,025

$t \in (5, 6)$, -0,0246 +0,025

$t \in (6, 7)$, -0,0246 +0,025

$t \in (7, 8)$, -0,0246 +0,025

$t \in (8, T)$, -0,0246

Duración=5,0146

Medida $\tilde{N} = 0,5449$

Medida $M^2=2,8235$

Valor garantizado con respecto al prometido=98,7609%

Valor garantizado con respecto al prometido en la tabla 5 del capítulo 3 (para $\lambda = 0.05$) = 96.0990%

Ejemplo 2. $|k(t_1) - k(t_2)| \leq 0.02$

$|k(t)| \leq 0.10$

Tamaño del paso del algoritmo=0.0002

Periodo de planificación del inversor, $m = 5$ años

Estructura inicial de los tipos de interés, $g(t) = 0.10, t \in [0, T]$

Capital invertido, $C = 100$ pts.

Cartera solución= [-33,14% -13,49% 146,88% -0,13% -50,43% 50,85%]

Cupones de la cartera solución=

[10,0532 10,0532 -23,0859 -0,1271 161,5925 -0,0976 -50,3909 55,9329]

Peor shock, $k^*(t)$,

$t \in (0, 1)$, -0,0096

$t \in (1, 2)$, -0,0096 -0,01

$t \in (2, 3)$, -0,0096 -0,01

$t \in (3, 4)$, -0,0096 +0,01

$t \in (4, 5)$, -0,0096 +0,01

$t \in (5, 6)$, -0,0096 +0,01

$t \in (6, 7)$, -0,0096 +0,01

$t \in (7, 8)$, -0,0096 +0,01

134 Capítulo 4. Carteras Maximin en Cualquier Modelo de Cobertura de...

$t \in (8, T)$, -0,0096

Duración=5,0081

Medida \tilde{N} = 0,5413

Medida M^2 =2,8563

Valor garantizado con respecto al prometido=99,4728%

Valor garantizado con respecto al prometido en la tabla 5 del capítulo 3 (para $\lambda = 0.05$) = 98.3667%

Merece la pena destacar los siguientes comentarios a partir de los dos ejemplos realizados.

Lo garantizado por estas carteras es sensiblemente superior a los casos en los que no se puede endeudar en ningún bono.

También vemos que en ambos ejemplos ninguna de las medidas de dispersión son iguales a cero, y que ni permitiendo posiciones de endeudamiento es posible eliminar completamente el riesgo.

Estas carteras prácticamente igualan la duración e incluyen un bono con el vencimiento del horizonte de planificación en un gran porcentaje.

Aunque no hemos probado que en estos modelos y para el conjunto de shocks introducidos en el capítulo 1 no exista arbitraje cuando no hay restricciones para endeudarse en ningún bono. Si existiera una estrategia de arbitraje esta sería también la solución del programa primal o del programa dual en (4.15) y (4.16). Como podemos observar, las soluciones del programa dual no son de arbitraje, pues al menos una condición necesaria para que haya arbitraje es que garanticen por lo menos un 100% de la rentabilidad prometida.

Si en ambos ejemplos hubiésemos considerado por ejemplo 5 bonos con vencimientos

de 1, 2, 3, 4 y 5 años, entonces existe una cartera (-10,24% -11,26% -12,39% -13,63% 149,88%) que replica al bono de cupón cero. Esa cartera es la solución también del programa dual. Y como adelantaba Ingersoll (1983) en su nota final número 3, cuando queremos inmunizar si permitimos posiciones a corto, la estrategia de inmunización consiste en replicar al bono de cupón cero.

B. Cartera Maximin cubriendo una opción en el modelo de Black & Scholes

Supongamos que tenemos una opción call, de la que no nos podemos deshacer, y la queremos cubrir, para evitar que pueda perder todo su valor. Supongamos además que el precio de esta opción viene dado por el modelo de Black & Scholes. Entonces sabemos que la estrategia de cobertura habitual, ver por ejemplo Hull (1993), es endeudarse en un porcentaje de acciones igual a la delta de la opción e invertir ese dinero al tipo de interés libre de riesgo, r . Donde delta, Δ , es la derivada del precio de la opción con respecto al precio del subyacente. Sabemos que si hoy es el instante t y queremos cubrir esta opción hasta el instante T , $t < T$, entonces esta estrategia garantiza una rentabilidad aproximada de $\exp[r(T - t)]$ si T está cerca de t . Llamemos S_t al precio del subyacente y C_t al precio de la opción, entonces

$$\Delta = \frac{S_t}{C_t} \frac{dC_t}{dS_t}$$

La estrategia de cobertura delta consiste en vender Δ acciones y comprar Δ bonos.

Calculemos ahora la estrategia maximin para esta cartera. La rentabilidad de esta cartera vendrá dada por

$$R(\alpha, S_T) = \frac{C_T}{C_t} + \alpha \left(\exp[r(T - t)] - \frac{S_T}{S_t} \right)$$

donde α es ahora el número de acciones que tenemos que vender, si $\alpha > 0$. Calculemos la estrategia maximin de esta cartera y comparemos si coincide con la estrategia delta.

Podemos ver que la función $R(\alpha, S_T)$ es cóncava (lineal) en α y convexa en la variable de estado, S_T . Por lo tanto, si existe un punto de silla, (α^*, S_T^*) , α^* será la

cartera maximin y S_T^* será su peor shock. Las condiciones necesarias y suficiente para que (α^*, S_T^*) sea un punto de silla son

$$\alpha^* = \operatorname{argmax} \left\{ \frac{C_T}{C_t} + \alpha \left(\exp[r(T-t)] - \frac{S_T^*}{S_t} \right); \alpha \in \mathcal{R} \right\} \quad (4.17)$$

$$\left. \frac{1}{C_t} \frac{dC_T}{dS_T} \right|_{S_T=S_T^*} = \frac{\alpha^*}{S_t} \quad (4.18)$$

Lo que implica que el punto de silla, (α^*, S_T^*) , viene dado por

$$\frac{S_T^*}{S_t} = \exp[r(T-t)] \quad (4.19)$$

$$\alpha^* = \left. \frac{S_t}{C_t} \frac{dC_T}{dS_T} \right|_{\frac{S_T}{S_t} = \exp[r(T-t)]} \quad (4.20)$$

Vemos que esta solución, que es la cartera maximin, es la cartera que garantiza una rentabilidad más alta en esta situación y es ligeramente diferente de la estrategia de igualar la delta de la opción. La cartera maximin podemos observar que se acerca a la delta estrategia cuando T se acerca a t . Un análisis de la efectividad de esta estrategia cuando la comparamos con la delta estrategia puede encontrarse en Howe y Rustem (1994) (vease también Duffie (1996)).

4.6 Conclusiones

En el presente capítulo hemos estudiado la existencia y determinación de la cartera maximin en un problema de inmunización, eliminando las restricciones impuestas en los capítulos anteriores sobre la imposibilidad de tomar posiciones a corto en los diferentes bonos. La teoría desarrollada tampoco asume que el valor (precio) de los activos sea un funcional convexo de las variables de estado. Por lo tanto, estos resultados son aplicables en un marco general, en el que se pretenda cubrir cualquier activo.

Una vez probada la existencia de la cartera maximin, y caracterizada ésta mediante un teorema de punto de silla, se establece un programa de optimización que permite su

determinación efectiva en casos prácticos. De hecho, dos ejemplos concretos han sido resueltos, uno de ellos en un problema de inmunización, y el otro en la cobertura de una opción Call.

Volviendo al marco de la inmunización, los resultados de la sección 4 muestran que la técnica presentada permite encontrar las estrategias inmunizadas si estas existen. Se dan también condiciones simples que permiten analizar fácilmente si al relajar las restricciones a corto, el valor garantizado es más alto que antes de hacerlo (proposiciones 4.2 y 4.3).

En modelos clásicos de inmunización, en los que se analizan los cambios sobre la curva de los tipos de interés a través de varios factores, es usual concluir que la estrategia inmunizada debe incorporar posiciones a corto en algún bono. Aquí se estudia de forma rigurosa si estas posiciones a corto realmente permiten garantizar mayores porcentajes. Además, cuando el bono de cupón cero con vencimiento en m se puede replicar, esta replica es la cartera maximin, como señalaba Ingersoll (1983).

Apéndice

Prueba de la Proposición 1.1. Utilizando una notación adecuada para no confundir al shock fijo k con la variable de integración, k' , y teniendo en cuenta (4.4), se tiene que

$$E(q, \delta^k) = \int_K V(q, k') d\delta^k(k') = V(q, k)$$

Prueba de la Proposición 1.2. De la proposición 1.1 se tiene que $V(q, k) = E(q, \delta^k)$ para cada $k \in K$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \bar{V}(q) &= \text{Inf}\{V(q, k); k \in K\} = \text{Inf}\{E(q, \delta^k); k \in K\} \\ &\geq \text{Inf}\{E(q, p), p \in \mathcal{M}_+(K), p(K) = 1\} = \bar{E}(q) \end{aligned}$$

Recíprocamente, para cada p que sea una probabilidad,

$$E(q, p) = \int_K V(q, k) dp(k) \geq \int_K \bar{V}(q) dp(k) = \bar{V}(q)$$

Prueba de la Proposición 1.3. De (4.9), (4.10), y (4.11) se deduce que

$$\bar{V}(q) = \bar{E}(q) \leq E(q, p) \leq \underline{E}(p)$$

Prueba del Teorema 2.1.

El resultado anterior prueba que

$$\text{Sup}\{\bar{V}(q); q \in Q^*\} \leq \text{Inf}\{\underline{E}(p); p \in \mathcal{M}_0\}$$

Basta entonces ver que si $\mu_0 = \text{Sup}\{\bar{V}(q); q \in Q^*\}$, entonces existe $p_0 \in \mathcal{M}_0$ tal que $\underline{E}(p_0) = \mu_0$.

Sea $\mathcal{C}(K)$ el espacio de Banach de las funciones continuas sobre K valoradas en \mathcal{R} . El conjunto $A = \{f \in \mathcal{C}(K); f(k) \geq \mu_0, \text{ para todo } k \in K\}$ es claramente convexo y no vacío. Y el conjunto

$$B = \{f \in \mathcal{C}(k); \text{ existe } q \in Q^* \text{ con } V(q, k) \geq f(k) \text{ para todo } k \in K\}$$

es convexo. En efecto, como V es lineal en q , y Q^* es convexo (es un hiperplano) dados $f, g \in B$ y dados $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ con $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2$, existen $q_1, q_2 \in Q^*$ tales que

$$\alpha_1 f(k) + \alpha_2 g(k) \leq \alpha_1 V(q_1, k) + \alpha_2 V(q_2, k) = V(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2, k)$$

$A^\circ \cap B = \emptyset$. Si $f \in A^\circ \cap B$, $f(k) > \mu_0$ para todo $k \in K$ y existe $q \in Q^*$ con $V(q, k) \geq f(k)$ para todo $k \in K$.

Luego $V(q, k) > \mu_0$ para todo $k \in K$. Puesto que K es compacto y $V(q, k)$ es continuo en K resulta que $V(q, k)$ tiene un mínimo que es mayor que μ_0 , es decir, $\bar{V}(q) > \mu_0$, contra la elección de μ_0 .

Existe un elemento del dual de $\mathcal{C}(K)$, es decir, existe μ medida de Radom sobre la σ -álgebra de Borel de K no nula tal que

$$\int_K [V(q, k) - g(k)] d\mu(k) \leq \mu_0 \mu(K) \tag{4.21}$$

para todo g continua sobre K con $g(k) \geq 0$ para todo $q \in Q^*$. Por consiguiente $\int_K g(k) d\mu(k) \geq 0$, para todo $g \geq 0$ pues de lo contrario multiplicando g por $\alpha \rightarrow +\infty$

$$\int_K V(q, k) d\mu(k) - \alpha \int_K g(k) d\mu(k) \leq \mu_0 \mu(k)$$

lo que es imposible porque el segundo término de la izquierda tiende a infinito.

Por consiguiente μ es una medida positiva, y tenemos $p_0 = \frac{\mu}{\mu(K)}$. Sigue valiendo (4.21), es decir,

$$E(q, p_0) = \int_K V(q, k) dp_0(k) \leq \mu_0, \text{ para todo } q \in Q^*$$

Luego $\underline{E}(p_0) = \text{Sup}\{E(q, p_0); q \in Q^*\} \leq \mu_0$. Como ya se tenía $\underline{E}(p_0) \geq \mu_0$, entonces $\underline{E}(p_0) = \mu_0$

Prueba del Teorema 2.3.

Si (q^*, p^*) es punto de silla, $E(q, p^*) \leq E(q^*, p^*) \leq E(q^*, p)$ para todo $q \in Q^*$ y para todo $p \in \mathcal{M}_0$. Luego $\underline{E}(p^*) = E(q^*, p^*) = \bar{V}(q^*)$ y son solución.

Recíprocamente si son solución $E(q, p^*) \leq \underline{E}(p^*) = \overline{V}(q^*) \leq E(q^*, p^*)$. Por otro lado $E(q^*, p) \geq \overline{V}(q^*) = \overline{E}(p^*) \geq E(q^*, p^*)$.

Prueba del Lema 2.4. Supóngase que $\underline{E}(p)$ es finito. Del álgebra lineal se sabe que para probar que $(E_1(p), E_2(p), \dots, E_n(p))$ y (P_1, P_2, \dots, P_n) son proporcionales, basta probar que cualquier vector ortogonal al segundo es también ortogonal al primero. Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ un vector ortogonal al vector de precios. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i = 0$$

Para cada $q \in Q^*$

$$\sum_{i=1}^n q_i P_i = C$$

y multiplicando por h la primera ecuación y sumando, se obtiene que $q + h\alpha$ es una cartera de Q^* (de precio C) sea cual sea $h \in \mathcal{R}$. De (4.11)

$$\underline{E}(p) \geq \sum_{i=1}^n q_i E_i(p) + h \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i(p)$$

y puesto que el miembro de la izquierda es finito, el último sumando es cero, ya que de otra forma, haciendo h tender a más o menos infinito (según el caso) se estaría en contradicción.

Recíprocamente, si existe λ verificando las condiciones del enunciado, para cada $q \in Q^*$

$$E(q, p) = \sum_{i=1}^n q_i E_i(p) = \lambda \sum_{i=1}^n q_i P_i = \lambda C$$

y tomando supremos en q se obtiene $\underline{E}(p) = \lambda C$.

Prueba del Teorema 3.1 Si $C'p^*$ resuelve (4.16) es factible para este programa, y por consiguiente

$$\int_K V_i(k) dp^*(k) = \frac{P_i}{C'}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

El lema 2.4 garantiza que $\underline{E}(p^*)$ es finito. Si p^* no minimizara \underline{E} , existiría una medida de probabilidad p tal que $\underline{E}(p) < \underline{E}(p^*) < \infty$. Del lema 2.4, existe λ tal que para cada i

$$E_i(p) = \lambda P_i$$

Además λ no se anula pues en tal caso, la última igualdad implicaría que p es idénticamente nula, lo que contradice que sea una probabilidad. Por consiguiente $\frac{p}{\lambda}$ es factible dual. Como C' es el valor óptimo dual (y primal),

$$p(K) \leq \lambda C' \tag{4.22}$$

Además, para cada $q \in Q^*$

$$\sum_{i=1}^n q_i \int_K V_i(k) dp(k) = \lambda \sum_{i=1}^n q_i P_i = \lambda C$$

De donde, tomando supremos en q ,

$$\underline{E}(p) = \lambda C \tag{4.23}$$

Por otro lado, y en virtud de (4.22)

$$\underline{E}(p^*) = \text{Sup}\{E(q, p^*); q \in Q^*\} = \frac{C}{C'} \tag{4.24}$$

De (4.23), (4.24), y $\underline{E}(p) < \underline{E}(p^*)$ se deduce que $\lambda < \frac{1}{C'}$ y por (4.22) $p(K) < 1$ lo que contradice que p sea una medida de probabilidad.

Recíprocamente, supóngase que p^* minimiza \underline{E} . Como el programa dual es resoluble, existe p solución de éste. Por tanto $p(K) = C'$, es decir, $\frac{p}{C'}$ es una medida de probabilidad, y por la implicación ya probada, $\frac{p}{C'}$ minimiza \underline{E} . Además, $\underline{E}\left(\frac{p}{C'}\right) = \frac{\underline{E}(p)}{C'}$, y de ser p factible dual se deduce inmediatamente que esta última expresión vale $\frac{C}{C'}$. Luego $\underline{E}(p^*) = \frac{C}{C'}$. De ser lo anterior finito, y del lema 2.4 se deduce que existe β tal que $E_i(p^*) = \beta P_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Además, para cada $q \in Q^*$

$$E(q, p^*) = \sum_{i=1}^n q_i E_i(p^*) = \sum_{i=1}^n q_i \beta P_i = \beta C$$

y tomando ínfimos en q , $\underline{E}(p^*) = \beta C$. Luego $\beta = \frac{1}{C'}$ y por tanto

$$E_i(p^*) = \frac{P_i}{C'}$$

En particular, $C'p^*$ es dual factible. Como $p^*(K) = 1$, el objetivo dual óptimo se alcanza en $C'p^*$.

Prueba del Corolario 3.2. La primera igualdad es consecuencia del teorema 2.1, y la prueba de la segunda está implícita en la prueba del teorema anterior.

Prueba del Teorema 3.3. Si q^* es Q^* -maximin, del corolario anterior se deduce que

$$\bar{V}(q^*) = \frac{C}{C'}$$

Luego

$$\sum_{i=1}^n q_i^* V_i(k) \geq \frac{C}{C'}$$

para cada shock posible k . De lo anterior se deduce que $\frac{C'q^*}{C}$ es factible primal. Además, como q^* tiene precio C

$$\frac{C'}{C} \sum_{i=1}^n q_i^* P_i = C'$$

de donde se deduce que el objetivo primal alcanza su valor óptimo C' en $\frac{C'q^*}{C}$.

Recíprocamente, supóngase que la cartera anterior resuelve el programa (4.15). Del corolario anterior se deduce que basta probar que

$$\bar{V}(q^*) \geq \frac{C}{C'}$$

Pero como $(C'q)/C$ tiene que ser primal factible,

$$\sum_{i=1}^n \frac{C'q_i}{C} V_i(k) \geq 1$$

para cada k posible, y por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^n q_i^* V_i(k) \geq \frac{C}{C'}$$

para cada shock $k \in K$.

Prueba de la Proposición 4.1. Claramente

$$\int_K V_i(k) d\left(\frac{\delta^0}{R}\right) = \frac{V_i(0)}{R} = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

de donde $\frac{\delta^0}{R}$ es factible dual y el objetivo en él, $\frac{1}{R}$ verifica $\frac{1}{R} \leq C'$. Además, si se da la igualdad $\frac{\delta^0}{R}$ es solución dual y viceversa (el ser solución equivale a tener un objetivo $\frac{1}{R}$ máximo) lo que equivale según uno de los teoremas probados a que $\left(\frac{1}{R}\right)^{-1} \delta^0 = \delta_0$ sea solución de \underline{E} .

Prueba de la Proposición 4.2. Supongamos se verifica 1). Si (q^*, δ^{k^*}) es punto de silla de E se verifica que δ^{k^*} minimiza \underline{E} y por tanto $C'\delta^{k^*}$ resuelve el dual. Como es dual factible

$$\int_K V_i(k) d(C'\delta^{k^*}) = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y por lo tanto

$$C'V_i(k^*) = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Supongamos ahora se verifica 2). Si $\frac{V_i(k^*)}{P_i}$ es constante, existe λ (independiente de i) positivo tal que $\int_K V_i(k) d\left(\frac{\delta^{k^*}}{\lambda}\right) = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$ y $\frac{\delta^{k^*}}{\lambda}$ es dual factible.

Además U minimiza en k^* y

$$\mu_0^* = U(k^*) = \text{Max}\left\{\frac{V_i(k^*)}{P_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n\right\} = \lambda$$

Luego $\mu_0^* = \lambda$ y $\frac{1}{\mu_0^*} \delta^{k^*}$ es dual factible. El objetivo dual es $\frac{1}{\mu_0^*} \leq C'$ (porque C' es el máximo), es decir, $\frac{1}{C'} \leq \mu_0^*$. Puesto que la desigualdad opuesta es evidente $\frac{1}{\mu_0^*} = C'$.

Si $C'\delta^{k^*}$ es dual factible y solución dual resulta que (teorema 3.1) δ^{k^*} es mínimo de E . Además $\bar{V}(q^*) = \mu_0^*C = \frac{C}{C'}$ y del corolario 3.3 q^* maximiza \bar{V} también en Q^* .

Prueba de la Proposición 4.3.

La equivalencia entre 2) y 3) está probada en la proposición anterior.

3) implica 1) ya se probó.

Supongamos se verifica 1). Como q^* es maximin, sea p^* mínimo de \underline{E} y (q^*, p^*) es punto de silla en $Q^* \times \mathcal{M}_0$.² Luego si probamos que $p^* = \delta^{K^*}$ se tendrá 3).

Como q^* es maximin y Q^* -maximin

$$\bar{V}(q^*) = V(q^*, k^*) = E(q^*, p^*)$$

Es decir,

$$\int_K V(q^*, k) dp^*(k) = V(q^*, k^*) = \int_K V(q^*, k^*) dp^*(k)$$

de donde

$$\int_K [V(q^*, k) - V(q^*, k^*)] dp^*(k) = 0$$

y $V(q^*, k) - V(q^*, k^*) = 0$ en soporte de p^* . Luego $\text{Soporte}(p^*) = k^*$ y $p^* = a\delta^{K^*}$. Para que sea p^* probabilidad, $a = 1$.

Propiedades de los conjuntos de Shocks de Fong y Vasicek (1984) y de los shocks acotados introducidos en el capítulo 1.

Como conjunto de shocks de Fong y Vasicek (1984) vamos a tomar las funciones de clase \mathcal{C}^1 en el intervalo $[0, T]$ cuya derivada está acotada por un parámetro conocido $\lambda \geq 0$. Al conjunto anterior lo simbolizamos mediante \mathcal{F} .

$$\mathcal{F} = \{K \in \mathcal{C}[0, T]; K \text{ es de clase } \mathcal{C}^1, |k'(t)| \leq \lambda \text{ para todo } t \in [0, T]\} \quad (4.25)$$

² \mathcal{M}_0 es el conjunto de las medidas de probabilidad de $\mathcal{M}_+(K)$.

Análogamente tomaremos como conjunto de shocks introducidos en el capítulo 1, al siguiente conjunto de funciones con cuadrado integrable. En él, supondremos que $\lambda^* \geq 0$ es un parámetro conocido.

$$\mathcal{B} = \{k \in \mathcal{L}^2[0, T]; |k(t_1) - k(t_2)| \leq \lambda^* \text{ para casi todo } t_1, t_2 \in [0, T]\} \quad (4.26)$$

En estas condiciones se tiene lo siguiente.

Teorema A.1. Para cada $a \in \mathcal{R}$, $a > 0$, el conjunto

$$\mathcal{F}_a = \{K \in \mathcal{F}; |k'(m)| \leq a\} \quad (4.27)$$

es relativamente compacto³ en $\mathcal{C}[0, T]$ con la topología de la convergencia uniforme.

Prueba. Del teorema de Ascoli-Areola (o tercer teorema Ascoli) se deduce que basta probar que \mathcal{F}_a es equicontinuo y que el conjunto

$$\mathcal{F}_a(t) = \{k(t); k \in \mathcal{F}_a\} \quad (4.28)$$

es acotado para cada $t \in [0, T]$.

Del teorema del valor medio, y de la propia definición de \mathcal{F}_a

$$|k(t_1) - k(t_2)| \leq \lambda |t_1 - t_2|$$

para cada $t_1, t_2 \in [0, T]$ y cada $k \in \mathcal{F}_a$, de donde se obtiene inmediatamente el carácter equicontinuo de \mathcal{F} y de \mathcal{F}_a .

La última desigualdad aplicada a $t \in [0, T]$ y a m , conduce a

$$k(m) - \lambda |t - a| \leq k(t) \leq k(m) + \lambda |t - a|$$

y puesto que $|k(m)| \leq a$

$$-(a + \lambda |t - a|) \leq k(t) \leq a + \lambda |t - a|$$

³Es decir, su adherencia es compacta.

para cada $t \in [0, T]$ y cada $k \in \mathcal{F}_a$. En particular, $\mathcal{F}_a(t)$ es un conjunto acotado.

Teorema A.2. Para cada $a \in \mathcal{R}$, $a > 0$, el conjunto

$$\mathcal{B}_a = \{k \in \mathcal{B}; |k(t)| \leq a \text{ para casi todo } t \in [0, T]\} \tag{4.29}$$

es compacto de $\mathcal{L}^2[0, T]$ dotado de su topología débil.

Prueba. En primer lugar, para cada función (shock) $k \in \mathcal{B}_a$ se tiene que

$$\|k\|_2 = \left[\int_0^T k(t)^2 dt \right]^{0.5} \leq (a^2 T)^{0.5} = aT^{0.5}$$

de donde \mathcal{B}_a es un conjunto acotado en norma. En virtud del teorema de Alaogh-Bourbaky, demostrar que \mathcal{B}_a es débilmente compacto se reduce ahora a probar que es débilmente cerrado. Puesto que \mathcal{B}_a es evidentemente convexo, el teorema de Hanh-Banach permite garantizar que \mathcal{B}_a es débilmente cerrado en cuanto probemos que es cerrado. Para probar que es cerrado, sea $(k_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de \mathcal{B}_a convergente (con la norma de \mathcal{L}_2) a k , y probemos que $k \in \mathcal{B}_a$. Puesto que teoremas clásicos de teoría de la medida permiten garantizar que existe una subsucesión de $(k_n)_{i=1}^\infty$ convergente en casi todo punto a k , y denotando por comodidad mediante $(k_n)_{i=1}^\infty$ a la subsucesión, se tiene

$$|k(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |k_n(t)| \leq a \text{ para casi todo } t \in [0, T]\}$$

$$|k(t_1) - k(t_2)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |k_n(t_1) - k_n(t_2)| \leq \lambda^* \text{ para casi todo } t_1, t_2 \in [0, T]\}$$

Referencias

- Anderson, E.J., y P. Nash, (1987), *Linear Programming in Infinite-Dimensional Spaces. Theory and Applications*, John Wiley & Sons Ltd., Great Britain
- Bierwag, G.O., y C. Khang, (1979), "An Immunization Strategy is a maxmin Strategy." *The Journal of Finance*, 37, May, pp. 379-389.
- Duffie, D., (1996), *Dynamic Asset Pricing Theory*, Second Edition, Pricenton.
- Howe, M.A. y B. Rustem (1994), "Minimax Hedging Strategy," Working Paper, University of Warwick.
- Hull J.C., (1993), *Options, Futures, and other Derivatives Securities*, Second Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- Ingersoll, J.E, (1983), "Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization." In G. Bierwag, G. Kaufman, and A. Toevs, *Is Immunization Feasible?*. Greenwich: JAI Press.
- Luenberger, D.G., (1969), *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons Inc.
- Prisman, E.Z, (1986), "Immunization as a Maxmin Strategy a New Look," *Journal of Banking and Finance*, 10, pp. 491-509.

Tabla 1: Conjunto de Bonos

Número del bono	Vencimiento (años)	cupon in %	cupon (meses)	Duración (años)	M^2	\tilde{N}
1	3	10	12	2.73380	5.51450	2.26620
2	4	10	12	3.48232	3.27130	1.51767
3	5	10	12	4.16101	2.59822	0.83898
4	6	10	12	4.77597	3.22315	1.45880
5	7	10	12	5.33285	4.90932	2.02011
6	8	10	12	5.83689	7.45157	2.52818

Capítulo 5

Conclusiones

Capítulo 1

Hemos construido una Teoría de Inmunización alrededor del Lema 3.6 del capítulo 1.

El contenido básico del Lema 3.6 es responder a la pregunta "¿Cuándo se puede Inmunizar una Cartera de Bonos?". Nos dice con respecto a cualquier shock cuando o cuando no podemos inmunizar.

⁴ Hemos mostrado que la Condición Débil de Inmunización es equivalente a la existencia de una cartera inmunizada.⁵

Esta teoría contiene a dos de los principales resultados de esta literatura, Bierwag y Khang (1979) y Fong y Vasicek (1984).

Esta teoría resuelve/contesta el puzzle de la duración ajustada.

Hemos propuesto una nueva estrategia de inmunización. Ajustar la duración de la cartera y minimizar la medida de dispersión lineal \tilde{N} . Esta estrategia puede incluir un bono con el vencimiento igual al periodo de planificación del inversor, y por lo tanto explicar los resultados empíricos de Bierwag *et al.* (1993).

Capítulo 2

Este capítulo prueba que cualquier medida de dispersión es una medida del riesgo de inmunización, en las que como casos particulares se encuentran la medida cuadrática M^2 de Fong and Vasicek (1984) y la medida lineal \tilde{N} del capítulo anterior. Además, señalamos que la medida lineal \tilde{N} parece la más apropiada para utilizarla como una Medida del Riesgo de Inmunización.

Capítulo 3

Este capítulo calcula las carteras maximin en modelos donde inmunización no es factible. Modelos muy apropiados, porque no permiten un tipo de arbitraje, y permiten muchos cambios sobre los tipos de interés. Calculando algunos ejemplos de estas carteras maximin, vemos que están muy cerca de carteras con la duración ajustada, garantizan una rentabilidad cercana a la de una cartera inmunizada, y puede incluir un bono con vencimiento igual al horizonte de planificación. Por lo tanto estas carteras explican el puzzle de la duración ajustada y los resultados empíricos de Bierwag *et al.* (1993).

Capítulo 4

Este capítulo calcula las carteras maximin en cualquier modelo de cobertura de dos periodos. Por lo tanto, incluye a los modelos de inmunización, en los que el precio de los bonos es una función convexa de los tipos de interés y no se puede ir a corto en ningún activo. Volviendo a modelos de inmunización damos una condición para que la estrategia maximin con restricciones de endeudamiento sea también la cartera maximin, cuando no existen estas restricciones. Presentamos dos ejemplos. El primero para inmunizar una cartera de bonos con respecto a los shocks acotados introducidos en el capítulo 1. El segundo para cubrir una opción el modelo de Black & Scholes. Sin embargo, el alcance de los resultados de este capítulo necesita de una mayor investigación.