

INFERENCIA BAYESIANA PARA ALGUNAS LEYES DE LANCHESTER

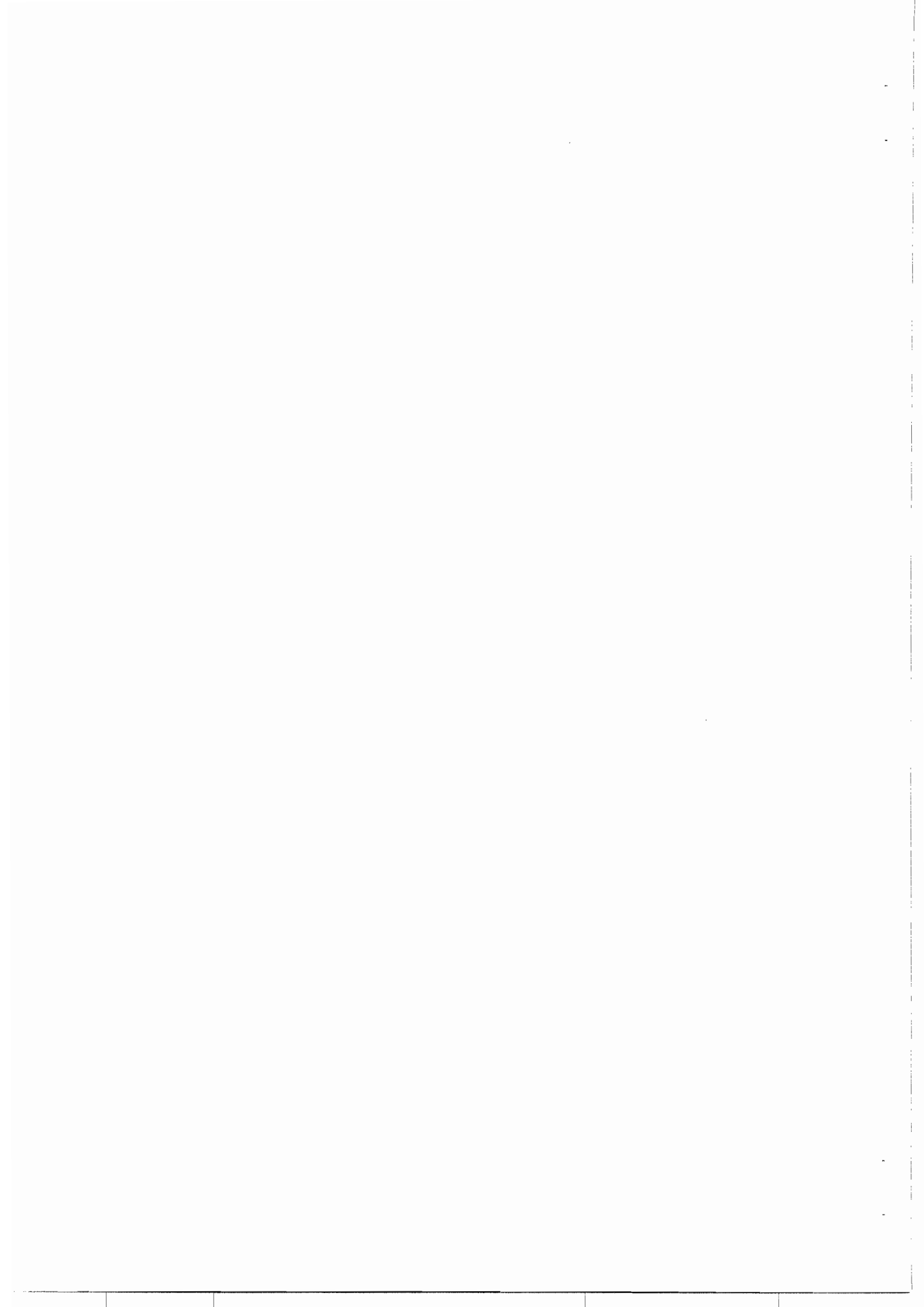
Wiper, M.P., Pettit, L.I. y Young, K.D.S. *

Abstract

Lanchester (1916) introdujo una serie de ecuaciones o leyes determinísticas para modelar los números de bajas en un combate sin refuerzos. Un inconveniente de estos modelos es que no son útiles ni para la inferencia ni para la predicción, ya que el resultado de una batalla viene determinado por los parámetros del sistema y los tamaños iniciales de cada ejército. Se han propuesto varias versiones estocásticas de las ecuaciones de Lanchester. En este artículo, se resumen algunos de estos modelos y se demuestra cómo utilizar la inferencia bayesiana para estimar los parámetros importantes dada la información a priori que proviene de batallas anteriores, simulaciones, etc. y dada una muestra de datos de un combate. Finalmente, se ilustran los métodos empleados con datos reales y simulados.

Keywords: Leyes de Lanchester; modelos de regresión; procesos estocásticos; inferencia bayesiana.

*Wiper, Departamento de Estadística y Econometría, Universidad Carlos III de Madrid, c/ Madrid 126, 28903 Getafe. Madrid, e-mail: mwiper@est-econ.uc3m.es, Tfno: 91-6249852; Pettit, Goldsmiths College, University of London, U.K; Young, University of Surrey, Guildford, U.K.



1. Introducción: las leyes determinísticas de Lanchester

Mediante el estudio de varios combates reales, Lanchester (1916) propuso las siguientes ecuaciones diferenciales para aproximar las bajas en un combate moderno entre dos ejércitos, "rojo" (x) y "azul" (y) en una batalla sin refuerzos:

$$\begin{aligned} dx/dt &= -a y(t) \\ dy/dt &= -b x(t) \end{aligned}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son los tamaños de los dos ejércitos en un tiempo t después del inicio de la batalla y a y b representan la fuerza del ejército azul y del ejército rojo respectivamente. Ver también Weiss (1957) para algunos supuestos sobre la batalla que justifican este sistema.

Las solución de estas ecuaciones es:

$$b(x(0)-x(t))^2 = a(y(0)-y(t))^2$$

o definiendo $\lambda=b/a$,

$$\lambda = \frac{(y(0)-y(t))^2}{(x(0)-x(t))^2}$$

que es la llamada ley cuadrática de un combate moderno. La condición para la igualdad entre los dos ejércitos (es decir que tengan la misma posibilidad de ganar la batalla) es

$$b x(0)^2 = a y(0)^2$$

que implica que la fuerza de un ejército es proporcional al cuadrado de sus unidades. Para las soluciones exactas de $x(t)$ e $y(t)$ en términos de los tamaños iniciales y los parámetros a y b , ver por ejemplo, Morse y Kimball (1950).

Para modelar batallas antiguas "mano a mano", Lanchester propuso otro sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} dx/dt &= -a \\ dy/dt &= -b \end{aligned}$$

que implica que la fuerza de un ejército es proporcional a su tamaño y entonces se tiene una ley lineal

$$\lambda = \frac{(y(0)-y(t))}{(x(0)-x(t))}$$

donde $\lambda=b/a$ como anteriormente. Es fácil ver que otros sistemas de ecuaciones implican una ley lineal, como por ejemplo

$$\begin{aligned} dx/dt &= -a x(t) y(t) \\ dy/dt &= -b x(t) y(t) \end{aligned}$$

que ha sido propuesto como otro modelo de combate moderno con fuego aleatorio en un área (en inglés "area fire"), ver Weiss (1957).

Un sistema general de ecuaciones que incluye las leyes propuestas por Lanchester es

Ecuación 1

$$\begin{aligned} dx/dt &= -a x(t)^{\phi_1} y(t)^{\phi_2} \\ dy/dt &= -b x(t)^{\phi_2} y(t)^{\phi_1} \end{aligned}$$

donde $\Phi = (\phi_1, \phi_2)^T = (0,0)^T$ ó $(1,1)^T$ son leyes lineales, $\Phi = (0,1)^T$ es la ley cuadrática y otras posibilidades son $\Phi = (1,0)^T$, que es la ley logarítmica propuesta por Weiss (1966) para combates de gran escala y $\Phi = (0.75,0.4)^T$, que es la ley "lineal logarítmica" propuesta por Hartley (1995). Para otras generalizaciones, ver también Taylor (1983).

Dados los datos de una batalla, es interesante estimar tanto el tipo de batalla controlado por el valor de Φ como la diferencia entre la fuerza de los dos ejércitos, representado por λ (o el logaritmo de λ). Se ha intentado aplicar las leyes de Lanchester con varios grados de éxito a datos de varias batallas históricas, por ejemplo, la batalla bíblica de Gibeah (David 1995), la guerra civil en los Estados Unidos (Weiss 1966), y las batallas de Iwo Jima (Engel 1954) y las Árdenas (Bracken 1995, Fricker 1998) de la Segunda Guerra Mundial.

No obstante, el uso de leyes determinísticas tiene algunos inconvenientes. En primer lugar, está claro que una batalla es un proceso estocástico y por tanto, un sistema determinístico es una aproximación a la realidad. En segundo lugar, las ecuaciones determinísticas no son muy útiles para predicción (del vencedor, números de supervivientes etc.) dado que el resultado de la batalla está predeterminado por los parámetros del sistema.

Por estas razones, se han desarrollado varias versiones estocásticas de estos sistemas y este presente estudio tiene como finalidad presentar estos modelos e indicar cómo hacer inferencia sobre los parámetros de interés mediante métodos bayesianos.

A continuación, en la Sección 2, se considera un modelo de regresión basado en la discretización y linealización de la Ecuación 1. Se demuestra la inferencia bayesiana sobre los parámetros (a, b, Φ) basada en la información a priori y en los datos de una batalla y se ilustra el método con datos de la batalla de Inchon Seoul en la Guerra de Corea. Se termina la sección comentando algunos de los problemas asociados con el uso de modelos de regresión.

En la Sección 3, se presenta otro enfoque basado en el uso de procesos tipo Poisson, que proporcionan versiones estocásticas de las leyes de Lanchester. Se comenta brevemente la inferencia bayesiana para los parámetros del sistema y la predicción del vencedor de la batalla y del número de supervivientes y se ilustra el enfoque con un conjunto de datos simulados.

Para concluir, en la Sección 4, se indican algunas extensiones de las técnicas utilizadas, incluyendo aplicaciones no militares.

Sección 2. Modelos de regresión.

En primer lugar, se supone que se observan los tamaños de cada ejército y los números de bajas en el combate cada día durante $t = 1, \dots, d$ días. Entonces, discretizando y linealizando las Ecuaciones 1 e introduciendo unos errores, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta_t^x &= \log a + \phi_1 \log x_t + \phi_2 \log y_t + \varepsilon_t^x \\ \Delta_t^y &= \log b + \phi_1 \log y_t + \phi_2 \log x_t + \varepsilon_t^y\end{aligned}$$

donde Δ_t^x y Δ_t^y son los logaritmos del número de bajas en cada ejército en el día t y ε_t^x y ε_t^y son los errores. Expresando el sistema de forma vectorial,

Ecuación 2

$$\mathbf{z}_t = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{N}_t \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

donde $\mathbf{z}_t = (\Delta_t^x, \Delta_t^y)^T$, $\boldsymbol{\alpha} = (\log a, \log b)^T$, $\mathbf{N}_t = \begin{pmatrix} \log x_t & \log y_t \\ \log y_t & \log x_t \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t^x, \varepsilon_t^y)^T$.

De esta manera, suponiendo que la distribución de los errores no depende del tiempo t (por ejemplo, se puede suponer que $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$ una distribución normal multivariante) el sistema se convierte en un modelo de regresión multivariante.

Dados los datos $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_d$, se pueden estimar los parámetros $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Phi})$ mediante regresión clásica utilizando métodos estándar, ver Fricker (1998) para un ejemplo. Un inconveniente es que a menudo hay mucha colinealidad en los datos de combate (los tamaños de los ejércitos cada día son muy parecidos), lo que implica inestabilidad en los estimadores de mínimos cuadrados. También hay dificultades si la matriz \mathbf{V} es desconocida. Una posible solución es combinar los datos que provienen de la batalla con información a priori utilizando métodos bayesianos. En la siguiente subsección, se introduce brevemente la inferencia bayesiana.

2.1. La inferencia bayesiana

Se supone ahora que existe información a priori sobre los parámetros de la Ecuación 2, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{V})$, que se puede representar mediante una distribución a priori $f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{V})$. La elección de la forma de la distribución a priori depende de la información a priori que se tiene, pero a menudo será razonable suponer que los distintos parámetros son independientes y por tanto, una elección razonable es considerar distribuciones normales para $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\Phi}$ y una distribución Wishart invertida para \mathbf{V} . Ver Wiper et al (2000) para más detalles.

Dados los datos, se usa el teorema de Bayes para calcular la distribución a posteriori:

$$f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{V} | \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_d) \propto f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{V}) f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_d | \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{V})$$

es decir que la densidad a posteriori es proporcional a la densidad a priori multiplicada por la función de verosimilitud.

Se basa la inferencia sobre (α, Φ, V) en la distribución a posteriori. Por ejemplo, se puede estimar los parámetros con sus medias a posteriori $E[\alpha | z_1, \dots, z_d]$ etc. y se estimaría $\log \lambda$ (que representa la diferencia entre la eficiencia de los dos ejércitos) mediante

$$E[\log \lambda | z_1, \dots, z_d] = E[\alpha_2 - \alpha_1 | z_1, \dots, z_d].$$

Otro tema de interés es la estimación de Φ , que define el tipo de batalla. Se pueden contrastar varios valores de Φ mediante el uso de factores Bayes. Sea $H_0: \Phi = \Phi_0$ y $H_1: \Phi = \Phi_1$. Entonces el factor Bayes a favor de H_0 es

$$B_1^0 = \frac{f(z_1, \dots, z_d | H_0)}{f(z_1, \dots, z_d | H_1)}$$

que es la razón de las verosimilitudes integradas de las dos hipótesis. El estadístico $2 \log B_1^0$ es una versión bayesiana del estadístico clásico del logaritmo de la razón de verosimilitudes. Ver por ejemplo Kass y Raftery (1995) para más detalles.

En la práctica existen algunas complicaciones. El problema más importante es que no se puede evaluar la distribución a posteriori de los parámetros $f(\alpha, \Phi, V | z_1, \dots, z_d)$ en una forma cerrada (salvo cuando se elige una distribución a priori de una forma muy especial y poco razonable en la práctica).

Se puede resolver el problema empleando algoritmos numéricos para muestrear la distribución a posteriori (generando valores $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(M)}$) y aproximando los momentos ($E[\alpha | z_1, \dots, z_d]$ etc.) con los momentos de los datos muestreados (por ejemplo $\bar{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \alpha^{(i)}$). La dificultad radica en cómo muestrear la distribución a posteriori.

En el problema estudiado aquí, dadas las distribuciones a priori comentadas anteriormente, se puede demostrar que las distribuciones condicionales $f(\alpha | z_1, \dots, z_d, \Phi, V)$ y $f(\Phi | z_1, \dots, z_d, \alpha, V)$ (ambas normales) y $f(V | z_1, \dots, z_d, \alpha, \Phi)$ (Wishart invertida) son conjugadas (de la misma forma que las distribuciones a priori) y fáciles de muestrear.

Existe un método general para muestrear la distribución a posteriori cuando se puede muestrear todas las distribuciones condicionales, que es el muestreo de Gibbs. Ver por ejemplo Gelfand y Smith (1990) para una introducción.

Wiper et al (2000) emplean la inferencia bayesiana para un modelo de regresión basado en el de la Ecuación 2 para analizar los datos de la batalla de las Árdenas. Para más información sobre la inferencia bayesiana en modelos de combate ver también este artículo.

A continuación, se analizan unos datos de la guerra de Corea.

2.2. Ejemplo

Busse (1971) y Hartley y Helmbold (1995) publican datos de la batalla de Inchon Seoul en la guerra de Corea. En esta batalla, aterrizaron aproximadamente 25040 soldados norteamericanos en Inchon el día 15 de Septiembre 1950 y empezaron a atacar al ejército coreano de 22150 soldados aproximadamente. La batalla duró hasta el día 4 de Octubre, es decir un total de 19 días. Hartley y Helmbold proporcionan estimadores de los tamaños de cada ejército, números de bajas, prisioneros coreanos capturados por los norteamericanos y números de refuerzos en cada ejército para cada día del combate. Durante toda la batalla hubo casi 14000 bajas entre los coreanos. Los norteamericanos sufrieron algo menos de 2500 bajas y capturaron casi 4400 prisioneros. En total, los coreanos emplearon 22700 refuerzos durante la batalla y los norteamericanos ninguno. (Existe la posibilidad de 10450 refuerzos en el ejército norteamericano pero no está claro que estos entraran en el combate, y no se han incluido aquí). Aunque en principio, las ecuaciones de Lanchester simples no valen para combates con refuerzos, se observa que bajo el supuesto de que los refuerzos llegan la noche anterior y todos entran en combate al día siguiente, no hay ningún problema en incorporarlos en el modelo (cambiando la matriz N_t de la Ecuación 2 apropiadamente).

Se supone ahora el modelo de regresión introducido en la Ecuación 2 con una pequeña modificación² y se incluyen los prisioneros coreanos entre sus bajas. Se utilizan las siguientes distribuciones a priori.

- $\phi \sim N\left(.5, \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\right)$ que es una distribución que sugiere que, a priori, todas las leyes de Lanchester comentadas anteriormente son razonables.
- $\alpha' \sim N\left(5, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$ que sugiere que, a priori, se espera que el número de bajas en cada ejército sea entre 3 y 8100 con una mediana de aproximadamente 150.
- $V \sim$ Wishart invertida(3, I) que es bastante no informativa indicando que no se tiene mucha información a priori sobre la varianza.

La elección de la distribución a priori depende de la información a priori disponible. Aquí, las distribuciones utilizadas proporcionan poca información. Resulta interesante analizar la robustez de las conclusiones ante cambios en estas elecciones. En este caso, parece que los resultados son poco sensibles.

En la Figura 1, se observa un gráfico de los errores en las predicciones para cada ejército

$$E[\varepsilon_t | z_1, \dots, z_d] = z_t - E[\alpha + N_t \Phi | z_1, \dots, z_d]$$

² Se escribe la Ecuación 2 de la forma $z_t = \alpha' + N_t' \Phi + \varepsilon_t$ donde N_t' ha sido centrada. Así se evitan algunos problemas de colinealidad, ver Wiper et al (2000).

frente a t y se ve que el modelo no es adecuado. Hay dos problemas que merecen ser comentados. En primer lugar, hay un error negativo muy grande en la predicción para las bajas norteamericanas en el segundo día de la batalla (y también para los dos ejércitos en el día 17). Volviendo a los datos originales, se ve que el número de bajas este día fue mucho menor que el de otros días de la primera mitad de la batalla. También está claro que hay una diferencia entre la primera parte de la batalla y los últimos seis días.

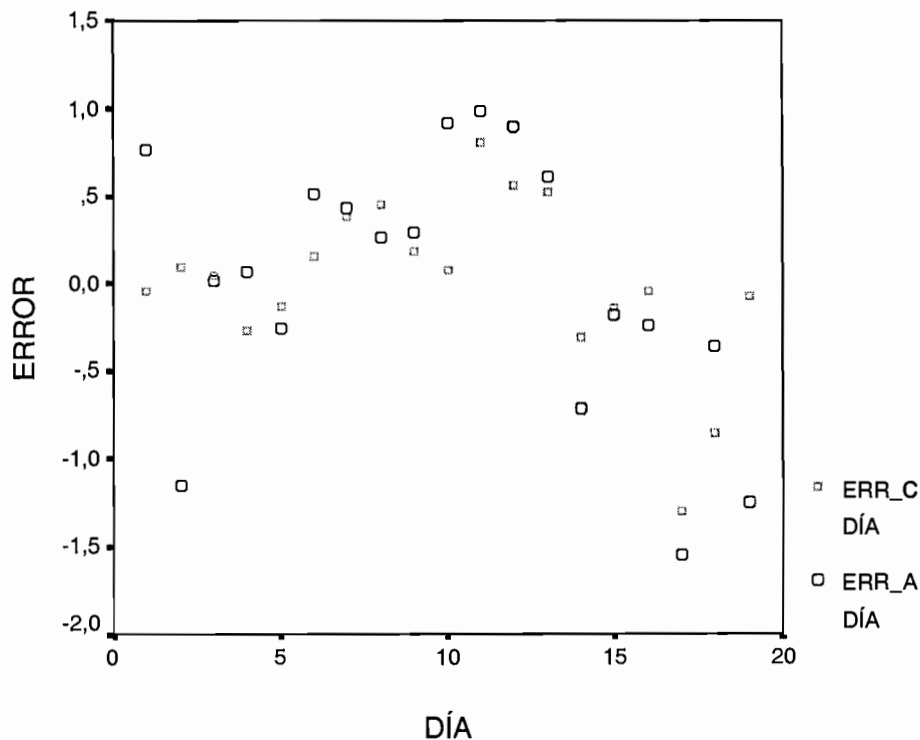


Figura 1. Diagrama de los errores esperados frente al día de la batalla. (Cuadrados pequeños indican predicciones para los coreanos con cuadrados grandes para los norteamericanos).

Los comentarios en Hartley y Helmbold (1995) explican la razón. Parece que hasta el día 27 de Septiembre, la intensidad de la batalla estaba aumentando (con el combate más violento entre los días 22 y 25 de Septiembre) pero que después, la batalla cambió cuando los coreanos empezaron a rendirse y la intensidad del conflicto disminuyó mucho. Los números de bajas en cada ejército en los últimos 6 días de la batalla son mucho menores que en los de la primera parte.

Se considera una posible modificación de la Ecuación 2 que puede explicar el cambio en la batalla. Se define

Ecuación 3

$$z_t = \alpha + N_t \phi - I_t \eta + \varepsilon_t$$

donde I_t es un indicador que toma el valor 0 hasta el día 27 de Septiembre y el valor 1 después. Esta extensión implica que la ley de Lanchester, controlada por ϕ , no ha

cambiado, pero que las fuerzas relativas de los dos ejércitos han cambiado de α en la primera parte de la batalla a $\alpha - \eta$ en la última parte. Se usa una distribución normal a priori de η , poca informativa con media 0 y varianza 101.

En la Figura 2, se muestra el diagrama de los errores predichos mediante el modelo de la Ecuación 3, después de quitar los datos del segundo día de la batalla.

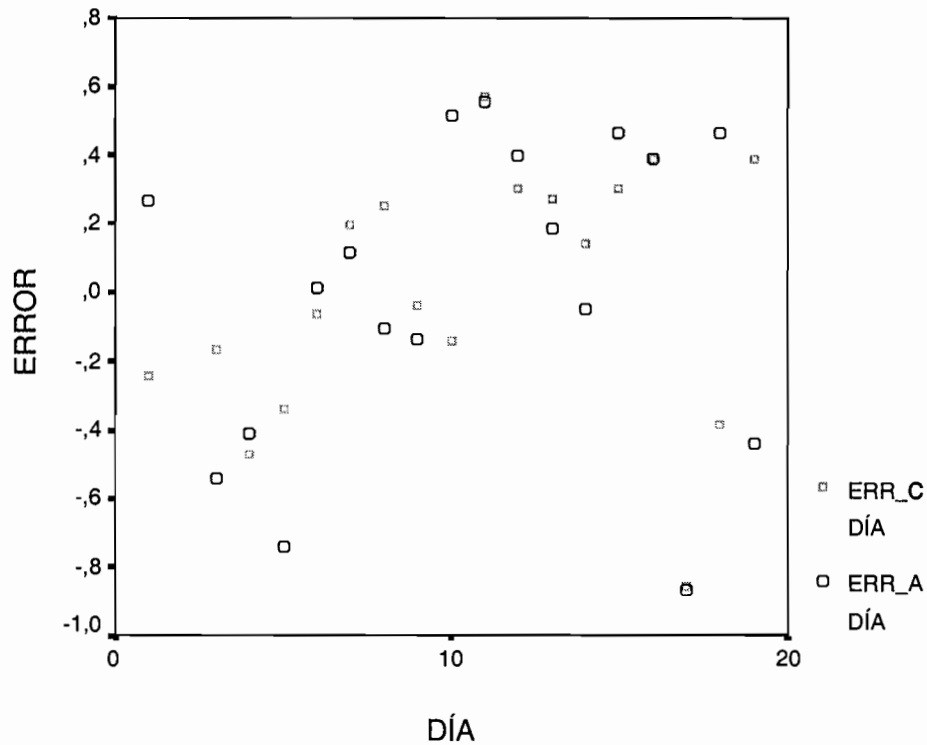


Figura 2. Diagrama de los errores esperados frente al día de la batalla (modelo de Ecuación 3).

Aunque los resultados han mejorado bastante todavía los errores no parecen verdaderamente aleatorios. Se ve ahora que los errores de las predicciones para los coreanos son negativos para los primeros 5 días de la batalla, lo cual sugiere la existencia de algún efecto ajeno. Hartley y Helmbold (1995) consideran algunas otras modificaciones del modelo mediante un análisis clásico.

Aquí, se supone que el modelo ya es adecuado. En la tabla se muestran las medias y desviaciones típicas a posteriori de los parámetros de interés Φ , η y $\log \lambda$.

Parámetro	Media	Desviación Típica
Φ_1	1.6	1.2
Φ_2	1.6	1.3
η_1	1.1	0.3
η_2	0.7	0.2
Log λ	1.9	0.2

Tabla 1. Medias (y desviaciones típicas) a posteriori de los parámetros.

En primer lugar, en la tabla se observa que es difícil distinguir entre las distintas leyes de Lanchester como modelos para estos datos. Aunque una ley (lineal) con $\Phi_1 = \Phi_2 = 1.6$ parece la más probable, las desviaciones típicas a posteriori son bastante grandes. Se puede confirmar este resultado mediante el uso de factores Bayes para contrastar los distintos modelos. Estos contrastes confirman que no se puede distinguir entre las diferentes leyes, a excepción de la ley lineal con $\Phi = (0,0)^T$ que es menos verosímil que las otras leyes consideradas habitualmente.

En segundo lugar, se ve que la media a posteriori de $\log \lambda$ es positiva, lo cual implica que la eficiencia de los norteamericanos era superior a la de los coreanos. Estudiando los datos, se ve que aunque los dos ejércitos tenían tamaños similares, los coreanos sufrieron muchas más bajas que los norteamericanos.

En último lugar, se observa que las medias a posteriori de η_1 y η_2 son positivas indicando que los números de bajas disminuyen en la última parte de la batalla.

2.3. Problemas

Existen algunas limitaciones en los modelos de regresión. Quizás la más importante es que se necesitan observar las bajas en periodos regulares de tiempo para poder aplicar estos modelos. Tampoco estos modelos son los más adecuados para las predicciones del vencedor de la batalla, del número de supervivientes etc. ya que el proceso de predecir el estado de la batalla a más de uno o dos días en el futuro es complicado (más aún si se incluyen los posibles refuerzos).

A continuación en la Sección 3, se introducen otras versiones estocásticas de las leyes de Lanchester que no tienen las restricciones de los modelos de regresión.

3. Modelos basados en Procesos Poisson

En esta sección, se consideran algunos sistemas estocásticos basados en procesos de Poisson generalizados. Por ejemplo, si se supone que:

- la batalla consiste en una serie de duelos,
- la probabilidad de una baja en el ejército rojo en un periodo de tiempo h es igual a $ah + o(h)$,
- la probabilidad de una baja en el ejército azul en un periodo de tiempo h es igual a $bh + o(h)$,
- la probabilidad de dos o más bajas es $o(h)$,
- la batalla termina sólo con la destrucción de uno de los ejércitos,

entonces, se tiene una versión estocástica de la ley lineal con $\Phi = (0,0)^T$. Dada esta ley, se puede calcular la probabilidad de que la batalla esté en estado (x,y) en tiempo t

$$P(x(t) = x, y(t) = y | a, b) = \frac{(at)^{x(0)-x} e^{-at}}{(x(0)-x)!} \frac{(bt)^{y(0)-y} e^{-bt}}{(y(0)-y)!}$$

y la probabilidad de que el ejército azul gane la batalla con y supervivientes es

Ecuación 4

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(x(t) = 0, y(t) = y | a, b) = \binom{x(0) + y(0) - y - 1}{x(0) - 1} \left(\frac{a}{a+b} \right)^{x(0)} \left(\frac{b}{a+b} \right)^{y(0)-y}$$

$$= \binom{x(0) + y(0) - y - 1}{x(0) - 1} \frac{\lambda^{y(0)-y}}{(1+\lambda)^{x(0)+y(0)-y}}$$

ver por ejemplo Morse y Kimball (1950). Igualmente, existen versiones estocásticas de la ley lineal con $\Phi = (1, 1)^T$ (Clark 1969) y la ley cuadrática, (Goldie 1977). Un resultado que conviene comentar es que la probabilidad de que el ejército azul gane la batalla con y supervivientes tiene la misma fórmula que se ha visto en la Ecuación 4 bajo la ley lineal $\Phi = (1, 1)^T$.

En principio, estos modelos deben ser más apropiados para la inferencia que el modelo de regresión, porque facilitan el cálculo de las probabilidades de los futuros estados de la batalla, del vencedor etc. Suponiendo que se observa la batalla en varios tiempos t_1, t_2, \dots, t_n y dadas distribuciones a priori apropiadas para (a, b) , entonces, se puede hacer inferencia bayesiana sobre los parámetros (a, b) y λ , sobre el vencedor y los supervivientes y sobre el tipo de combate (este último se puede hacer mediante el uso de factores Bayes). En este caso se trata cada modelo $\Phi = (0, 0)^T, (1, 1)^T$ y $(0, 1)^T$ individualmente.

Se observa que bajo la hipótesis de que $\Phi = (0, 0)^T$, la inferencia es bastante sencilla porque la verosimilitud es

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y} | a, b) \propto a^{x(0)-x(t_n)} e^{-at_n} b^{y(0)-y(t_n)} e^{-bt_n}$$

y dadas distribuciones a priori gamma, independientes para a y b , es decir

$$f(a) \propto a^{\delta-1} e^{-\epsilon a} \text{ y } f(b) \propto b^{\pi-1} e^{-\tau b}$$

entonces, las distribuciones a posteriori son también distribuciones gamma independientes

$$f(a | \mathbf{x}, \mathbf{y}) \propto a^{\delta+x(0)-x(t_n)-1} e^{-(\epsilon+t_n)a} \text{ y } f(b | \mathbf{x}, \mathbf{y}) \propto b^{\pi+y(0)-y(t_n)-1} e^{-(\tau+t_n)b}$$

Tampoco presentan problemas la predicción del vencedor, los supervivientes etc. Ver Pettit et al (2000) para más detalles.

Para las otras leyes, no se pueden calcular las distribuciones a posteriori de los parámetros (a, b) sin métodos numéricos. Tampoco es sencillo usar el muestreo de Gibbs para muestrear la distribución a posteriori cómo se hizo en la Sección 2, pero sí se puede aplicar un método más general, la llamada cadena de Markov Monte Carlo o MCMC. Ver por ejemplo Gilks et al 1996 para una introducción y Pettit et al (2000) para más detalles en el caso de modelos de combate.

En la siguiente subsección se analiza un ejemplo.

3.1. Ejemplo

En la Tabla 2 se muestran unos datos simulados que representan los tamaños en varios momentos de tiempo (horas) de dos ejércitos en una batalla de pequeña escala (sin refuerzos).

t	$x(t)$	$y(t)$
0	25	23
10	20	19
20	17	17
30	15	16
40	12	14
50	9	12
60	8	10

Tabla 2. Tamaños de los ejércitos en varios momentos de la batalla.

Para cada una de las tres leyes consideradas en esta sección, se estiman los parámetros de interés (a, b, λ) y la probabilidad de que el ejército azul (y) gane la batalla. Las distribuciones a priori utilizadas para los parámetros en cada modelo son bastante no informativas: se utilizan distribuciones exponenciales iguales para a y b con parámetros 10^{-5} bajo la ley lineal $\Phi = (0,0)^T$, 10^{-4} bajo la ley cuadrática y 10^{-3} bajo la ley lineal $\Phi = (1,1)^T$.

En la Tabla 3, se muestran las medias a posteriori de los distintos parámetros bajo las diferentes leyes.

Parámetro Estimado	Φ		
	(0,0)	(1,1)	(0,1)
a	0.30	0.0012	0.019
b	0.23	0.0009	0.015
λ	0.82	0.82	0.88
P(azul gana)	0.79	0.79	0.83

Tabla 3. Medias a posteriori de los parámetros bajo las distintas leyes.

Claramente se observa que, mientras los valores estimados de a y b son muy diferentes bajo las distintas leyes, la media a posteriori de λ y la probabilidad estimada de que el ejército rojo gane la batalla son iguales bajo las dos leyes lineales. También las probabilidades a posteriori de que gane el ejército azul con y supervivientes son iguales según las dos leyes lineales. Se ilustran estas probabilidades en la Figura 3, para las leyes lineales y la Figura 4, para la ley cuadrática.

Se ve en estos gráficos que aunque las probabilidades de que venza el ejército azul son similares bajo las leyes lineales y cuadráticas, las probabilidades asociadas con los supervivientes son distintas.

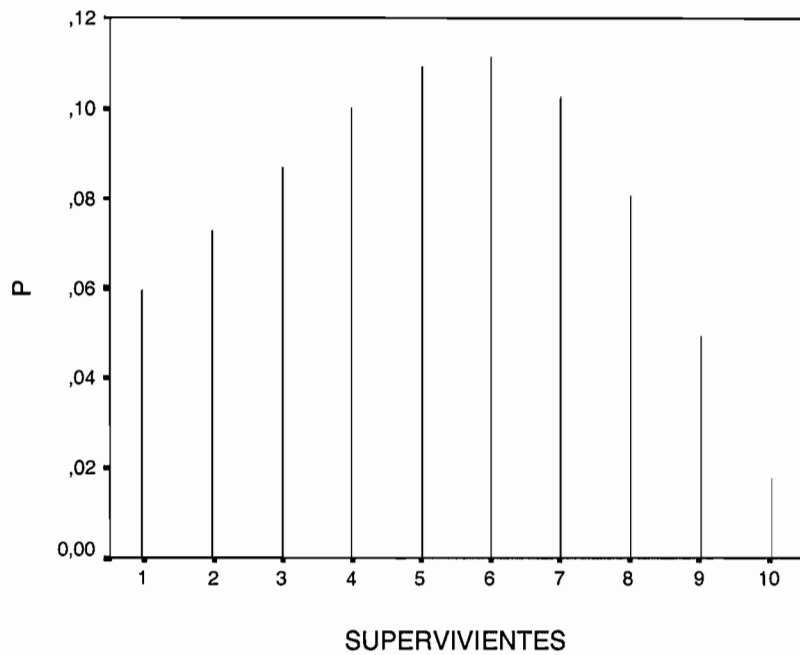


Figura 3. Probabilidades de que gane la batalla el ejército azul para distinto número de supervivientes. Leyes Lineales $\Phi = (0,0)^T, (1,1)^T$.

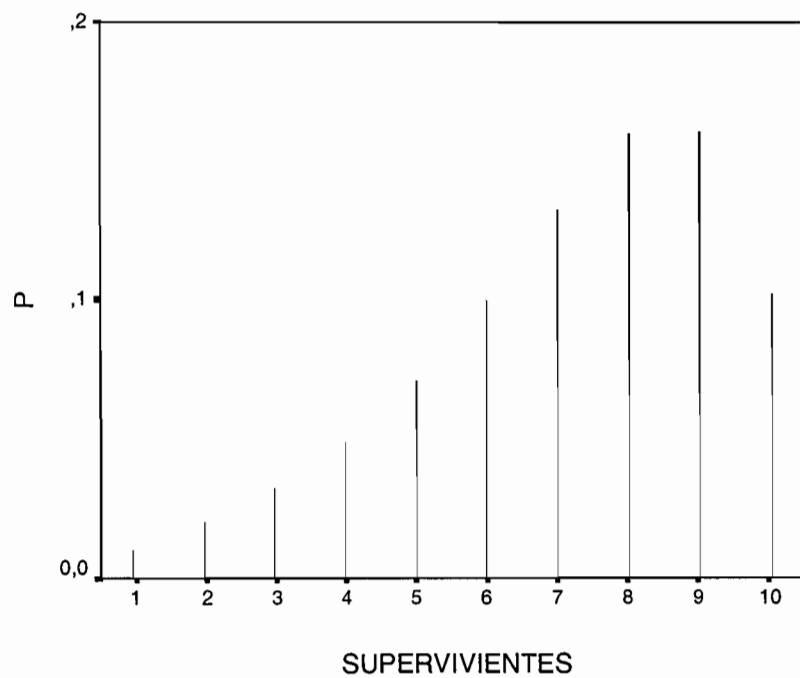


Figura 4. Probabilidades de que gane la batalla el ejército azul para distinto número de supervivientes. Ley Cuadrática $\Phi = (0,1)^T$.

Aunque no se ve mucha diferencia entre las leyes lineales en sus respectivas predicciones del vencedor de la batalla, las dos leyes proporcionan predicciones distintas para el estado de la batalla a un tiempo t en el futuro. Por ejemplo bajo la ley $\Phi = (0,0)^T$ se estima que la probabilidad de que el ejército azul gane la batalla

dentro de 20 minutos es aproximadamente 0.16, mientras que bajo la ley $\Phi = (1,1)^T$ se estima la probabilidad en 0.0001. Obviamente para tiempos t mayores, estas probabilidades se aproximan (a 0.79).

En último lugar, se calculan factores bayes para comparar las diferentes leyes que en este ejemplo sugieren que hay poca diferencia entre los distintos modelos. La ley más verosímil parece ser la ley cuadrática pero con estos datos no se pueden rechazar las otras leyes.

3.2. Problemas

Hay varios problemas en utilizar modelos del tipo considerado en esta sección, tanto relacionados con la inferencia como asociados a los modelos probabilísticos. En primer lugar, se observan muchos problemas numéricos en calcular las probabilidades para la ley cuadrática. El tiempo computacional aumenta rápidamente con los tamaños de los ejércitos y, efectivamente, sólo se puede hacer inferencia para esta ley en combates pequeños.

Hay muchas dificultades en extender las leyes estocásticas ya que no se han resuelto las ecuaciones diferenciales que definen estas leyes en una forma cerrada salvo en los casos más simples que se han presentado aquí.

Para una discusión más completa, ver Pettit et al (2000).

4. Conclusiones y Extensiones

En este artículo se han introducido las leyes de Lanchester y se ha comentado la inferencia bayesiana para dos versiones estocásticas de estas leyes. En primer lugar se ha presentado un modelo basado en regresión que se puede aplicar a batallas de gran escala. En segundo lugar se han tratado modelos basados en procesos estocásticos. En ambos casos se ha ilustrado como utilizar métodos bayesianos, que combinan la información a priori y los datos obtenidos de la batalla para hacer inferencia sobre los rasgos importantes.

Existen algunas extensiones que merecen ser consideradas. En primer lugar, tratando de inferencia bayesiana, no se ha comentado aquí el problema de la elección de una distribución a priori que represente bien los conocimientos iniciales, ya que sólo se han elegido distribuciones de una forma conveniente. Tampoco se ha analizado detalladamente cómo influye en las conclusiones la elección de la distribución a priori. Sería interesante estudiar la robustez de los estimadores bayesianos en problemas de combate.

En segundo lugar, un problema que necesita un estudio más profundo es la validez de las leyes de Lanchester para combates reales, (ver por ejemplo Hartley y Helmbold 1995). Nuestra experiencia es que el ajuste de estas leyes a datos reales no es muy bueno y se supone que hay otros factores que juegan un papel importante en combates reales, por ejemplo la estrategia de los generales, las condiciones del campo etc., que las leyes de Lanchester no tienen en cuenta.

Finalmente, ecuaciones diferenciales parecidas a las ecuaciones de Lanchester ocurren en varios contextos no militares: por ejemplo se han aplicado las ideas básicas en combates de hormigas (Franks y Partridge 1993) y en marketing (Erickson 1997). También son similares las leyes de Lotka y Volterra que se utilizan para modelar poblaciones de depredadores y presas. Un tema en el que estamos trabajando es la aplicación de la inferencia bayesiana en versiones estocásticas de estas ecuaciones.

Agradecimientos

Gran parte del trabajo inicial en que se basa este artículo se hizo durante estancias en Inglaterra y España financiada por una subvención del proyecto de Acciones Integradas del Ministerio de Educación español y del Instituto Británico. Gracias también a Pilar Barrios por leer y corregir el manuscrito.

Bibliografía

Bracken, J. (1995). Lanchester models of the Ardennes campaign. *Naval Research Logistics*, **42**, 559-577.

Busse, J. J. (1971). An attempt to verify Lanchester's equations. En B. Avi Itzhak et al (eds.) *Developments in Operations Research*, Vol. 2, Paper 9-1. Gordon and Breach: New York.

Clark, G. M. (1969). *The combat analysis model*. Tesis doctoral, The Ohio State University.

Engel, J. H. (1954). A Verification of Lanchester's Law. *Operations Research*, **2**, 163-171.

Erickson, G. M. (1997). Dynamical Conjectural Variations in a Lanchester Oligopoly. *Management Science*, **43**, 1603-1608.

Franks, N. R. y Partridge, L. W. (1993). Lanchester battles and the evolution of combat in ants. *Animal Behaviour*, **45**, 197-199.

Fricker Jr., R. D. (1998). Attrition models of the Ardennes campaign. *Naval Research Logistics*, **45**, 1-22.

Gelfand, A. E. y Smith, A. M. F. (1990). Sampling based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 398-409.

Gilks, W., Richardson, S. y Spiegelhalter, D. (1996). Introducing Markov Chain Monte Carlo. En: W. Gilks, S. Richardson y D. Spiegelhalter (eds.) *Markov Chain Monte Carlo In Practice*. Chapman and Hall: Londres.

Goldie, C. M. (1977). Lanchester square-law battles: transient and terminal distributions. *Journal of Applied Probability*, **14**, 604-610.

Hartley III, D. S. (1995). A mathematical model of attrition data. *Naval Research Logistics*, **42**, 585-607.

Hartley III, D. S. y Helmbold, R. L. (1995). Validating Lanchester's Square Law and Other Attrition Models. *Naval research Logistics*, **42**, 609-633.

Kass, R. y Raftery, A. (1995). Bayes factors. *Journal of the American Statistical association*, **90**, 773-795.

Lanchester, F. W. (1916). *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm*. Constable: Londres.

Morse, P. M. y Kimball, G. E. (1951). *Methods of Operations Research*. Wiley: Nueva York.

Pettit, L. I., Wiper, M. P. e Young, K. D. S. (2000). *Bayesian inference for some Lanchester combat laws*. Working Paper in Statistics #00-83, Universidad Carlos III de Madrid.

Taylor, J. G. (1983). *Lanchester Models of Warfare*. Operations Research Society of America: Arlington VA.

Weiss, H. K. (1957). Lanchester-Type Models of Warfare. *Proc. First International Conference on Operational Research*, 82-99.

Weiss, H. K. (1966). Combat models and the US Civil War. *Operations Research*, **14**, 759-790.

Wiper, M. P., Pettit, L. I. e Young, K. D. S. (2000). Bayesian inference for a Lanchester Type Combat Model. *Naval research Logistics*, **47**, 541-558.