UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

TESIS DOCTORAL

Tres ensayos sobre economía dinámica

Autor:
Sergio Puente Díaz

Director:
Manuel Santos Santos

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

Getafe, febrero de 2007

TESIS DOCTORAL

TRES ENSAYOS SOBRE ECONOMÍA DINÁMICA

Autor: Sergio Puente Díaz

Director: Manuel Santos Santos

Firma del Tribunal Calificador:

Firma

Presidente:

Vocal:

Vocal:

Vocal:

Secretario:

Calificación:

Leganés/Getafe, de de

Resumen

Esta tesis doctoral se compone de tres capítulos, en los que se analizan diversos aspectos dinámicos de varios problemas económicos.

En el primer capítulo, titulado “Estabilidad Dinámica en Juegos Repetidos” se propone una definición de estabilidad dinámica que puede aplicarse a los juegos repetidos. Se amplía para ello la teoría tradicional extendiendo la repetición del juego de etapa no sólo infinitamente hacia el futuro, sino también hacia el pasado, lo que permite la existencia de estrategias estacionarias y por tanto la posibilidad de estabilidad dinámica.

En el segundo, titulado “El Papel de los Subsidios a la Educación” se desarrolla un modelo de generaciones solapadas, y se analizan las propiedades tanto de su estado estacionario como de su dinámica de transición. Además, se realiza una calibración del modelo con datos de diversos países europeos, y se encuentra que la composición óptima de gasto público entre investigación y desarrollo y subsidios educativos debería reestructurarse a favor del primer concepto en la mayoría de los países.

Finalmente, en el capítulo titulado “Efectos Inflacionarios de una Unión Monetaria” se desarrolla un sencillo modelo que formaliza el efecto Balassa-Samuelson, y se analiza su posible aparición tanto en economías con política monetaria independiente como en aquéllos pertenecientes a una unión monetaria. Se encuentra que este efecto sólo debería ser observable en países en una unión monetaria, siendo de signo contrario al esperado en los países con política monetaria independiente. Además, se analizan los efectos de una ampliación con países de alto crecimiento, encontrándose que tanto la inflación media de la Unión como la particular de sus antiguos miembros se reduciría, mientras que sobre los países nuevos hay dos efectos contrapuestos: el cambio hacia una política monetaria más restrictiva y un efecto de atracción de dinero. Se encuentra que para los países de una hipotética ampliación de la zona Euro, el primer efecto suele dominar, por lo que también se reduciría la inflación de los nuevos miembros.

Estabilidad Dinámica en Juegos Repetidos[1]

Sergio Puente[2]

Diciembre 2006[3]

[1]Este trabajo es parte de la tesis doctoral del autor, dirigida por Manuel Santos, y desarrollada en la Universidad Carlos III.

[2]Banco de España, Alcalá 48, 28014 Madrid, España. Tel: +34 91 3385705. E-mail: sergio.puente@bde.es. El autor reconoce la ayuda financiera prestada por el MCYT.

[3]Este trabajo se ha beneficiado de comentarios de Diego Moreno, Marco Celentani, M^a Angeles de Frutos y otros participantes en los seminarios de la Universidad Carlos III. Me gustaría agradecer especialmente la ayuda de Manuel Santos.

Abstract

Un concepto de la estabilidad dinámica en juegos infinitamente repetidos con descuento se presenta. Para este propósito, una modificación de la teoría disponible es necesaria: necesitamos relajar el supuesto de que el juego comienza en un período dado. Bajo este nuevo marco, proponemos estrategias estables tales que un teorema de 'folk' con un requisito adicional de estabilidad todavía se cumple. Bajo estas estrategias, la convergencia al resultado de largo plazo se alcanza en un número finito de períodos, no importa qué acciones o desviaciones se han jugado en el pasado. Por lo tanto, sugerimos una manera en la cual un jugador puede acumular reputación después de una desviación.

Códigos JEL: C70, C72

Palabras Clave: Juegos Repetidos, Estabilidad, Estrategias Estables

1 Introducción

Las características dinámicas de los juegos repetidos se han analizado en varios estudios. Si los mismos jugadores juegan el mismo juego en varias ocasiones, entonces pueden elegir sus acciones en función de la historia que se ha jugado. Esto implica que las herramientas de programación dinámica se pueden utilizar en este contexto. Este enfoque se ha revelado como una herramienta muy útil. Un ejemplo de sus usos es el trabajo de Abreu, Pearce y Stachetti (1990).

Una consecuencia dinámica de los juegos repetidos es que puede haber equilibrios que no implican jugar un equilibrio estático de Nash (NE de ahora en adelante) cada período. Los jugadores pueden elegir estrategias en un período diferentes de la mejor respuesta estática para inducir, a través de la historia, una cierta clase de juego en el futuro. La pregunta natural es: ¿Qué clase de acciones (diferentes del NE estático) se pueden sostener en un juego repetido? Los teoremas de "folk" dan la respuesta para equilibrios perfectos en subjuegos (SPE).[1] Aparte de algunas condiciones técnicas, todas las acciones con un pago estático individualmente racional se pueden soportar como SPE de un juego infinitamente repetido.

Este resultado necesita a veces de estrategias de gatillo. Sin embargo, el uso de este tipo de estrategias trae problemas adicionales. Por ejemplo, si por cualquier razón la historia se perturba levemente, la trayectoria de continuación inducida por las estrategias de gatillo cambia dramáticamente, cambiando de una trayectoria de cooperación a una trayectoria (generalmente) de reversión al NE. Obviamente, esto no puede satisfacer ningún concepto de estabilidad dinámica, como veremos más adelante. Esta carencia de estabilidad dinámica está también presente en otros esquemas de castigo más generales usados en la literatura. Los esquemas óptimos de castigo, como los descritos en Abreu (1998), son un ejemplo.

En este contexto, proponemos un concepto de estabilidad dinámica para juegos repetidos. La primera observación es que necesitamos modificar la teoría usual de la siguiente forma: Necesitamos un juego sin comienzo. En otras palabras, se asume a menudo que un juego repetido tiene un primer período en el cual el juego ha comenzado. Por consiguiente, la historia del juego es siempre de una dimensión finita creciente. Veremos que este hecho trae algunos problemas para la cuestión de la estabilidad dinámica. Por lo tanto, proponemos un marco levemente distinto: el juego no tiene ningún principio, es decir la historia es siempre de la misma dimensión (infinita).

[1] Ver Fudenberg y Tirole(1991), sección 5.1.2.

Esta modificación permite que definamos estrategias estacionarias, es decir estrategias que se pueden representar con solamente una función que relaciona la historia con la acción actual. Entonces, podremos definir nuestro concepto de estabilidad dinámica en juegos repetidos.

Otro paso en el análisis es considerar si el requisito de estabilidad dinámica modifica de una manera substancial el conjunto de resultados posibles en un juego repetido. Nuestro enfoque aquí será demostrar que el teorema de 'folk' se sigue cumpliendo al requerir estabilidad dinámica. La demostración del teorema es constructiva, puesto que da la clase de las estrategias (estacionarias) que pueden soportar cierto resultado. Estas estrategias tienen la característica que, después de una desviación, el perfil jugado cada período converge otra vez al perfil de largo plazo en un número finito de períodos.

La observación adicional siguiente referente a la necesidad de juegos sin principio puede ser útil. Según lo precisado ya, las estrategias en cualquier período son funciones de la historia, bajo un enfoque de programación dinámica. Uno puede interpretar esta historia como el objeto que determina la reputación de ambos jugadores, porque resume todas las cooperaciones y desviaciones realizadas por los jugadores. Pero, si el juego comienza en un período dado, nada se puede decir sobre la reputación inicial mirando la historia, puesto que en el primer período la historia es el conjunto vacío. De hecho, se suele asumir implícitamente que el juego comienza con reputación completa, porque las estrategias recomiendan a menudo a los jugadores cooperar en el primer período.[2] La teoría disponible no dice nada sobre cómo se determina esta reputación inicial. Obsérvese que es indiferente hacer un supuesto implícito, o decir que asumimos explícitamente (y exógenamente) cierto grado de reputación al principio del juego: estamos en ambos casos analizando la convergencia para una única reputación inicial. Por el contrario, en este trabajo hacemos el ejercicio completo: tomamos todas las historias posibles en un período dado para un juego que no tenga período inicial, y comprobamos si las estrategias inducen convergencia para todas estas historias posibles. De esta manera, estamos estudiando la convergencia para todas las reputaciones iniciales, mientras que el análisis tradicional se centra solamente en una reputación inicial.

Por supuesto, este nuevo enfoque es apropiado estudiar juegos sin inicio. Sin embargo, debe estar claro que nuestra motivación no es (solamente) estudiar esta clase de juegos. En un juego que comienza hoy, los jugadores necesitan fijarse una cierta idea sobre la probabilidad de cooperación de sus oponentes. Claramente, esto puede hacerse si se asume una cierta distribución a

[2]Más concretamente, las estrategias que soportan cierto resultado generalmente empiezan eligiendo en el primer período el perfil que va a ser soportado.

priori sobre un conjunto de posibles tipos de oponente. La otra posibilidad es hacer lo que estamos haciendo aquí. Tomamos todas las historias posibles del juego como si no tuviera ningún principio. Si el equilibrio converge a cierto perfil para todas, entonces está claro que este perfil será el resultado de largo plazo. Ésta es exactamente nuestra definición de estabilidad dinámica. Con este enfoque, evitamos el uso de herramientas estocásticas. Por otra parte, obtenemos el resultado adicional de que, tras cualquier desviación (o error), el equilibrio converge de nuevo al resultado de largo plazo, y en un número finito de períodos. En este sentido, nuestro enfoque no sólo proporciona una respuesta más precisa[3] a la pregunta "¿por qué estamos cooperando?", sino que también responde a "si no estamos en una situación cooperativa (quizá porque alguien se desvió en el pasado), ¿cómo podemos alcanzarla de nuevo?".

Finalmente, obsérvese que las contribuciones principales de este papel son la definición propuesta de estabilidad, las estrategias estables propuestas, el tratamiento de las condiciones iniciales en un juego repetido, y cómo los jugadores pueden acumular otra vez su reputación después de una desviación. El teorema de folk se presenta solamente como resultado complementario. Por supuesto, la demostración es muy similar a las pruebas estándares de teoremas de folk en juegos repetidos; es simplemente una cuestión de extenderla a un entorno sin período inicial y con reversión al resultado cooperativo.

El resto del trabajo se organiza como sigue. La sección 2 presenta una revisión de la teoría existente de juegos repetidos, y propone las definiciones principales en las cuales el resto del trabajo se basa, incluyendo la definición de un SPE estable. La sección 3 presenta un teorema útil para caracterizar los resultados soportables como SPE estable. La sección 4 analiza los requisitos de memoria de las estrategias estables propuestas y las relaciona con la teoría de memoria limitada. Finalmente, las conclusiones y las extensiones posibles se presentan en la sección 5.

1.1 Trabajos Relacionados

Abreu (1988) argumenta que se puede tener un castigo mayor que la reversión al equilibrio de Nash (el castigo asumido generalmente en estrategias de gatillo). En este papel también utilizamos un castigo mayor que la reversión al NE. De hecho, utilizamos un castigo peor que el (o igual al) minmax, pero solamente para un número finito de períodos. Por otra parte, el castigo en Abreu (1988) es para un número infinito de períodos (si no hay desviaciones

[3] Más precisa en el sentido que, bajo nuestro enfoque, la cooperación no epende de las condiciones iniciales en el largo plazo.

en la fase del castigo), y no es peor que el minmax.

Hay algunos estudios recientes referidos al tamaño del castigo. Evans y Thomas (2001) utilizan el concepto de juego perturbado para estudiar juegos repetidos y cooperación. Critican los trabajos previos de Aumann y Sorin (1989) y Anderlini y Sabourian (1995), demostrando que el resultado "perturbación implica eficacia" sólo puede ser alcanzado si hay penas "draconianas" en el soporte de la perturbación, es decir, penas diseñadas para que un jugador obtenga el minmax casi todo el tiempo. Nosotros compartimos esta misma preocupación. Incluso la reversión NE es una pena muy grande como para ser completamente creíble. Por el contrario, nuestro requisito de estabilidad garantiza que la pena por lo menos esté limitada en el tiempo.

La estrategia presentada más adelante se relaciona con por lo menos otras dos propuestas en la literatura anterior. Green y Porter (1984) presentan una estrategia que tiene un número finito de períodos de castigo. Sin embargo, puesto que su modelo es de información imperfecta, la fase del castigo se define en función de una variable observable (el precio) que refleja imperfectamente las acciones de otros jugadores. Por lo tanto, aun cuando los jugadores no se desvían, la variable observable induce a veces la fase del castigo. Esto ocurre cuando cae por debajo de un cierto umbral, generando fluctuaciones en el comportamiento de los jugadores. Por lo tanto, este enfoque no es adecuado para estudiar temas de estabilidad; la motivación es totalmente diferente. Una estrategia similar se puede encontrar en Piccione (2002).

Fudenberg y Tirole (1991) usan en su teorema 5.4 una estrategia con tres fases. Una es la fase cooperativa. Si se desvía alguien, el juego va a una fase finita de castigo. Sin embargo, en el final de esta segunda fase el juego no vuelve a la fase cooperativa. En su lugar, va a una tercera fase con pagos entre los otros dos. Por lo tanto, las estrategias no inducen una trayectoria de equilibrio convergente. Más aún, se impone exógenamente que el juego comienza en la fase cooperativa, lo que equivale a asumir que los jugadores comienzan el juego con reputación.

Finalmente, Kalai y Stanford (1988) y trabajos relacionados estudian la posible puesta en práctica de estrategias por autómatas finitos. A primera vista, uno puede interpretar este acercamiento como preocupación por la estacionariedad de estrategias. Sin embargo, éste es solamente un requisito de nuestra definición de estabilidad (la otra es convergencia). Por otra parte, pensamos que sus autómatas no cubren las cuestiones de estacionariedad correctamente, porque asumen que los autómatas comienzan el juego en un cierto "estado mental inicial" y, según lo discutido ya, este supuesto inicial no es inocuo. Lo mismo se puede decir de Kalai, Samet y Stanford (1988), con el añadido de que demuestran que los equilibrios reactivos sólo pueden existir por casualidad, es decir bajo una combinación particular de parámetros de medida cero.

2 Preliminares

En esta sección comenzamos con algunos conceptos básicos que se utilizarán. Después, modificamos el concepto de juego repetido con un período o nodo inicial para definir un juego repetido sin período inicial. Finalmente, definimos el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos estable.

2.1 Juego estático

Definamos el juego simétrico siguiente, que será llamado el juego de etapa, o juego estático. Hay dos jugadores. Ambos deben elegir simultáneamente una acción del mismo conjunto de acciones posibles. Este conjunto puede ser discreto o continuo, finito o infinito. Llamemos a este conjunto S. La elección concreta de ambos jugadores se denotará por $s_1, s_2 \in S$. Definamos la función de pago instantánea para el jugador i, u_i como sigue:

$$u_i : S \times S \to \mathbb{R}$$

Donde el primer argumento en ambas funciones de pago es la acción del jugador 1 y el segundo la acción del jugador 2. Cada jugador está intentando maximizar su propio pago.

Supuesto A1: Las funciones u_i están acotadas, y las correspondencias de mejor respuesta (estática) $BR_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i} u_i(s_1, s_2)$ siempre tienen una imagen distinta del conjunto vacío.

2.2 Juego repetido

Construimos un nuevo juego por la iteración infinita del juego de etapa definido antes, en el cual las acciones pasadas son observables. Ahora la función objetivo es la suma de las funciones instantáneas de pago, descontadas por el parámetro δ, que es igual para ambos jugadores. Es usual en la literatura asumir que el juego repetido comienza en un período dado y continúa hasta infinito. Modificaremos más adelante este concepto usando un juego repetido que vaya de menos infinito hasta infinito. Para facilitar la comparación entre los dos conceptos presentamos aquí algunas definiciones sobre un juego repetido con nodo inicial.

Llamemos período 0 al primer juego de etapa, período 1 al segundo juego de etapa, y así sucesivamente.

Es útil definir el objeto "historia" en el periodo t como las acciones jugadas por ambos jugadores en los periodos previos y el propio periodo t: $h^t = \{h_k^t\}_{k=0}^t ; h_k^t = \left\{h_k^{1,t}, h_k^{2,t}\right\}$. Denotamos al conjunto de todas las posibles historias en t por H^t.

Ahora podemos definir una estrategia para el jugador i en este juego repetido de la siguiente forma:

Definition 1 *Una estrategia σ_i para el jugador i en el juego repetido con nodo inicial es una secuencia de funciones, una para cada $t \in \{1, 2, \ldots\}$ de la forma $s_i^t : H^{t-1} \to S$, y una acción $s_i^0 \in S$ para el periodo 0.*

Obsérvese que el conjunto $H^{t-1} = (S \times S)^t$ varía con t.

En cada subjuego h^{t-1}, las estrategias σ_1 y σ_2 determinan una secuencia de pares de aciones, o senda de continuación, compuesta por las acciones que los jugadores jugarían si ambos siguieran las estrategias σ_1 y σ_2 después de la historia h^{t-1}. Sea $P\left(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2\right) = \left\{P_k\left(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ la combinación de una historia dada y su senda de continuación asociada dadas σ_1 y σ_2. Puede definirse de la siguiente forma recursiva:

$$P_k\left(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2\right) = \begin{cases} h_k^{t-1} \quad \text{si } k \leq t-1 \\ \left\{s_1^k(\{P_m\left(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2\right)\}_{m=0}^{k-1}), s_2^k(\{P_m\left(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2\right)\}_{m=0}^{k-1})\right\} & \text{if } k \geq t \end{cases}$$

Un equilibrio perfecto en subjuegos (SPE) puede definirse como sigue:

Definition 2 *Un par de estrategias $\{\sigma_1, \sigma_2\} = \{s_1^t, s_2^t\}_{t=0}^{\infty}$ constituyen un SPE del juego repetido descontado con nodo inicial si, para todos los periodos $t \in \{0, 1, \ldots\}$, y para todas las historias $h^{t-1} \in H^{t-1}$ en cada periodo, se satisfacen las dos siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=t}^{\infty} \delta^{k-t} u_1\left(P_k\left(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2\right)\right) &\geq \sum_{k=t}^{\infty} \delta^{k-t} u_1\left(P_k\left(h^{t-1}, \tilde{\sigma}_1, \sigma_2\right)\right), \forall \tilde{\sigma}_1 \neq \sigma_1 \\ \sum_{k=t}^{\infty} \delta^{k-t} u_2\left(P_k\left(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2\right)\right) &\geq \sum_{k=t}^{\infty} \delta^{k-t} u_2\left(P_k\left(h^{t-1}, \sigma_1, \tilde{\sigma}_2\right)\right), \forall \tilde{\sigma}_2 \neq \sigma_2 \end{aligned}$$

Ahora podemos concentrarnos en el juego repetido sin nodo inicial. En este caso la historia en el periodo t es $h^t = \{h_k^t\}_{k=-\infty}^t$.[4] Obsérvese qeu ahora

[4]El número de periodos en $P\left(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2\right)$ también cambia, por lo que ahora la nueva senda de continuación es $P\left(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2\right) = \left\{P_k\left(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2\right)\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ con la misma definición recursiva presentada antes.

es necesario incluir todos los periodos hasta menos infinito, puesto que no hay nodo inicial. Viendo la definición de h^t, es claro que el conjunto de posibles historias es ahora el mismo para todos los periodos: $h^t \in H$, donde $H = (S \times S)^\infty$.

La definición de una estrategia y de un equilibrio es muy similar las anteriores:

Definition 3 *Una estrategia σ_i para el jugador i en el juego repetido sin nodo inicial es una secuencia de funciones, una para cada $t \in \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ de la forma $s_i^t : H \to S$.*

Definition 4 *Un par de estrategias $\{\sigma_1, \sigma_2\} = \{s_1^t, s_2^t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ constituyen un SPE del juego repetido descontado sin nodo inicial si, para todos los periodos $t \in \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$, y para todas las historias $h^{t-1} \in H$ en cada periodo, se satisfacen las dos siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=t}^{\infty} \delta^{k-t} u_1 \left(P_k \left(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2\right)\right) &\geq \sum_{k=t}^{\infty} \delta^{k-t} u_1 \left(P_k \left(h^{t-1}, \tilde{\sigma}_1, \sigma_2\right)\right), \forall \tilde{\sigma}_1 \neq \sigma_1 \\ \sum_{k=t}^{\infty} \delta^{k-t} u_2 \left(P_k \left(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2\right)\right) &\geq \sum_{k=t}^{\infty} \delta^{k-t} u_2 \left(P_k \left(h^{t-1}, \sigma_1, \tilde{\sigma}_2\right)\right), \forall \tilde{\sigma}_2 \neq \sigma_2 \end{aligned}$$

Obsérvese que en ambos casos tenemos un sistema contable infinito de condiciones a comprobar con un sistema contable infinito de funciones que constituyen las estrategias.

En los juegos repetidos tradicionales con nodo inicial tenemos una función de utilidad muy bien definida para el juego entero (que suele ser generalmente aditivo separable en el tiempo). Cuando extendemos el modelo para cubrir un juego repetido sin comienzo, esto ya no es verdad. Pero esto no es un problema para las definiciones 3 y 4, mientras mantengamos el supuesto de separabilidad en el tiempo de las funciones de utilidad. Con este supuesto, la función de pago de cada jugador en cada período se define condicionalmente, y por lo tanto los problemas de optimización están bien definidos, y las desviaciones se pueden analizar exactamente de la misma forma que en un juego con período inicial.

2.3 Estrategias Estacionarias y Equilibrios Estables

Una vez que hemos definido un equilibrio para ambos casos (con y sin período inicial), el paso siguiente es definir estrategias estacionarias.

Definition 5 *Una estrategia σ_i para el juego repetido es estacionaria si existe una función s_i tal que $s_i^t = s_i, \forall t$.*

Es interesante observar que el concepto de estrategia estacionaria no es aplicable a un juego repetido con periodo inicial,[5] porque las funciones s_i^t están definidas sobre diferentes conjuntos (H^t) para periodos distintos. Por el contrario, cuando no hay nodo inicial, todas las funciones s_i^t están definidas sobre el mismo conjunto (H), lo que hace posible tener estrategias estacionarias. Y aquí tenemos una ventaja de nuestro enfoque: es posible centrar el análisis en estrategias estacionarias, y esto puede simplificarlo. Obsérvese que con estrategias estacionarias, no es necesario comprobar las desviaciones en todos los periodos en todas las historias. En vez de ello, es suficiente con fijar un periodo t, y analizar las desviaciones en todas las historias o subjuegos h^t, pero sólo en ese periodo, porque la única diferencia entre dos subjuegos es la historia previa, no el periodo en sí.

Ahora consideremos la senda de continuación $P(h^t, \sigma_1, \sigma_2) = \{P_k(h^t, \sigma_1, \sigma_2)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ determinada por las estrategias σ_1 y σ_2 dada la historia h^t, definida anteriormente. La definición de un SPE dinámicamente estable es la siguiente:

Definition 6 *Un equilibrio perfecto en subjuegos de un juego repetido sin nodo inicial satisface la propiedad de estabilidad dinámica si se satisfacen las dos siguientes condiciones:*

(a) Estacionariedad: Las estrategias σ_1 y σ_2 son estacionarias.

(b) Convergencia: $\lim_{k\to\infty} P_k(h^t, \sigma_1, \sigma_2) = \lim_{k\to\infty} P_k\left(\tilde{h}^t, \sigma_1, \sigma_2\right), \forall h^t, \tilde{h}^t \in H$

La condición (b) en la definición anterior establece que en un SPE estable, la senda de continuación converge al mismo resultado para todas las historias. Consecuentemente, el pago de largo plazo del jugador i, $u_i\left(\lim_{k\to\infty} P_k(h^t, \sigma_1, \sigma_2)\right)$, no depende de la historia.

Puesto que las definiciones de estacionariedad y de estabilidad no pueden ser aplicadas a los juegos repetidos con período inicial, la siguiente sección se centra solamente en juegos repetidos sin período inicial.

Ahora estamos en disposición de investigar la existencia de un SPE estable. Para este propósito no podemos confiar en los argumentos tradicionales de la existencia del NE en cada subjuego, porque nos estamos centrando en equilibrios en estrategias puras. La existencia, sin embargo, puede ser obtenida si hay por lo menos un NE en las estrategias puras del juego de etapa. Esto es verdad porque las estrategias "jugar el NE estático en cada período, sin importar la historia" es siempre un SPE estable. Para obtener

[5] Esto es cierto a no ser que la estrategia sea independiente de la historia en todos los periodos. Si esto es así, el único equilibrio que podemos tener es el NE del juego de etapa en cada periodo.

un resultado más general de existencia, debemos tener una definición de estabilidad dinámica también para las estrategias mixtas, lo que está más allá del alcance de este trabajo.[6]

3 Resultados soportables como equilibrio perfecto en subjuegos estable

En esta sección presentamos un teorema de folk con un requisito adicional de estabilidad. Comenzamos definiendo el valor minmax en estrategias puras para el jugador 1, $v = \underset{s_2}{\min}\underset{s_1}{\max} u_1(s_1, s_2)$. Puesto que, por simplicidad, nos estamos centrando en juegos simétricos, éste es también el valor del minmax en estrategias puras para el jugador 2. Sea $m = \{m_1, m_2\}$ un conjunto de estrategias en las que este minmax es alcanzado por el jugador 1. De nuevo por simetría, el minmax del jugador 2 es alcanzado en $\{m_2, m_1\}$. Supongamos que queremos sostener un cierto resultado $\{c_1, c_2\}$, y por simplificar suponemos que $c_1 = c_2 = c$. Haremos dos supuestos simplificadores adicionales, y más tarde sugeriremos cómo pueden ser relajados. El primero es:

Supuesto A2: $\exists p$ tal que $m_2 \in \arg \underset{s}{\max} u_1(s, p)$.

Tomemos p de acuerdo al supuesto anterior, y tomemos $q = m_2$. Normalizamos $u_1(p, q) = u_2(q, p) = 0$. Entonces es claro que $v \geq 0$. Además, bajo el supuesto A2, q es la mejor respuesta (estática) a p, por lo que $u_1(q, p) = u_2(p, q) \geq v \geq 0$. El otro supuesto simplificador es:

Supuesto A3: $p \neq c$, $q \neq c$.

Las tres siguientes subsecciones se estructuran de la siguiente forma. La primera presenta el tipo de estrategias que se usarán en la demostración del teorema de folk, el cual se presenta en la segunda subsección. Finalmente, analizamos cuán largo puede ser el intervalo de castigo T que sigue a una desviación para un valor dado de δ.

3.1 Estrategias

Nuestra estrategia de demostración es soportar un cierto resutado $\{c_1, c_2\}$, mediante la imposición de una fase de castigo de T periodosde duración en

[6] Pueden encontrarse algunos comentarios sobre estrategias mixtas en la sección de conclusiones.

caso de que haya una desviación, en la que el jugador que se desvió recibe un pago inferior o igual a v. Como se dijo antes, se supone por simplicidad que este resultado es tal que $c_1 = c_2 = c$.

La intuición de la estrategia que va a ser utilizada para sostener el resultado es muy simple. De hecho, la estrategia se puede definir muy fácilmente en el caso de un período inicial como sigue. Se comienza en la fase cooperativa, con los dos jugadores jugando c. Si el jugador 1 se desvía, se pasa a la fase 1, y si el jugador 2 se desvía, se pasa a la fase 2. En la fase 1, se juega $\{p, q\}$. El juego permanece en esta fase hasta que se observa $\{p, q\}$ durante T periodos consecutivos, en cuyo caso el juego pasa de nuevo a la fase cooperativa, o hasta que se observa una desviación, en cuyo caso comienza una nueva fase de castigo para el jugador que se desvía. Lo mismo es válido para la fase 2, pero jugando $\{q, p\}$.

El problema, sin embargo, se presenta cuando no hay nodo inicial, puesto que no podemos imponer una fase dada al principio del juego. La alternativa es definir la fase en función de la historia anterior. También, necesitamos estrategias independientes del tiempo, por estacionariedad.

Ahora presentaremos la estrategia de una manera formal. Es muy similar a la que acabamos de describir para juegos con período inicial. Primero, intentamos encontrar un punto de partida conveniente en la historia (τ), y entonces usamos θ_j para registrar la fase en la que el juego estaba en el periodo $j > \tau$. La expresión $I(A)$ denota una función que toma el valor 1 si la condición A es cierta, y 0 en otro caso.

La estrategia para el jugador 1 con T periodos de castigo es la siguiente:[7]

Paso 1: Analizarla historia previa h^{-1}. Si $\sum_{j=-\infty}^{-1} I\left(h_j^{-1} = \{c, c\}\right) \geq 1$, entonces tomar $\tau = \max\left\{k : h_k^{-1} = \{c, c\}\right\}$, inicializar $\theta_{\tau+1} = 0$, e ir al paso 2. Si $\sum_{j=-\infty}^{-1} I\left(h_k^{-1} = \{c, c\}\right) = 0$ y $\sum_{j=-\infty}^{-1} \left(I\left(h_j^{1,-1} = c\right) + I\left(h_j^{2,-1} = c\right)\right) \geq 2$, entonces tomar $\tau = \max\left\{k < 0 : \sum_{j=k}^{-1} \left(I\left(h_j^{1,-1} = c\right) + I\left(h_j^{2,-1} = c\right)\right) = 2\right\}$, y inicializar $\theta_{\tau+1} = 1$ si $h_\tau^{2,-1} = c$, y $\theta_{\tau+1} = 2$ si $h_\tau^{1,-1} = c$, e ir al paso 2. Si $\sum_{j=-\infty}^{-1} I\left(h_j^{-1} = \{c, c\}\right) = 0$ y $\sum_{j=-\infty}^{-1} \left(I\left(h_j^{1,-1} = c\right) + I\left(h_j^{2,-1} = c\right)\right) = 1$, entonces tomar $\tau = \left\{k : I\left(h_k^{1,-1} = c\right) + I\left(h_k^{2,-1} = c\right) = 1\right\}$, y inicializar $\theta_{\tau+1} = 1$ si $h_\tau^{2,-1} = c$, y $\theta_{\tau+1} = 2$ si $h_\tau^{1,-1} = c$, e ir al paso 2. Finalmente, si $\sum_{j=-\infty}^{-1} \left(I\left(h_j^{1,-1} = c\right) + I\left(h_j^{2,-1} = c\right)\right) = 0$, entonces inicializar $\theta_0 = 0$ e ir al paso 3.

Paso 2: Si $\tau + 1 = 0$, entonces ir al paso 3. Si no, computar $\theta_{\tau+2}$ como sigue. Si $\theta_{\tau+1} = 0$ y $h_{\tau+1}^{-1} = \{c, c\}$ o ambos argumentos son diferentes de c,

[7] Suponemos que el periodo actual es cero sin pérdida de generalidad por la estacionariedad de la estrategia. Igualmente, sólo se presenta la estrategia para el jugador 1, por simetría.

entonces $\theta_{\tau+2} = 0$. Si $\theta_{\tau+1} = 0$ y $h^{i,-1}_{\tau+1} \neq c, h^{-i,-1}_{\tau+1} = c$, entonces $\theta_{\tau+2} = i$. Si $\theta_{\tau+1} = 1$, entonces si $h^{-1}_k = \{p, q\}, \forall k \in \{\tau + 2 - T, \ldots, \tau + 1\}$, $\theta_{\tau+2} = 0$, y si no $\theta_{\tau+2} = i$, donde i es 1 a no ser que $h^{1,-1}_{\tau+1} = p$ y $h^{2,-1}_{\tau+1} \neq q$, en cuyo caso $i = 2$. Si $\theta_{\tau+1} = 2$, entonces si $h^{-1}_k = \{q, p\}, \forall k \in \{\tau + 2 - T, \ldots, \tau + 1\}$, $\theta_{\tau+2} = 0$, y si no $\theta_{\tau+2} = i$, donde i es 2 a no ser que $h^{2,-1}_{\tau+1} = p$ y $h^{1,-1}_{\tau+1} \neq q$ en cuyo caso $i = 1$. Iterar hasta que se compute θ_0.

Paso 3: Si $\theta_0 = 0$, entonces jugar c. Si $\theta_0 = 1$, entonces jugar p. Si $\theta_0 = 2$, entonces jugar q.

Obsérvese que los máximos anteriores existen siempre porque, en cualquier punto dado, la historia acaba en el período anterior.

Según lo anticipado arriba, la variable θ se puede interpretar como la fase en la cual el juego está. Obsérvese que esta variable sólo es útil para determinar la acción que se jugará, sin otros efectos futuros. La estrategia se presenta de esta manera para evitar la confusión entre la imposición de una fase particular en un período particular, y la determinación endógena de la fase. Esto se hace en el paso 1. En el paso 2 analizamos las desviaciones de la cooperación, o de una fase del castigo, que han ocurrido en el pasado, para estar seguros de que sabemos cada vez quién es el jugador que se ha desviado más recientemente. En el paso 3 requerimos simplemente a los jugadores que jueguen según la fase actual, que se ha determinado en los dos pasos anteriores. Es conveniente observar que necesitamos hacer los tres pasos en cada período. Formalmente, no es posible hacerlos una vez y después seguir el argumento del principio de esta subsección para los juegos con período inicial (porque requerimos estacionariedad), aunque la intuición es similar.

3.2 El teorema de folk

La prueba del siguiente teorema de folk para equilibrios estables es bastante estándar, y por lo tanto nos centraremos solamente en los pasos necesarios para satisfacer el nuevo requisito de estabilidad (para otros detalles ver Fudenberg y Tirole (1991)).

Theorem 7 *Supongamos que tenemos un juego de etapa en forma normal que satisface el supuesto A1, y consideremos el juego repetido asociado sin periodo inicial. Entonces (a)* $\exists \bar{\delta} \in (0, 1)$ *tal que, para todo* $\delta \in [\bar{\delta}, 1)$*, todos los resultados en estrategias puras con pagos superiores a los valores de minmax pueden ser el límite de la senda de equilibrio de un SPE estable, para todas las historias; y (b) para todo* $\delta \in [\bar{\delta}, 1)$*, la convergencia a este límite puede alcanzarse en un número finito de periodos, para todas las historias.*

Proof. La parte (b) se hace detalladamente en la siguiente subsección. Para simplificar, la demostración hará uso de los supuestos (A2) y (A3).[8]

Tomemos las estrategias definidas en la sección previa, con una longitud de castigo T arbitraria, y $\{c, c\}$ como el par de acciones a soportar.[9] Si $\{c, c\}$ es un equilibrio de Nash del juego de etapa, la demostración es trivial, por lo que asumamos que no lo es (obsérvese que esto implica que $\max_s u_1(s, c) - u_1(c, c)$ es estrictamente mayor que 0). Necesitamos demostrar tres cosas. Primero, que las estrategias son estacionarias. Segundo, que inducen una senda de continuación convergente, para toda historia. Y tercero, que no hay desviaciones beneficiosas. Puesto que el juego es simétrico, sólo consideraremos las desviaciones del jugador 1.

Las dos primeras partes son inmediatas, dada la definición de la estrategia.

Respecto a las desviaciones, las siguientes condiciones [10] son suficientes para evitarlas:

$$u_1(q, p)\left(1 + \delta + \cdots + \delta^{t-1}\right) + \tfrac{\delta^t}{1-\delta} \cdot u_1(c, c) \geq$$

$$\geq \max_{s \in S - \{q\}} u_1(s, p) + \tfrac{\delta^{T+1}}{1-\delta} \cdot u_1(c, c); 1 \leq t \leq T \tag{1}$$

---

[8] Los supuestos A1 y A2 son simplificadores. No son necesarios para obtener el resultado, y en esta nota vamos a sugerir cómo el resultado puede obtenerse si no se cumplen.

Supongamos que los jugadores están en la fase 2 para una cierta historia. Bajo A1, el jugador 1 no tiene incentivos a desviarse porque ya está jugando su mejor respuesta estática. Por otro lado, si A1 no se cumple, entonces el jugador 1 podría desviarse para obtener un beneficio de corto plazo. Después de esta desviación, el jugador 1 será castigado durante T periodos consecutivos con el par de acciones (p, q). Pero el beneficio es para sólo un periodo, por lo que está acotado, y el castigo es más intenso cuanto mayor es δ o T. Por tanto, para δ y T suficientemente grandes el incentivo desaparece.

Respecto al supuesto A2, obsérvese que la segunda parte del supuesto no es restrictiva, porque $q = m_2$ y por tanto si $q = c$ entonces $u_i(c, c) \leq v$.

Finalmente, si necesitamos que el par de acciones de castigo sea tal que $p = c$, sería difícil saber si $\{q, c\}$ es una desviación del jugador 1 o la fase de castigo que sigue a una desviación del jugador 2. En el segundo caso, si el jugador 1 se desvía y juega c, la estrategia de la sección 3.1 identificaría $\{c, c\}$ como una cooperación, en vez de como una desviación del jugador 1. Pero obsérvese que q es la mejor respuesta estática a c, por lo que esta desviación no es beneficiosa.

[9] La misma demostración puede replicarse para juegos asimétricos, o para juegos simétircos con $c_1 \neq c_2$, pero con algo más de notación. Simplemente tendríamos dos $\overline{\delta}$ distintos, uno para cada jugador, y bastaría con tomar el mayor de los dos.

[10] Estamos usando el principio de que, si las estrategias constituyen un equilibrio, entonces basta con comprobar desviaciones como la siguiente: desviarse un periodo y a partir de entonces volver a seguir la estrategia. Ver Fudenberg y Tirole (1991), sección 4.2.

$$\frac{\delta^t}{1-\delta}\cdot u_1(c,c) \geq \max_{s\in S-\{p\}} u_1(s,q) + \frac{\delta^{T+1}\cdot u_1(c,c)}{1-\delta}; 1 \leq t \leq T \tag{2}$$

$$\frac{u_1(c,c)}{1-\delta} \geq \max_s u_1(s,c) + \frac{\delta^{T+1}}{1-\delta}\cdot u_1(c,c) \tag{3}$$

Las desigualdades (1) y (2) descartan desviaciones en las historias que siguen a desviaciones de los jugadores 2 y 1, respectivamente, quedando t periodos de castigo. Finalmente, la desigualdad (3) descarta desviaciones cuando los jugadores deben cooperar y jugar c.

Es fácil ver que, bajo nuestros supuestos, la condición (1) siempre se satisface.

La condición (2) es equivalente a

$$\delta^T \geq \frac{\max_{s\in S-\{p\}} u_1(s,q)}{u_1(c,c)} \tag{4}$$

Obsérvese que $\max_{s\in S-\{p\}} u_1(s,q) \leq \max_s u_1(s,q) = v < u_1(c,c)$. Por tanto, para un T finito existe un $\delta_1 \in (0,1)$ tal que (4) se satisface para todo $\delta \in [\delta_1, 1)$.

Finalmente, la condición (3) puede expresarse como:

$$u_1(c,c)\cdot\delta^{T+1} - \left(\max_s u_1(s,c)\right)\delta + \left(\max_s u_1(s,c) - u_1(c,c)\right) \leq 0 \tag{5}$$

Obsérvese que la parte izquierda de (5) es un polinomio (en δ) de grado $T+1$. Llamémosle $Y(\delta)$, por lo que la condición (5) es equivalente a $Y(\delta) \leq 0$. Es fácil ver que $Y(0) = \max_s u_1(s,c) - u_1(c,c) > 0$, $Y(1) = 0$, $Y'(\delta) = ((T+1)\cdot u_1(c,c))\cdot\delta^T - \left(\max_s u_1(s,c)\right)$, y que $Y(\delta)$ es (estrictamente) convexo en $(0,\infty)$, puesto que $u_1(c,c) > 0$.

Ahora, se pueden dar dos casos:

Caso 1: $\frac{\max_s u_1(s,c)}{u_1(c,c)\cdot(T+1)} \geq 1$: En este caso el polinomio $Y(\delta)$ es (estrictamente) decreciente en $(0,1)$. Dado que $Y(0) = \max_s u_1(s,c) - u_1(c,c) > 0$ y $Y(1) = 0$, entonces $Y(\delta) > 0$ para $\delta \in (0,1)$. Por tanto, no hay equilibrio en este caso.

Caso 2: $\frac{\max_s u_1(s,c)}{u_1(c,c)\cdot(T+1)} < 1$: Aquí la función $Y(\delta)$ es decreciente en $\left(0,\hat{\delta}\right)$, y creciente en $\left(\hat{\delta},1\right)$, con $\hat{\delta} = \left(\frac{\max_s u_1(s,c)}{u_1(c,c)\cdot(T+1)}\right)^{\frac{1}{T}} \in (0,1)$. De nuevo, puesto que

$Y(0) = \max_s u_1(s,c) - u_1(c,c) > 0$ y $Y(1) = 0$, entonces $\exists \delta_2 \in (0,1)$ tal que $Y(\delta) \leq 0$ para todo $\delta \in [\delta_2, 1)$.

Obsérvese que el valor de T determina si estamos en el caso 1 o 2, y el caso 1 puede evitarse tomando $T > \frac{\max_s u_1(s,c)}{u_1(c,c)} - 1$.

La demostración se competa considerando $\bar{\delta} = \max\{\delta_1, \delta_2\}$. ■

3.3 Cotas para el intervalo de castigo

En esta subsección hacemos un tipo de análisis distinto. Una vez que hemos demostrado que un equilibrio perfecto estable existe para jugadores suficientemente pacientes, podemos preguntarnos lo siguiente: ¿para un δ (suficientemente alto) dado, qué valores de T constituyen un SPE estable?

Hemos visto que una condición necesaria es $\frac{\max_s u_1(s,c)}{u_1(c,c)\cdot(T+1)} < 1$, por lo que la primera restricción sobre T es:

$$T > \frac{\max_s u_1(s,c)}{u_1(c,c)} - 1 \tag{6}$$

Otras restricciones sobre T son las condiciones (4) y (5), pero ahora para un valor fijo de δ. Con algo de álgebra, podemos obtener de (4) lo siguiente:

$$T \leq \frac{\log\left(\frac{\max_{s\in S-\{p\}} u_1(s,q)}{u_1(c,c)}\right)}{\log(\delta)} \tag{7}$$

El numerador y el denominador son negativos, y δ wes suficientemente grande, de forma que el denominador es suficientemente pequeño (en valor absoluto) como para producir una cota razonable.

Ahora, de (5) obtenemos:

$$T \geq \frac{\log\left(-\frac{\max_s u_1(s,c)}{u_1(c,c)}\cdot(1-\delta)+1\right)}{\log\delta} - 1 \tag{8}$$

Por tanto, los valores admisibles para T sonlos enteros positivos tales que (6), (7) y (8) se satisfacen. La cota inferior es[11]

[11] Recuérdese que la condición (6) es una desigualdad estricta, y las otras dos condiciones son desigualdades débiles.

$$\max\left\{\frac{\log\left(-\frac{\max\limits_{s} u_1(s,c)}{u_1(c,c)}\cdot(1-\delta)+1\right)}{\log\delta}-1,\frac{\max\limits_{s} u_1(s,c)}{u_1(c,c)}-1,1\right\}$$

y la cota superior es

$$\frac{\log\left(\frac{\max\limits_{s\in S-\{p\}} u_1(s,q)}{u_1(c,c)}\right)}{\log(\delta)}$$

Obsérvese que el numerador es finito bajo el supuesto A1, porque $\max\limits_{s\in S-\{p\}} u_1(s,q) < u_1(c,c)$. El denominador es también finito y diferente de 0 para $\delta \in (0,1)$. Por tanto, la cota superior es estrictamente finita, por lo que la convergencia debe completarse en un número finito de periodos.

La intuición de la cota superior es muy sencilla. Consideremos los incentivos de un jugador que está siendo castigado. Claramente, una desviación es más beneficiosa cuanto mayor sea el periodo de castigo. Por tanto, el periodo de castigo no puede durar demasiado, porque induciría desviaciones.

4 Requerimientos de memoria

En esta sección estudiamos los requisitos de la memoria de las estrategias presentadas en la sección 3.1, en un intento de comparar nuestro enfoque con la teoría de memoria acotada. Primero demostraremos que nuestras estrategias no funcionan bajo memoria acotada. Esto podría sembrar dudas sobre la complejidad de nuestra estrategia y por lo tanto sobre su aplicabilidad en el mundo real, como Aumann (1997) sugiere. Por esta razón definimos un concepto de requerimientos de memoria más débil que memoria acotada, y proporcionamos cotas superiores para los requisitos de memoria bajo esta definición más débil.

Comenzamos definiendo memoria absoluta de una estrategia:

Definition 8 *Una estrategia σ_i tiene memoria absoluta $\Phi(\sigma_i) = \lambda$ si $\lambda \in \mathbb{N}$ es el mínimo numero tal que $s_i^t(h^{t-1}) = s_i^t(\tilde{h}^{t-1})$, para todo periodo $t \in \mathbb{Z}$, y para todo par de historias $h^{t-1} \in H$ y $\tilde{h}^{t-1} \in H$ tales que $h_k^t = \tilde{h}_k^t, \forall k \in \{t-\lambda, \dots, t-1\}$.*

Podemos decir que una estrategia σ_i satisface la propiedad de memoria acotada si o sólo si $\Phi(\sigma_i) < \infty$. Ahora, es fácil ver que la estrategia definida en la sección 3.1 no satisface la propiedad de memoria acotada, como demuestra la siguiente proposición:

Proposition 9 *La estrategia definida en 3.1 tiene memoria absoluta infinita.*

Proof. Consideremos una historia $h^{t-1} \in H$ tal que $h_k^{t-1} = \{q, q\}, \forall k \leq t-1$. Ahora, consideremos otra historia $\tilde{h}^{t-1} \in H$ tal que $\tilde{h}_k^{t-1} = \{q, q\}, \forall k \leq t-1, k \neq t-\lambda$, y $\tilde{h}_{t-\lambda}^{t-1} = \{c, q\}$, para algún $\lambda \geq 1$. De acuerdo con la estrategia definida en 3.1, el jugador 1 debería jugar c después de la historia h^{t-1}, mientras que debería jugar q después de la historia $\tilde{h}^{t-1}$. La demostración se completa tomando el límite $\lambda \to \infty$. ∎

La proposición anterior demuestra que nuestras estrategias estables no se pueden definir bajo el marco de memoria acotada. Pero esto no significa que nuestras estrategias sean infinitamente complicadas, porque podemos proporcionar límites para sus requisitos de memoria usando una definición de memoria más débil que la absoluta. Llamamos a este concepto más débil memoria condicional, y se define como sigue:

Definition 10 *Una estrategia σ_i tiene memoria condicional $\phi(\sigma_i, h^{t-1}) = \lambda$ en el subjuego h^{t-1} si $\lambda \in \mathbb{N}$ es el mínimo número tal que $s_i^t(h^{t-1}) = s_i^t(\tilde{h}^{t-1})$, para toda historia $\tilde{h}^{t-1} \in H$ tal que $h_k^t = \tilde{h}_k^t, \forall k \in \{t-\lambda, \ldots, t-1\}$.*

La definición de memoria condicional calcula los requisitos de memoria, condicionales a estar en un subjuego particular. Por otra parte, la memoria absoluta se define sin el condicionamiento, así que puede ser interpretada como la memoria condicional máxima sobre todas las historias posibles.

Ahora, estamos en posición de proporcionar límites para los requisitos de memoria condicional de la estrategia estable definida en 3.1:

Theorem 11 *Sean σ_1 y σ_2 las estrategias estables definidas en 3.1 para los jugadores 1 y2, respectivamente. Entonces, $\phi(\sigma_i, P_k(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2)) = 1$ para todo $t \in \mathbb{Z}, h^{t-1} \in H, i \in \{1, 2\}, k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \geq t + T$.*

Proof. Si los jugadores juegan de acuerdo a las estrategias definidas en 3.1, entonces $P_k(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2) \in \{\{c, c\}, \{p, q\}, \{q, p\}\}, \forall k \geq t$, dependiendo del valor de θ_k computado en los pasos 1 y 2 en la definición de la estrategia. Más aún, los pares $\{p, q\}$ y $\{q, p\}$ pueden durar como mucho T periodos, por lo que $P_k(h^{t-1}, \sigma_1, \sigma_2) = \{c, c\}, \forall k \geq t + T$. La demostración se completa observando que el paso 1 en la definición de la estrategia ignora la parte de la historia observada antes del $\{c, c\}$ más reciente. ∎

El teorema anterior indica que, si los jugadores juegan según las estrategias estables definidas en 3.1, entonces los requisitos de memoria condicional acaban convergiendo a 1, porque ambos jugadores acabarán jugando c. Esto significa que los requisitos de memoria condicional son finitos y pequeños, excepto en historias que están muy lejos de la trayectoria del equilibrio implicada por nuestras estrategias estables.

5 Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto un concepto de estabilidad dinámica en juegos repetidos con descuento para el que es necesaria una modificación de la teoría tradicional. Particularmente, necesitamos introducir un juego sin comienzo, es decir un juego con una historia infinita en todos los períodos. Se debe tener en cuenta temas como la reputación o la robustez a las condiciones iniciales al interpretar el concepto propuesto de estabilidad dinámica.

Una caracterización[12] de los pagos soportables como equilibrio estable también se presenta, con el resultado adicional que la convergencia al perfil duradero de la estrategia se puede alcanzar en un número finito de períodos, para todas las historias anteriores. La prueba es constructiva, dando las estrategias que soportan la jugada de largo plazo. También hemos demostrado que los requisitos de memoria de estas estrategias están limitados, pero bajo un concepto de memoria más débil que memoria acotada.

Se pueden mirar las contribuciones de este trabajo por lo menos de tres distintas maneras. La más directa es el estudio de juegos con una historia infinita, es decir sin comienzo. Una interpretación más interesante es que la teoría desarrollada aquí proporciona una justificación formal para los resultados de folk de uso frecuente en la literatura, porque todas las trayectorias del equilibrio convergen al resultado cooperativo. Es decir estamos comprobando la robustez de los resultados populares al supuesto que las estrategias comiencen con cierto perfil. Finalmente, el análisis del proceso de convergencia es interesante por sí mismo. Si por cualquier razón los jugadores no están cooperando (quizá porque alguien se ha desviado en el pasado), las estrategias presentadas aquí proporcionan una manera en la cual los jugadores pueden reconstruir sus reputaciones.

El análisis desarrollado aquí tiene sin embargo varias limitaciones, e investigación adicional sería útil. La limitación principal es que el teorema requiere que el resultado a soportar sea en estrategias puras. Aunque el resto de los supuestos son inocuos, y se hacen por simplicidad, el requisito de estrategias puras no se puede generalizar de una manera directa. Si deseamos soportar combinaciones convexas de los pagos en estrategias puras, no podemos utilizar el argumento habitual de un dispositivo público de aleatorización y de una distribución correlacionada. La razón es que requerimos que la trayectoria de equilibrio sea convergente, y no que cambie al azar sobre un conjunto de resultados. Pero aun así se puede tener una noción de estabilidad dinámica en estos casos. Quizás la manera más simple es substituir la

[12]Esta caracterización es incompleta en el sentido que nos hemos centrado en estrategias puras, y en juegos sin incertidumbre.

condición (b) en la definición de un SPE estable por convergencia en pagos esperados, no en el perfil jugado. Hay quizá otras posibilidades, como la convergencia en la distribución sobre los resultados, aunque puede ser difícil desarrollar estrategias estables con la característica que la distribución futura de probabilidad sobre los resultados sea invariante, con independencia de la realización del actual resultado (estocástico).

En segundo lugar, nos hemos centrado en juegos sin incertidumbre, por lo que un concepto de estabilidad para juegos con una cierta fuente de incertidumbre puede ser útil. Probablemente, la definición estará cerca de Ely y Välimäki (2002) y Green y Porter (1984), pero la extensión no es directa. Una posibilidad sería hacer la definición análoga a las usadas en los procesos estocásticos, asumiendo que de ahora en adelante todas las variables estocásticas toman una realización igual a su valor medio (incluyendo variables relacionadas con la información imperfecta). Entonces, la definición de convergencia se podría modificar consecuentemente.

Tercero, es interesante observar que el resultado de folk presentado aquí es un resultado límite. El teorema en la sección 3.2 indica que podemos soportar equilibrios estables para un factor de descuento suficientemente alto. No dice nada acerca de esquemas óptimos de castigo (que satsfagan estabilidad), en el sentido que pueden existir otras estrategias que requieran condiciones más débiles para δ. Ésta es obviamente otra posible extensión.

Referencias

- Abreu, D. (1988) "On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting," *Econometrica* 56, pp. 383-396.

- Abreu, D., D. Pearce y E. Stachetti (1990) "Toward a theory of discounted repeated games with imperfect monitoring," *Econometrica* 58, pp. 1041-1064.

- Anderlini, L. y H. Sabourian (1995) "Cooperation and Effective Computability," *Econometrica* 63, pp. 1337-1369.

- Aumann, R. (1997) "Rationality and Bounded Rationality," *Games and Economic Behavior* 21, pp. 2-14.

- Aumann, R. y S. Sorin (1989) "Cooperation and Bounded Recall," *Games and Economic Behavior* 1, pp. 5-39.

- Ely, J. C. y J. Välimäki (2002) "A Robust Folk Theorem for the Prisoner's Dilemma," *Journal of Economic Theory* 102, pp. 84-105.

- Evans, R. y J.P. Thomas (2001) "Cooperation and Punishment," *Econometrica* 69(4), pp. 1061-1075.

- Fudenberg, D. y J. Tirole (1991) "Game Theory," *MIT Press, 1991.*

- Green, E.J. y R.H. Porter (1984) "Noncooperative Collusion under Imperfect Price Information," *Econometrica* 52(1), pp. 87-100.

- Kalai, E., D. Samet y W. Stanford (1988) "A Note on Reactive Equilibria in the Discounted Prisoners's Dilemma and Associated Games," *International Journal of Game Theory* 17(3), pp. 177-186.

- Kalai, E. y W. Stanford (1988) "Finite Rationality and Interpersonal Complexity in Repeated Games," *Econometrica* 56(2), pp. 397-410.

- Piccione, M. (2002) "The Repeated Prisoner's Dilemma with Imperfect Private Monitoring," *Journal of Economic Theory* 102, pp. 70-83.

Sobre el papel de los subsidios a la educación[1]

Sergio Puente[2]

Enero 2007[3]

[1]Este trabajo es parte de la tesis doctoral del autor, dirigida por Manuel Santos y desarrollada en la Universidad Carlos III.

[2]Banco de España, Alcalá 48, 28014 Madrid. Tel: +34 91 3385705. E-mail: sergio .puente@bde.es. El autor agradece la ayuda financiera prestada por el MCYT.

[3]Este trabajo se ha beneficiado de comentarios de Juan Rojas, Diego Moreno, Juan F. Jimeno, y otros asistentes a los seminarios de la Universidad Carlos III y del Banco de España. Me gustaría agradecer especialmente a Manuel Santos por sus sugerencias, y a Miguel Pérez por su ayuda en la investigación.

Abstract

Presentamos un modelo de generaciones solapadas con capital humano e I+D pública que tiene varias características interesantes. Primero, puede generar ciclos de expectativas de período dos en el esfuerzo educativo de las sucesivas generaciones. En segundo lugar, un subsidio a la educación puede afectar positivamente al crecimiento haciendo más barato el bien usado en la producción de la I+D pública, el capital humano. Tercero, un subsidio a la educación desempeña el papel de un sistema financiero, transfiriendo recursos de la gente vieja a la gente joven, en ausencia de mercados financieros privados.

También desarrollamos un ejercicio de calibración para un conjunto de países europeos para obtener recomendaciones del modelo respecto a la asignación óptima de recursos públicos entre educación y los subsidios a la I+D. También comparamos las políticas reales con esta distribución óptima.

1 Introducción

La educación es una parte muy importante del proceso de crecimiento sostenido. El capital humano representa una fracción grande de los factores acumulados totales en las economías modernas. Además, el capital humano es el principal recurso empleado en la producción del nuevo conocimiento, así como en la adopción de la tecnología existente. Por lo tanto, puesto que los gobiernos en economías de la OCDE subvencionan por lo menos parte de los costes de educación, entender los efectos de estos subsidios sobre el proceso de crecimiento resulta ser de importancia capital.

Las actividades de I+D pueden ser consideradas como la manera en la cual las economías producen nuevo conocimiento. Por lo tanto, el papel de estas actividades en el proceso del crecimiento es aún más directo que en el caso del capital humano, y también la mayoría de los gobiernos las subvencionan. Desde un punto de vista teórico, los subsidios a la I+D se pueden justificar por la presencia de ciertos fallos de mercado que impliquen que la asignación privada de I+D es ineficientemente baja. Éste podría ser el caso si, por ejemplo, los derechos de propiedad intelectual no se fijan correctamente. Otra posibilidad es que, bajo un altruismo entre generaciones menos que perfecto, algunos efectos futuros de las actividades de I+D no son internalizados por los actuales agentes, de forma que se genera una externalidad aunque los derechos de propiedad intelectual trabajen con eficacia.

La meta principal del papel es estudiar la distribución óptima de subsidios entre la I+D y la educación. Desde un punto de vista teórico, los subsidios a la I+D se pueden justificar por sus efectos sobre el crecimiento. Por el contrario, las justificaciones de los subsidios educativos son más variadas. En este papel estamos interesados en dos de ellas: Primero, el papel de subsidios educativos como substituto para los mercados financieros a los que los agentes jóvenes se enfrentan. En segundo lugar, el efecto positivo de la educación sobre el crecimiento mediante las actividades de I+D. Demostramos que, en teoría, ambos efectos pueden estar presentes en la economía. Esto tiene implicaciones importantes. Por ejemplo, incluso si un mercado financiero para la gente joven pudiera ser construido, todavía sería óptimo tener subsidios educativos, debido a la segunda justificación. O, en otra palabras, las políticas con el único objetivo de maximizar el crecimiento pueden encontrar óptimo asignar algunos recursos a los subsidios educativos aunque el crecimiento sea producido solamente mediante la I+D.

Con esta motivación en mente, construimos un modelo muy simple de generaciones solapadas con subsidios educativos e I+D pública. En este modelo, los subsidios educativos puede tener tres efectos principales. Primero, un cambio en el subsidio podría conducir una economía a una situación de multiplicidad de equilibrios, y quizás podría inducir ciclos en el esfuerzo educativo de las diversas generaciones.

En segundo lugar, el subsidio fomenta la acumulación de capital humano, por lo tanto haciendo más barato el capital humano. Si la producción de nuevo conocimiento es intensiva en capital humano, como es en nuestro modelo, este efecto puede aumentar el crecimiento. Obsérvese, sin embargo, que un crecimiento más alto puede no ser óptimo; dependerá de la existencia de externalidades. En nuestro modelo, el capital humano tiene una externalidad indirecta que será discutida más adelante.

Tercero, los subsidios educativos pueden actuar como substituto de los mercados financieros. La gente joven está a menudo sujeta a restricciones de crédito, y por otra parte tienen expectativas de aumentos en sus ingresos reales durante el ciclo vital. Por consiguiente, la gente joven tiene incentivos a pedir prestado para suavizar el consumo y financiar sus inversiones en educación. Las restricciones de crédito son generalmente aplicables en esta situación, y por lo tanto un subsidio educativo puede aumentar el bienestar, desempeñando el papel del mercado financiero que falta.

Las características principales del modelo son las siguientes. La gente vive dos períodos. En el primer período, debe asignar su tiempo entre la acumulación de capital humano y el mercado de trabajo. También consume en el primer período. El coste de educación monetario es cero, pero sin embargo hay un coste de oportunidad bajo la forma de salarios no obtenidos. El gobierno subvenciona una fracción de este coste de oportunidad. En el segundo período, los agentes simplemente venden todo su tiempo bruto y su capital humano en el mercado, y consumen los ingresos. No hay altruismo entre generaciones. El gobierno impone un impuesto sobre la renta de la gente joven y vieja, y utiliza los ingresos para financiar el subsidio, y para comprar un cierto capital humano en el mercado. Utiliza este capital humano para proporcionar la I+D pública.

Ahora, la externalidad indirecta mencionada antesse hace patente. Si un agente estudia más tiempo, el precio relativo del capital humano baja. Entonces, el gobierno puede comprar más capital humano con los mismos recursos, y por lo tanto proporciona más I+D pública. Las ventajas de este aumento no sólo se dividen entre todos los agentes de la economía, sino que también la primera vez que aparecen es dos generaciones después. Claramente, el agente no internaliza este efecto en ausencia de la política fiscal.

Hay varios temas en la literatura relacionados con este trabajo. Uno es la literatura de crecimiento endógeno, con acumulación de capital humano e I+D como los motores del crecimiento. Otra es la literatura sobre la política fiscal óptima. Finalmente, este papel tiene también implicaciones con respecto a mercados financieros y las restricciones de crédito.

Hay una variedad amplia de modelos de I+D con crecimiento endógeno en la literatura. Los ejemplos son, entre muchos otros, Jones (1995), Howitt (1999), Segerstrom (2000) y Aghion y Howitt (1992). En muchos de ellos hay empresas que producen servicios deI+D, que se utilizarán en la misma empresa o que se venderán en el mercado bajo la forma de patentes. Por consiguiente, suele ser verdad que el equilibrio competitivo no es óptimo en presencia de actividades de I+D. Esto puede ser debido al poder de monopolio generado por las patentes, a las externalidades en el proceso de I+D, o a la existencia de posibilidades de imitación.

Nuestro modelo tiene, por el contrario, I+D pública. Esto permite que evitemos temas referentes a la estructura de mercado y al poder de mercado. Además, los resultados principales del papel probablemente no serían afectados por la introducción de la I+D privada, y algunos podrían ser reforzados. Consideremos por ejemplo el segundo efecto de un subsidio de la educación descrito arriba. Un precio relativo más bajo del capital humano no sólo induce al gobierno a aumentar su I+D, sino que también genera un aumento en la I+D privada si la última está presente en el modelo.

Referente a la literatura de crecimiento endógeno con la acumulación de capital humano como el motor del crecimiento, el modelo más conocido es el de Lucas (1988) y Uzawa (1965). En este tipo de economías, el crecimiento a largo plazo ocurre porque la función de producción del nuevo capital humano tiene economías de escala constantes en un cierto conjunto de factores reproducibles, permitiendo la acumulación ilimitada de capital humano. Las características generales del modelo se han analizado en un número de trabajos.[1] Otros trabajos han estudiado más específicamente el problema de la política fiscal en esta clase de modelos. King y Rebelo (1990) encuentran efectos importantes de crecimiento de la política fiscal, y Jones, Manuelli y

[1] Ver, por ejemplo, Caballé y Santos (1993), Ortigueira y Santos (1997) y Mulligan y Sala-i-Martin (1993).

Rossi (1993) discuten que esto es porque utilizan un modelo de crecimiento endógeno. Centrándonos en el subsidio educativo, Milesi-Ferretti y Roubini (1998) demuestran, entre otros resultados, que el subsidio óptimo a largo plazo debe ser cero, y Alonso-Carrera (2000) analiza detalladamente los efectos teóricos de la presencia del subsidio.

Nuestro modelo tiene por lo menos dos diferencias importantes con respecto al modelo de Lucas-Uzawa. Primero, un modelo de agentes de vida infinita parece no ser adecuado para estudiar los efectos de las restricciones de crédito sobre la educación. Por lo tanto, hemos optado por desarrollar un modelo de generaciones solapadas. En este sentido, nuestro modelo es más cercano a Hendricks (1999, 2001) y a de Gregorio (1996).

En segundo lugar, en el modelo de Lucas-Uzawa el motor del crecimiento es la acumulación de capital humano. Si esto fuera verdad, esperaríamos que el nivel de ingresos y el capital humano estuvieran correlacionados. Hay, sin embargo, una cierta evidencia que sugiere que es el crecimiento de la renta el que está relacionado con el capital humano.[2] Si identificamos el capital humano con conceptos como los años medios de educación, uno esperaría precisamente la segunda clase de relación, porque en un contexto de vidas finitas, los años medios de educación (o medidas similares) no pueden crecer sin límite. Por otra parte, con esta última interpretación, el nivel del capital humano contribuye al crecimiento de otra variable (conocimiento) que de hecho puede crecer sin límite. Por lo tanto, se espera que el nivel del capital humano esté relacionado con crecimiento de la renta. Nuestra estrategia aquí es modelar explícitamente la relación entre el capital humano y el crecimiento del conocimiento, asumiendo que los servicios de I+D están producidos con servicios de capital humano.[3]

Obsérvese, sin embargo, que la discusión anterior es solamente lingüística. Podemos interpretar el capital humano en el modelo de Lucas-Uzawa como conocimiento. O uno puede tener una definición más amplia del capital humano incluyendo también el nivel del conocimiento aprendido. Estos temas

[2] Ver, por ejemplo, Benhabib y Spiegel (1994).

[3] Una manera alternativa de obtener efectos de crecimiento a partir de niveles de capital humano sería asumir una función de producción con un efecto externo de crecimiento ad hoc del capital humano. Pero ésto sería algo difícil de interpretar en los términos tradicionales de mejoras en la productividad cuando un trabajador se rodea de colegas con alto capital humano. Por otra parte, esta formulación haría imposible analizar la asignación óptima de recursos públicos entre los subsidios educativos y la I+D, que es la meta principal del trabajo.

llegan a ser importantes en el trabajo aplicado, donde uno necesita identificar muy claramente el concepto que uno está utilizando.

Hay bastante literatura que trata de los efectos de nivel y de crecimiento de las reformas fiscales, y sobre impuestos óptimos.[4] Nuestro modelo no es muy apropiado para estudiar impuestos, porque en nuestro modelo el impuesto sobre la renta es no distorsionante. Nos centramos en el estudio de subsidios educativos, y en la composición óptima del gasto público (para un impuesto sobre la renta dado) entre los subsidios a la educación y a la I+D. Esta composición óptima es la lección principal en la sección de política fiscal óptima. Un trabajo relacionado es Rustichini y Schmitz (1991). Ellos analizan un modelo en el cual el gobierno subvenciona la actividad de investigación y la actividad de imitación. La composición del gasto público entre estos dos conceptos se estudia específicamente. Encuentran que es óptimo subvencionar ambas actividades.

Además, en nuestro modelo no hay pérdida de recursos públicos. O se gastan en subsidios a la educación o en I+D pública. Por el contrario, muchos modelos de imposición óptima asumen que el gasto público es no productivo. Esta separación entre ingresos y los gastos puede ser problemática, según lo argumentado en Jones, Manuelli y Rossi (1993), particularmente en el análisis del tamaño óptimo del gobierno. Presentamos en las conclusiones una extensión que haría el modelo apropiado para cubrir esta pregunta.

Un modelo cercano es el de Glomm y Ravikumar (2001). Presentan un modelo de generaciones solapadas con dos períodos en el que el capital humano se produce con el capital humano de los padres, los recursos empleados por el gobierno en la educación, y el tiempo de la gente joven. El modelo es bastante similar a nuestro modelo. Hay, sin embargo, algunas diferencias. Primero, ellos estudian el problema de la elección política, asumiendo que las decisiones son tomadas por la gente vieja, usando votación por mayoría, mientras que nosotros nos centramos en la política óptima. En segundo lugar, en su modelo, hay altruismo entre las generaciones, y la gente joven no puede trabajar; eligen entre estudiar u ocio. Por el contrario, nosotros no tenemos en cuenta el altruismo entre generaciones, y la gente joven puede trabajar, lo que significa que deben pagar el coste de oportunidad de estudiar. Con este enfoque podemos estudiar temas referentes a las restricciones

[4] Ver, por ejemplo, King y Rebelo (1990), Milesi-Ferretti y Roubini (1998), Jones, Manuelli y Rossi (1993), Chamley (1986), Lucas (1990), Stokey y Rebelo (1995) y Judd (1985).

de crédito. Tercero, modelamos explícitamente la relación entre el capital humano y la I+D (o crecimiento). Esto permite que estudiemos la relación entre los subsidios a la educación y el crecimiento a largo plazo.

De Gregorio (1996) presenta evidencia sobre la importancia de las restricciones de crédito en el proceso de desarrollo. Estamos de acuerdo en que las restricciones de crédito pueden reducir el crecimiento reduciendo los incentivos de la gente joven para acumular capital humano. Según lo discutido ya, agregamos a su discusión el hecho de que los subsidios a la educación pueden actuar con eficacia como substituto de mercados financieros en presencia de restricciones de crédito.

Finalmente, Trostel (1993, 1996) demuestra que, si la educación tiene costes de tiempo y monetarios, entonces el impuesto sobre la renta distorsiona la composición entre ambos factores porque el tiempo es realmente un coste deducible de los impuestos pero el monetario no lo es. Entonces, demuestra que un subsidio a los costes de educación monetarios puede compensar la distorsión mencionada previamente. Otiene que el subsidio óptimo debe ser más o menos igual al tipo impositivo marginal sobre la renta. Puesto que él se centra en esta consecuencia particular de los subsidios a la educación, mientras que nosotros nos estamos centrando en otros efectos, su trabajo se debe considerar como complementario a nuestro estudio.

El resto del papel se organiza como sigue. La sección siguiente presenta la descripción del modelo. En la sección 3, se analiza el equilibrio. En las secciones 4 y 5 se analizan la solución estacionaria y la dinámica transitoria del modelo, respectivamente. La política óptima se estudia en la sección 6. Finalmente, la sección 7 tiene algunos comentarios como conclusión y discute algunas extensiones posibles.

2 El Modelo

En cada periodo t hay dos agentes, el joven y el viejo. Sean c_t^y y c_t^o los consumos del agente que es joven en el periodo t, y del que es viejo en el periodo t, respectivamente. Hay una función de utilidad instantánea, denotada por $u(\bullet)$ y un factor de descuento ρ. Ambos agentes (y en particular el joven) están dotados de previsión perfecta.

El agente joven en el periodo t está dotado de una unidad de tiempo, y tiene que decidir cuánto tiempo dedica a la acumulación de capital humano, que será denotado por v_t. El tiempo restante se vende en el mercado como trabajo. El coste de la acumulación de capital humano son los salarios no ganados.

El agente viejo en el periodo $t+1$ está dotado también de una unidad de tiempo, que dedica enteramente a trabajar, y además tiene $f(v_t)$ unidades de capital humano, que dependen del tiempo que dedicó a la acumulación de capital humano cuando era joven. La función f satisface:

Supuesto A1 LA función $f(v_t)$ es creciente, cóncava, contínuamente diferenciable, y satisface $f(0)=0,\ f'(1)=0$ y $\frac{d\left(\frac{-f''(v_t)f(v_t)}{(f'(v_t))^2}\right)}{dv_t} \geq 0.$

Las $f(v_t)$ unidades de capital humano se venden en el mercado de capital humano, que es independiente del mercado de trabajo. Cuando el agente viejo muere, todo su capital humano se pierde.

Hay una empresa representativa que produce el bien de consumo y_t usando trabajo y capital humano, con la siguiente función de producción:

$$y_t = A_t H_t^{\beta} L_t^{1-\beta} \tag{1}$$

Donde L_t y H_t son, respectivamente, la cantidad de trabajo y de capital humano empleados por la empresa, y A_t es un parámetro de productividad que puede variar en el tiempo. Los precios del trabajo y del capital humano son, respectivamente, w_t^l y w_t^h.

Finalmente, hay un gobierno que establece un impuesto sobre la renta τ. Los ingresos del impuesto se utilizan para pagar un subsidio a la acumulación de capital humano, que es una fracción s del salario después de impuestos $(1-\tau)\cdot w_t^l$ por cada unidad de tiempo invertida, y y para comprar una cantidad R_t de capital humano en el mercado, que se utiliza para proveer I+D pública.

Asumimos que todos los parámetros satisfacen la siguiente desigualdad *estricta*: $0 < s, \tau, \beta, \rho < 1$.

El problema del agente joven representativo es maximizar (2)

$$u\left(c_t^y\right) + \rho \cdot u\left(c_{t+1}^o\right) \tag{2}$$

Sujeto a

$$c_t^y = (1-\tau)\cdot w_t^l \cdot (1-v_t) + s\cdot(1-\tau)\cdot w_t^l \cdot v_t \tag{3}$$

$$c^o_{t+1} = (1-\tau)\left[w^l_{t+1} + w^h_{t+1}\cdot f(v_t)\right] \tag{4}$$

$$0 \leq v_t \leq 1 \tag{5}$$

Obsérvese que, puesto que no hay preferencias por dejar herencias en el modelo, la solución del problema del agente viejo es trivial: vender todo su tiempo y capital humano, y consumir toda su renta.

Respecto al problema de la empresa, las condiciones de maximización de beneficios son:

$$w^l_t = A_t\cdot(1-\beta)\cdot\left[\frac{H_t}{L_t}\right]^\beta \tag{6}$$

$$w^h_t = A_t\cdot\beta\cdot\left[\frac{L_t}{H_t}\right]^{1-\beta} \tag{7}$$

Hay tres mercados en esta economía: bienes de consumo, trabajo y capital humano. Obsérvese que la oferta de tiempo de trabajo es una unidad del viejo y $1-v_t$ unidades del joven, y que la oferta de capital humano es simplemente el capital humano del viejo, $f(v_{t-1})$. Por tanto, las tres condiciones de vaciado de mercados son, respectivamente:

$$c^y_t + c^o_t = y_t = A_t H^\beta_t L^{1-\beta}_t \tag{8}$$

$$L_t = 2 - v_t \tag{9}$$

$$H_t + R_t = f(v_{t-1}) \tag{10}$$

Asumimos que el gobierno equilibra el presupuesto cada periodo. Por tanto, la siguiente ecuación debe satisfacerse:

$$s\cdot(1-\tau)\cdot w^l_t\cdot v_t + w^h_t\cdot R_t = \tau\left[w^l_t\cdot(2-v_t) + w^h_t\cdot f(v_{t-1})\right] \tag{11}$$

Ahora sustituimos (9) y (10) en (8), (6) y (7) para obtener

$$c^y_t + c^o_t = y_t = A_t\cdot\left[f(v_{t-1}) - R_t\right]^\beta\left[2-v_t\right]^{1-\beta} \tag{12}$$

$$w_t^l = A_t \cdot (1-\beta) \cdot \left[\frac{f(v_{t-1}) - R_t}{2 - v_t}\right]^{\beta} \tag{13}$$

$$w_t^h = A_t \cdot \beta \cdot \left[\frac{2 - v_t}{f(v_{t-1}) - R_t}\right]^{1-\beta} \tag{14}$$

Finalmente, la tasa de crecimiento del parámetro de productividad A_t es cierta función creciente A de los recursos empleados en inestigación por el gobierno, R_t:

$$A_{t+1} = A(R_t) \cdot A_t \tag{15}$$

3 Equilibrio

Ahora podemos definir un equilibrio para esta economía. En esta sección nos centramos en el análisis positivo de la economía. Por tanto, definiremos el equilibrio tomando como dados los dos parámetros de la política s y τ. En la sección 6 los haremos endógenos obteniendo la política óptima.

Definition 1 *Un equilibrio es una secuencia de variables* $\left\{c_t^y, c_t^o, v_t, H_t, L_t, R_t, w_t^l, w_t^h\right\}_{t=1}^{\infty}$ *tal que, dado un valor de* v_0 *y dados valores para el conjunto de parámetros* $\{s, \tau, \beta, \rho\}$*, las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) Para todo $t \in \{1, 2, \ldots\}$*, las variables* c_t^y, c_{t+1}^o *resuelven el problema del consumidor descrito antes, tomando como dadas las variables* $w_t^l, w_t^h, w_{t+1}^l, w_{t+1}^h$.

(b) La variable c_1^o *satisface la ecuación (4).*

(c) Para todo $t \in \{1, 2, \ldots\}$*, las variables* H_t, L_t, w_t^l, w_t^h *satisfacen las condiciones de maximización de beneficios (6) y (7).*

(d) El gobierno equilibra el presupuesto cada periodo: (11) se satisface para todo $t \in \{1, 2, \ldots\}$.

(e) Para todo $t \in \{1, 2, \ldots\}$*, las condiciones de vaciado de mercado (8), (9) y (10) se satisfacen.*

Ahora, el primer paso es obtener la solución del agente representativo. La condición de primer orden para una solución interior del problema del consumidor es:

$$u'(c_t^y)\, w_t^l (1-s) = \rho \cdot u'\left(c_{t+1}^o\right) w_{t+1}^h \cdot f'(v_t) \tag{16}$$

Obsérvese que $u'\left(c_t^y\right)$ es creciente en v_t, y que $u'\left(c_{t+1}^o\right)$ y $f'\left(v_t\right)$ son decrecientes en v_t. Por tanto, si la solución es interior, entonces viene unívocamente determinada por (16).

Si la solución es $v_t = 0$, lo siguiente debe ser cierto:

$$u'\left(\left(1-\tau\right)w_t^l\right)w_t^l\left(1-s\right) \geq \rho \cdot u'\left(\left(1-\tau\right)w_{t+1}^l\right)w_{t+1}^h \cdot f'\left(0\right) \tag{17}$$

Análogamente, si la solución es $v_t = 1$, lo siguiente debe ser cierto:

$$u'\left(s\left(1-\tau\right)w_t^l\right)w_t^l\left(1-s\right) \leq \rho \cdot u'\left(\left(1-\tau\right)\left(w_{t+1}^l + w_{t+1}^h \cdot f\left(1\right)\right)\right)w_{t+1}^h \cdot f'\left(1\right) \tag{18}$$

La siguiente proposición establece bajo qué condiciones el impuesto sobre la renta τ es no distorsionante.

Proposition 2 *El valor de v_t que resuelve el problema del agente joven no depende de τ si la función $u'(\cdot)$ es homogénea.*

Demostración: Los factores en (16), (17) y (18) son todos independientes de τ, excepto las utilidades marginales. Por tanto, el v_t óptimo dependerá de τ si y sólo si el cociente $\frac{u'\left(c_t^y\right)}{u'\left(c_{t+1}^o\right)}$ depende de τ. Ahora, si $u'(\cdot)$ es homogénea de grado ϑ, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{u'\left(c_t^y\right)}{u'\left(c_{t+1}^o\right)} &= \left(\frac{c_t^y}{c_{t+1}^o}\right)^{\vartheta} = \left(\frac{\left(1-\tau\right)\cdot w_t^l \cdot \left(1-v_t\right) + s \cdot \left(1-\tau\right)\cdot w_t^l \cdot v_t}{\left(1-\tau\right)\left[w_{t+1}^l + w_{t+1}^h \cdot f\left(v_t\right)\right]}\right)^{\vartheta} = \\
&= \left(\frac{w_t^l \cdot \left(\left(1-v_t\right) + s \cdot v_t\right)}{w_{t+1}^l + w_{t+1}^h \cdot f\left(v_t\right)}\right)^{\vartheta}
\end{aligned}$$

Para finalizar la prueba, obsérvese que la útima expresión es independiente de τ.■

La intuición de la proposición anterior es la siguiente. El tiempo se puede asignar solamente a trabajar o a estudiar. Y, dado que el impuesto sobre la renta reduce los beneficios de ambas actividades en la misma proporción, el impuesto no es distorsionante cuando la utilidad marginal es homogénea. Como mencionamos en la conclusión, para obtener impuestos distorsionantes debemos incluir una alternativa para asignar el tiempo no gravada (p.ej. ocio).

Entre las utilidades marginales que son homogéneas, asumimos utilidad logarítmica por simplicidad, lo que implica que $u'(\cdot)$ es homogénea de grado -1. Entonces, (16) se convierte en

$$\frac{1}{\frac{1}{1-s} - v_t} = \frac{\rho \cdot f'(v_t)}{\frac{w_{t+1}^l}{w_{t+1}^h} + f(v_t)} \tag{19}$$

y (17) y (18) pasan a ser, respectivamente

$$(1-s) \geq \rho \cdot f'(0) \frac{w_{t+1}^h}{w_{t+1}^l} \tag{20}$$

$$\frac{1-s}{s} \leq \rho \frac{f'(1)}{\frac{w_{t+1}^l}{w_{t+1}^h} + f(1)} \tag{21}$$

Obsérvese que (independientemente de que la solución sea interior o no), (19), (20) y (21) implican que la solución óptima depende sólo del cociente $\frac{w_{t+1}^l}{w_{t+1}^h}$, y de los parámetros del modelo:

$$v_t \left(\frac{w_{t+1}^l}{w_{t+1}^h}, \ldots \right) \tag{22}$$

La ecuación (22) nos da la solución del problema del consumidor. Una vez que se ha obtenido v_t, podemos obtener el consumo en ambas edades usando (3) y (4).

Respecto al gobierno, podemos reordenar (13), (14) y (11) para obtener:

$$\frac{1-\tau}{\tau} \left[\frac{s \cdot v_t}{2 - v_t} (1-\beta) + \beta \cdot \frac{R_t}{f(v_{t-1}) - R_t} \right] = 1 \tag{23}$$

La ecuación (23) define el valor de R_t como función de v_t, v_{t-1}, y de los parámetros del modelo:

$$R_t (v_{t-1}, v_t, \ldots) \tag{24}$$

Finalmente, podemos calcular el cociente $\frac{w_{t+1}^l}{w_{t+1}^h}$ de (13) y (14):

$$\frac{w_{t+1}^l}{w_{t+1}^h} = \frac{1-\beta}{\beta} \left(\frac{f(v_t) - R_{t+1}}{2 - v_{t+1}} \right) \tag{25}$$

Ahora, si introducimos (25) en (22) podemos obtener la solución de v_t como función de v_{t+1}, R_{t+1}, y los parámetros del modelo:

$$v_t\left(v_{t+1}, R_{t+1}, \ldots\right) \tag{26}$$

Las ecuaciones (24) y (26) describen el comportamiento dinámico de la economía. Obsérvese que la solución óptima dada por (26) está determinada por las expectativas sobre inversiones futuras en educación e inversión. No depende de condiciones presentes ni pasadas como v_{t-1} o A_t. Por esta razón, la solución del sistema dinámico no puede caracterizarse por una condición inicial, y puede existir multiplicidad de equilibrios.

En particular, todas las secuencias $\{v_t, R_t\}_{t=1}^{\infty}$ que satisfagan las ecuaciones (24) y (26) pueden ser un equilibrio. El valor inicial v_0 tiene influencia sólo sobre la variable R_1. No tiene efectos sobre el resto de esfuerzos investigadores, y no tiene efectos sobre ningún esfuerzo educativo.

En consecuencia, si existe una solución estacionaria, entonces el resultado estacionario en cada periodo es siempre un equilibrio.[5] Por supuesto, puede haber otros equilibrios también. Necesitamos comprobar si estos otros equilibrios convergen a la solución estacionaria o bien tienen un comportamiento explosivo (e inconsistente). Si lo último es cierto, podemos centrarnos en el estudio de la solución estacionaria.

Las dos secciones siguientes tratan de estas cuestiones. En la siguiente se caracteriza la solución estacionaria, y en la sección 5 se analizan las dinámicas de equilibrio.

4 Solución estacionaria

En esta sección caracterizamos la solución estacionaria del sistema dinámico (24) y (26). Denotamos con un * los valores estacionarios de las variables.

La estrategia es comenzar con las condiciones de una solución interior, y después descartar las soluciones esquina.

Suponiendo interioridad tenemos lo siguiente. De (25) obtenemos el cociente de precios estacionario

[5] La variable v es igual al valor de estado estacionario desde el periodo 1. La variable R, sin embargo, alcanza su valor de estado estacionario en el periodo 2, con R_1 dado por (24).

$$\left(\frac{w^l}{w^h}\right)^* = \frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{f(v^*)-R^*}{2-v^*}\right)$$

Por tanto, sustituyendo en las condiciones de primer orden (interiores) del consumidor (19) obtenemos

$$\frac{1}{\frac{1}{1-s}-v^*} = \frac{\rho \cdot f'(v^*)}{\frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{f(v^*)-R^*}{2-v^*}\right)+f(v^*)} \tag{27}$$

Ahora, de la restricción presupuestaria del gobierno (23) tenemos que

$$\frac{s \cdot v^*(1-\beta)}{2-v^*} + \frac{\beta \cdot R^*}{f(v^*)-R^*} = \frac{\tau}{1-\tau} \tag{28}$$

Despejando R^* en (27) obtenemos

$$R^* = f(v^*) - \frac{\beta}{1-\beta}(2-v^*)\left[\left(\frac{1}{1-s}-v^*\right)\rho \cdot f'(v^*) - f(v^*)\right] \tag{29}$$

Sustituyendo (29) en (28) y simplificando podemos obtener

$$\frac{s \cdot v^*(1-\beta)}{2-v^*} + \frac{1-\beta}{(2-v^*)\left[\left(\frac{1}{1-s}-v^*\right)\frac{f'(v^*)}{f(v^*)}\rho-1\right]} - \beta - \frac{\tau}{1-\tau} = 0 \tag{30}$$

Esta ecuación determona las soluciones interiores estacionarias. Obsérvese que bajo el supuesto A1, la expresión $\left[\left(\frac{1}{1-s}-v^*\right)\frac{f'(v^*)}{f(v^*)}\rho-1\right]$ es decreciente en v^*, tiende a infinito en $v^*=0$ y tiende a -1 en $v^*=1$. Por tanto, por continuidad, hay un $\hat{v}$ tal que $\left(\frac{1}{1-s}-\hat{v}\right)\frac{f'(\hat{v})}{f(\hat{v})}\rho-1=0$. Podemos descartar las soluciones de la forma $v^*>\hat{v}$ porque $\left[\left(\frac{1}{1-s}-v^*\right)\frac{f'(v^*)}{f(v^*)}\rho-1\right]$ sería negativo, y entonces de (29) obtendríamos que $R^*>f(v^*)$, lo que es obviamente una contradicción porque el capital humano en el sector privado no puede ser negativo.

Centrándonos en el intervalo $[0,\hat{v}]$, obsérvese que el lado izquierdo de la ecuación (30) es creciente en v^*, tiende a $\left(-\beta-\frac{\tau}{1-\tau}\right)<0$ en $v^*=0$, y tiende a infinito en $v^*=\hat{v}$. Por tanto, por continuidad, hay un sólo valor estacionario interior v^*.

Para estar seguros de que la solución estacionaria es única necesitamos descartar las soluciones esquina. Por contradicción, supongamos que $v^* = 0$. Entonces, de (20) tenemos que $(1-s) \geq \rho \cdot f'(0) \left(\frac{w^h}{w^l}\right)^*$. Pero esto es una contrdicción puesto que $\left(\frac{w^h}{w^l}\right)^*$ tiende a infinito cuando v^* tiende a 0.

Respecto a la otra solución esquina, supongamos que $v^* = 1$. Entonces (21) implica que $\frac{1-s}{s} \leq \rho \frac{f'(1)}{\left(\frac{w^l}{w^h}\right)^* + f(1)}$ lo que es una contradicción bajo A1 puesto que $f'(1) = 0$, siempre que $s < 1$.

Obsérvese que este argumento puede aplicarse para descartar soluciones esquina también en equilibrios diferentes del estado estacionario. Los supuestos clave aquí son la productividad marginal infinita de un factor con oferta nula y la condición $f'(1) = 0$.[6]

En resumen, hay una única solución estacionaria, es interior, v^* está determinada por (30) y el valor asociado de R^* se obtiene de reemplazar v^* en (29).

5 Dinámica

Para estudiar la dinámica del modelo necesitamos obtener la ecuación dinámica que relaciona v_t y v_{t+1}. Por tanto, usando (18) y (25) obtenemos del problema del consumidor:

$$\frac{1}{\frac{1}{1-s} - v_t} = \frac{\rho \cdot f'(v_t)}{\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\left(\frac{f(v_t) - R_{t+1}}{2 - v_{t+1}}\right) + f(v_t)} \tag{31}$$

Ahora evaluamos (23) en $t+1$ para obtener:

$$R_{t+1} = \frac{f(v_t)}{\frac{1}{\frac{\tau}{(1-\tau)\beta} - \frac{s \cdot v_{t+1}(1-\beta)}{(2-v_{t+1})\beta}} + 1} \tag{32}$$

Sustituyendo (32) en (31), y después de algo de álgebra, obtenemos la siguiente ecuación:

[6] Obsérvese también que podemos descartar las soluciones esquina con condiciones más débiles. Basta con tener una productividad marginal suficientemente alta de un factor con oferta nula y un valor suficientemente bajo de $f'(1)$. Para ahorrar flexibilidad funcional, este es el enfoque utilizado en la sección 6.

$$\rho \cdot \frac{f'(v_t)}{f(v_t)} \left(\frac{1}{1-s} - v_t \right) - 1 = \frac{1}{(2 - v_{t+1}) \left(\delta - \frac{s \cdot v_{t+1}}{2 - v_{t+1}} \right)} \tag{33}$$

donde $\delta = \frac{\beta}{1-\beta} + \frac{\tau}{(1-\tau)(1-\beta)}$.

La ecuación (33) define una función $v_{t+1}(v_t)$. Esta función caracteriza el comportamiento dinámico de la variable v. En particular, es obvio que $v_{t+1}(v^*) = v^*$. Y puesto que v_t debe pertenecer a $[0, \hat{v}]$ para todos los peridos, una secuencia *divergente* $\{v_t\}_{t=1}^{\infty}$ que satisfaga (33) para todo t no es equilibrio, porque antes o después violará la condición *(d)* o la *(e)* en la definición de equlibrio. Obsérvese, sin embargo, que la interpretacio´n usual de ausencia de equilibrio para ciertas condiciones iniciales no puede aplicarse en nuestro modelo, porque la ecuación (33) representa una condición de expectativas, y no de dinámica en función del pasado. En consecuencia, la condición inicial v_0 no afecta a los valores futuros de v. La interpretación correcta es la siguiente:

Proposition 3 *Existe al menos un equlibrio. Más aún, en cualquier equilibrio, v_1 debe ser tal que la secuencia inducida por (33) sea no divergente.*

Demostración: Una vez que se ha elegido v_1, el resto de la secuencia $\{v_t\}_{t=2}^{\infty}$ está unívocamente determinada por la ecuación (33). Por tanto, los valores de v_1 que inducen un patrón divergente no son equlibrios, porque antes o después las condiciones de equilibrio *(d)* o *(e)* serán violadas. Por tanto la primera generación joven no escogerá tales valores de v_1 en equilibrio. La existencia de al menos un equilibrio se ve fácilmente observando que $v_t = v^*$ $\forall t$ es un equilibrio.■

En otras palabras, la primera generación joven elige v_1 basándose en las expectativas $\{v_t\}_{t=2}^{\infty}$. Y la previsión perfecta implica que estas expectativas deben ser consistentes, tanto internamente como con respecto al valor v_1 elegido. Por tanto, la primera generación joven nunca elegirá v_1 inconsistentemente, no basará su decisión en expectativas inconsistentes.

Usando (33) podemos fácilmente establecer la siguiente propiedad respecto a $v_{t+1}(v_t)$:

Proposition 4 *La función $v_{t+1}(v_t)$ satisface lo siguiente: $v_t > v^* \Rightarrow v_{t+1}(v_t) < v^*$, y $v_t < v^* \Rightarrow v_{t+1}(v_t) > v^*$*

Demostración: Asumamos que $v_t > v^*$. Entonces, $\rho \cdot \frac{f'(v_t)}{f(v_t)} \left(\frac{1}{1-s} - v_t\right) - 1 < \rho \cdot \frac{f'(v^*)}{f(v^*)} \left(\frac{1}{1-s} - v^*\right) - 1$. Ahora, (33) implica que $(2 - v_{t+1}) \left(\delta - \frac{s \cdot v_{t+1}}{2 - v_{t+1}}\right) > (2 - v^*) \left(\delta - \frac{s \cdot v^*}{2 - v^*}\right)$, lo que implica el resultado: $v_{t+1} < v^*$. Si $v_t < v^*$ la demostración es esencialmente la misma.■

La proposición anterior establece que, si el estado estacionario es estable, entonces la convergencia es no-monótona. Sin embargo, recuérdese de la proposición 2 que las dinámicas de este modelo son generadas por un comportamiento basado en expectativas, así que los equilibrios inestables pueden ser descartados. Por lo tanto, necesitamos estudiar la estabilidad para ver si la no monotonicidad (y la multiplicidad de equilibrios) es posible.

Podemos calcular explícitamente la función $v_{t+1}(v_t)$ de (33):

$$v_{t+1}(v_t) = \frac{2\delta}{\delta + s} - \frac{1}{(\delta + s)\left(\rho \cdot \frac{f'(v_t)}{f(v_t)} \left(\frac{1}{1-s} - v_t\right) - 1\right)} \tag{34}$$

Vemos claramente que es decreciente en $[0, \hat{v}]$. La intuición detrás de este resultado es la siguiente: Puesto que (34) refleja una condición basada en expectativas, entonces el hecho de que la función sea decreciente significa que una generación quiere estudiar más si espera que la siguiente generación estudie menos. Pero si la generación t cree que la generación $t + 1$ estudiará menos, entonces la generación t tendrá más tiempo de trabajo para complementar su capital humano en $t + 1$. Por consiguiente, el precio relativo del capital humano será mayor en $t+1$, y es óptimo para la generación t estudiar más.

La pendiente de la función $v_{t+1}(v_t)$ es lo que determina la estabilidad en nuestro modelo. Puede obtenerse tomando la derivada con respecto de v_t en la expresión (34):

$$\frac{dv_{t+1}(v_t)}{dv_t} = -\left(\frac{1}{\delta + s}\right) \frac{\frac{f'(v_t)}{f(v_t)} - \left(\frac{1}{1-s} - v_t\right)\left[\frac{f''(v_t)}{f(v_t)} - \left(\frac{f'(v_t)}{f(v_t)}\right)^2\right]}{\rho\left[\frac{f'(v_t)}{f(v_t)}\left(\frac{1}{1-s} - v_t\right) - \frac{1}{\rho}\right]^2} \tag{35}$$

Vemos que $\frac{dv_{t+1}(v_t)}{dv_t} < 0$ para $v_t \in (0, \hat{v})$. Por lo tanto, si el estado estacionario es localmente estable, entonces puede haber equilibrios con una convergencia no-monótona a lo largo de toda la transición. Otras características de la función se presentan en la siguiente proposición:

Proposition 5 *La función $v_{t+1}(v_t)$ satisface lo siguiente:*

(a) $\lim\limits_{v_t \to 0} v_{t+1}(v_t) = \frac{2\delta}{\delta+s}$

(b) $\lim\limits_{v_t \to \hat{v}} v_{t+1}(v_t) = \lim\limits_{v_t \to \hat{v}} \frac{dv_{t+1}(v_t)}{dv_t} = -\infty$

(c) $\lim\limits_{v_t \to 0} \frac{dv_{t+1}(v_t)}{dv_t} = -\frac{1-s}{\rho(\delta+s)}$

(d) $\frac{d^2 v_{t+1}(v_t)}{(dv_t)^2} < 0$ *para* $v_t \in (0, \hat{v})$

Demostración: Las partes (a), (b) y (c) se obtienen simplemente tomando el correspondiente límite en la función apropiada, (34) o (35). Para demostrar la parte (d), obsérvese que (35) puede expresarse como

$$\frac{dv_{t+1}(v_t)}{dv_t} = \left(\frac{-1}{\rho(\delta+s)}\right) \frac{\frac{1}{\frac{f'(v_t)}{f(v_t)}\left(\frac{1}{1-s}-v_t\right)} + 1 + \left(\frac{-f''(v_t)f(v_t)}{(f'(v_t))^2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\rho\frac{f'(v_t)}{f(v_t)}\left(\frac{1}{1-s}-v_t\right)}\right)^2 \left(\frac{1}{1-s} - v_t\right)} \tag{36}$$

El resutado se obtiene observando que bajo A1 el numerador de la segunda fracción es creciente en v_t mientras que el denominador es decreciente en v_t.■

Las propiedades de $\frac{dv_{t+1}(v_t)}{dv_t}$ (y en particular la propiedad (b) en la proposición 4) aseguran que no hay estabilidad global, en el sentido de que hay secuencias $\{v_t\}_{t=1}^{\infty}$ que satisfacen (34) y que empiezan en el intervalo $(0, \hat{v})$ que no son creíbles, porque antes o después los valores de la secuencia caerán fuera del intervalo $(0, \hat{v})$ si v_1 está suficientemente cerca de 0 o $\hat{v}$.

Por tanto, necesitamos estudiar si el estado estacionario es localmente estable, en cuyo caso hay un contínuo de equilibrios que empiezan en un entorno de v^* y que convergen no monotónicamenten al estado estacionario. Obsérvese que la estabilidad local se caracteriza por la condición $\left|\frac{dv_{t+1}(v^*)}{dv_t}\right| < 1$. Además, pueden existir pares $\{\tilde{v}, \bar{v}\}$ con $\tilde{v} < v^* < \bar{v}$ tal que $v_{t+1}(\tilde{v}) = \bar{v}$ y $v_{t+1}(\bar{v}) = \tilde{v}$, de forma que la secuencia $\{\tilde{v}, \bar{v}, \tilde{v}, \bar{v}, \tilde{v}, \bar{v}, \ldots\}$ sea también un equilibrio.

Si no tenemos ni estabilidad local ni oscilacines persistentes de periodo 2, entonces el supuesto de previsión perfecta implica que la secuencia $\{v^*, v^*, v^*, \ldots\}$ es el *único* equilibrio.

La siguiente tarea es obtener condiciones suficientes y necesarias tanto para la estabilidad local como para las oscilaciones persistentes de periodo 2. Ahora, es conveniente observar que los parámetros de política no se pueden elegir libremente en el cuadrado abierto $(0,1)^2$. A modo de ejemplo, obsérvese que tomar $s \to 1$ y $\delta \to 0$ no es factible, porque si $\beta > 0$, entonces $\delta \to 0$ implica $\tau \to 0$, y el subsidio necesita ser financiado con algún impuesto. En general, existe una función $\hat{\tau}(s)$ que nos dice el tipo impositivo mínimo factible para un subsidio dado.[7] Por tanto, la restricción de que los dos parámetros de política pretenezcan al conjunto $\{s, \tau : \tau \geq \hat{\tau}(s)\}$ es asumida implícitamente en este trabajo.

Una condición necesaria tanto para la estabilidad local como para las oscilaciones persistentes de periodo dos viene dada por la siguiente proposición:

Proposition 6 *Bajo el supuesto (A1) se cumple lo siguiente:*
(a) Estabilidad local implica $\frac{1-s}{\rho(\delta+s)} < 1$
(b) La existencia de ciclos de periodo 2 *implica* $\frac{1-s}{\rho(\delta+s)} < 1$

Demostración: Recuérdese primero de la proposición 4 que $\lim_{v_t \to 0} \frac{dv_{t+1}(v_t)}{dv_t} = -\frac{1-s}{\rho(\delta+s)}$ y $\frac{d^2 v_{t+1}(v_t)}{(dv_t)^2} < 0$ para $v_t \in (0, \hat{v})$. La estabilidad local es equivalente a $\left|\frac{dv_{t+1}(v^*)}{dv_t}\right| < 1$. Ahora, la parte (a) es inmediata porque $\frac{dv_{t+1}(v_t)}{dv_t}$ es decreciente y por tanto $1 > \left|\frac{dv_{t+1}(v^*)}{dv_t}\right| > \left|\frac{dv_{t+1}(0)}{dv_t}\right| = \frac{1-s}{\rho(\delta+s)}$. Para probar la parte (b) obsérvese que la existencia de oscilaciones persistentes de periodo 2 implica que existen dos puntos $\{\tilde{v}, \bar{v}\}$ y $\{\bar{v}, \tilde{v}\}$ diferentes del estado estacionario que pertenecen tanto a la función $v_{t+1}(v_t)$ como a su inversa $v_{t+1}^{-1}(v_t)$. El punto $\{v^*, v^*\}$ pertenece a ambas funciones. Ahora, por contradicción, supongamos que $\frac{1-s}{\rho(\delta+s)} \geq 1$. Por la concavidad estricta de $v_{t+1}(v_t)$ el valor absoluto de la pendiente de esta función es creciente y por tanto $\left|\frac{dv_{t+1}(v^*)}{dv_t}\right| > 1$ y $\left|\frac{dv_{t+1}^{-1}(v^*)}{dv_t}\right| < 1$. Ahora, puesto que $\left|\frac{dv_{t+1}(v_t)}{dv_t}\right| > 1$ para $v_t \in (0, \hat{v})$, entonces $\left|\frac{dv_{t+1}^{-1}(v_t)}{dv_t}\right| < 1$ para $v_t \in (0, \hat{v})$. Pero esto contradice las oscilaciones persistentes porque a la derecha de v^* las pendientes de ambas funciones son respectivamente mayor que 1 y menor que 1 en valor absoluto, por lo que las dos funciones no pueden cruzarse en un punto diferente de $\{v^*, v^*\}$.$\blacksquare$

Obtener condiciones suficientes es más difícil. En simulaciones realizadas por el autor, el estado estacionario es localmente estable sólo bajo combinaciones de parámetros muy atípicas, y normalmente los supuestos en A1 que aseguran una solución interior no se cumplen. En todo caso, todos los

[7] Recuérdese que el impuesto es no distorsionante, por lo que los ingresos del gobierno son siempre crecientes en el impuesto.

ejercicios de calibración de la sección 6 dan valores de los parámetros que claramente implican inestabilidad local y por tanto unicidad.

Es interesante estudiar el papel jugado por el subsidio s en la existencia de equilibrios múltiples. Puede verse que un s pequeño puede hacer desparecer la posibilidad tanto de estabilidad local como de oscilaciones persistentes. En particular, supongamos que $\delta\rho < 1$. Entonces, obsérvese que la condición $s \leq \frac{1-\delta\rho}{1+\delta}$ implica unicidad, por la proposición 4, por lo que se puede concluir que un subsidio suficientemente pequeño puede hacer imposible la multiplicidad.

Hasta aquí hemos estudiado las características positivas del modelo. En la siguiente sección tratatremos el análisis normativo.

6 Política óptima

Habiendo caracterizado el equilibrio competitivo para una política $\{s, \tau\}$ dada,[8] la siguiente tarea es encontrar políticas tales que el equilibrio asociado satisfaga ciertas propiedades. Nuestro interés se concentrará en resultados óptimos. Hay, sin embargo, algunos temas que hay que discutir aquí.

Primero, recuérdese que el modelo puede presentar multiplicidad de equilibrios. Por consiguiente, se presentan ciertos problemas. Si, por ejemplo, para cierto par de políticas el modelo tiene multiplicidad, no podemos compararlas directamente, porque necesitaríamos saber el equilibrio específico que va a ser observado. Necesitaríamos algún mecanismo de selección de equilibrio para hacer comparables las políticas. Nos ocuparemos de este problema seleccionando el equilibrio estacionario para cada política con multiplicidad. Esto hace todas las políticas comparables, porque el equilibrio estacionario existe siempre. Además, veremos más adelante que en nuestras simulaciones hay unicidad, tanto en la política inicial como en la óptima, así que el supuesto estacionario no es restrictivo.

En segundo lugar, puesto que estamos utilizando un modelo de generaciones solapadas, no podemos maximizar la utilidad del agente representativo porque, en el mejor de los casos, tenemos un agente representativo cada período. Por consiguiente, la optimalidad requiere la existencia de un planificador que maximice una cierta función de bienestar social, que dependa de las utilidades de todas las generaciones en la economía. Claramente, el

[8] De hecho, la variable R_t debería formar parte de la política. Por ello, cuando nos refiramos a la política $\{s, \tau\}$, lo que queremos decir es la política compuesta por $\{s, \tau\}$, *y* el valor asociado de equilibrio de R_t.

resultado óptimo será diferente para diversos pesos en la función de bienestar social. Por ejemplo, si el planificador pone todo el peso en la generación vieja actual, la política óptima sería probablemente $s = \tau = R_t = 0$, puesto que tanto los subsidios a la educación como la I+D pública dan solamente beneficios futuros, y el único efecto presente es que un subsidio más grande reduce la oferta de trabajo actual, haciendo disminuir los rendimientos actuales del capital humano. Nuestra estrategia aquí será asumir que el planificador maximiza una media ponderada de las utilidades de todas las generaciones, con los pesos disminuyendo a una tasa ρ.[9]

Tercero, como ya se ha discutido, la condición inicial (i.e. v_0) no tiene efectos sobre los valores de equilibrio de v_t, pero el primer valor de la I+D pública, R_1, sí que se ve afectado por v_0. No vamos a tratar aquí esta cuestión. Simplemente nos centraremos en la optimalidad de largo plazo, i.e., tomando $v_0 = v^*$.[10] Además, normalizaremos $A_1 = 1$.

Cuarto, estamos evitando un problema muy serio, que es la inconsistencia temporal. Asumiremos que el planificador selecciona una política al principio y después está obligado a seguirla para siempre.[11] El hecho de que no tomemos como dadas las condiciones iniciales (recuérdese del párrafo anterior que estamos tomando $v_0 = v^*$) atenúa en parte el problema. Intentaremos más adelante medir el tamaño de este problema introduciendo la condición inicial y comparando el equilibrio que resulta con el que se obtiene con $v_0 = v^*$.

---

[9] Debe también mencionarse que el resultado de que un crecimiento de estado estacionario máximo implica eficiencia, presente en algunos modelos de gneraciones solapadas, no se cumple en nuestro modelo. Esto es así porque en nuestro modelo la tasa de crecimiento máxima se alcanza tomando el límite $\tau \to 1$ y $s \to 1$. Pero, mientras que $\tau \to 1$, el consumo tiende a 0 para todos los periodos y generaciones, lo que demuestra que el resultado no se cumple. Esta es la razón por la que estamos utilizando una función de bienestar social.

Por otro lado, discutiremos más tarde que el modelo no es apropiado para tratar con el tema del tamaño óptimo del gobierno, por lo que fijaremos τ y maximizaremos sólo sobre s. En este último caso, un crecimiento máximo es una condición suficiente, aunque no necesaria, para la eficiencia en el sentido de Pareto.

[10] Obsérvese que en el modelo, los efectos relativos de las condiciones iniciales terminan con la generación nacida en $t = 2$, con el efecto que R_1 tiene sobre A_2. Sin embargo, esto no debe ser visto como una transición rápida, puesto que la gente en el modelo vive dos periodos, por lo que un periodo representa unos 20-25 años. Además, la *escala* del consumo de todas las generaciones futuras sí se ve afectada por A_2.

[11] Varios estudios tratan este problema. Ver, por ejemplo, Phelan y Stacchetti (2001), Benhabib y Rustichini (1997) o Chari y Kehoe (1990).

Podemos ahora describir el problema del planificador. El planificador se da cuenta de que los individuos reaccionarán a su política según el equilibrio competitivo. Por lo tanto, incluimos las ecuaciones del equilibrio competitivo como restricciones en el problema del planificador. Como ya se ha dicho, tomamos como condiciones iniciales $v_0 = v^*$ y $A_1 = 1$.[12] Por tanto, el problema del planificador central es escoger τ, s, y R^* para maximizar

$$\log\left(c_1^o\right) + \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} \left[\log\left(c_t^y\right) + \rho \log\left(c_{t+1}^o\right)\right] \tag{37}$$

sujeto a

$$c_1^y = (1-\tau)(1-\beta)\left(\frac{f(v^*) - R^*}{2-v^*}\right)^{\beta} (1 - v^* + s \cdot v^*) \tag{38}$$

$$c_1^o = (1-\tau) \cdot \left[(1-\beta)\left(\frac{f(v^*) - R^*}{2-v^*}\right)^{\beta} + \beta\left(\frac{2-v^*}{f(v^*) - R^*}\right)^{1-\beta} f(v^*)\right] \tag{39}$$

$$c_t^y = c_1^y \cdot \left(A\left(R^*\right)\right)^{t-1}; t \in \{2,3,\ldots\} \tag{40}$$

$$c_t^o = c_1^o \cdot \left(A\left(R^*\right)\right)^{t-1}; t \in \{2,3,\ldots\} \tag{41}$$

$$0 \leq R^* \leq f(v^*) \tag{42}$$

y las anteriores ecuaciones (28) y (30).

Las dos primeras restricciones son simplemente las restricciones del problema del consumidor, pero con los precios de equilibrio sustituidos. Nótese que las variables v^* y R^* vienen dadas por las ecuaciones (28) y (30).

Las restricciones (40) y (41) toman en consideración la tasa de crecimiento de la economía, que es $A(R^*)$. Finalmente, la primera parte de la restricción (42) es para evitar la elección de subsidios educativos imposibles de pagar,[13] y la segunda parte es, como ya se ha discutido, para evitar que $v^* > \hat{v}$.

Hemos calibrado el modelo para un conjunto de países europeos (Bélgica, España, Francia, Países Bajos, Portugal, Reino Unido, república checa, Hungría y república eslovaca). Los dos parámetros de la política se incluyen en el

[12] Nótese que $v_0 = v^*$ implica que las condiciones iniciales varían con la política elegida.

[13] O, en nuestra terminología, para asegurar que $\tau \geq \hat{\tau}(s)$

proceso de la calibración. También hemos obtenido la solución del problema anterior para cada calibración. Puesto que el impuesto en el modelo es no distorsionante, y el gasto público está compuesto solamente de los subsidios educativos y de la I+D (que juntos representan una fracción pequeña del gasto público total), hemos resuelto el problema de maximización sólo sobre s, es decir, manteniendo el τ calibrado fijo. Es decir estamos contestando a la cuestión de cómo asignar una cantidad dada de recursos entre los subsidios e I+D. Pero hay también otra pregunta interesante, que es: ¿Cuánto recursos debemos dedicar a ambos usos? El modelo (en su estado actual) no puede dar una respuesta; se necesita una extensión, comentada en las conclusiones. Una vez que obtenemos la solución para s la comparamos con el parámetro previamente calibrado, para determinar si las políticas reales están cerca las óptimas para cada país.

El proceso de calibración se describe en las líneas siguientes.

La función de producción del capital humano que va a ser utilizada es

$$f(v) = B\left(1 - e^{-n \cdot v}\right); B, n > 0 \tag{43}$$

Obsérvese que esta función no satisface la condición $f'(1) = 0$ en el supuesto A1. De todas formas, para valores elevados de n, $f'(1)$ está muy cerca de cero, y de hecho obtenemos en nuestras calibraciones elevados valores de n, por lo que la solución es interior para todas las calibraciones. Es fácil verificar que el resto de requerimientos del supuesto A1 se satisfacen.

Teniendo en cuenta que un periodo debe ser interpretado como 20-25 años, hemos compuesto 25 veces el tipo de interés real medio entres 1991 y 2003[14] para calibrar ρ.

Respecto a los parámetros de la política, el impuesto τ se elige directamente como la suma del gasto público en educación terciaria[15] y en I+D, como fracción del PIB. El subsidio se calibra dividiendo el gasto público en educación terciaria entre el coste total de la educación. Suponemos que el coste de oportunidad de la educación producido por los salarios no ganados viene dado por el salario mínimo oficial en cada país. Para estimar adecuadamente el coste de la educación necesitamos incluir también su coste

[14] El periodo es más corto para la república checa (2000-2002), Hungría (1999-2003) y la república eslovaca (2000-2003).

[15] Usamos datos sólo de educación terciaria porque en el modelo la variable v es el tiempo invertido en educación cuando los agentes tienen un uso alternativo del tiempo, que es trabajar. Por tanto, no deseamos introducir las fases previas del proceso educativo.

monetario, que no está en el modelo. Suponemos que el coste monetario de la eduación viene dado por los gastos totales en educación terciaria.

Los parámetros β y n están calibrados de la siguiente forma. Primero, tomamos dos veces[16] el número de estudiantes en educación terciaria dividido por el número de trabajadores como la contrapartida empírica de v. Segundo, obtenemos datos del cociente entre el salario medio y el mínimo dividiendo el PIB por trabajador en 2000 entre el salario mínimo oficial. Obsérvese que en el modelo este ratio puede expresarse como

$$1+\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{1}{1-\frac{R}{f(v)}} \tag{44}$$

Dadas estas dos fuentes de información, sustituimos el valor observado de v en las ecuaciones del modelo, y entonces elegimos β y n para que satisfagan las ecuaciones (28) y (30), y para que la expresión (44) se ajuste al cociente del salario medio y mínimo observado.

Respecto a la función $A(R^*)$, hemos elegido una función cóncava para reflejar rendimientos decrecientes en un periodo en la producción de conocimiento:

$$A(R^*)=1+\phi\cdot(R^*)^{\alpha}\,;\phi\geq 0, 0<\alpha<1 \tag{45}$$

Tomamos $\alpha = 0.1$ para que la solución de largo plazo no sea muy sensible a los cambios en los parámetros.

Hasta este punto, los parámetros que quedan son A_0, B y ϕ. Normalizamos $A_0 = 1$ y $B = 1$, y escogemos ϕ para replicar la tasa de crecimiento de largo plazo de la economía, medida como el crecimiento medio del PIB real entre 1991 y 2003. La primera normalización no requiere ninguna justificación, porque sólo tiene que ver con las unidades en que se mide la producción. Pero la segunda merece más argumentación, porque no podemos cambiar la escala del capital humano sin cambiar al mismo tiempo la escala del trabajo. Pero podemos normalizar $B = 1$ porque puede demostrarse que este parámetro sólo afecta a la tasa de crecimiento a largo plazo de la economía, y esta variable puede replicarse usando el parámetro ϕ.

Un resumen de los resultados de la calibración se presenta en la tabla 1. La última columna es el cociente entre el salario medio y el mínimo.

Tabla 1: Resultados de la calibración

[16]Multiplicamos por dos porque v se refiere sólo al tiempo empleado por la generación joven, y los datos de número de trabajadores incluyen tanto viejos como jóvenes.

Tanto los datos de estudiantes como los de trabajadores se refieren al año 2000.

País	τ	s	ρ	β	n	v	$\frac{W}{W_{\min}}$
Bélgica	0.0134	0.3623	0.3360	0.5697	8.33	0.1601	2.32
España	0.0111	0.3336	0.4053	0.7193	6.30	0.2082	3.56
Francia	0.0140	0.3222	0.3400	0.5643	8.57	0.1533	2.30
Hoalnda	0.0163	0.3897	0.4328	0.4621	19.31	0.1133	1.87
Portugal	0.0125	0.3879	0.4788	0.6160	16.11	0.1406	2.61
Reino Unido	0.0100	0.2745	0.3811	0.5756	13.19	0.1294	2.36
República checa	0.0111	0.4493	0.5705	0.6276	35.23	0.0940	2.69
Hungría	0.0125	0.4172	0.8131	0.7269	21.28	0.1485	3.67
República eslovaca	0.0089	0.4309	0.8490	0.7135	27.70	0.1258	3.49

Habiendo calibrado el modelo, podemos pasar a estudiar la política óptima. Como se mencionó antes, mantendremos fijo el parámetro τ, y maximizaremos sobre s. Hemos incluido el caso extremo $s = 1$ en la maximización, a diferencia de las secciones anteriores porque cuando $s = 1$ la solución al problema del consumidor es la solución esquina $v = 1$, y no en todos los casos la solución es contínua en $s = 1$. Por ejemplo, es fácil demostrar que si $\frac{2\delta}{\delta+1} < 1$, entonces $\lim_{s\to 1} v(s,\ldots) < 1$. De todas formas, conseguir $v = 1$ es siempre una posibilidad para el planificador, y esta es la razón por la que necesitamos incluir el caso $s = 1$ en la maximización.

Hemos realizado dos ejercicios. Primero, hemos maximizado (37) sobre s para cada país usando como condición inicial $v_0 = v^*$ (caso A). Segundo, hemos tratado de medir la importancia del problema de la inconsistencia temporal (o el tamaño de los incentivos a desviarse de ua política comprometida) usando como condición inicial el valor calibrado de v, que puede interpretarse como la condición inicial en el momento en que la política cambia de la observada a la óptima (caso B).

La tabla 2 presenta el cambio en la política para todos los países considerados, tanto para el caso A como para el B. Obsérvese que una vez se fija τ, la política está completamente caracterizada por s. Presentamos también el cambio en las tasas de crecimiento medias anuales.[17]

Tabla 2: Cambio a la política óptima

[17] La columna “crecimiento observado” corresponde a la tasa de crecimiento usada en el proceso de la calibración, es decir tasa de crecimiento media del PIB real entre 1991 y 2003. Las dos columnas de crecimiento bajo el título de “política óptima” se refieren a la tasa de crecimiento anual de estado estacionario del modelo bajo el caso A y el caso B, respectivamente.

País	Pol. Observada		Política Óptima			
			Caso A		Caso B	
	s	Crec(%)	s	Crec(%)	s	Crec(%)
Bélgica	0.3623	1.55	0.299	2.11	0.226	2.22
España	0.3336	2.25	0.268	2.62	0.197	2.73
Francia	0.3222	1.28	0.332	1.26	0.279	1.35
Hoalnda	0.3897	1.65	0.316	1.72	0.218	1.77
Portugal	0.3879	1.84	0.242	2.07	0.143	2.12
Reino Unido	0.2745	2.03	0.220	2.13	0.119	2.22
República checa	0.4493	0.92	0.290	0.98	0.221	0.99
Hungría	0.4172	1.75	0.000	1.93	0.000	1.93
República eslovaca	0.4309	1.11	0.000	1.38	0.000	1.38

Vemos que para todos los países excepto Francia, el subsidio óptimo es más bajo que el observado. Claramente, cuando cambiamos al caso B, el subsidio óptimo se reduce más aún, porque el primer agente viejo no se beneficia de los aumentos en s (no puede estudiar más), mientras que en el caso A el primer agente viejo comienza con más capital humano bajo un subsidio más alto. Referente al crecimiento bajo la política óptima, es más alto para un subsidio más bajo.[18] Esto no es un resultado general. Para valores más altos de τ, puede suceder que el crecimiento sea creciente en el subsidio, porque un subsidio más alto hace el capital humano más barato, permitiendo que el gobierno provea más I+D pública con los mismos recursos presupuestarios. Si este efecto es mayor que la reducción en los gastos en I+D, la cantidad real de capital humano comprada por el gobierno puede aumentar. Pero dado que hemos calibrado valores muy pequeños para τ, el segundo efecto domina y obtenemos una relación negativa entre los subsidios y el crecimiento.

Nuestro criterio de optimalidad es la maximización de una función de bienestar social que implica utilidades de todas las generaciones. Por lo tanto, es interesante ver si el cambio hacia la política óptima es también una mejora de Pareto, comparado con la situación observada. Si la respuesta es no, entonces deseamos saber qué generaciones están peor bajo la nueva

[18] Debe observarse que la extrapolación de tasas de crecimiento depende crucialmente del supuesto sobre el parámetro α. Por consiguiente, debemos interpretar los resultados de una manera cualitativa, más bien que cuantitativa, hasta que tengamos una calibración más exacta o una estimación del parámetro α. Sin embargo consideramos que nuestro valor (0.1) es bastante conservador, y por lo tanto no es responsable de los bajos subsidios óptimos a la educación obtenidos.

política. Esto se hace en la tabla 3. Los números se refieren al período en el cual la generación es joven, y la primera generación vieja se representa por 0.

Tabla 3: Generaciones peor bajo la nueva política

País	Caso A	Caso B
Bélgica	Ninguna	Ninguna
España	Ninguna	Ninguna
Francia	Todas	1
Hoalnda	1	1
Portugal	Ninguna	Ninguna
Reino Unido	Ninguna	Ninguna
República checa	1	1
Hungría	1	1
República eslovaca	Ninguna	Ninguna

Los efectos de bienestar son diferentes dependiendo de las generaciones. Tenemos tres grupos principales. Primero, se observa que una reducción en el subsidio mejora siempre el bienestar de la primera generación vieja, y viceversa. Esto es así porque la primera generación vieja solamente puede ser afectada por los precios de los factores, y una reducción en el subsidio aumenta la demanda del gobierno de capital humano y al mismo tiempo aumenta el tiempo dedicado al trabajo por los jóvenes. Ambos efectos tienden a beneficiar a la primera generación vieja. En segundo lugar, las generaciones futuras (en nuestro caso a partir de la segunda) también están mejor bajo un subsidio más bajo, y viceversa. La razón es que, bajo nuestra calibración, un subsidio más bajo implica un crecimiento más alto. Por lo tanto, una generación estará mejor si está suficientemente lejana en el futuro. Para nuestra calibración, esto empieza en la generación 2. Finalmente, la primera generación joven es menos sencilla de analizar, porque hay dos efectos opuestos. Por un lado, un subsidio más alto transfiere recursos de la gente vieja a la joven, para los que la utilidad marginal del consumo es mucho más alta debido a la ausencia de un mercado financiero. El subsidio desempeña aquí el papel de un substituto del mercado financiero. Pero por otra parte (bajo nuestra calibración baja de τ), un subsidio más alto significa un crecimiento más bajo, y el consumo de la generación 1 cuando es vieja sí que es afectado de hecho una vez por la tasa de crecimiento. Esto reduce el consumo adicionalmente cuando es viejo, además de la pura redistribución intertemporal.

Con estas consideraciones en mente, podemos clasificar los países en tres grupos principales. Primero, hay países (Bélgica, España, Portugal, Reino Unido y república eslovaca) en los cuales el cambio a la política óptima es una mejora de Pareto en el caso A y en el caso B. esto porque el cambio es hacia un subsidio más bajo, y el efecto mencionado del crecimiento domina para la generación 1. El segundo grupo (Países Bajos, república checa y Hungría) son países en los cuales el efecto de crecimiento es dominado en el caso A y en el caso B. por consiguiente, el cambio a la política óptima no es una mejora de Pareto, porque la generación 1 está peor. Finalmente, hay un país (Francia) en el cual el cambio en la política es hacia un subsidio más alto bajo el caso A. Este caso es particularmente interesante porque parece ser un error: bajo nueva política óptima, todas las generaciones están peor. Esto es un problema técnico relacionado con el hecho que bajo el caso A el capital humano inicial está variando con s. El procedimiento de optimización elige un alto valor de s tal que la primera generación joven estaría mejor si el capital humano inicial fuese el valor de estado estacionario bajo el nuevo subsidio. Pero una vez que consideramos que el capital humano inicial es más bajo, obtenemos que todas las generaciones están peor. Es decir, la optimización bajo el caso A no considera los costes asociados a la transición a un subsidio más alto.

Resumiendo, nuestro modelo recomienda subsidios educativos entre 0.220 y 0.332 (con las excepciones de Hungría y de la república eslovaca, para las cuales el modelo recomienda no tener subsidio).[19] En casi todos los casos, esto implica una reducción en los subsidios a la educación y un aumento en lso gastos en I+D. También, el modelo advierte sobre los incentivos para reducir aún más los subsidios si se tienen en cuenta las condiciones iniciales. Referente al análisis generacional, el modelo sugiere que la única generación que puede estar dispuesta a tener altos subsidios será la primera generación joven, porque el subsidio hace posible transferir recursos a la edad en la cual la utilidad marginal del consumo es más alta. Por otra parte, las generaciones futuras prefieren un crecimiento más alto[20] (más I+D), y la primera generación vieja prefiere alta demanda de capital humano (más R&D), y

[19] Dado que, para nuestros parámetros calibrados, el subsidio no tiene efectos de crecimiento, todo el subsidio recomendado se puede interpretar como substituto del mercado financiero que falta.

[20] Recuérdese que la relación negativa entre los subsidios y el crecimiento no se cumple en general. Bajo valores más altos de τ es posible que un subsidio más alto aumente de hecho el crecimiento a largo plazo, a través de un capital humano más barato.

alta oferta de trabajo (menos tiempo dedicado al estudio). Esto sugiere una posible explicación para los altos subsidios observados. Si tuviéramos crecimiento positivo de la población, entonces el votante mediano sería siempre joven. Por supuesto, otra explicación es que nuestro procedimiento de calibración exagera los subsidios reales. Éste sería el caso si, por ejemplo, el salario mínimo usado en la calibración es más bajo que el salario de un trabajador sin capital humano.

7 Conclusiones

Hemos desarrollado un modelo de generaciones solapadas como marco para entender algunos efectos de los subsidios educativos. Hemos demostrado que un cambio en el subsidio puede conducir a la economía hacia una situación de multiplicidad de equilibrios, y puede generar ciclos de período 2. También hemos demostrado que estos ciclos pueden ser persistentes o no-persistentes a largo plazo.

Hemos analizado dos efectos que podrían explicar un subsidio óptimo positivo. Primero, un subsidio más alto fomenta las inversiones en capital humano, haciendo que el precio futuro de la I+D pública sea más barato. Por consiguiente, puede ser útil transferir recursos de la I+D pública a los subsidios a la educación para elevar la cantidad real de servicios de I+D. Esto es verdad si el capital humano bajo el subsidio actual es bajo, y el impuesto es alto. El segundo efecto es debido al hecho que en nuestro modelo el agente joven restricciones de crédito. Este agente espera un alto incremento de su renta a lo largo del ciclo vital, pero necesita pagar ahora el coste de oportunidad de la educación, así que desearía pedir prestado si es posible. La ausencia de mercados financieros hace esto imposible, y el gobierno puede imponer aquí una transferencia de recursos de la gente vieja a la joven usando el subsidio a la educación, que es un sustituto imperfecto del mercado financiero que falta.

Un ejercicio de calibración para varios países europeos sugiere que la composición óptima de gastos implica una reasignación de fondos desde subsidios educativos hacia gastos en I+D. El estado actual de nuestro modelo, sin embargo, no puede decir nada sobre el tamaño óptimo de los gastos totales en ambos conceptos.

Hay algunas extensiones posibles de este trabajo. Primero, según lo mencionado en la sección anterior, nuestro procedimiento de calibración está diseñado para estudiar la distribución óptima de recursos entre los subsidios educativos y la I+D pública, pero no nos permite analizar si la cantidad total de recursos dedicados a estos dos conceptos debería ser incrementada. Esto es porque el gobierno en nuestro modelo tiene solamente estas dos clases de gastos y, por consiguiente, si maximizáramos sobre el impuesto, obtendríamos valores altos y poco realistas. Por tanto, una extensión interesante sería incluir en el modelo el gasto público puro, que sería un parámetro exógeno que se calibraría, de modo que se pueda también maximizar sobre el impuesto. También, sería positivo incluir ocio en la función de utilidad, para asegurarse de que el impuesto es distorsionante. Estas dos modificaciones permitirían que estudiáramos el interesante problema del tamaño óptimo del gobierno. [21]

Otra importante extensión es incluir un tercer periodo en la vida de los agentes.[22] Esto permitiría la existencia de un mercado financiero en el cual la gente de mediana edad ahorrase y la gente joven pidiese prestado. Comparando el subsidio óptimo con y sin los mercados financieros podríamos aislar los dos efectos mencionados arriba, porque en la economía con los mercados financieros el efecto relacionado con las restricciones de crédito desaparece.

Finalmente, la extensión del modelo para cubrir temas demográficos puede permitir que desarrollemos un análisis político de la política real. Recuérdese que los intereses de las diversas generaciones en un momento fijo en el tiempo son en general diferentes así que uno no esperaría que el equilibrio político satisficiera cualquier clase de optimalidad. Según lo mencionado ya, esto puede explicar porqué los subsidios reales son diferentes de los óptimos en economías democráticas.

References :

- Aghion, P. and P. Howitt (1992): "A Model of Growth through Creative Destruction", *Econometrica* 60, pp. 323-351.

- Alonso-Carrera, J. (2000): "The Subsidy to Human Capital Accumulation in an Endogenous Growth Model: A Comparative Dynamics Analysis", *Journal of Macroeconomics* 22(3), pp. 409-431.

- Bearse, P., G. Glomm and B. Ravikumar (2000): "On the Political Economy of Means-Tested Education Vouchers", *European Economic Review* 44, pp. 904-915.

[21] O, por lo menos, la cantidad óptima de recursos que el gobierno debe invertir en I+D y en subsidios educativos.

[22] Ver Boldrin y Montes (2002) para un modelo similar con tres periodos.

- Benhabib, J. and A. Rustichini (1997): "Optimal taxes without commitment", *Journal of Economic Theory* 77, pp 231-259.

- Benhabib, J. and M. Spiegel (1994): "The Role of Human Capital in Economic Development: Evidence from Aggregate Cross-Country Data", *Journal of Monetary Economics* 34, pp. 143-173.

- Boldrin, M. and A. Montes (2002): "The Intergenerational State: Education and Pensions", *CEPR Discussion paper 3275.*

- Caballé, J. and Santos, M. (1993): "On Endogenous Growth with Physical and Human Capital", *Journal of Political Economy* 101(6), pp. 1042-1067.

- Chamley, C. (1981): "The Welfare Cost of Capital Income Taxation in a Growing Economy", *Journal of Political Economy* 89(3), pp. 468-496.

- Chamley, C. (1986): "Optimal Taxation of Capital Income in General Equilibrium with Infinite Lives", *Econometrica* 54(3), pp. 607-622.

- Chari, V. and P. Kehoe (1990): "Sustainable Plans", *Journal of Political Economy* 98, pp 783-802.

- Glomm, G. and B. Ravikumar (2001): "Human Capital Accumulation and Endogenous Public Expenditures", *Canadian Journal of Economics* 34(3), pp. 807-826.

- Gregorio, J. (1996): "Borrowing Constraints, Human Capital Accumulation, and Growth", *Journal of Monetary Economics* 37, pp. 49-71.

- Hendricks, L. (1999): "Taxation and Long-Run Growth", *Journal of Monetary Economics* 43, pp. 411-434.

- Hendricks, L. (2001): "How do Taxes Affect Human Capital? The Role of Intergenerational Mobility", *Review of Economic Dynamics* 4, pp. 695-735.

- Howitt, P. (1999): "Steady Endogenous Growth with Population and R&D Inputs Growing", *Journal of Political Economy* 107(4), pp. 715-730.

- King, R. and S. Rebelo (1990): "Public Policy and Economic Growth: Developping Neoclassical Implications", *Journal of Political Economy* 98(5) part 2, pp. S126-S150.

- Laitner, J. (1990): "Tax Changes and Phase Diagrams for an OLG Model", *Journal of Political Economy* 98(1), pp. 193-220.

- Jones, C. (1995): "R&D-Based Models of Economic Growth", *Journal of Political Ecnonomy* 103(4), pp. 759-784.

- Jones, L., R. Manuelli and P. Rossi (1993): "Optimal Taxation in Models of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy* 101(3), pp. 485-517.

- Judd, K. (1985): "Short-Run Analysis of Fiscal Policy in a Simple Perfect Foresight Model", *Journal of Political Economy* 93(2), pp. 298-319.

- Judd, K. (1987): "The Welfare Cost of Factor Taxation in a Perfect Foresight Model", *Journal of Political Economy* 95(4), pp. 675-709.

- Lucas, R. (1988): "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics* 22, pp. 3-42

- Lucas, R. (1990): "Supply-Side Economics: An Analytical Review", *Oxford Economic Papers* 42, pp. 293-316.

- Milesi-Ferretti, G. and N. Roubini (1998): "On the Taxation of Human and Physical Capital in Models of Endogenous Growth", *Journal of Public Economics* 70, pp. 237-254.

- Mulligan, C. and X. Sala-i-Martin (1993): "Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth", *Quarterly Journal of Economics* 108, pp. 739-773.

- Ortigueira, S. and Santos, M. (1997): "On the Speed of Convergence in Endogenous Growth Models", *American Economic Review* 87, pp. 383-399.

- Parente, S. (1994): "Technology Adoption, Learning-by Doing, and Economic Growth", *Journal of Economic Theory* 63, pp. 346-369.

- Phelan, C. and E. Stacchetti (2001): "Sequential Equilibria in a Ramsey Tax Model", *Econometrica* 69(6), pp. 1491-1518.

- Rojas, Juan A. (2005): "Life-cycle earnings, cohort size effects and social security: a quantitative exploration", *Journal of Public Economics* 89, pp. 465-485.

- Rustichini, A: and Schmitz, J. (1991): "Resarch and Imitation in Long-Run Growth", *Journal of Monetary Economics* 27, pp. 271-292.

- Segerstrom, P. (2000): "The Long-Run Growth Effects of R&D Subsidies", *Journal of Economic Growth* 5, pp. 277-305.

- Stockey, N: (1991): "Human Capital, Product Quality and Growth", *Quarterly Journal of Economics* 106(2), pp. 587-616.

- Stockey, N. and S. Rebelo (1995): "Growth Effects of Flat-Rate Taxes", *Journal of Political Economy* 103(3), pp. 519-550.

- Trostel, P. (1993): "The Effect of Taxation on Human Capital", *Journal of Political Economy* 101(2), pp. 327-350.

- Trostel, P. (1996): "Should Education be Subsidized?", *Public Finance Quarterly* 24(1), pp. 3-24.

- Summers, L. (1981): "Capital Taxation and Accumulation in a Life Cycle Growth Model", *American Economic Review* 71(4), pp. 533-544.

- Uzawa, H. (1965): "Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth", *International Economic Review* 6, pp. 18-31.

Efectos Inflacionistas de una Unión Monetaria*

Sergio Puente†

Enero 2007‡

Abstract

Presentamos un modelo simple útil para clarificar la relación entre el efecto de Balassa-Samuelson y la existencia de una unión monetaria. Más concretamente, obtenemos el resultado usual de que los países con más crecimiento de la productividad en el sector de bienes comercializables tendrán una tasa de inflación mayor. Sin embargo, encontramos este efecto solamente para los países que pertenecen a una unión monetaria. Por consiguiente, un banco central de una unión monetaria puede solamente tener como objetivo la inflación media porque los diferenciales de la inflación son una consecuencia inevitable de los diferenciales del crecimiento de la productividad entre los países miembros.

También exploramos las implicaciones del modelo relativas a una ampliación de una unión monetaria. El resultado es que el efecto directo del ingreso de países con altas tasas de crecimiento es una reducción en la inflación media de la unión monetaria. También obtenemos el siguiente efecto adicional para los países candidatos: si un candidato está creciendo más rápidamente que el promedio de la unión monetaria, entonces sufrirá un aumento en su tasa de inflación al entrar en la unión monetaria, además del posible cambio en la política monetaria.

---

*Este trabajo forma parte de la tesis doctoral del autor, dirigida por Manuel Santos, y desarrollada en la Universidad Carlos III.

†Banco de España, Alcalá 48, 28014 Madrid, España. Tel: +34 91 3385705. E-mail: sergio.puente@bde.es. El autor agradece el apoyo financiero del MCYT.

‡Este trabajo se ha beneficiado de comentarios de Manuel Santos, Juanjo Dolado, Berthold Herrendorf y otros participantes en los seminarios de la Universidad Carlos III y del Banco de España. Me gustaría agradecer a Miguel Pérez su ayuda de investigación.

1 Introducción

Presentamos un modelo simple útil para clarificar la relación entre el efecto Balassa-Samuelson y la existencia de una unión monetaria. Más concretamente, obtenemos el resultado usual de que los países con más crecimiento de la productividad en el sector de bienes comercializables tendrán una tasa de inflación más alta. Sin embargo, argumentamos que este efecto estará presente solamente en los países que pertenecen a una unión monetaria, mientras que el efecto parcial del crecimiento de la productividad para los países independientes será el contrario. Por consiguiente, un banco central de una unión monetaria solamente puede tener como objetivo la inflación media porque los diferenciales de la inflación son una consecuencia inevitable de los diferenciales del crecimiento de la productividad entre los países miembros.

Respecto a la ampliación de una unión monetaria, un argumento extendido es que la incorporación de países con alto crecimiento de la productividad aumentará la tasa de inflación media de la unión monetaria debido al efecto de Balassa-Samuelson. Nuestra tesis aquí es que este argumento está compuesto realmente de dos. Primero, la incorporación de países de rápido crecimiento disminuirá la inflación media. En segundo lugar, el banco central podría responder relajando la política monetaria de tal forma que el efecto neto sobre la inflación media fuera positivo. El hecho de que los países nuevos (de crecimiento rápido) tendrán más inflación que el promedio es compatible con una reducción en la tasa de inflación media porque, si la política monetaria no cambia, la ampliación tiende a reducir las tasas de inflación de todos los anteriores miembros de la unión monetaria. Y ahora podemos ver porqué el banco central podría relajar la política monetaria: la reducción en la inflación de los anteriores miembros puede provocar tasas de inflación muy bajas, o incluso negativas, en los países de lento crecimiento. En un trabajo independiente, Sinn y Reutter (2001), con un argumento similar, obtienen empíricamente una tasa de inflación mínima para Europa.

El modelo también identifica dos efectos sobre la tasa de inflación para los países que acceden. El primero es el posible cambio en la política monetaria. El segundo es un aumento (disminución) en la tasa de inflación para los países que crecen más rápidamente (más lentamente) que el promedio de la unión monetaria. Este último efecto es independiente del efecto de la política monetaria, así que la variación total en la tasa de inflación es la combinación de ambos efectos. La intuición para este resultado es la siguiente. La política monetaria en la unión monetaria se debe definir en términos de la oferta monetaria agregada, es decir la oferta monetaria total para toda la unión. Sin embargo, la manera en la que esta oferta monetaria se distribuye por los diferentes miembros no es homogénea. Particularmente, el modelo predice que un país de crecimiento rápido atraerá dinero de los países de crecimiento lento.

Usando datos sobre oferta monetaria, inflación y crecimiento, determinamos el efecto que convertirse en miembro de la EMU tendrá sobre la tasa de inflación de un país que accede. También descomponemos este efecto en los dos componentes expuestos en el párrafo anterior.

Teniendo en cuenta el modelo, nuestra interpretación de los diferenciales existentes de inflación en la unión monetaria europea (EMU) es la existencia de diferenciales de crecimiento de la productividad, traducidos a la inflación a través del efecto Balassa-Samuelson, mientras que en otros países las diferencias son determinadas principalmente por diferencias en las políticas monetarias. El argumento de Balassa-Samuelson para una unión monetaria es el siguiente. Los precios de los bienes comercializables no pueden variar entre países debido al arbitraje. Por lo tanto, los diferenciales de inflación deben venir de los precios de los bienes y servicios no comercializables. Además, parece que la productividad en el sector de bienes comercializables crece más rápidamente que en el sector de servicios. Ahora, un país con un crecimiento más alto de la productividad en el de bienes comercializables tendrá un crecimiento más alto de los salarios, lo que implica una mayor diferencia entre las tasas de inflación sectoriales. Finalmente, puesto que los precios de los bienes comercializables son iguales entre países, un país de crecimiento más rápido tendrá una inflación más alta en el sector de servicios y por lo tanto una inflación agregada más alta.

Hay, sin embargo, otras explicaciones para los diferenciales de inflación que deseamos mencionar. Una explicación posible es que los precios se están ajustando simplemente porque las paridades fijadas entre las monedas locales al inicio de la unión monetaria no fueron las adecuadas. En la EMU, el ajuste no puede venir de un movimiento de los tipos de cambio, y por lo tanto si una moneda fue tasada en un valor depreciado, el nivel de precios de este país tenderá a subir hasta que se alcance un nuevo equilibrio. Sin embargo, es difícil que esta sea la razón detrás de los diferenciales de la inflación en el EMU: Este proceso de ajuste sería muy rápido, debido a las oportunidades de arbitraje, y por otra parte sigue habiendo diferenciales de inflación hoy, varios años después de la fijación de las paridades.

Otra posible razón es que los países con una alta inflación tienen problemas estructurales, como la carencia de mercados competitivos o altos costes laborales. Si esto es así, las instituciones económicas en estos países deben buscar una solución a estos problemas. Pero incluso en este caso, uno esperaría encontrar solamente efectos de nivel en los precios.[1] Es difícil argumentar que estos problemas estructurales pueden influir en las tasas de inflación de una manera persistente.

El resto del trabajo se organiza como sigue. En la siguiente sección presentamos el modelo. En las secciones 3 y 4 analizamos el equilibrio para los países con política monetaria independiente y para los países dentro de una unión monetaria, respectivamente. En la sección 5 estudiamos los efectos inflacionistas de una unión monetaria para un país candidato. En la sección 6 presentamos los datos macroeconómicos de la EMU, y vemos si las predicciones del modelo están en los datos. También hacemos un ejercicio de simulación para ver los posibles efectos de la ampliación de la EMU. Finalmente, presentamos conclusiones finales en la sección 7, y algunas reflexiones sobre las políticas europeas.

2 El modelo

En esta sección presentamos un sencillo modelo que ayude a explicar los diferenciales de inflación entre los países de una unión monetaria en función de los diferenciales de crecimiento de la productividad. El modelo es una forma reducida de un modelo de adelanto de efectivo. La relación entre ambos modelos se presenta en el apéndice 1.

Supongamos que hay un conjunto de países, denotado por I, y $i \in I$ representa un país genérico.

La población de cada país tiene una dotación de una unidad de tiempo en cada período. No hay ocio, así que los consumidores venderán toda su dotación de trabajo en el mercado. Supondremos que los costes de la migración son prohibitivos, de modo que no hay migración en el equilibrio. Alternativamente, podríamos suponer que los diferenciales de productividad son específicos de la gente, por ejemplo bajo la forma de capital humano, y por lo tanto los incentivos para la migración son pequeños y apenas podrían compensar los costes de la migración.

Hay dos sectores en cada país. Ambos sectores utilizan solamente un factor de producción, trabajo.

El primero es el sector servicios, con una producción per cápita denotada por S_t^i. La productividad en este sector es igual a la constante s, que es la misma para todos los países y períodos. La producción de este sector no es comercializable entre países.

[1] Si hay diferenciales de la inflación, entre los países o entre los sectores, no sustentados en diferencias en la evolución de los costes reales o la productividad, entonces hay algún precio relativo que tiende a infinito, lo que claramente no es sostenible a largo plazo.

El otro sector, el de bienes, produce una cantidad per cápita de G_t^i. Todos los países disfrutan de progreso tecnológico exógeno. Este crecimiento de la productividad no es el mismo para todos los países, por lo que dos países diferentes tendrán en general tasas de crecimiento de la productividad distintas. La productividad del sector de bienes del país i en el periodo t se denotará por A_t^i, y su tasa de crecimiento por $\gamma_{A_t^i}$. En lo que sigue, denotaremos la tasa de crecimiento de una variable mediante el símbolo γ. Finalmente, la producción de este sector es comercializable entre países.

Supongamos que el país i dedica una fracción θ_t^i de su fuerza de trabajo al sector de bienes, en el periodo t. Entonces, la producción per cápita de ambos sectores puede expresarse como:

$$S_t^i = s\left(1 - \theta_t^i\right) \tag{1}$$

$$G_t^i = A_t^i \cdot \theta_t^i \tag{2}$$

Ahora, obsérvese que el precio de los bienes (en términos de una moneda local) será el mismo en todos los países en cada momento t, porque los bienes son comercializables entre países. Específicamente, sea Pg_t^i el precio de los bienes, en términos de la moneda local, en el país i en el periodo t. Ahora, sea δ_t^{ij} el precio de una unidad monetaria del país i en términos de unidades monetarias del país j. Entonces, los precios Pg_t^i y Pg_t^j satisfacen la siguiente relación:

$$Pg_t^j = Pg_t^i \cdot \delta_t^{ij} \tag{3}$$

Ahora, si los países pertenecen a una unión monetaria, el precio de los bienes es igual entre países: $Pg_t^i = Pg_t, \forall i \in I$.

Por otra parte, el precio de los servicios puede ser diferente entre países incluso en una unión monetaria, porque no son comercializables. Por lo tanto, denotaremos por P_t^i el precio de los servicios, en términos de la moneda local, en el país i en el periodo t, sin importar si tenemos una unión monetaria o no.

Puesto que no hay migración, los salarios pueden diferir entre países. Como con el precio de los servicios, sea W_t^i el precio de una unidad de trabajo, en términos de la moneda local, en el país i en el periodo t, independientemente de que haya o no una unión monetaria.

Ahora, la maximización de beneficio en ambos sectores implica las condiciones siguientes:

$$P_t^i = \frac{W_t^i}{s} \tag{4}$$

$$Pg_t^i = \frac{W_t^i}{A_t^i} \tag{5}$$

Usando (4) y (5) podemos obtener la relación de los precios en un país:

$$P_t^i = \frac{Pg_t^i \cdot A_t^i}{s} \tag{6}$$

Para cerrar el modelo, asumimos que hay un consumidor representativo en cada país, dotado solamente con una unidad de trabajo cada período. El consumidor vende esta unidad en el mercado de trabajo. Las preferencias sobre los bienes y los servicios se representan por una función de utilidad Cobb-Douglas. Entonces, el problema es maximizar

$$\left(G_t^i\right)^{\alpha_i} \left(S_t^i\right)^{1-\alpha_i} \tag{7}$$

sujeto a

$$Pg_t^i \cdot G_t^i + P_t^i \cdot S_t^i = W_t^i \tag{8}$$

La solución a este problema viene dada por las siguientes funciones de demanda:

$$G_t^i = \alpha_i \frac{W_t^i}{Pg_t^i} \tag{9}$$

$$S_t^i = (1 - \alpha_i) \frac{W_t^i}{P_t^i} \tag{10}$$

Puesto que los precios relativos vienen determinados por condiciones de no arbitraje, estas funciones de demanda determinan solamente la fracción del tiempo dedicada a cada sector. Por lo tanto, usando (4), (5), (9) y (10) podemos concluir que

$$\theta_t^i = \alpha_i \tag{11}$$

Obsérvese que, debido al hecho de que sólo hay un bien comercializable, no habrá en equilibrio comercio entre países.

3 Países con política monetaria independiente

Supongamos que la oferta monetaria per capita en cada país viene dada por M_t^i. Entonces, el equilibrio monetario[2] viene dado por la siguiente ecuación

$$Pg_t^i \cdot G_t^i + P_t^i \cdot S_t^i = M_t^i \tag{12}$$

si se asume que los gastos se igualan a la demanda de dinero. Alternativamente, uno puede utilizar la renta como la demanda de dinero. En este caso, el equilibrio monetario viene dado por

$$W_t^i = M_t^i \tag{13}$$

Ambas expresiones son equivalentes. Como ya se ha precisado, el lector puede encontrar algunos microfundamentos de las ecuaciones (12) o (13) en el apéndice 1.

La política monetaria viene recogida en el parámetro μ_t^i, que es una medida de la tasa de crecimiento de la oferta monetaria.

Por tanto, usando las ecuaciones (4), (5) y (13), las tasas de crecimiento de los precios en ambos sectores vienen dadas por

$$\gamma_{P_t^i} = \mu_t^i \tag{14}$$

$$\gamma_{Pg_t^i} = \frac{1 + \mu_t^i}{1 + \gamma_{A_t^i}} - 1 \tag{15}$$

Usando (3), podemos expresar el tipo de cambio como función de las políticas monetarias:

$$\delta_t^{ij} = \frac{M_t^j}{M_t^i} \cdot \frac{A_t^i}{A_t^j} \tag{16}$$

Ahora, definamos la inflación en el país i, π_t^i, como

$$1 + \pi_t^i = \lambda^g \left(1 + \gamma_{Pg_t^i}\right) + \lambda^s \left(1 + \gamma_{P_t^i}\right) \tag{17}$$

con

$$\lambda^g = \frac{Pg_t^i \cdot G_t^i}{Pg_t^i \cdot G_t^i + P_t^i \cdot S_t^i} = \alpha_i \tag{18}$$

[2]Suponiendo que la velocidad de circulación del dinero es la unidad.

$$\lambda^s = \frac{P_t^i \cdot S_t^i}{Pg_t^i \cdot G_t^i + P_t^i \cdot S_t^i} = 1 - \alpha_i \tag{19}$$

Por tanto, podemos expresar la tasa de inflación como:

$$1 + \pi_t^i = \alpha_i \frac{1 + \mu_t^i}{1 + \gamma_{A_t^i}} + (1 - \alpha_i)\left(1 + \mu_t^i\right) = \left(1 + \mu_t^i\right)\left(\frac{\alpha_i}{1 + \gamma_{A_t^i}} + (1 - \alpha_i)\right) \tag{20}$$

Podemos ver que, en países con política monetaria independiente, la tasa de inflación depende negativamente del tamaño del sector de bienes (α_i), y de su crecimiento de la productividad ($\gamma_{A_t^i}$), y depende positivamente de la política monetaria en sí (μ_t^i). Por lo tanto, necesitamos una medida del crecimiento de dinero para poder comparar tasas de inflación entre países. Particularmente,

$$\frac{\partial \pi_t^i}{\partial \gamma_{A_t^i}} = -\frac{\left(1 + \mu_t^i\right)\alpha_i}{\left(1 + \gamma_{A_t^i}\right)^2}$$

Por tanto, el efecto negativo de $\gamma_{A_t^i}$ sobre π_t^i es más intenso cuanto mayor sea μ_t^i.

Resumiendo, el modelo establece que un diferencial de inflación entre sectores más alto causado por el efecto de Balassa-Samuelson implica una tasa de inflación más baja en bienes más que una tasa de inflación más alta en servicios, si la política monetaria no cambia.

Otra pregunta interesante es cómo los diferenciales del crecimiento de la productividad podrían afectar al precio relativo entre dos países, o tipo de cambio real. De (3), está claro que el tipo de cambio real computado solamente con los precios de los bienes es siempre igual a 1. Sin embargo, si computamos el cociente entre los índices de precios agregados de ambos países, esto ya no se cumple. Llamemos a este cociente ϑ. Entonces, de (16) y (20) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
1+\gamma_{\vartheta} &= \frac{1+\pi_t^i}{1+\pi_t^j}\left(1+\gamma_{\delta_t^{ij}}\right) \\
&= \frac{\left(1+\mu_t^i\right)\left(\frac{\alpha_i}{1+\gamma_{A_t^i}}+(1-\alpha_i)\right)}{\left(1+\mu_t^j\right)\left(\frac{\alpha_j}{1+\gamma_{A_t^j}}+(1-\alpha_j)\right)}\frac{\left(1+\mu_t^j\right)\left(1+\gamma_{A_t^i}\right)}{\left(1+\mu_t^i\right)\left(1+\gamma_{A_t^j}\right)} \\
&= \frac{\alpha_i+(1-\alpha_i)\left(1+\gamma_{A_t^i}\right)}{\alpha_j+(1-\alpha_j)\left(1+\gamma_{A_t^j}\right)} \\
&= \frac{(1-\alpha_i)\,\gamma_{A_t^i}}{(1-\alpha_j)\,\gamma_{A_t^j}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, los movimientos en el tipo de cambio real calculados tanto con bienes como con servicios están determinados por las tasas de crecimiento de la productividad relativas, y por los tamaños relativos de los sectores de servicios.

4 Países dentro de una unión monetaria

Sea β_j el peso del país j en la unión monetaria.[3] La oferta monetaria es ahora M_t para toda la unión. Puesto que la producción del sector de bienes es comercializable, el precio tiene que ser el mismo en todos los países de la unión monetaria, digamos Pg_t. Al igual que antes asumimos que

$$\gamma_{M_t} = \mu_t \tag{21}$$

Ahora, el equilibrio monetario viene caracterizado por la ecuación:

$$\sum_{j\in I}\beta_j\left(Pg_t\cdot G_t^j + P_t^j\cdot S_t^j\right) = M_t \tag{22}$$

O, en términos de renta:

$$\sum_{j\in I}\beta_j\cdot W_t^j = M_t \tag{23}$$

[3]Estos pesos deben ser proporcionales a medidas de población, y no a medidas de producción, porque todas las variables de las ecuaciones (12) y (13) están en términos *per capita*.

Ahora podemos usar (5) para sustituir W_t^j:

$$\sum_{j\in I} \beta_j \cdot Pg_t \cdot A_t^j = M_t$$

$$Pg_t = \frac{M_t}{\sum_{j\in I} \beta_j \cdot A_t^j} \tag{24}$$

La tasa de inflación del sector de bienes depende de la política monetaria común (M_t) así como de la productividad media ponderada de los sectores de bienes de los países dentro de la unión monetaria. Como antes, supongamos que ésta viene denotada por γ_{Pg_t}. Obsérvese que esta tasa es igual para todos los países, y depende negativamente de las tasas de crecimiento de la productividad de todos los países.

Podemos utilizar (6) para obtener la tasa de inflación del sector de servicios en el país i:

$$1 + \gamma_{P_t^i} = \left(1 + \gamma_{Pg_t}\right)\left(1 + \gamma_{A_t^i}\right) \tag{25}$$

Vemos que depende de la inflación común en el sector de las mercancías, y de la tasa de crecimiento de la productividad del país i.

El último paso es obtener la tasa de inflación media combinando las tasas de crecimiento de ambos precios:

$$1 + \pi_t^i = \alpha_i \left(1 + \gamma_{Pg_t}\right) + (1 - \alpha_i)\left(1 + \gamma_{P_t^i}\right) \tag{26}$$

Ahora, introduciendo (25) en (26):

$$1 + \pi_t^i = 1 + \gamma_{Pg_t} + (1 - \alpha_i) \cdot \gamma_{A_t^i} \cdot \left(1 + \gamma_{Pg_t}\right) \tag{27}$$

Vemos que las diferencias en la tasa de inflación entre países dependen solamente del producto del crecimiento de la productividad en el sector de bienes del país y el peso del sector servicios en el país, $(1 - \alpha_i) \cdot \gamma_{A_t^i}$.

Podemos resumir estos resultados como sigue:

Theorem 1 *Bajo las anteriores condiciones, para todo par de países i, j se tiene que:*

$$\pi_t^i \geq \pi_t^j \Longleftrightarrow (1 - \alpha_i) \cdot \gamma_{A_t^i} \geq (1 - \alpha_j) \cdot \gamma_{A_t^j}$$

Demostración: Inmediata a partir de la ecuación (27).■

5 Efectos inflacionistas de una unión monetaria

Ahora supongamos que un país i con política monetaria independiente está considerando entrar en una unión monetaria. Podemos comparar la tasa de inflación bajo el régimen independiente con la tasa de inflación dentro de la unión monetaria. Claramente, el resultado de la comparación dependerá de las diferencias entre la política independiente y la política adoptada por la unión. Si el país tiene una política monetaria más expansiva que la unión, entonces la inflación se reducirá probablemente al entrar en la unión.

Para aislar otros efectos del cambio en la política monetaria, asumamos que el crecimiento monetario bajo el régimen independiente es igual al crecimiento monetario de la unión, $\mu_t^i = \mu_t$. Recordemos que la tasa de inflación bajo el régimen independiente viene dada por la ecuación (20). Ahora necesitamos obtener la expresión explícita de la tasa de inflación dentro de la unión monetaria. Podemos reescribir (27) como

$$1 + \pi_t^i = \left(1 + \gamma_{Pg_t}\right)\left(1 + (1 - \alpha_i) \cdot \gamma_{A_t^i}\right) \tag{28}$$

Ahora, sea $\bar{A}_t = \sum_{j \in I} \beta_j \cdot A_t^j$. Entonces, la ecuación (24) puede expresarse como

$$Pg_t = \frac{M_t}{\bar{A}_t} \tag{29}$$

o, alternativamente

$$1 + \gamma_{Pg_t} = \frac{1 + \mu_t}{1 + \gamma_{\bar{A}_t}} \tag{30}$$

Ahora, sustituimos (30) en (28) para obtener la expresión explícita de la tasa de inflación de un país dentro de la unión monetaria:[4]

$$1 + \pi_t^i = \frac{1 + \mu_t}{1 + \gamma_{\bar{A}_t}} \cdot \left(1 + (1 - \alpha_i) \cdot \gamma_{A_t^i}\right) \tag{31}$$

Llegados a este punto, podemos caracterizar el tamaño relativo de ambas tasas de inflación:

Theorem 2 *Supongamos que el crecimiento monetario es el mismo bajo ambos regímenes, $\mu_t^i = \mu_t$. Entonces, la tasa de inflación bajo el régimen independiente será mayor o igual que la tasa de inflación correspondiente dentro de la unión monetaria si y sólo si $\gamma_{\bar{A}_t} \geq \gamma_{A_t^i}$.*

[4] Note that $\bar{A}_t$ includes A_t^i.

Demostración: Comparando las ecuaciones (20) y (31) podemos obtener el siguiente conjunto de desigualdades

$$
\begin{aligned}
\left(1+\mu_t^i\right)\left(\frac{\alpha_i}{1+\gamma_{A_t^i}}+(1-\alpha_i)\right) &\geq \frac{1+\mu_t}{1+\gamma_{\bar{A}_t}}\cdot\left(1+(1-\alpha_i)\cdot\gamma_{A_t^i}\right) \\
\alpha_i+(1-\alpha_i)\left(1+\gamma_{A_t^i}\right) &\geq \frac{1+\gamma_{A_t^i}}{1+\gamma_{\bar{A}_t}}\cdot\left(1+(1-\alpha_i)\cdot\gamma_{A_t^i}\right) \\
1+(1-\alpha_i)\cdot\gamma_{A_t^i} &\geq \frac{1+\gamma_{A_t^i}}{1+\gamma_{\bar{A}_t}}\cdot\left(1+(1-\alpha_i)\cdot\gamma_{A_t^i}\right) \\
1+\gamma_{\bar{A}_t} &\geq 1+\gamma_{A_t^i}
\end{aligned}
$$

lo que demuestra el resultado.■

La intuición de este resultado, según lo indicado en la introducción, es que aunque la oferta monetaria agregada es igual para todos los países, la distribución entre ellos no es homogénea. Particularmente, los países de crecimiento rápido están atrayendo dinero de países de crecimiento lento. Por consiguiente, la oferta monetaria en países de rápido crecimiento está de hecho creciendo más rápidamente que la oferta monetaria agregada y por lo tanto existirán en ellos presiones inflacionistas adicionales.

6 Datos macroeconómicos

El euro fue puesto en marcha como moneda oficial por 12 países de la unión europea al principio del año 1999, y por lo tanto utilizaremos datos a partir de 1999 hasta el presente. Retratamos en las tablas 1 y 2 la evolución de la inflación y del crecimiento del PIB para varios grupos de países europeos. La columna Av. es el promedio de la variable correspondiente entre 1999 y 2003. La primera característica importante que vemos en los datos sobre la inflación y el crecimiento del PIB es que hay al menos cierta heterogeneidad. La tasa de inflación más alta es más de tres veces más grande que la más baja, y las diferencias son mayores en crecimiento del PIB.

Tabla 1: Inflación y crecimiento del PIB en miembros de la EMU

	Inflación						*Crecimiento del PIB*					
País	**99**	**00**	**01**	**02**	**03**	**Av.**	**99**	**00**	**01**	**02**	**03**	**Av.**
Bélgica	1.1	2.7	2.4	1.6	1.5	1.9	3.2	3.8	0.6	0.7	0.8	1.8
Alemania	0.6	1.4	1.9	1.3	1.0	1.2	2.0	2.9	0.8	0.2	-0.1	1.2
Grecia	2.1	2.9	3.7	3.9	3.4	3.2	3.4	4.4	4.0	3.8	4.7	4.1
España	2.2	3.5	2.8	3.6	3.1	3.0	4.2	4.2	2.8	2.0	2.3	3.1
Francia	0.6	1.8	1.8	1.9	2.2	1.7	3.2	3.8	2.1	1.2	0.1	2.1
Irlanda	2.5	5.3	4.0	4.7	4.0	4.1	11.3	10.1	6.2	6.9	1.6	7.2
Italia	1.7	2.6	2.3	2.6	2.8	2.4	1.7	3.1	1.8	0.4	0.3	1.5
Luxemburgo	1.0	3.8	2.4	2.1	2.5	2.4	7.8	9.1	1.2	1.3	1.2	4.1
Holanda	2.0	2.3	5.1	3.9	2.2	3.1	4.0	3.5	1.2	0.2	-0.9	1.6
Austria	0.5	2.0	2.3	1.7	1.3	1.6	2.7	3.4	0.8	1.4	0.9	1.8
Portugal	2.2	2.8	4.4	3.7	3.3	3.3	3.8	3.4	1.7	0.4	-0.8	1.7
Finlandia	1.3	3.0	2.7	2.0	1.3	2.1	3.4	5.1	1.1	2.3	1.5	2.7
EURO zona	1.1	2.1	2.3	2.3	2.1	2.0	2.8	3.5	1.6	0.9	0.4	1.8

Fuente: Eurostat

Tabla 2: Inflación y crecimiento del PIB en otros países europeos

	Inflación						*Crecimiento del PIB*					
País	**99**	**00**	**01**	**02**	**03**	**Av.**	**99**	**00**	**01**	**02**	**03**	**Av.**
Bulgaria	2.6	10.3	7.4	5.8	2.3	5.6	2.3	5.4	4.1	4.8	4.5	4.2
Chipre	1.1	4.9	2.0	2.8	4.0	3.0	4.7	5.0	4.0	2.0	2.0	3.5
Rep. Checa	1.8	3.9	4.5	1.4	-0.1	2.3	0.5	3.3	3.1	2.0	2.2	2.2
Dinamarca	2.1	2.7	2.3	2.4	2.0	2.3	2.6	2.8	1.6	1.0	0.8	1.8
Estonia	3.1	3.9	5.6	3.6	1.4	3.5	-0.6	7.3	6.5	6.0	4.4	4.7
Hungría	10.0	10.0	9.1	5.2	4.7	7.8	4.2	5.2	3.8	3.5	2.9	3.9
Islandia	2.1	4.4	6.6	5.3	1.4	3.9	5.4	6.5	3.0	-0.6	2.1	3.2
Lituania	0.7	0.9	1.3	0.4	-1.1	0.4	-1.8	4.0	6.5	6.8	6.6	4.4
Letonia	2.1	2.6	2.5	2.0	2.9	2.4	2.8	6.8	7.9	6.1	6.0	5.9
Noruega	2.1	3.0	2.7	0.8	2.0	2.1	2.1	2.8	1.9	1.0	1.0	1.8
Polonia	7.2	10.1	5.3	1.9	0.7	5.0	4.1	4.0	1.0	1.4	3.3	2.8
Rumanía	45.8	45.7	34.5	22.5	15.3	32.2	-1.2	2.1	5.7	4.9	4.6	3.2
Eslovenia	6.1	8.9	8.6	7.5	5.7	7.4	5.9	4.1	2.9	2.9	2.1	3.6
Rep. Eslovaqua	10.4	12.2	7.0	3.3	8.8	8.3	1.5	2.0	3.8	4.4	3.8	3.1
Suecia	0.6	1.3	2.7	2.0	2.3	1.8	4.6	4.3	0.9	1.9	1.4	2.6
Reino Unido	1.3	0.8	1.2	1.3	1.4	1.2	2.8	3.8	2.1	1.7	2.0	2.5

Fuente: Eurostat

Vemos también diferencias en los datos de países europeos no pertenecientes a la EMU.

Como vemos en las ecuaciones (27) y (31), nuestro modelo predice que la inflación debería relacionarse positivamente con el crecimiento del PIB dentro de la EMU. Además, debido a las diferencias en la política monetaria, el modelo también predice una relación muy débil entre ambas variables para los países fuera de la EMU, o para los países de la zona euro antes de la existencia de la EMU, a menos que introduzcamos la oferta de dinero como variable de control. Para comprobar estos hechos, hemos estimado dos regresiones.[5] Hemos tomado el crecimiento del PIB real [6] como el regresor, y la inflación como la variable dependiente. La primera regresión utiliza los datos medios de países dentro de la EMU de 1999 a 2003. Los resultados

[5] Todas las variables en estas regresiones se expresan en puntos porcentuales. Hemos utilizado las tasas de crecimiento anuales medias de precios, oferta monetaria y PIB. Obsérvese que no estamos utilizando datos anuales, por lo que hay solamente una observación por país. Por consiguiente, el número de observaciones es muy bajo y los resultados se deben interpretar con precaución.

[6] Los resultados no cambian ni cualitativa ni cuantitativamente si utilizamos el PIB real per capita o el PIB real por trabajador en su lugar. Las dos ecuaciones son, respectivamente, $HICPgr = \underset{(0.3888)}{1.6961} + \underset{(0.1491)}{0.3576} \cdot GDPgr$ y $HICPgr = \underset{(0.3089)}{2.1304} + \underset{(0.1834)}{0.3136} \cdot GDPgr$.

son los siguientes (los errores estándar se muestran debajo del parámetro estimado):

$$HICPgr = \underset{(0.3786)}{1.5792} + \underset{(0.1194)}{0.3333} \cdot GDPgr \tag{32}$$

donde $HICPgr$ representa la tasa de inflación calculada usando el HICP, y $GDPgr$ representa la tasa de crecimiento del PIB real, Claramente, la relación positiva entre la inflación y el crecimiento del PIB es significativa. El estadístico R^2 es 43.8%. Esto es exactamente lo que el modelo predice.

Ahora centraremos la atención en países con políticas monetarias independientes. Para evitar diferencias en los países incluidos en la muestra, hemos repetido el ejercicio para el mismo conjunto de países, pero antes del establecimiento del euro.[7] La ecuación (20) establece que el efecto marginal del crecimiento de la productividad en la inflación es negativo. También, necesitamos incluir la oferta de dinero como regresor si deseamos aislar este efecto marginal del crecimiento de la productividad. Esto se estudia en la segunda regresión:

$$ICPgr = \underset{(0.6198)}{2.5470} - \underset{(0.2354)}{1.2277} \cdot GDPgr + \underset{(0.0827)}{0.5812} \cdot Mgr \tag{33}$$

Mgr es la tasa de crecimiento del agregado monetario M2. Los dos efectos marginales son claramente significativos, y tienen el signo esperado. El estadístico R^2 de esta regresión es 85.5%. De nuevo, esto es lo que esperaríamos de acuerdo al modelo.

Para seguir explorando si ésta es una característica de países con políticas monetarias independientes, hemos repetido la regresión (33) usando datos de países europeos fuera de la EMU. Según el modelo, esperamos los mismos signos en esta nueva regresión porque tenemos en ambos casos países con políticas monetarias independientes. La ecuación estimada confirma estos signos:

$$HICPgr = \underset{(2.4838)}{5.6723} - \underset{(0.6940)}{3.2123} \cdot GDPgr + \underset{(0.0868)}{0.9146} \cdot Mgr \tag{34}$$

Aquí Mgr es la tasa de crecimiento del agregado monetario M2 excepto para Suecia, para la que se ha usado en su lugar M3. Como antes, los dos efectos marginales tienen el signo esperado y son significativos.[8] El estadístico R^2 de esta regresión es 89.5%.

[7] Particularmente, hemos considerado tasas de crecimiento anualizadas entre los años 1991 y 1997. Los HICP han sido substituidos por los ICP's. nacionales.

[8] Un resultado llamativo es que el coeficiente del crecimiento del PIB es de hecho demasiado negativo. Una interpretación posible es que un crecimiento más alto da sostenibilidad a la política fiscal, y por lo tanto reduce las expectativas de que el dinero sea utilizado

Por lo tanto, podemos concluir que el distinto signo del coeficiente es debido al diverso comportamiento de la inflación en países con diversos regímenes de política monetaria.

Hemos repetido el análisis usando tasas de crecimiento de un año dado en vez de las tasas de crecimiento medias en varios años. El signo de todos los parámetros en todos los años es el esperado, aunque la mayor dispersión de los datos anuales tiende a reducir la significatividad. También hemos intentado usar el deflactor del PIB en vez del HICP, con resultados muy similares.

Andrés y otros. (1996) proporciona evidencia adicional. Analizan los efectos de la inflación sobre el crecimiento, usando promedios de cuatro años. Su resultado es que el coeficiente es más negativo para los países bajo un régimen de tipo de cambio flexible. La evidencia referente a países bajo régimen de tipo de cambio fijo es menos clara; el coeficiente es positivo o negativo dependiendo de la especificación, pero en todos los casos su magnitud es pequeña. En la medida en que un régimen de tipo de cambio fijo es una situación cercana a una unión monetaria, su evidencia apoya nuestros resultados.

Resumiendo, nuestro modelo tiene predicciones cualitativas próximas a los datos, particularmente en el medio o largo plazo.

Ahora podemos utilizar el modelo para estudiar los efectos de la ampliación de la EMU sobre las tasas de inflación de miembros y candidatos, así como en la tasa de inflación media de la zona euro agregada, si se asume que la política monetaria del área euro no cambia.[9] Analizaremos específicamente la ampliación de diez países;[10] otros escenarios pueden ser analizados fácilmente.

El modelo predice diversos efectos para los países previamente en la EMU y los candidatos. Asumamos que el crecimiento de la oferta monetaria en la EMU no cambia. Asumamos también que las tasas de crecimiento de la productividad para todos los países tampoco cambian. Si miramos la ecuación (31), vemos que el único efecto para un antiguo miembro es la posible variación en $\gamma_{\bar{A}_t}$. Es esperable que suceda un proceso de convergencia en los nuevos miembros, así que es de esperar que $\gamma_{\bar{A}_t}$ aumente después de

para financiar un déficit fiscal. Probablemente, este efecto era menos importante en países de la EMU durante los años 90 debido a la reputación y a la independencia de la mayor parte de sus bancos centrales. Por lo tanto, la respuesta de la inflación a un aumento en el crecimiento del PIB es mayor para los países candidatos. Ver Sargent (1982) para más detalles sobre esta interpretación.

[9] Es decir los efectos descritos más abajo son adicionales a un posible cambio o reacción en la política monetaria del área euro.

[10] República checa, Estonia, Hungría, Letonia, Lituania, Polonia, república eslovaca, Eslovenia, Chipre y Malta.

la ampliación. Por lo tanto, la predicción del modelo para todos los antiguos miembros es una reducción en sus tasas de inflación.

El mismo razonamiento se puede aplicar a la tasa de inflación media de la EMU. Interpretando la unión monetaria como país independiente, podemos utilizar la ecuación (20) para hacer el análisis. Los dos efectos que podemos indentificar en la ecuación son el cambio en el crecimiento de la productividad y el cambio en los pesos sectoriales. Hemos discutido que esperamos un aumento en el crecimiento de la productividad. Con respecto a α_i, los países candidatos tienen sectores de servicios más pequeños que el promedio de la EMU, así que el peso de los servicios disminuirá después de la ampliación. Ambos efectos van en la misma dirección, así que el modelo predice una reducción en la tasa de inflación media de la EMU ampliada.

El último paso es estudiar los efectos de la inflación para los países candidatos. El modelo aquí identifica dos efectos diferenciados. Uno es el cambio en la política monetaria y el otro es el efecto de atracción de dinero descrito en la sección 5. Para comparar ambos efectos y ver cual domina, hemos hecho un ejercicio de simulación, descrito en el apéndice 2. Este procedimiento estima el efecto total para los países candidatos y lo divide en los dos efectos mencionados, el cambio en la política monetaria y la atracción de dinero. Los resultados se presentan en la tabla siguiente.[11]

Tabla 3: Efectos inflacionistas de la ampliación para los países candidatos[12]

País	Inf. Previa	Inf. Nueva	Ef. Total	Pol.Mon.	Atrac. Din.
Cyprus	4.66	5.71	**1.05**	-3.96	5.01
Czech Rep.	2.98	0.57	**-2.42**	-1.19	-1.23
Estonia	4.64	4.91	**0.28**	-4.99	5.27
Hungary	8.72	3.48	**-5.24**	-8.44	3.2
Lithuania	-0.10	2.97	**3.08**	-0.05	3.12
Latvia	3.22	6.45	**3.23**	-4.58	7.81
Malta	3.26	1.80	**-1.47**	-1.53	0.06
Poland	4.87	0.67	**-4.20**	-3.59	-0.61
Slovenia	7.04	1.65	**-5.38**	-6.50	1.12
Slovak Rep.	5.61	2.19	**-3.42**	-4.61	1.19

La tabla 3 se debe interpretar así. La columna etiquetada "Pol.Mon" da la variación en la inflación de un país si ese país establece la misma

[11] Utilizamos aquí el deflactor del PIB como medida de precios porque el HICP no está disponible para Malta. Los resultados son, sin embargo, muy similares si se utiliza el HICP.

[12] Los datos están expresados en puntos porcentuales.

tasa de crecimiento del dinero que el área del euro, pero sin entrar en ella. Obtenemos valores negativos para todos los países, lo que significa que la política monetaria en el área del euro es más restrictiva que en todos los países candidatos. La última columna es el cambio en la tasa de inflación de un país candidato que ocurriría si la política monetaria fuera la misma en la EMU y en el país candidato. El predominio de valores positivos refleja el hecho de que casi todos los países que acceden tienen tasas de crecimiento del PIB real más altas que el promedio de la EMU. Finalmente, la columna "Ef. Total" es la combinación de los dos efectos mencionados, es decir da la variación total en la inflación de un país candidato cuando pasa a ser miembro de la EMU, dadas sus actuales tasas de crecimiento del PIB y del dinero. Podemos ver que la mayoría de los países experimentarían una disminución de sus tasas de inflación al incorporarse a la EMU. Y esto es así a pesar de que estos países están creciendo más rápidamente que la EMU. La razón es que el efecto del cambio en la política monetaria es tan importante que domina al efecto de atracción del dinero.

7 Conclusiones

Hemos presentado un modelo que clarifica la relación entre el efecto de Balassa-Samuelson y la existencia de una unión monetaria. Argumentamos que el efecto parcial del crecimiento de la productividad en la inflación será positivo solamente para los países que pertenecen a una unión monetaria. Este efecto parcial para los países con políticas monetarias independientes pasa a ser negativo una vez que tomamos en cuenta el crecimiento de la oferta monetaria. Por consiguiente, el banco central de una unión monetaria solamente puede tener como objetivo la tasa de inflación media, mientras que los diferenciales de inflación vendrán determinados por diferencias en el crecimiento de la productividad. También hemos visto que estas implicaciones son próximas a la evidencia empírica, especialmente para datos de medio o largo plazo.

Un resultado adicional del modelo es que si un país entra en una unión monetaria, entonces su tasa de inflación subirá si el país está creciendo más rápidamente que el promedio de la unión, y viceversa. Este efecto es además del efecto de un cambio en la política monetaria. La intuición es que el banco central determina la oferta de dinero total, pero la distribución de esta cantidad total no es homogénea: Un país de crecimiento rápido atraerá el dinero de países de crecimientos bajos y, consecuentemente, la oferta de dinero del primero estará creciendo de hecho más que el promedio. Este efecto de atracción del dinero introduce una presión inflacionista adicional para los países de crecimiento rápido.

Hemos estudiado las implicaciones del modelo relativas a la ampliación de la EMU. Particularmente, hemos analizado los efectos de una ampliación cuando los países candidatos crecen más rápidamente que el promedio de la EMU. El modelo proporciona predicciones muy claras para las tasas de inflación de los antiguos miembros: se reducirán. La misma predicción se extiende a la inflación media de la EMU después de la ampliación. Respecto a los países candidatos, la predicción del modelo no está tan clara. Según lo mencionado ya, el efecto total es una combinación de un cambio en la política monetaria y un efecto de atracción del dinero. Hemos hecho un ejercicio de simulación para analizar ambos efectos. El resultado es que el efecto de la política monetaria es negativo para todos los países, lo que significa que la política monetaria de la EMU es menos expansiva que las políticas de los candidatos. Por otra parte, el efecto de atracción de dinero es positivo para ocho de los diez países analizados. La combinación de ambos efectos es negativa para seis de los diez países, por lo que, en general los países candidatos tendrán menos inflación dentro de la EMU.

Hay varias implicaciones del modelo que son muy importantes para la EMU. Primero, los diferenciales observados de la inflación no son un fenómeno de corto plazo. Permanecerán hasta que los países crezcan a la misma tasa. La evidencia empírica demuestra que el proceso de convergencia en crecimiento de la productividad es lento[13], por lo que no podemos esperar tasas de inflación homogéneas en el corto plazo. Una implicación importante es que no tiene sentido exigir a los miembros de la EMU tasas de inflación homogéneas.

Hay un supuesto en el modelo que merece una mención especial, que es la ausencia de la migración entre países. Hemos mencionado ya dos posibilidades aquí, costes de migración prohibitivos o diferenciales de productividad incorporados a los trabajadores bajo la forma de capital humano. Las implicaciones de política son diferentes. En el segundo caso los gobiernos no pueden hacer nada sino fomentar la convergencia real para reducir los diferenciales de inflación. Pero en el primer caso, las políticas dirigidas a aumentar la movilidad del trabajo son apropiadas para alcanzar tasas de inflación más homogéneas. Es muy probable que la realidad europea esté en medio de las dos posibilidades. Si éste es el caso, hay espacio para que la política económica trate de reducir los diferenciales de inflación.

Otra implicación importante es que los países candidatos deben tener en mente que incorporarse a la EMU tiene un efecto de aumentar la inflación para los países de crecimiento rápido. Hemos visto, sin embargo, que este

[13] Ver por ejemplo Barro y Sala-i-Martin (1992)

efecto es dominado en la mayoría de los países por una política monetaria más restrictiva, así que el efecto neto predicho es en la mayoría de los casos una disminución de la inflación. Por otra parte, los países de la zona euro necesitan considerar la reducción predicha en las tasas de inflación. Y si esto implica un peligro de deflación para algunos países, todos (antiguos miembros de la EMU y candidatos) deben tener en cuenta la posibilidad de un movimiento en el banco central europeo (ECB) hacia una política monetaria más expansiva.

Respecto al requisito de tasas de inflación homogéneas para los países candidatos antes de incorporarse a la EMU, podemos hacer el razonamiento siguiente. La política monetaria para los países candidatos debe ser tal que el cambio en la tasa de inflación no sea muy drástico en el momento de la entrada. Sin embargo, esto no implica que las tasas de inflación deban estar muy cerca de la inflación media de la EMU. Depende de los diferenciales de crecimiento de la productividad. Por consiguiente, nuestra propuesta es que los requisitos de inflación sean diseñados considerando los diferenciales de crecimiento, es decir permitiendo que un país de crecimiento rápido tenga más inflación antes de entrar, porque seguirá teniendo más inflación después de entrar.

Se puede argumentar que el reducido crecimiento del sector servicios es debido a los problemas de medición de la calidad de estos servicios. Si esto es verdad, la alta tasa de inflación de los servicios está reflejando un aumento de calidad. Pero mientras las políticas europeas se diseñen en función de la inflación medida, el hecho de que la inflación está reflejando o no un crecimiento de calidad no es relevante. Desde nuestro punto de vista, es equivalente definir umbrales de inflación en función de crecimiento del PIB, o imponer un umbral único, pero para las tasas de inflación que consideren aumentos de calidad.

Finalmente, deseamos enfatizar que el único propósito de este papel es el estudio de las tasas de inflación. Por supuesto, las uniones monetarias tienen otras ventajas (como reducciones en costes de transacción) y costes (como las dificultades para acomodar shocks asimétricos) que necesitan ser analizados por los gobiernos implicados.

Apéndice 1

En este apéndice demostramos que el modelo presentado es una forma reducida de un modelo de restricciones de adelanto de efectivo. Esto debería ayudar a interpretar las ecuaciones (12) y (22).

Supongamos que tanto los bienes como los servicios deben pagarse con dinero. El consumidor gasta sus existencias de dinero actuales y una transferencia directa (T_t^i) del gobierno en comprar bienes y servicios. Por otro lado, el consumidor gana un sueldo, que se utiliza para acumular dinero para el siguiente año. La transferencia se financia emitiendo más dinero, por lo debe satisfacer

$$T_t^i = M_t^i - M_{t-1}^i \tag{35}$$

Ahora estamos en posición de obtener el modelo reducido. El problema del consumidor es maximizar

$$\left(G_t^i\right)^{\alpha_i} \left(S_t^i\right)^{1-\alpha_i}$$

sujeto a

$$Pg_t^i \cdot G_t^i + P_t^i \cdot S_t^i = M_{t-1}^i + T_t^i \tag{36}$$

$$M_{t-1}^i = W_{t-1}^i \tag{37}$$

Combinando las ecuaciones (36) y (37) obtenemos

$$Pg_t^i \cdot G_t^i + P_t^i \cdot S_t^i = W_{t-1}^i + T_t^i \tag{38}$$

Las condiciones de primer orden son

$$G_t^i = \alpha_i \cdot \frac{W_{t-1}^i + T_t^i}{Pg_t^i} \tag{39}$$

$$S_t^i = (1 - \alpha_i) \cdot \frac{W_{t-1}^i + T_t^i}{P_t^i} \tag{40}$$

Ahora sustituimos (35) y (37) en (39) y (40):

$$G_t^i = \alpha_i \cdot \frac{M_t^i}{Pg_t^i} \tag{41}$$

$$S_t^i = (1 - \alpha_i) \cdot \frac{M_t^i}{P_t^i} \tag{42}$$

Finalmente, usamos la ecuación (37) en el periodo t para obtener las ecuaciones (9) y (10). La ecuación (12) se obtiene directamente sustituyendo (35) en (36).

Apéndice 2

Los ingredientes del proceso de calibración son: tasa de crecimieto del PIB real per capita, tasa de crecimiento del deflactor del PIB, población y porcentaje de trabajadores en el sector servicios, para todos los países (los países de la zona del euro y los diez candidatos mencionados en la sección 6). Para todas las variables tomamos medias entre 1999 y 2003. La fuente de todos estos datos es Eurostat.

El proceso de calibración es el siguiente: Primero, tomamos directamente α_i como el porcentaje de trabajadores en el sector servicios. Segundo, utilizando el crecimiento del PIB real y α_i, seleccionamos el valor de $\gamma_{A_t^i}$ que replica la tasa de crecimiento del PIB observada. Ahora, calculamos los pesos β_i para los países actualmente en la zona euro utilizando la población. Con ellos, obtenemos la media ponderada $\gamma_{\bar{A}_t}$ relativa a la EMU. Finalmente, el parámetro μ_t se elige como el que minimiza la suma (ponderada) de cuadrados de las diferencias entre las tasas de inflación observadas y la inflación predicha por la ecuación (31), para los países de la zona euro.

Para estudiar la ampliación, necesitamos obtener nuevos pesos para la unión monetaria ampliada utilizando la población de los 22 países. Con estos pesos obtenemos la nueva media ponderada $\gamma_{\bar{A}_t}$. Llegados a este punto, podemos usar de nuevo la ecuación (31) para obtener una estimación de las nuevas tasas de inflación (y del efecto total de la ampliación) para los 2 países.

Para diferenciar entre los dos efectos descritos en la sección 5 para países candidatos construimos un estimador de inflación intermedio sustituyendo el parámetro calibrado μ_t en la ecuación (20) para cada uno de los países candidatos. Esta inflación intermedia trata de estimar la tasa de inflación de un país que permanezca independiente pero adopte una política monetaria igual que la de la EMU. Por tanto, la diferencia entre la tasa de inflación observada y la inflación intermedia captura el efecto de un cambio en la política monetaria, y la diferencia entre la intermedia y la nueva inflación estimada captura el efecto de atracción de dinero.

Referencias

- Alberola, E. y Marqués, J.M. (1998) "On the Relevance and Nature of Regional Inflation Differentials: The Case of Spain," *Documento de trabajo de Banco de España* 9913.

- Alberola, E. y T. Tyrväinen (1998) "Is There Scope for Inflation Differentials in EMU?," *Documento de trabajo de Banco de España* 9823.

- Andrés, J., I. Hernando y M. Krüger (1996) "Growth, Inflation and the Exchange Rate Regime," *Economics Letters* 53, pp. 61-65.

- Andrés, J., E. Ortega y J. Vallés (2003) "Market Structure and Inflation Differentials in the European Monetary Union," *Documento de trabajo de Banco de España* 0301.

- Balassa, B. (1961) "Patterns of Industrial Growth: Comment," *American Economic Review* 51(3), pp. 394-397.

- Balassa, B. (1964) "The Purchasing-Power Parity Doctrine: A Reappraisal," *Journal of Political Economy* 72(6), pp. 584-596.

- Balassa, B. (1973) "Just How Misleading are Official Exchange Rate Conversions? A Comment," *Economic Journal* 83, pp. 1258-1267.

- Barro, R. y X. Sala-i-Martin (1992) "Convergence," *Journal of Political Economy* 100(2), pp. 223-251.

- Ben-David, D. y M. Loewy (1998) "Free Trade, Growth, and Convergence," *Journal of Economic Growth* 3, pp. 143-170.

- Benigno, P. y J.D. López-Salido (2002) "Inflation Persistence and Optimal Monetary Policy in the Euro Area," *Documento de trabajo de Banco de España* 0215.

- Canzoneri, M., R. Cumby y B. Diba (1999) "Relative Labor Productivity and the Real Exchange Rate in the Long Run: Evidence for a Panel of OECD Countries," *Journal of International Economics* 47, pp. 245-266.

- Chari, V. y P. Kehoe (1999) "Optimal Fiscal and Monetary Policy," *Documento de trabajo del NBER* 6891.

- Christiano L. y M. Eichenbaum (1992) "Liquidity Effects and the Monetary Transmission Mechanism," *American Economic Review* 82(2), pp. 346-353.

- Costa, D. (2001) "Estimating Real Income in the United States from 1888 to 1994: Correcting CPI Bias Using Engel Curves," *Journal of Political Economy* 109(6), pp. 1288-1310.

- Deaton, A. y G. Laroque (2001) "Housing, Land Prices, and Growth," *Journal of Economic Growth* 6, pp. 87-105.

- De Grauwe, P. y G. Schnabl (2003) "Nominal versus Real Convergence with Respect to EMU. How to Cope with the Balassa-Samuelson Dilemma," *Documento de trabajo del EUI 2004/20.*

- Estrada, A. y López-Salido, J.D. (2001) "Understanding Spanish Dual Inflation," *Documento de trabajo de Banco de España* 0205.

- Ortega, E. (2003) "Persistent Inflation Differentials in Europe," *Documento de trabajo de Banco de España* 0305.

- Prados, L. (2000) "International Comparisons of Real Product, 1820-1990: An Alternative Data Set," *Explorations in Economic History* 37, pp. 1-41.

- Samuelson, P. (1964) "Theoretical Notes on Trade Problems," *Review of Economics and Statistics* 46, pp. 145-154.

- Samuelson, P. (1974) "Analytical Notes on International Real Income Measures," *Economic Journal* 84, pp. 595-608.

- Sargent, T. (1982) "The ends of Four Big Inflations," en *Inflation: Causes and Effects,* University of Chicago Press, edited by R. Hall.

- Sinn, H-W. y M. Reutter (2001) "The Minimum Inflation Rate for Euroland," *Documento de trabajo del NBER* 8085.