UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

TESIS DOCTORAL

Tres Ensayos en Teoría de Juegos

Autor:
José Carlos González Pimienta

Directores:
Luis Carlos Corchón
Francesco De Sinopoli

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

Getafe, Julio del 2007

Tres Ensayos en Teoría de Juegos

Carlos González Pimienta

A mis padres

Índice general

Índice de figuras

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a mis directores de tesis Luis Carlos Corchón y Francesco De Sinopoli por su supervisión. Han leído cuidadosamente y hecho comentarios siempre constructivos sobre todo mi trabajo.

Además, Francesco De Sinopoli me ofreció la oportunidad de trabajar con él en un trabajo de investigación que ha originado el tercer artículo de esta tesis. Sus discusiones preliminares con Jean François Mertens despertaron nuestro interés en el tema. También se recibieron comentarios útiles por parte de Giovanna Iannantuoni.

Mi compañero de doctorado Cristian Litan es el coautor del artículo de investigación que es el origen del segundo capítulo. Varios comentarios que han ayudado a mejorar el capítulo de manera considerable se han recibido por parte de Herbert Gintis, Sjaak Hurkens, Francisco Marhuenda, Eric Maskin y los participantes de seminarios en la Universidad Carlos III de Madrid, Universidad Autònoma de Barcelona, Universidad de Salamanca, en el *Second Summer School in Heterogeneity* en el CORE y en el *Social Choice and Welfare 2006 Meeting*.

Estoy en deuda con Antonio Cabrales, José Luis Ferreira y Ángel Hernando que se han leído meticulosamente el cuerpo principal de esta tesis y me han ayudado a mejorarla. También le agradezco al departamento de economía de la Universidad Carlos III de Madrid y a todos sus miembros por toda su aportación a mi formación académica durante los últimos cinco años.

También agradezco al Ministerio de Educación y Ciencia su ayuda financiera a través de la beca FPI BES-2003-0822.

Para acabar, estoy especialmente agradecido a mi familia, mis amigos y a todos mis compañeros del doctorado que han estado conmigo durante todo este proceso. Nunca lo podría haber conseguido sin ellos.

CAPíTULO 1

Introducción

El texto de esta tesis está dividido en tres capítulos. Cada uno de ellos es una contribución a la literatura de los refinamientos de equilibrio en juegos no cooperativos. Cada capítulo se puede leer de manera independiente.

El capítulo 2 caracteriza la clase de formas extensivas finitas para las que los conjuntos de estrategias de equilibrio para el equilibrio perfecto en subjuegos y el equilibrio secuencial coinciden para cualquier función de pagos. Además, identifica la clase de formas extensivas finitas para las que los conjuntos de resultados derivados de ambos conceptos de equilibrio coinciden, y estudia las implicaciones que estos resultados tienen en cuanto al equilibrio perfecto en subjuegos.

El capítulo 3 muestra que en juegos con incertidumbre acerca del número de jugadores algunos equilibrios perfectos pueden estar dominados y demostramos que todo juego de Poisson tiene al menos un equilibrio perfecto en estrategias no dominadas.

El capítulo 4 se demuestra que el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre redes inducidas por equilibrios de Nash del juego de formación de redes propuesto por Myerson (1991) es finito para toda asignación genérica de pagos a redes. Este mismo resultado se puede extender a varias versiones del juego que se pueden encontrar en la literatura.

CAPíTULO 2

Condiciones para la equivalencia entre el Equilibrio Secuencial y Perfecto en Subjuegos[1]

2.1. Introducción

La *inducción hacia atrás* constituye un método de análisis muy útil para una amplia gama de problemas económicos. La idea básica de la inducción hacia atrás consiste en que cada jugador usa una mejor respuesta a las estrategias de los otros jugadores, no sólo en el nodo inicial del árbol, sino también en cualquier otro conjunto de información.

Para capturar este tipo de racionalidad Selten (1965) definió el concepto de *equilibrio perfecto en subjuegos*. A pesar de que este concepto tiene importantes aplicaciones, no siempre elimina el comportamiento irracional en todos los conjuntos de información. Para resolver este problema, Selten (1975) introdujo una noción más restrictiva llamada perfección "*trembling-hand*".

El *equilibrio secuencial*, introducido por Kreps y Wilson (1982), requiere que cada jugador maximice su pago esperado en cada conjunto de información de acuerdo con unas creencias consistentes. Muestran que la perfección "*trembling-hand*" implica equilibrio secuencial, que a su vez implica equilibrio perfecto en subjuegos. También demuestran que una vez fijada la forma extensiva y para unos pagos genéricos, casi todos los equilibrios secuenciales son "*trembling-hand*" perfectos. Este resultado fue mejorado

[1] Este capítulo está basado en Gonzalez Pimienta y Litan (2005).

por Blume y Zame (1994), los cuales probaron que una vez fijada la forma extensiva, los dos conceptos coinciden.

Aunque sea un concepto más débil que la perfección de Selten, Kohlberg y Mertens (1986) señalan que "el equilibrio secuencial parece ser la generalización más directa [de la inducción hacia atrás] para juegos de información imperfecta". Cumple con todas las propiedades que caracterizan el equilibrio perfecto en subjuegos (o la inducción hacia atrás) en juegos de información perfecta. Esto no es cierto con otros conceptos como el equilibrio perfecto o el *equilibrio propio*. [2]

En este capítulo encontraremos el conjunto máximo de formas extensivas finitas (juegos en forma extensiva sin la asignación de pagos) para las cuales equilibrio secuencial y perfecto en subjuegos generan el mismo conjunto de estrategias de equilibrio, para cualquier función de pagos (Proposición 2.1). Éste puede ser caracterizado como el conjunto de formas extensivas tales que para cualquier perfil de estrategias de comportamiento, todos los conjuntos de información se alcanzan con probabilidad positiva condicionada al subjuego más pequeño que contiene a cada uno de ellos. Siempre que la forma extensiva no tenga esta estructura, se pueden encontrar pagos para los que el conjunto de equilibrios perfectos en subjuegos no coincide con el conjunto de equilibrios secuenciales.

Sin embargo, puede que el conjunto de pagos generados por ambos conceptos de equilibrio coincida para cualquier asignación de la función de pagos. Por consiguiente, también identificamos el conjunto máximo de formas extensivas finitas para las cuales el equilibrio perfecto en subjuegos y el equilibrio secuencial siempre generan los mismos pagos de equilibrio (Proposición 2.2).

[2] Véase Kohlberg y Mertens (1986) para más detalles.

En varias aplicaciones de juegos extensivos con información imperfecta se usa el "equilibrio perfecto *bayesiano*". Éste no pone ninguna restricción en las creencias que se encuentran fuera de la senda de equilibrio de cada subjuego. Por lo tanto, implica equilibrio perfecto en subjuegos y es implicado por el equilibrio secuencial. Obtendremos como corolarios que nuestras condiciones para la equivalencia siguen siendo correctas si substituimos el equilibrio secuencial por el equilibrio perfecto bayesiano.

Nótese que, a diferencia de resultados relacionados sobre la equivalencia entre refinamientos del equilibrio de Nash, donde el objeto de análisis es el conjunto de pagos (p. ej. Kreps y Wilson (1982), Blume y Zame (1994)), nosotros fijamos condiciones en la forma extensiva.

Estos resultados caracterizan las estructuras de información donde aplicar la racionalidad secuencial no causa una diferencia relevante con respecto al equilibrio perfecto en subjuegos. Los consideramos herramientas a disposición del economista. Nos permiten saber si, para la forma extensiva que estudiamos, el equilibrio perfecto en subjuegos y el equilibrio secuencial son siempre equivalentes, ya sea en estrategias de equilibrio o en pagos de equilibrio.

El artículo está organizado de la siguiente forma: En la sección 2.2 introduciremos brevemente la notación y la terminología principal de los juegos en forma extensiva. Para esto seguiremos a van Damme (1991). La sección 2.3 contiene definiciones. Los resultados serán presentados y probados formalmente en la sección 2.4. La Sección 2.5 contiene varios ejemplos donde nuestros resultados pueden ser aplicados.

2.2. Notación y Terminología

Restringiremos el análisis a los juegos extensivos finitos con recuerdo perfecto. Dado que las caracterizaciones está basadas en las propiedades estructurales de los juegos en forma extensiva, no podemos prescindir de una completa descripción formal de estos. Sin embargo, y en consideración con los lectores que ya están familiarizados con los juegos extensivos, relegamos esta larga discusión al apéndice y sólo ofrecemos en la figura 2.1 una breve lista con explicaciones muy concisas de los símbolos que necesitamos.

Notación	Terminología	Comentarios
Ξ	Forma extensiva	Juego extensivo sin pagos asignados
T	Conjunto de nodos en Ξ	Elementos típicos $x, y \in T$
$\leq$	Relación de precedencia en T	$\leq$ ordena parcialmente T
U_i	Conjuntos de información de i	Elementos típicos $u, v, w \in U_i$
C_u	Movimientos disponibles en u	Elementos típicos $c, d, e \in C_u$
Z	Conjunto de nodos finales	$\{z \in T : \nexists x \in T \text{ t.q. } z < x\}$
X	Conjunto de nodos de decisión	$X = T \setminus Z$
r_i	Función de pagos del jugador i	$r_i : Z \to \mathbb{R}$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$
Γ	Juego extensivo con n jugadores	$\Gamma = (\Xi, r)$
b_i	Estrategia de comportamiento de i	$b_i \in B_i$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$
$\mathbb{P}^b$	Medida de probabilidad en Z	Inducida por b
$R_i(b)$	Pago esperado de i bajo b	$\sum_{z \in Z} \mathbb{P}^b(z) r_i(z)$
$Z(A)$	Nodos finales que siguen a A	$A \subseteq T$
$\mathbb{P}^b(A)$	Probabilidad de $A \subseteq T$	$\mathbb{P}^b(Z(A))$
Ξ_y	Subforma con raíz en y	Subjuego in pagos asignados
Γ_y	Subjuego con raíz en y	$\Gamma_y = (\Xi_y, \hat{r})$
μ	Sistema de creencias	$\mu(\cdot) \geq 0$, $\sum_{x \in u} \mu(x) = 1, \forall u$

FIGURA 2.1. Notación y Terminología de Juegos Finitos en Forma Extensiva con Recuerdo Perfecto

Necesitaremos varias definiciones antes de pasar a la siguiente sección.

Si $x \in X$, denotaremos como $\mathbb{P}^b_x$ la distribución de probabilidad en Z si el juego se empezara en x y los jugadores jugaran según el perfil de estrategias b. Dado un sistema de creencias μ, un perfil de estrategias b y un conjunto de información u, definimos la distribución de probabilidad $\mathbb{P}^{b,\mu}_u$ en Z como $\mathbb{P}^{b,\mu}_u = \sum_{x \in u} \mu(x) \mathbb{P}^b_x$.

Estas distribuciones de probabilidad nos permiten calcular utilidades esperadas en partes de la forma extensiva diferentes al nodo inicial, que ya queda calculado con $R_i(b)$. Definimos $R_{ix}(b) = \sum_{z \in Z} \mathbb{P}^b_x(z) r_i(z)$ como el pago esperado del jugador i en el nodo x. De manera similar, $R_{iu}(b) = \sum_{z \in Z} \mathbb{P}^b(z|u) r_i(z) = \sum_{x \in u} \mathbb{P}^b(x|u) R_{ix}(b)$ es el pago esperado del jugador i en todo conjunto de información u tal que $\mathbb{P}^b(u) > 0$. Además, bajo el sistema de creencias μ, la expresión $R^\mu_{iu}(b) = \sum_{z \in Z} \mathbb{P}^{b,\mu}_u(z) r_i(z)$ denota el pago esperado del jugador i en el conjunto de información u.

2.3. Definiciones

Usaremos la notación $b \backslash b'_i$ para hablar del perfil de estrategias en el que todos los jugadores juegan de acuerdo con b, salvo el jugador i que juega b'_i. Diremos que la estrategia b_i es una mejor respuesta contra b si $b_i \in \arg\max_{b'_i \in B_i} R_i(b \backslash b'_i)$. Cuando $\mathbb{P}^b(u) > 0$, diremos que la estrategia b_i es una mejor respuesta contra b en el conjunto de información $u \in U_i$ si maximiza $R_{iu}(b \backslash b'_i)$ sobre el dominio en el que la expresión está bien definida.

La estrategia b_i es una mejor respuesta contra (b, μ) en el conjunto de información $u \in U_i$ si $b_i \in \arg\max_{b'_i \in B_i} R^\mu_{iu}(b \backslash b'_i)$. Si b_i prescribe una mejor respuesta contra (b, μ) en todos los conjuntos de información $u \in U_i$, diremos que b_i es una mejor respuesta secuencial contra (b, μ). El perfil de estrategias b es una mejor respuesta secuencial contra (b, μ) si prescribe una mejor respuesta secuencial contra (b, μ) para cada jugador.

Con esta terminología disponible definimos varios conceptos de equilibrio.

DEFINICIÓN 2.1 (Equilibrio de Nash). Un perfil de estrategias $b \in B$ es un equilibrio de Nash de Γ si todos los jugadores juegan una mejor respuesta contra b.

Denotamos $\mathrm{NE}(\Gamma)$ al conjunto de equilibrios de Nash de Γ. El equilibrio perfecto en subjuegos es un refinamiento del equilibrio de Nash. Requiere que en cada subjuego haya un equilibrio de Nash. En términos formales,

DEFINICIÓN 2.2 (Equilibrio Perfecto en Subjuegos). Un perfil de estrategias b es un equilibrio perfecto en subjuegos de Γ si, para cada subjuego Γ_y de Γ, la restricción b_y es un equilibrio de Nash en Γ_y.

Denotamos como $\mathrm{SPE}(\Gamma)$ el conjunto de equilibrios perfectos en subjuegos de Γ. Escribimos $\mathrm{SPEO}(\Gamma) = \{\mathbb{P}^b : b \in \mathrm{SPE}(\Gamma)\}$ para denotar el conjunto de *resultados* generados por el conjunto de equilibrios perfectos en subjuegos, y $\mathrm{SPEP}(\Gamma) = \{R(b) : b \in \mathrm{SPE}(\Gamma)\}$ para denotar el conjunto de pagos generados por el mismo conjunto, donde $R(b) = (R_1(b), \ldots, R_n(b))$.

La racionalidad secuencial es un refinamiento del equilibrio perfecto en subjuegos. Cada jugador debe maximizar en todos sus conjuntos de información de acuerdo con sus creencias sobre cómo el juego ha evolucionado hasta entonces. Si b es un perfil de estrategias completamente mixta, las creencias están perfectamente definidas por la regla de Bayes. En caso contrario, las creencias deben obedecer un requerimiento de consistencia. Un equilibrio secuencial es una valoración que satisface éste requerimiento de consistencia junto a un requerimiento de optimización. Esto es formalizado es las siguientes dos definiciones.

DEFINICIÓN 2.3 (Valoración Consistente). Una valoración (b, μ) es consistente si existe una secuencia $\{(b_t, \mu_t)\}_t$, donde b_t en un perfil de estrategias completamente mixto y $\mu_t(x) = \mathbb{P}^{b_t}(x|u)$ para $x \in u$, tal que $\lim_{t\to\infty}(b_t, \mu_t) = (b, \mu)$.

DEFINICIÓN 2.4 (Equilibrio Secuencial). Un equilibrio secuencial de Γ es una valoración consistente (b, μ) tal que b es una mejor respuesta secuencial contra (b, μ).

Si Γ es un juego extensivo, denotamos como $\mathrm{SQE}(\Gamma)$ al conjunto de estrategias b tales que (b, μ) es un equilibrio secuencial de Γ, para algún μ. Además, $\mathrm{SQEO}(\Gamma) = \{\mathbb{P}^b : b \in \mathrm{SQE}(\Gamma)\}$ denota el conjunto de resultados generados por equilibrios secuenciales y $\mathrm{SQEP}(\Gamma) = \{R(b) : b \in \mathrm{SQE}(\Gamma)\}$ denota el conjunto de pagos generados por equilibrios secuenciales. Recuérdese que $\mathrm{SQE}(\Gamma) \subseteq \mathrm{SPE}(\Gamma)$ para cualquier juego Γ.

Ahora introducimos nuevas definiciones que necesitaremos para los resultados.

DEFINICIÓN 2.5 (Subforma Mínima de un Conjunto de Información). Dado un conjunto de información u, la subforma mínima que contiene u, denotada como $\Xi(u)$, es la subforma Ξ_y que contiene u y no que no incluye ninguna otra subforma que contiene u.

Decimos que $\Gamma_y = (\Xi_y, \hat{r})$ es el subjuego mínimo que contiene u si Ξ_y es la subforma mínima que contiene u.

Dado un a forma extensiva hay conjuntos de información que siempre se alcanzan con probabilidad positiva. Cuando esto no ocurre decimos que el conjunto de información se puede evitar, formalmente:

DEFINICIÓN 2.6 (Conjunto de Información Evitable). Un conjunto de información u es evitable en la forma extensiva Ξ si $\mathbb{P}^b(u) = 0$, para algún $b \in B$. De la misma manera, decimos que el conjunto de información u es evitable en la subforma Ξ_y si $\mathbb{P}^b_y(u) = 0$, para algún $b \in B$.

Por razones que se verán claras en la próxima sección, estamos interesados en identificar los juegos extensivos donde ningún conjunto de información es evitable en la subforma mínima que lo contiene. Para tener una idea del conjunto de formas extensivas con esta característica véanse las figuras 2.2 y 2.3. En la primera, ningún conjunto de información es evitable en la forma extensiva. n la segunda, ningún conjunto de información es evitable en la subforma mínima que lo contiene.

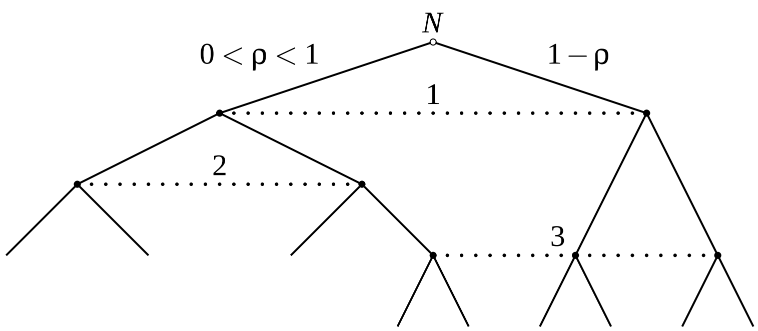

FIGURA 2.2. Forma extensiva donde ningún conjunto de información es evitable.

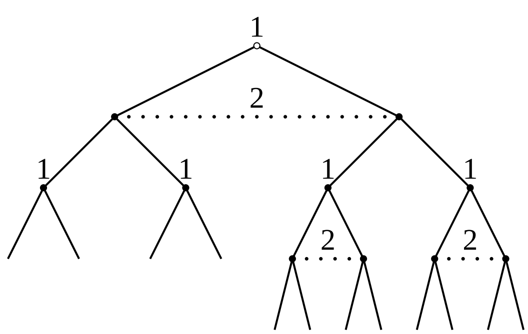

FIGURA 2.3. Forma extensiva donde ningún conjunto de información es evitable en su subforma mínima.

Alternativamente, véase la figura 2.4. El conjunto de información del jugador 2 es evitable en la forma extensiva (también el la mínima forma extensiva que lo contiene dado que el juego completo es el único subjuego propio) dado que el jugador 1 puede decidir no dejarle mover.

2.4. Resultados

Los tres conceptos de mejor respuesta introducidos en la sección 2.3 están relacionados, tal y como se muestra en los dos primeras afirmaciones del siguiente lema. La tercera afirmación del mismo lema muestra que el comportamiento de maximización en un conjunto de información es independiente del subjuego de referencia.

LEMA 2.1. *Fijado un juego $\Gamma = (\Xi, r)$, las siguientes afirmaciones son ciertas.*

1. *Dado un perfil de estrategias b, si $u \in U_i$ es tal que $\mathbb{P}^b(u) > 0$ y b_i es una mejor respuesta contra b, entonces b_i es una mejor respuesta contra b en el conjunto de información u.*
2. *Dada una valoración consistente (b, μ), si $u \in U_i$ es tal que $\mathbb{P}^b(u) > 0$ y b_i es una mejor respuesta contra b en el conjunto de información u, entonces b_i es una mejor respuesta contra (b, μ) en el conjunto de información u.*
3. *Si Γ_y es el subjuego mínimo que contiene u y (b_y, μ_y) es la restricción de alguna valoración consistente (b, μ) a Γ_y, entonces b_i es una mejor respuesta contra (b, μ) en el conjunto de información u en el juego Γ si y sólo si $b_{y,i}$ es una mejor respuesta contra (b_y, μ_y) en el conjunto de información u en el juego Γ_y.*

DEMOSTRACIÓN. La parte 1 es conocida.[3] Las pruebas para las partes 2 y 3 son triviales. □

[3]Por ejemplo, véase van Damme (1991), Teorema 6.2.1.

En la siguiente proposición identificamos el conjunto de formas extensivas donde el equilibrio secuencial no refina al equilibrio perfecto en subjuegos. Este último concepto permite jugar amenazas no creíbles en conjuntos de información que puede que nunca se alcancen, condicionado a su subjuego mínimo. Sin embargo, si nos restringimos a los juegos extensivos donde ningún conjunto de información se puede evitar en si subforma mínima, podemos usar el lema anterior para mostrar que el equilibrio secuencial y el perfecto en subjuegos coinciden.

No sólo es esta restricción particular suficiente, pero también necesaria para la equivalencia por la siguiente interpretación: siempre podremos encontrar un vector de pagos tal que los conjuntos de equilibrios perfectos en subjuegos y equilibrios secuenciales son diferentes cuando la restricción no se mantiene. La construcción de dicho vector de pagos se basa en, primero, llevar uno de los conjuntos de información que son evitables en su subforma mínima fuera de uno de las sendas generadas por un equilibrio perfecto en subjuegos y, segundo, hacer una de las acciones disponibles en este conjunto de información evitable estrictamente dominada. Considérese por ejemplo el juego contenido en la figura 2.4. Si el jugador 1 mueve *Out* da al jugador 2 la posibilidad de tomar el movimiento estrictamente dominado H, lo cual constituye un equilibrio perfecto en subjuegos que no es secuencial.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea* Ξ *una forma extensiva tal que ningún conjunto de información* u *es evitable en* $\Xi(u)$. *Entonces, para cualquier vector de pagos* r*, el juego* $\Gamma = (\Xi, r)$ *es tal que* $\mathrm{SPE}(\Gamma) = \mathrm{SQE}(\Gamma)$. *Alternativamente, si* Ξ *es una forma extensiva con un conjunto de información* u *que es evitable en* $\Xi(u)$*, entonces podemos encontrar un vector de pagos* r *tal que, para el juego* $\Gamma = (\Xi, r)$, $\mathrm{SPE}(\Gamma) \neq \mathrm{SQE}(\Gamma)$.

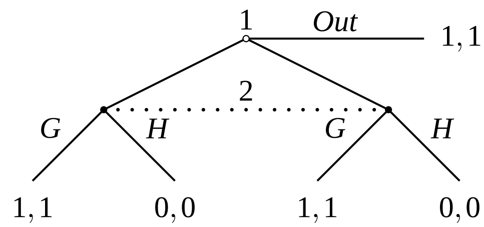

FIGURA 2.4. Un ejemplo del uso del algoritmo contenido en la prueba de la proposición 2.1 para generar un juego donde $\mathrm{SPE}(\Gamma) \neq \mathrm{SQE}(\Gamma)$.

DEMOSTRACIÓN. Probemos primero la primera parte de la proposición. Tan solo tenemos que mostrar que $\mathrm{SPE}(\Gamma) \subseteq \mathrm{SQE}(\Gamma)$. Considérese $b \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$ y constrúyase una valoración consistente (b,μ).[4] Tenemos que probar que el conjunto

$$\tilde{U}(b,\mu) = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ u \in U_i : b_i \notin \arg\max_{\tilde{b}_i \in B_i} R^{\mu}_{iu}(b \backslash \tilde{b}_i) \right\} \tag{1}$$

está vacío. Supóngase que $\tilde{U}(b,\mu) \neq \emptyset$, y considérese $u \in \tilde{U}(b,\mu)$. Sea Γ_y el subjuego mínimo que contiene a u y sea j el jugador que mueve en u. Lema 2.1.3 implica que $b_{y,j}$ no es una mejor respuesta contra (b_y,μ_y) en u en el subjuego Γ_y. Parte 2 implica que, o bien $\mathbb{P}^b_y(u) = 0$ ó $b_{y,j}$ no es una mejor respuesta contra b_y en u. Si el último caso fuera cierto, parte 1 implicaría de todas maneras que $\mathbb{P}^b_y(u) = 0$. Sin embargo, u no es evitable en Ξ_y. Esto nos da la contradicción.

[4]Un método general para definir valoraciones (b,μ) para cualquier $b \in B$, en una forma extensiva, es el siguiente: Tómese una secuencia de estrategias completamente mixtas $\{b_t\}_t \to b$ y para cada t, constrúyase $\mu^t(x) = \mathbb{P}^{b_t}(x|u) \in [0,1]$, $\forall x \in u$, para todos los conjuntos de información u. Sea $k = |X \setminus P_0|$. El conjunto $[0,1]^k$ es compacto y dado que $\mu^t \in [0,1]^k, \forall t$, existe una subsecuencia de $\{t\}$, digamos $\{t_j\}$, tal que $\{\mu^{t_j}\}_{t_j}$ converge en $[0,1]^k$. Defina las creencias como $\mu = \lim_{j\to\infty} \mu^{t_j}$.

Pasemos a demostrar la segunda parte de la proposición. Supongamos que $u \in U_i$ es un conjunto de información evitable en $\Xi(u)$ y sea $c \in C_u$ cualquier opción disponible en u. Asignemos los siguientes pagos:

$$\begin{cases} r_i(z) = 0 \quad \forall i \quad \text{si } z \in Z(c) \\ r_i(z) = 1 \quad \forall i \quad \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{2}$$

Claramente cualquier estrategia $b_i = b_i \backslash c$ no puede ser parte de un equilibrio secuencial ya que jugar otra opción en u da al jugador i un pago estrictamente mayor en ese conjunto de información.

Ahora tenemos que probar que existe un equilibrio perfecto en subjuegos b tal que $b_i = b_i \backslash c$. Por hipótesis existe un b' tal que $\mathbb{P}_y^{b'}(u) = 0$ en el subjuego mínimo Γ_y que contiene a u. La igualdad $\mathbb{P}_y^{b}(u) = 0$ también es cierta para $b = b' \backslash c$. El perfil de estrategias b_y es un equilibrio de Nash en Γ_y ya que nadie puede obtener un pago mayor que 1. Por el mismo razonamiento, b induce un equilibrio de Nash en todos los subjuegos, por lo tanto es un equilibrio perfecto en subjuegos. Esto completa la demostración. $\square$

Usamos la forma extensiva del juego del caballo de Selten (Figures 2.5 y 2.6) para mostrar que el algoritmo (usado en la demostración de la segunda parte de la proposición 2.1) no depende ni del conjunto de información que es evitable ni de la opción que se toma para construir los pagos. El conjunto de información u del algoritmo corresponde al conjunto de información del jugador 2 (jugador 3) en la figura 2.5 (figura 2.6), y la opción $c \in C_u$ del algoritmo corresponde a la opción B (opción R) en la figura 2.5 (figura 2.6).

Nótese que la asignación de pago de la prueba anterior da como resultado una diferencia en estrategias pero no en pagos de equilibrio. La razón es que no siempre podremos alcanzar una diferencia en resultados de equilibrio (y, por lo tanto, tampoco en pagos de equilibrio). La figura 2.7 contiene una forma extensiva donde el segundo conjunto de información del jugador

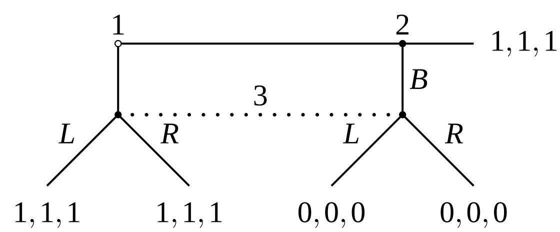

FIGURA 2.5. El caballo de Selten. Ejemplo de como usar el algoritmo de la prueba de la proposición 2.1 para construir un juego para el que $\mathrm{SPE}(\Gamma) \neq \mathrm{SQE}(\Gamma)$.

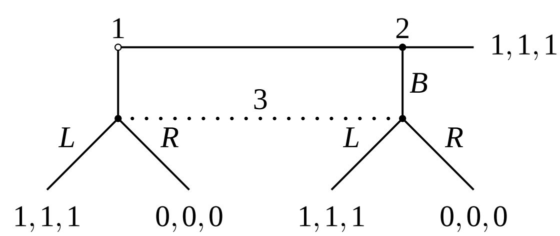

FIGURA 2.6. El caballo de Selten. Otra aplicación del algoritmo de la proposición 2.1.

1 es evitable en su subforma mínima, y sin embargo, los conjuntos de resultados generados por el equilibrio secuencial y por el equilibrio perfecto en subjuegos siempre coinciden, sin importar los pagos asignados a los nodos finales. La proposición 2.2 nos da una condición suficiente y necesaria para que los conjuntos de resultados (y también pagos) generados por ambos conceptos de equilibrio coincidan para cualquier función de pagos.

Antes de eso, necesitaremos ser capaces de identificar qué jugadores puede evitar un conjunto de información dado. Sea u un conjunto de información, y sea $\Xi_y = \Xi(u)$. Considérese el conjunto de estrategias $B(u) = \left\{b \in B : \mathbb{P}_y^b(u) > 0\right\}$.

DEFINICIÓN 2.7. Diremos que el conjunto de información u puede evitarse en $\Xi(u)$ por el jugador i si existe un perfil de estrategias $b \in B(u)$, y una opción $c \in C_v$, con $v \in U_i$, tal que $\mathbb{P}_y^{b \setminus c}(u) = 0$.

Recordemos que dado un conjunto de información u que es evitable en $\Xi(u) = \Xi_y$ tiene que existir un perfil de estrategias b tal que $\mathbb{P}_y^b = 0$ (definición 2.6). Si un jugador, pongamos el jugador i, puede modificar de manera unilateral

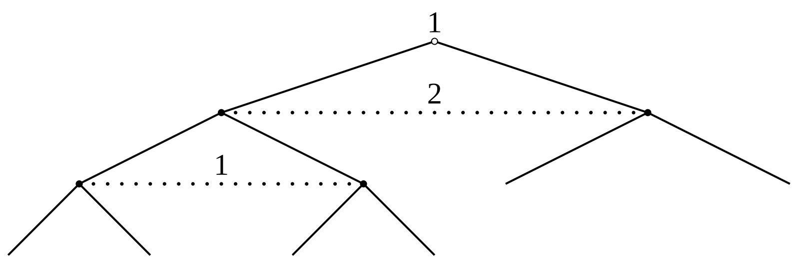

FIGURA 2.7. El segundo conjunto de información del jugador 1 sólo puede ser evitado por el jugador 1. La proposición 2.2 implica que SPEP(Γ) = SQEP(Γ).

Esta condición también es necesaria para la equivalencia en resultados generados por equilibrios en el siguiente sentido: si el jugador i puede evitar el conjunto de información u en su subforma mínima, y si j es el dueño del conjunto de información u, existe una asignación de pagos para la que el jugador j puede amenazar al jugador i de manera no creíble (algo no permitido por el equilibrio secuencial pero permitido por el perfecto en subjuegos) causando la diferencia en resultados de equilibrio.

El siguiente lema será de utilidad en la prueba de la proposición 2.2.

LEMA 2.2. *Sea Ξ una forma extensiva tal que, siempre que un conjunto de información u sea evitable en $\Xi(u)$, sólo pueda ser evitado en $\Xi(u)$ por su dueño. Sean (b,μ) y (b',μ') dos valoraciones consistentes. Si b y b' son tales que $\mathbb{P}_y^b = \mathbb{P}_y^{b'}$ para todo Ξ_y, entonces $\mu = \mu'$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean (b,μ) y (b',μ') dos valoraciones consistentes tales que $\mathbb{P}_y^b = \mathbb{P}_y^{b'}$ para todas las subformas Ξ_y. Nótese que b' se puede obtener de b cambiando el comportamiento en conjuntos de información que se alcanzan con probabilidad cero dentro de su subforma mínima. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, supongamos que b y b' sólo se diferencian en uno de esos conjuntos de información, pongamos $u \in U_i$, y sea $\Xi_y = \Xi(u)$. El cambio de b hacia b' puede causar un cambio en creencias sólo en los conjuntos de información que siguen a u y que pertenecen a la misma subforma mínima Ξ_y. Sea $v \in U_j$ uno de esos conjuntos de información.

Si $j = i$, el recuerdo perfecto y la consistencia implican que no hay cambio en creencias en el conjunto de información v. Si $j \neq i$ existen dos casos posibles, o bien $\mathbb{P}_y^b(v) > 0$ ó $\mathbb{P}_y^b(v) = 0$. En el primer caso las creencias en v están definidas de manera única, y por lo tanto $\mu(x) = \mu'(x), \forall x \in v$, y lo que es más, $\mu(x) = \mu'(x) = 0, \forall x \in v$ tal que $u < x$. En el segundo caso, dado que el conjunto de información v sólo puede ser evitado por el jugador j en $\Xi(u)$ existe una opción $c \in C_w$ del jugador j tal que $\mathbb{P}_y^{b\backslash c}(v) > 0$, ya que de otra manera el jugador i también podría evitar el conjunto de información u en $\Xi(u)$. Sean $b'' = b\backslash c$ y $b''' = b'\backslash c$, entonces por la discusión del primer caso, $\mu''(x) = \mu'''(x), \forall x \in v$, además, el recuerdo perfecto y la consistencia implican que $\mu''(x) = \mu(x)$ y $\mu'''(x) = \mu'(x), \forall x \in v$, que a su vez implican $\mu(x) = \mu'(x), \forall x \in v$. $\square$

Estamos preparados para enunciar y demostrar nuestro segundo resultado de equivalencia.

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea* Ξ *una forma extensiva tal que, siempre que un conjunto de información* u *es evitable en* $\Xi(u)$*, sólo puede ser evitado en* $\Xi(u)$ *por su dueño. Entonces para cualquier posible vector de pagos* r*, el juego* $\Gamma = (\Xi, r)$ *es tal que* $\mathrm{SPEO}(\Gamma) = \mathrm{SQEO}(\Gamma)$*. Por el contrario, si* Ξ *es una forma extensiva con un conjunto de información* u *que puede ser evitado en* $\Xi(u)$ *por un jugador diferente del dueño, entonces podemos encontrar un vector de pagos* r *tal que para el juego* $\Gamma = (\Xi, r)$*,* $\mathrm{SPEP}(\Gamma) \neq \mathrm{SQEP}(\Gamma)$.

DEMOSTRACIÓN. Probemos primero la primera parte de la proposición. Necesitamos demostrar que $\forall b \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$, $\mathbb{P}^b \in \mathrm{SQEO}(\Gamma)$. Tómese un $b \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$ cualquiera y constrúyase unas creencias consistentes μ.

Si $\tilde{U}(b,\mu) = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ u \in U_i : b_i \notin \arg\max_{\tilde{b}_i \in B_i} R^{\mu}_{iu}(b \backslash \tilde{b}_i) \right\} = \emptyset$, entonces la estrategia $b \in \mathrm{SQE}(\Gamma)$ y $\mathbb{P}^b \in \mathrm{SQEO}(\Gamma)$. En caso contrario, necesitamos encontrar un equilibrio secuencial (b^*, μ^*) tal que $\mathbb{P}^{b^*} = \mathbb{P}^b$.

- **Paso 1:** Tome un conjunto de información $u \in \tilde{U}(b,\mu)$. Sea i el jugador que mueve en ese conjunto de información , y sea $\Gamma_y = (\Xi(u), \hat{r})$. Al igual que en la demostración de la proposición 2.1, nótese que por el lema 2.1, u debe ser tal que $\mathbb{P}^b_y(u) = 0$, por lo que es evitable en su subforma mínima. Por hipótesis, u sólo puede ser evitado por el jugador i.
- **Paso 2:** Sea b' el perfil de estrategias b modificado para que el jugador i juegue una mejor respuesta contra (b,μ) en el conjunto de información u. Constrúyase una valoración consistente (b', μ'). Nótese que $\mathbb{P}^{b'} = \mathbb{P}^b$ y, en particular, $\mathbb{P}^{b'}_y = \mathbb{P}^b_y$. Por el lema 2.2, μ y μ' asigna la misma distribución de probabilidad en cada conjunto de información.

Paso 3: Ahora demostraremos que $b' \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$. Para esto necesitamos que $b'_y \in \mathrm{NE}(\Gamma_y)$. Dado el perfil de estrategias b'_y el el subjuego Γ_y, el jugador i no se puede desviar de manera ventajosa porque esto significaría que también habría sido capaz de desviarse ventajosamente cuando se jugaba b_y en el subjuego Γ_y, lo cual contradice $b_y \in \mathrm{NE}(\Gamma_y)$.

Supongamos ahora que existe un jugador $j \neq i$ que tiene una desviación ventajosa $b''_{y,j}$ desde $b'_{y,j}$ en el subjuego Γ_y. La hipótesis en la forma extensiva Ξ implica que $\mathbb{P}_y^{b \backslash b''_{y,j}} = \mathbb{P}_y^{b' \backslash b''_{y,j}}$, que a su vez implica que $b''_{y,j}$ debía haber sido también una desviación ventajosa desde b_y. Sin embargo, esto es imposible ya que $b_y \in \mathrm{NE}(\Gamma_y)$.

Paso 4: Por el paso 2, $|\tilde{U}(b',\mu')| = |\tilde{U}(b,\mu)| - 1$. Si $|\tilde{U}(b',\mu')| \neq 0$, aplíquese el mismo tipo de transformación en b'. Suponga que la cardinalidad de $\tilde{U}(b,\mu)$ es q, entonces en la q-ésima transformación obtendremos una valoración consistente $(b^{(q)},\mu^{(q)})$ tal que $b^{(q)} \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$, $\mathbb{P}^b = \mathbb{P}^{b^{(q)}}$, y $\tilde{U}(b^{(q)},\mu^{(q)}) = \emptyset$. Observamos que, $b^{(q)} \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$ y $\tilde{U}(b^{(q)},\mu^{(q)}) = \emptyset$ implican $b^{(q)} \in \mathrm{SQE}(\Gamma)$. Por lo tanto, $(b^{(q)},\mu^{(q)})$ es el equilibrio secuencial (b^*,μ^*) que estábamos buscando.

Probemos ahora la segunda parte de la proposición. Se prueba para formas extensivas que carecen de subformas propias para una notación más simple, sin embargo, el argumento se extiende inmediatamente al caso general.tiende inmediatamente al caso general.

Dado un nodo $x \in T$, el conjunto $\mathrm{Path}(x) = \{c \in \bigcup_u C_u : c < x\}$ de opciones se llama senda hacia x.

Suponga que u es un conjunto de información que puede ser evitado en Ξ por un jugador, pongamos el jugador j, que no es el mismo que el que mueve en él, digamos el jugador i. Nótese que debe existir un $x \in u$ y una opción $c \in C_v$, donde $v \in U_j$, tal que si $b = b \setminus \mathrm{Path}(x)$, entonces $\mathbb{P}^{b \setminus c}(u) = 0$ no es cierto.

Sea $f \in C_u$ cualquier opción disponible para el jugador i en u. Asignemos los siguientes pagos:

$$\begin{cases} r_j(z) = 0 & \text{si } z \in Z(c) \\ r_i(z) = r_j(z) = 0 & \text{si } z \in Z(f) \\ r_i(z) = r_j(z) = 1 & \text{si } z \in Z(u) \setminus Z(f). \end{cases} \tag{3}$$

Sea $d \in \mathrm{Path}(x)$ con $d \notin C_v$, asigne pagos a los nodos finales, siempre que 3 lo permita, del siguiente modo:

$$r_k(z) > r_k(z') \text{ donde } z \in Z(d) \text{ y } z' \in Z(C_w \setminus \{d\}). \tag{4}$$

El jugador k de arriba es el jugador que tiene la opción d disponible en el conjunto de información w. Demos un pago igual a cero a todos los jugadores en el resto de nodos finales.

En palabras, el jugador j mueve con probabilidad positiva en el juego. Tiene dos opciones, o bien mover hacia el conjunto de información u y dejar al jugador i decidir, o mover apartándose del conjunto de información u. Si mueve apartándose obtendrá cero seguro. Si deja al jugador i decidir, el jugador i puede hacer que los dos obtengan cero escogiendo f, o hacer que los dos obtengan uno escogiendo cualquier otra opción. Gracias a 4, ningún jugador se impondrá en esta descripción del desarrollo del juego.

Este juego tiene un equilibrio de Nash en el que el jugador i mueve f y el jugador j obtiene un pago igual a cero moviendo c. Sin embargo, en cualquier equilibrio secuencial, el jugador i no elige f y, como consecuencia, el jugador j toma la opción contenida en $\mathrm{Path}(x) \cap C_v$. Por lo tanto, en todos los equilibrios secuenciales, los jugadores i y j obtienen un pago estrictamente superior a cero.[5] Esto completa la demostración. $\square$

Para una aplicación muy simple del anterior algoritmo, considérese el juego extensivo de la figura 2.4 y substitúyase el vector de pagos que sigue al movimiento *Out* del jugador 1, por el vector de pagos $(0,0)$. Nuevamente, el primer jugador moviendo *Out* y el segundo jugador tomando el movimiento estrictamente dominado H, es un equilibrio perfecto en subjuegos que genera unos pagos de equilibrio iguales a $(0,0)$. Sin embargo, en cualquier equilibrio secuencial, el jugador 2 mueve G y el jugador 1 no mueve *Out*, lo cual hace $(1,1)$ el único pago generado por el equilibrio secuencial.

NOTA 2.1. Nótese que, en el conjunto de formas extensivas considerado en la proposición anterior las creencias están definidas únicamente para cualquier perfil de estrategias (considérese $b' = b$ en el lema 2.2). Uno puede pensar incorrectamente que es la unicidad en las creencias lo que está tras la equivalencia. Considere la modificación de la forma extensiva de la figura 2.7 de tal manera que el segundo conjunto de información del jugador 1 sea controlado por un nuevo jugador 3. Esta forma extensiva modificada tiene un único sistema de creencias consistentes para cualquier vector de estrategia, pero, tal y como se ha visto en la proposición 2.2, el conjunto de resultados de equilibrio no el mismo para ambos conceptos de equilibrio para cualquier vector de pagos.

2.4.1. Equilibrio Perfecto Bayesiano. Estos resultado pueden ser de utilidad en el trabajo aplicado. Pero muchos economistas aplicados usan el equilibrio perfecto bayesiano en juegos extensivos con información incompleta. Esto nos motiva el análisis de la relación entre entre este concepto y nuestros resultado anteriores. La definición formal que usaremos es:

[5] Los pagos de equilibrio no son necesariamente iguales a cero debido a posibles movimientos de la naturaleza.

DEFINICIÓN 2.8. Una valoración (b,μ) es un equilibrio perfecto Bayesiano del juego extensivo Γ si satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo conjunto de información u si $\mathbb{P}_y^b(u) > 0$, entonces $\mu(x) = \mathbb{P}_y^b(x|u)$, donde $\Xi_y = \Xi(u)$, para todo $x \in u$;
2. b es una mejor respuesta secuencial contra (b,μ).[6]

Sea $\mathrm{PBE}(\Gamma)$ el conjunto de estrategias que junto a algún sistema de creencias forma un equilibrio perfecto bayesiano. Los conjuntos $\mathrm{PBEP}(\Gamma)$ y $\mathrm{PBEO}(\Gamma)$ son, respectivamente, los conjuntos de pagos y resultados generados por el equilibrio perfecto bayesiano.

Una rápida inspección de la definición revela que el equilibrio perfecto bayesiano implica el equilibrio perfecto en subjuegos y que es implicado por el equilibrio secuencial. Esta observación por si misma prueba que las partes de suficiencia de las proposiciones 2.1 y 2.2 se mantienen si substituimos $\mathrm{SQE}(\Gamma)$ por $\mathrm{PBE}(\Gamma)$ y $\mathrm{SQEO}(\Gamma)$ por $\mathrm{PBEO}(\Gamma)$.

En cuanto a las condiciones de necesidad de ambas proposiciones, los algoritmos propuestos también son válidos para construir equilibrios perfectos en subjuegos (o pagos generados por éste) que no son perfectos bayesianos (o pagos generados por éste). Nótese que el movimiento irracional prohibido a los jugadores que tienen creencias consistentes también se les prohíbe a los jugadores que tienen cualquier sistema de creencias.

En otras palabras, las condiciones para la equivalencia entre el equilibrio perfecto en subjuegos y el perfecto bayesiano son análogas a las que nos dan la equivalencia entre el primer concepto y el equilibrio secuencial. Formalmente:

COROLARIO 2.1. *Si Ξ es una forma extensiva tal que ningún conjunto de información u puede ser evitado en $\Xi(u)$, entonces para cualquier vector*

[6] Esta en la definición más débil y también la más usada. Véase Fudenberg y Tirole (1991) para otras definiciones relacionadas.

de pagos r, el juego $\Gamma = (\Xi, r)$ *es tal que* $\mathrm{SPE}(\Gamma) = \mathrm{PBE}(\Gamma)$. *Si* Ξ *es una forma extensiva con un conjunto de información u que puede ser evitado en* $\Xi(u)$*, entonces podemos encontrar un vector de pagos r tal que para el juego* $\Gamma = (\Xi, r)$, $\mathrm{SPE}(\Gamma) \neq \mathrm{PBE}(\Gamma)$.

El resultado análogo para pagos y resultados derivados de equilibrio es:

COROLARIO 2.2. *Sea* Ξ *una forma extensiva tal que, siempre que un conjunto de información u pueda ser evitado en* $\Xi(u)$*, tan solo puede ser evitado en* $\Xi(u)$ *por su dueño, entonces para cualquier vector de pagos r, el juego* $\Gamma = (\Xi, r)$ *es tal que* $\mathrm{SPEO}(\Gamma) = \mathrm{PBEO}(\Gamma)$. *Si* Ξ *es una forma extensiva con un conjunto de información u que puede ser evitado en* $\Xi(u)$ *por un jugador diferente al dueño, entonces podemos encontrar un vector de pagos r tal que para el juego* $\Gamma = (\Xi, r)$, $\mathrm{SPEP}(\Gamma) \neq \mathrm{PBEP}(\Gamma)$.

2.5. Ejemplos

Estos resultado pueden ser aplicados en muchos juegos considerados en la literatura económica. Nos permite identificar de manera inmediata los juegos extensivos finitos de información incompleta para los que los equilibrios perfectos en subjuegos respetan la inducción hacia atrás expresada como equilibrio secuencial.

Besley y Coate (1997) propusieron un modelo económico de democracia representativa. El proceso político es un juego en tres etapas. En la etapa 1, cada ciudadano decide si ser candidato o no para el cargo público. En la segunda etapa, se vota sobre la lista de candidatos. En la etapa número 3 el candidato con mayor número de votos elige el plan de acción. Besley y Coate resuelven el modelo usando el equilibrio perfecto en subjuegos y encuentran múltiple equilibrios con muchas posibles consecuencias en cuanto al número de candidatos. Esto puede sugerir que algún refinamiento podría dar predicciones más agudas. Sin embargo, dada la estructura del juego que consideran, se sigue de los resultados de la sección anterior que todos los equilibrios perfectos en subjuegos son secuenciales. Por lo que ninguna comprensión del proceso adicional se obtendría de aplicar este refinamiento.

La estructura de la información del model de Besley y Coate es un caso particular del marco de trabajo más general ofrecido por Fudenberg y Levine (1983). Caracterizan la estructura de la información de un juego en múltiples etapas con horizonte finito como “casi” perfecta, dado que en cada periodo los jugadores eligen sus acciones de manera simultanea, la naturaliza no mueve y no hay incertidumbre al final de cada etapa. Como ellos apuntan, el equilibrio secuencial no refina al equilibrio perfecto en subjuegos en esta clase de juegos. Esto también se puede obtener como implicación de la proposición 2.1 de este artículo.

En la versión del modelo de Diamond y Dybvig (1983) ofrecida por Adão y Temzelides (1998) se discute el problema de inestabilidad bancaria así como la descentralización del óptimo contrato de depósito. Se acercan a la primera pregunta con un modelo son un banco “planificador social”. El banco ofrece el contrato eficiente como un contrato de depósito en el periodo inicial. En la primera etapa los agentes eligen de manera secuencial si depositar en el banco o permanecer en autarquía. En la segunda etapa, aquellos agentes elegidos por la naturaleza como pacientes, eligen simultáneamente si falsear sus preferencias y retirar el depósito, o decir la verdad y esperar. La forma normal reducida del juego tiene dos equilibrios de Nash simétricos y en estrategias puras. En el primero todos los agentes depositan en el banco y anuncian correctamente sus preferencias, en el segundo todos los agentes permanecen en autarquía. El hecho que los dos equilibrios sean secuenciales lo presentan en su proposición 2. Dada la forma extensiva que usan, nuestra proposición 2.1 también implica su resultado.

En el marco de la implementación, Moore y Repullo (1988) presentan la fuerza de la implementación en el equilibrio perfecto en subjuegos. Si una función de elección es implementable en equilibrio perfecto en subjuegos por un mecanismo dado, el conjunto de estrategias es finito, y ningún conjunto de información es evitable en su subforma mínima en la forma extensiva del mecanismo, entonces nuestro trabajo establece la implementabilidad en el equilibrio secuencial (Véase, por ejemplo, el ejemplo que estudian en la sección 5, pag. 1213-1215.)

Más ejemplos se pueden encontrar en libros de texto de teoría de juegos, como los de Fudenberg y Tirole (1996), Myerson (1991), y Osborne y Rubinstein (1994). Nótese que cuando el equilibrio perfecto en subjuegos y el secuencial difieren en un juego extensivo, existen conjuntos de información que son evitables en su subforma mínima. Como ejemplos considérense las figuras 8.4 y 8.5 en Fudenberg y Tirole (1996), las figuras de la 4.8 a la 4.11 en Myerson (1991) y las figuras 225.1 y 230.1 en Osborne y Rubinstein (1994).

2.6. Apéndice: Notación y Terminología

2.6.1. Formas Extensivas. Una forma extensiva con n jugadores es $\Xi = (T, \leq, P, U, C, p)$, donde T es un conjunto finito de nodos y $\leq$ es un orden parcial en T, que representa precedencia. Usamos la notación $x < y$ para decir que el nodo y viene después que el nodo x. El predecesor inmediato de x es $A(x) = \max\{y : y < x\}$, y el conjunto de sucesores inmediatos de x es $S(x) = \{y : x \in A(y)\}$. El par $(T, \leq)$ es un árbol con una raíz única α: para cualquier $x \in T$, $x \neq \alpha$, existe una única secuencia $\alpha = x_0, x_1, \ldots, x_n = x$ con $x_i \in S(x_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$. El conjunto de nodos finales es $Z = \{x : S(x) = \emptyset\}$ y $X = T \setminus Z$ es el conjunto de nodos de decisión. Escribimos $Z(x) = \{y \in Z : x < y\}$ para denotar el conjunto de nodos finales que siguen a x, y si E es un conjunto arbitrario de nodos escribimos $Z(E) = \{z \in Z(x) : x \in E\}$.

2.6.2. Partición de Jugadores. La partición de jugadores, P, es una partición de X en conjuntos $P_0, P_1, \ldots, P_n$, donde P_i es el conjunto de nodos de decisión del jugador i y P_0 representa el conjunto de nodos donde la naturaleza mueve. La asignación de probabilidades p especifica para todo $x \in P_0$ una distribución de probabilidad p_x completamente mixta en $S(x)$.

2.6.3. Partición de Información. La partición de información U es $(U_1, \ldots, U_n)$, donde U_i es una partición de P_i en conjuntos de información del jugador i, tal que (i) si $u \in U_i$, $x, y \in u$ y $x \leq z$ para $z \in X$, entonces no podemos tener $z < y$, y (ii) si $u \in U_i$, $x, y \in u$, entonces $|S(x)| = |S(y)|$. Por lo tanto, si u es un conjunto de información y $x \in X$, tiene sentido escribir $u < x$. Además, si $u \in U_i$, normalmente nos referiremos al jugador i como el dueño del conjunto de información u.

2.6.4. Partición de Opciones. Si $u \in U_i$, el conjunto C_u es el conjunto de opciones que i tiene disponibles en u. Una opción $c \in C_u$ es una colección de $|u|$ nodos con un único elemento de $S(x)$ para cada $x \in u$. Si el jugador i elige $c \in C_u$ en el conjunto de información $u \in U_i$ cuando está en $x \in u$, entonces el nodo siguiente alcanzado por el juego es el elemento de $S(x)$ contenido en c. La colección completa $C = \{C_u : u \in \bigcup_{i=1}^{n} U_i\}$ se llama la partición de opciones. Siempre supondremos que $|C_u| > 1$ para cada conjunto de información u.

2.6.5. Juegos en forma extensiva. Definimos un juego en forma extensiva con n jugadores como un par $\Gamma = (\Xi, r)$, donde Ξ es una forma extensiva con n jugadores y r, la función de pagos, es $(r_1, \ldots, r_n)$, donde r_i es una función real con dominio Z. Supondremos constantemente que la forma extensiva Ξ satisface recuerdo perfecto, es decir, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$u, v \in U_i$, $c \in C_u$ y $x, y \in v$, tenemos que $c < x$ si y sólo si $c < y$. Por lo tanto, podemos decir que la opción c está antes que el conjunto de información v (y lo denotaremos $c < v$) y que el conjunto de información u está antes que el conjunto de información v (y lo denotaremos $u < v$).

2.6.6. Estrategias de Comportamiento, Creencias y Valoraciones. Una estrategia de comportamiento b_i del jugador i es una secuencia de funciones $(b_i^u)_{u \in U_i}$ tal que $b_i^u : C_u \to \mathbb{R}_+$ y $\sum_{c \in C_u} b_i^u(c) = 1, \forall u$. El conjunto B_i representa el conjunto de estrategias de comportamiento disponibles para el jugador i. Un perfil de estrategias de comportamiento es un elemento de $B = \prod_{i=1}^n B_i$. Como es usual en juegos en forma extensiva, restringiremos la atención a las estrategias de comportamiento.[7] A lo largo del texto, simplemente nos referiremos a ellas como estrategias.

Si $b_i \in B_i$ y $c \in C_u$ con $u \in U_i$, entonces $b_i \backslash c$ denota la estrategia b_i cambiada para que c se tome con probabilidad una en u. Si $b \in B$ y $b'_i \in B_i$ entonces $b \backslash b'_i$ es el perfil de estrategias $(b_1, \ldots, b_{i-1}, b'_i, b_{i+1}, ..., b_n)$. Si c es una opción del jugador i entonces $b \backslash c = b \backslash b'_i$, donde $b'_i = b_i \backslash c$.

Un sistema de creencias μ es una función $\mu : X \setminus P_0 \to [0,1]$ que satisface $\sum_{x \in u} \mu(x) = 1$, $\forall u$. Una valoración (b, μ) es un perfil de estrategias junto a un sistema de creencias.

2.6.7. Subformas y subjuegos. Sea $\hat{T} \subset T$ un conjunto de nodos tales que (i) $\exists y \in \hat{T}$ con $y < x$, $\forall x \in \hat{T}$, $x \neq y$, (ii) si $x \in \hat{T}$ entonces $S(x) \subset \hat{T}$, y (iii) si $x \in \hat{T}$ y $x \in u$ entonces $u \subset \hat{T}$. Entonces decimos que $\Xi_y = (\hat{T}, \hat{\leq}, \hat{P}, \hat{U}, \hat{C}, \hat{p})$ es una subforma de Ξ que empieza en el nodo y, y en donde $(\hat{\leq}, \hat{P}, \hat{U}, \hat{C}, \hat{p})$ están definidos desde Ξ en $\hat{T}$ por restricción. Un subjuego es un par $\Gamma_y = (\Xi_y, \hat{r})$, donde $\hat{r}$ es la restricción de r a los nodos finales de Ξ_y. Denotamos como b_y a la restricción de $b \in B$ a la subforma Ξ_y (al

[7] Podemos hacer esto sin pérdida de generalidad debido al recuerdo perfecto y al teorema de Kuhn, véase Kuhn (1953).

subjuego Γ_y). La restricción del sistema de creencias μ a la subforma Ξ_y (al subjuego Γ_y) se denota como μ_y.

CAPíTULO 3

Equilibrio Perfecto (y) No Dominado en Juegos de Poisson[1]

3.1. Introducción

Los modelos con incertidumbre poblacional han sido introducidos por Myerson (1998, 2000) y Milchtaich (2004), para describir situaciones en las que los jugadores no saben cual es el número de oponentes. Entre estos juegos se ha concedido una atención especial a los juegos de Poisson, en los que el número de jugadores es una variable aleatoria con una media dada y en los que los tipos de jugadores son variables aleatorias idénticamente distribuidas. Las propiedades de la distribución de Poisson hacen de los juegos de Poisson una clase de juegos muy conveniente. Están caracterizados por las propiedades de *acciones independientes* (para cada perfil de estrategias el número de jugadores que toman dos acciones diferentes son variables aleatorias independientes) y *equivalencia ambiental* (un jugador estima la misma probabilidad para el perfil de tipos de los otros jugadores que la que un observador externo para el perfil de tipos del juego al completo, donde un perfil de tipos es un vector que enumera cuantos jugadores hay con cada tipo).

Myerson (1998) extiende la definición del equilibrio de Nash reconoce su existencia. La literatura existente sobre refinamientos de equilibrio en juegos no cooperativos nos advierte que debemos ser cautelosos acerca de la estabilidad estratégica del equilibrio de Nash. Si esta preocupación está bien fundada podemos preguntarnos cuales son los equilibrios de Nash que son auto-impuestos en este escenario.

[1]Este capítulo está basado en De Sinopoli y Gonzalez Pimienta (2007)

El siguiente ejemplo nos servirá para introducir los juegos de Poisson al lector y para ilustrar cual es la naturaleza de la pregunta. Un jugador se encuentra en su casa y tiene dos alternativas posibles, puede salir a algún evento social o se puede quedar en casa. No sabe cuantos jugadores están planteándose la misma disyuntiva, pero sabe que este número es una variable aleatoria de Poisson con parámetro n. Si sale y se encuentra con otra persona recibirá un pago igual a 1. Si no se encuentra con nadie o simplemente decide quedarse en casa obtendrá un pago igual a 0. Todos los jugadores tienen estas dos opciones y las mismas preferencias.

La estrategia "todos nos quedamos en casa" es un equilibrio de Nash del juego que acabamos de describir. Sin embargo, no podemos considerarlo como un buen equilibrio ya que los jugadores usan una estrategia dominada. No es difícil sacar a relucir ejemplos similares con equilibrios de Nash que son claramente inverosímiles.[2]

Recordemos que en juegos convencionales (de ahora en adelante, simplemente juegos en forma normal), un refinamiento modesto como el equilibrio perfecto sólo selecciona estrategias no dominadas. Esto ocurre en el anterior ejemplo. Sin embargo, en los juegos de Poisson en general esto no es cierto. Podemos ir más allá. Extensiones inmediatas del equilibrio propio o del estrictamente perfecto tampoco satisfacen falta de dominación y, además, no todo juego tiene un equilibrio que sea estrictamente perfecto.

Por otro lado, tal y como ocurre con los juegos en forma normal, no todo equilibrio no dominado es perfecto. Los mismos razonamientos que en juegos en forma normal nos invitan a no considerar los equilibrios no dominados que no son perfectos son válidos aquí. La diferencia es que,

[2]Por ejemplo, Myerson (2002), en un contexto de votación, sólo considera equilibrios de Nash en los que acciones débilmente dominada han sido eliminadas para todos los tipos.

como se ha mencionado arriba, algunos equilibrios perfectos pueden ser dominados.

Definimos los equilibrios perfectos no dominados como perfiles de estrategias que son límites de secuencias de equilibrios no dominados de juegos de Poisson perturbados. Demostramos que todo equilibrio de Poisson tiene al menos un equilibrio perfecto no dominado y que el conjunto de equilibrios perfectos no dominados es exactamente el conjunto de equilibrios perfectos que son a su vez no dominados.

Centramos nuestro análisis en los juegos de Poisson. Sin embargo, debemos mencionar que ninguna de las implicaciones que vamos a derivar dependen de la específica forma de la distribución de Poisson. Sólo algunos umbrales y pagos que se usan en algunos ejemplos tendrían que volverse a calcular si quisiéramos trasladarlos a un marco de trabajo un una diferente distribución de probabilidad subyacente.

Este capítulo se organiza como sigue: En la siguiente sección definiremos formalmente a los juegos de Poisson, estrategias y equilibrios de Nash. Seguiremos muy de cerca la descripción de los juegos de Poisson hecha por Myerson (1998). La tercera sección se dedica a examinar las propiedades de las estrategias no dominadas en los juegos de Poisson, donde mostraremos que existen asimetrías importantes con respecto a los juegos en forma normal. La cuarta sección estudia el equilibrio perfecto y algunas de sus posibles variaciones. Definiremos el equilibrio perfecto no dominado en la sección 3.5, donde también se demuestran algunas de sus propiedades.

3.2. Preliminares

Recordemos que una variable de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que sólo toma un parámetro. La probabilidad de que una variable aleatoria de Poisson con parámetro n tome el valor k, siendo k un número entero no negativo, es

$$f(k;n) = e^{-n}\frac{n^k}{k!}.$$

Un juego de Poisson Γ es una lista de elementos (n, T, r, C, u). El número de jugadores en el juego es una distribución de Poisson con parámetro $n > 0$. El conjunto T representa el conjunto de tipos posibles para los jugadores, suponemos que es un conjunto finito y no vacío.

Como de costumbre, si A es un conjunto finito, $\Delta(A)$ representa el conjunto de distribuciones de probabilidad en A. Dado el evento de que un jugador está en el juego, es del tipo $t \in T$ con probabilidad $r(t)$. Esta información se contiene en el vector $r \in \Delta(T)$. La *propiedad de descomposición* de la distribución de Poisson implica que para cada tipo t en T, el número de jugadores en el juego cuyo tipo es t es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $nr(t)$. Estas variables aleatorias juntas son mutuamente independientes y forman un vector, llamado *perfil de tipos*, que enumera cuantos jugadores hay en el juego con cada tipo.

Para cualquier conjunto finito S, denotamos como $Z(S)$ al conjunto de elementos $w \in \mathbb{R}^S$ tales que $w(s)$ es un número entero no negativo para todo $s \in S$.Usando esta notación, el conjunto $Z(T)$ denota el conjunto de valores posibles para el vector de tipos en el juego.

El conjunto C es el conjunto de opciones disponibles, o acciones puras que un jugador puede tomar. Suponemos que es común para todos los jugadores sin tener en cuenta su tipo y que es un conjunto finito que contiene al menos dos alternativas diferenciadas. El conjunto $\Delta(C)$ es el conjunto de acciones mixtas. De ahora en adelante, nos referiremos a las acciones mixtas simplemente como acciones.

La utilidad de un jugador depende de su tipo, de la acción que elige y del número de jugadores, sin contarse a si mismo, que toman cada una de las acciones. A un vector que contenga estos números de jugadores para cada elemento de C se le llama *perfil de acciones* que pertenece al conjunto $Z(C)$. Suponemos que las preferencias de un jugador de tipo t se puede resumir con una función acotada $u_t : C \times Z(C) \to \mathbb{R}$, es decir, $u_t(b,x)$ es el pago que un jugador tipo t recibe si toma la acción pura b y el número de jugadores que elige la acción c es $x(c)$, para todo $c \in C$. Además, sea $u = (u_t)_{t \in T}$.

En los juegos con incertidumbre poblacional, Myerson (1998, p. 377) argumenta que "...las percepciones de los jugadores acerca del comportamiento estratégico del resto no se puede formular como un perfil de estrategias que asigna una estrategia a cada individuo específico del juego, porque un jugador no está enterado de las identidades específicas de los otros jugadores". Nótese que dos jugadores del mismo tipo no tienen ninguna otra característica por la que el resto pueda asignar conductas diferentes. La conclusión de este razonamiento es que una estrategia σ es un elemento de $(\Delta(C))^T$, es decir, una aplicación desde el conjunto de tipos al conjunto de acciones.[3]

El supuesto de simetría es una parte fundamental del juego. Nótese que no se hace por conveniencia, al contrario, la simetría es un supuesto crítico en un juego con incertidumbre poblacional para que éste tenga sentido y esté bien construido.

Si los jugadores juegan de acuerdo con la estrategia σ, $\sigma_t(c)$ es la probabilidad de que un jugador con tipo t elija la acción pura c. La propiedad de descomposición de la distribución de Poisson implica que el número de jugadores con tipo $t \in T$ que eligen la acción pura c es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $nr(t)\sigma_t(c)$. La *propiedad de agregación* de

[3] Uno se puede preguntar cómo el juego se vería afectado si la subdivisión de tipos fuera más fina, por lo tanto, permitiendo una mayor variedad de comportamientos diferentes. Myerson (1998) prueba que, para los juegos de Poisson, subdivisiones que no sean relevantes desde el punto de vista de la función de utilidad no pueden cambiar substancialmente el conjunto de equilibrios de Nash (Teorema 4, página 386).

la distribución de Poisson implica que cualquier suma de variables aleatorias independientes de Poisson es también una variable aleatoria de Poisson. Por lo tanto el número total de jugadores que toman la acción pura c es una distribución de Poisson con parámetro $n\tau(c)$, donde $\tau(c) = \sum_{t\in T} r(t)\sigma_t(c)$.

Un jugador de tipo t que juega la acción pura $b \in C$ cuando al resto de jugadores se les espera que jueguen de acuerdo con σ tiene una utilidad esperada igual a

$$U_t(b,\sigma) = \sum_{x\in Z(C)} \mathbb{P}(x|\sigma)u_t(b,x)$$

donde,

$$\mathbb{P}(x|\sigma) = \prod_{c\in C} e^{-n\tau(c)} \frac{(n\tau(c))^{x(c)}}{x(c)!}$$

y su utilidad esperada por jugar la acción $\theta \in \Delta(C)$ es

$$U_t(\theta,\sigma) = \sum_{b\in C} \theta(b)U_t(b,\sigma).$$

El conjunto de mejores respuestas de un jugador tipo t contra la estrategia σ es el conjunto de acciones que maximiza su utilidad esperada dado que el resto de jugadores, incluyendo aquéllos de tipo t, se comportan de la manera que σ prescribe. El conjunto $\mathrm{PBR}_t(\sigma) = \{c \in C : c \in \arg\max_{b\in C} U_t(b,\sigma)\}$ es el conjunto de mejores respuestas puras contra σ de un jugador tipo t. El conjunto de mejores respuestas mixtas contra σ de un jugador tipo t es el conjunto de acciones $\mathrm{BR}_t(\sigma) = \Delta(\mathrm{PBR}_t(\sigma))$.

DEFINICIÓN 3.1. La estrategia σ^* es un equilibrio de Nash si $\sigma_t^* \in \mathrm{BR}_t(\sigma^*)$ para todo t.

Argumentos usuales de punto fijo muestran que todo juego de Poisson tiene al menos un equilibrio de Nash, véase Myerson (1998).

3.3. Estrategias dominadas

El principio de admisibilidad, que n los juegos en forma normal estipula que ningún jugador debe elegir una estrategia dominada, se traslada al presente marco imponiendo que ningún jugador elija una acción dominada.

DEFINICIÓN 3.2. La acción $\theta \in \Delta(C)$ está dominada para un jugador tipo t si existe una acción alternativa θ' tal que $U_t(\theta,\sigma) \leq U_t(\theta',\sigma)$, para toda estrategia σ y $U_t(\theta,\sigma') < U_t(\theta',\sigma')$ para al menos un σ'.

Aunque contenido en un contexto de votación, Myerson (2002) ofrece una definición menos exigente de acción dominada. Bajo esa definición la acción (pura) c está dominada para un jugador tipo t si existe una acción (pura) alternativa b tal que $u_t(c,x) \leq u_t(b,x)$ para todo $x \in Z(C)$ y con desigualdad estricta para al menos un x'. Sin embargo, preferimos la anterior definición dado que es equivalente a la definición de estrategia dominada para los juegos en forma normal.

En los juegos con incertidumbre poblacional las estrategias dominadas se definen de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 3.3. La estrategia σ está dominada si existe algún tipo t para el que la acción σ_t está dominada.

Podemos usar este aparato formar para revisar el ejemplo discutido en la introducción. El símbolo a denotará "salir fuera" y b "quedarse en casa":

EJEMPLO 3.1. Sea Γ un juego de Poisson con $n > 0$, sólo un tipo, conjunto de opciones $C = \{a,b\}$, y función de utilidad:

$$u(a,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(a) > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$u(b,x) = \quad 0 \qquad \forall x \in Z(C).$$

Como este juego de Poisson tiene sólo un tipo posible, podemos identificar el conjunto de estrategias con el conjunto de acciones. Hay dos equilibrios, a y b. Ya hemos discutido que la estrategia de equilibrio b no es satisfactoria. Nótese que b es una acción dominada, incluso si consideramos la definición menos restrictiva dad por Myerson (2002), lo que hace de b una estrategia dominada.

El ejemplo subraya que el concepto de equilibrio de Nash no es el adecuado para los juegos de Poisson dado que permite puntos de equilibrio donde los jugadores usan acciones (estrategias) dominadas.

Es bien sabido que en juegos en forma normal una estrategia dominada nunca es una mejor respuesta contra una estrategia completamente mixta de los oponentes. Esta propiedad implica, por ejemplo, que el equilibrio perfecto sólo selecciona estrategias no dominada. De una manera ideal, nos gustaría establecer una analogía entre las propiedades de las estrategias (no) dominadas en juegos en forma normal y las acciones (no) dominadas en los juegos de Poisson. En lo que resta de la sección examinaremos cuales son las diferencias y similitudes entre los dos escenarios en lo que a estrategias (no) dominadas se refiere.

El siguiente resultado es inmediato y cierto en ambos casos, aunque tenga que estar enunciado en términos de estrategias para los juegos en forma normal. (A partir de ahora eliminaremos esta última aclaración cuando comparemos acciones en juegos de Poisson con estrategias en juegos de en forma normal.)

LEMA 3.1. *Si una acción pura está dominada, toda acción mixta que pongo probabilidad positiva en esa acción pura, estará también dominada.*

Esto implica que una estrategia que prescriba que algún tipo juegue una acción que de probabilidad positiva a una acción pura dominada, será a su vez dominada. Por otro lado, tal y como ocurre en los juegos en forma normal, una acción mixta dominada no necesariamente dará un peso positivo a una acción pura dominada. Lo ilustramos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.2. Consideremos un juego de Poisson con un número esperado de jugadores tal que $n > \ln 2$, sólo un tipo posible, Tres opciones disponibles en el conjunto $C = \{a, b, c\}$, y función de utilidad:

$$u(a,x) = \begin{cases} 10 & \text{si } x(a) \geq x(b) \\ 0 & \text{si } x(a) < x(b) \end{cases} \qquad u(b,x) = \begin{cases} 10 & \text{si } x(a) < x(b) \\ 0 & \text{si } x(a) \geq x(b) \end{cases}$$

$$u(c,x) = \quad 6 \qquad \forall x \in Z(C).$$

La acción pura a no está dominada. Es la única mejor respuesta contra la estrategia a. La acción pura b tampoco está dominada. En particular, nótese que no está dominada por a, dado el supuesto que $n > \ln 2$, cuyo único propósito es hacer la probabilidad de que ningún jugador aparezca en el juego suficientemente pequeña. En cuanto a la acción pura c, es mejor que a contra la estrategia b y mejor que b contra la estrategia a.

La acción mixta $\theta = 1/2a + 1/2b$ está dominada por la acción pura $\theta' = c$. Para verlo notamos que dada cualquier estrategia, podemos asignar probabilidad p al evento $x(a) \geq x(b)$ y probabilidad $1 - p$ al evento $x(a) < x(b)$. Podemos calcular la utilidad esperada de jugar la acción $\theta = 1/2a + 1/2b$ como $1/2(1-p)10 + 1/2p10 = 5$.

Por consiguiente, hemos probado que:

LEMA 3.2. *Una acción que no da probabilidad positiva a una acción pura dominada puede estar dominada.*

También es cierto que una estrategia pura es posible que sólo sea dominada por otra mixta. Modifíquese la función de utilidad del ejemplo anterior de tal manera que $u(x,c) = 4$ para todo x en $Z(C)$, y elévese la cota inferior de n hasta $\ln(5/2)$. En este juego modificado, la acción pura c no está dominada ni por a ni por b, pero está dominada por la acción $\theta = 1/2a + 1/2b$.

En los juegos en forma normal, el proceso para identificar estrategias dominadas se ve simplificado por el hecho que es suficiente considerar tan sólo estrategias puras de los oponentes. Tal y como se ilustra en el siguiente ejemplo, esto no es válido en los juegos de Poisson.

EJEMPLO 3.3. Sea Γ un juego de Poisson con n jugadores esperados, sólo un tipo posible, conjunto de opciones igual a $C = \{a,b,c\}$, y función de utilidad:

$$u(a,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(a) = x(b) > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad u(b,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(a) = x(b) > 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$u(c,x) = \quad 0 \quad \forall x \in Z(C).$$

La acción pura c es estrictamente peor que la as acciones puras a y b si y sólo si la estrategia σ da probabilidad estrictamente positiva a a y a b.

En cualquier caso, para calcular pagos esperados y, por lo tanto, para identificar acciones dominadas, es suficiente considerar que el resto de jugadores juegan todos la misma acción, sin tener en cuenta sus tipos. Esto es así porque de la estrategia $\sigma \in (\Delta(C))^T$ podemos definir una acción global $\tau \in \Delta(C)$ dada por $\tau(c) = \sum_{t \in T} r(t)\sigma_t(c)$, que genera la misma distribución de probabilidad n el conjunto de perfiles de acciones $Z(C)$.

Un hecho importante a cerca de las estrategias no dominadas en juegos en forma normal es que una estrategia es no dominada si y sólo es es una mejor respuesta contra algún elemento contenido en el interior del simplex del conjunto de perfiles de estrategias puras de los oponentes. Como se ha mencionado anteriormente, esto implica que el equilibrio perfecto sólo selecciona estrategias no dominadas. Nuestra circunspección anterior sugiere que las cosas pueden funcionar de otro modo en el presente contexto. De hecho, ningún resultado parecido a este es cierto en los juegos de Poisson.

Si A es un conjunto finito, $\Delta^0(A)$ representa el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre A que dan probabilidad positiva a todos los elementos de A.

LEMA 3.3. *Una acción no dominada puede que no sea una mejor respuesta contra ningún elemento de* $\Delta^0(C^T)$.

DEMOSTRACIÓN. Considérese un juego de Poisson con $n = 1$ jugadores esperados,[4] sólo un tipo posible, de tal manera que $\Delta^0(C^T) = (\Delta^0(C))^T$, conjunto de opciones disponibles igual a $C = \{a, b, c\}$ y función de utilidad:

$$
\begin{aligned}
u(a,x) &= \begin{cases} 5e & \text{si } x(a) = 1 \text{ y } x(c) = 0 \\ 5e & \text{si } x(c) > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\
u(b,x) &= \begin{cases} 5e & \text{si } x(b) = 1 \text{ y } x(c) = 0 \\ 5e & \text{si } x(c) > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\
u(c,x) &= \quad 4 \qquad \forall x \in Z(C).
\end{aligned}
$$

[4]La colección de ejemplos en este capítulo está diseñado para que sea tan claro y sencillo como sea posible. Este es el motivo por el que muchas veces fijaremos el número esperado de jugadores igual a $n = 1$ ó igual a $n = 2$. Esto contrasta con la realidad que los juegos de Poisson se ajustan de una manera más natural a situaciones en las que el número esperado de jugadores es grande. A costa de una mayor dificultad en los cálculos, se pueden construir ejemplos similares que no pongan ninguna restricción en el parámetro n.

Si un jugador espera que el resto de jugadores potenciales se comporte de acuerdo con la estrategia $\sigma = b$, la acción c le da un pago estrictamente mayor que la acción a. En cambio, si espera que cualquier otro jugador potencial se comporte de acuerdo con la estrategia $\sigma = a$, la acción c le da un pago mayor que la acción b. Para ver que ninguna acción mixta entre a y b domina a c, considérese que $\sigma = a$, entonces, se sostienen las siguientes desigualdades:

$$U(b,\sigma) = 0 < U(c,\sigma) = 4 < U(a,\sigma) = 5.$$

De aquí se sigue que bajo la estrategia $\sigma = a$, la acción c es estrictamente mejor que la acción $\theta = \lambda a + (1-\lambda)b$ para $\lambda \in [0,4/5)$. Si $\sigma = b$,

$$U(a,\sigma) = 0 < U(c,\sigma) = 4 < U(b,\sigma) = 5,$$

en cuyo caso la acción c es mejor que la acción $\theta = \lambda a + (1-\lambda)b$ para $\lambda \in (1/5,1]$. Por consiguiente, ninguna acción mixta entre a y b es siempre mejor que la acción c para cualquier estrategia posible σ.

Falta probar que la acción c nunca es una mejor respuesta contra ninguna estrategia σ. Consideremos primero el caso en el que σ sólo da probabilidad positiva a a y b. Para minimizar el pago máximo que se obtiene por jugar a ó b necesitamos que $\sigma = 1/2a + 1/2b$. Sin embargo, en tal caso

$$4 = U(c,\sigma) < U(a,\sigma) = U(b,\sigma) = \frac{5}{2}\sqrt{e}.$$

Para acabar, la acción c nunca es una mejor respuesta contra una acción completamente mixta porque cualquier peso que la estrategia σ ponga en la opción c incrementa el pago esperado de las acciones a y b. $\square$

El siguiente lema completa al anterior. En los juegos de Poisson una acción dominada puede ser una mejor respuesta incluso si todos los jugadores usan una estrategia completamente mixta.

LEMA 3.4. *Una acción dominada puede ser una mejor respuesta contra una estrategia completamente mixta.*

DEMOSTRACIÓN. Considérese el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.4. Sea Γ un juego de Poisson con $n = 2$ jugadores esperado, un único tipo posible, conjunto de opciones $C = \{a, b\}$, y función de utilidad

$$u(a,x) = \quad e^{-2} \quad \forall x$$

$$u(b,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(a) = x(b) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Nótese que e^{-2} es la probabilidad de que $x(a) = x(b) = 1$ bajo la estrategia $\sigma = 1/2a + 1/2b$. Además, la acción b está dominada por la acción a, la primera sólo es tan buena como la segunda contra la estrategia $\sigma = 1/2a + 1/2b$, y es estrictamente peor para cualquier otra estrategia $\sigma' \neq \sigma$. Sin embargo, es una mejor respuesta contra $\sigma \in \Delta^0(C)$. $\square$

Como ya es ha mencionado, en juegos en forma normal, las estrategias no dominadas están caracterizadas por la existencia de una distribución de probabilidad en el interior del simplex del conjunto de perfiles de estrategias puras de los oponentes, contra la que la estrategia no dominada es una mejor respuesta. Esta propiedad provee de una manera de proponer conceptos de equilibrio que aseguran que ningún jugador elige una estrategia dominada.

En los juegos en forma normal, el requerimiento de admisibilidad viene asegurado por el equilibrio perfecto. Todo equilibrio perfecto sólo selecciona estrategias no dominadas, y lo que es más, las condiciones del equilibrio perfecto no admiten cualquier equilibrio no dominado, sino que tan solo un subconjunto de ellos.

Mertens (2004) vincula “no dominación” y “perfección” a través del concepto de admisibilidad. Define tres conceptos posibles de admisible mejor respuesta:

α. θ es una admisible mejor respuesta contra σ si existe una secuencia de estrategias completamente mixtas σ^k que converja a σ tal que θ es una mejor respuesta contra cada (σ^k).

β. θ es una admisible mejor respuesta contra σ si θ es una mejor respuesta contra σ y existe una estrategia completamente mixta σ' tal que θ es una mejor respuesta contra σ'.

γ. θ es una admisible mejor respuesta contra σ si θ es una mejor respuesta contra σ y ninguna otra mejor respuesta θ' es al menos igual de buena contra toda σ' y mejor contra alguna.

El tercer concepto se corresponde con el concepto usual de admisibilidad, es decir, no dominación, mientras que el primero es una caracterización del equilibrio perfecto. En los juegos en forma normal, el primer concepto es estrictamente más restrictivo que el segundo que a su vez es estrictamente más restrictivo que el tercero.

Los lemas 3.3 y 3.4 ofrecen dudas sobre si la relación anterior se mantiene para los juegos de Poisson (a parte del hecho que el segundo concepto es claramente más débil que el primero). Estamos interesado en descubrir si existe alguna conexión entre α y γ en el contexto actual. Una vez que sepamos esto, podremos proponer una definición para una versión restrictiva de admisibilidad en juegos de Poisson.

esto se hará en la sección 3.5. Pero antes tendremos que extender el concepto de equilibrio perfecto a los juegos de Poisson e investigar cuales son sus propiedades.

3.4. Perfección

Se han propuesto tres definiciones equivalentes del equilibrio perfecto para juegos en forma normal. Una basada en juegos perturbados (Selten, 1975), una segunda basada en el elemento α de la lista anterior (también Selten, 1975) y un último basado en equilibrios ε-perfectos (Myerson, 1978). A continuación ofrecemos las tres definiciones correspondientes para los juegos de Poisson y probamos su equivalencia para que siempre podamos tener la definición más ventajosa disponible.

La definición principal que usaremos es la que está basada en juegos perturbados

DEFINICIÓN 3.4. Sea Γ un juego de Poisson, para todo $t \in T$, sean η_t y $\Sigma_t(\eta_t)$ definidos por:

$$\eta_t \in \mathbb{R}^C \text{ con } \eta_t(c) > 0 \text{ para todo } c \in C \text{ y } \sum_{c\in C} \eta_t(c) < 1$$

$$\Sigma_t(\eta_t) = \{\theta \in \Delta(C) : \theta(c) \geq \eta_t(c) \text{ para todo } c \in C\}.$$

Además, sea $\eta = (\eta_t)_t$. El juego de Poisson perturbado (Γ, η) es el juego de Poisson (n, T, r, C, u) en el que los jugadores de tipo t están restringidos a jugar acciones que pertenecen a $\Sigma_t(\eta_t)$, para todo t.

En el juego de Poisson perturbado (Γ, η), la acción $\theta \in \Sigma_t(\eta_t)$ es una mejor respuesta contra $\sigma \in \Sigma(\eta) = \prod_{t\in T} \Sigma_t(\eta_t)$ para un jugador tipo t si toda acción pura c que no es una mejor acción en Γ contra σ para jugadores tipo t es jugada con probabilidad mínima, es decir, $\sigma_t(c) = \eta_t(c)$. La estrategia $\sigma \in \Sigma(\eta)$ es un equilibrio del juego de Poisson perturbado (Γ, η) si para todo tipo t, la estrategia σ_t es una mejor respuesta ante σ en (Γ, η). El teorema del punto fijo de Kakutani implica que

LEMA 3.5. *Todo juego de Poisson perturbado tiene un equilibrio.*

Los juegos perturbados nos llevan a la siguiente definición de equilibrio perfecto:

DEFINICIÓN 3.5. La estrategia σ es un equilibrio perfecto si es el límite de una secuencia $\{\sigma^\eta\}_{\eta\to 0}$, donde σ^η es un equilibrio del juego perturbado (Γ,η), para todo η.

Dado que todo juego de Poisson perturbado tiene un equilibrio y dado que este equilibrio está contenido en el conjunto compacto $(\Delta(C))^T$, todo juego de Poisson tiene un equilibrio perfecto.[5] Debido a la continuidad de la función de utilidad, todo equilibrio perfecto es también un equilibrio de Nash.

Como ya hemos mencionado, otra posible definición del equilibrio perfecto usa equilibrios ε-perfectos. La estrategia completamente mixta σ^ε es un equilibrio ε-perfecto si satisface:

$$U_t(c,\sigma^\varepsilon) < U_t(d,\sigma^\varepsilon), \text{ entonces } \sigma_t^\varepsilon(c) \leq \varepsilon \text{ para todo } t \in T.$$

Lo que sigue es una adaptación a los juegos de Poisson de varios resultados y demostraciones del libro de van Damme (1991, pgs. 26–29) sobre el equilibrio perfecto en juegos en forma normal. Aunque es bastante directo, lo incluiremos aquí para asegurarnos de que el capítulo esté lo más completo posible. El siguiente lema enumera los los conceptos del equilibrio perfecto que restan y prueba su equivalencia.

LEMA 3.6. *Sea Γ un juego de Poisson, y sea $\sigma \in (\Delta(C))^T$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *σ es un equilibrio perfecto de Γ,*

[5]Tómese cualquier secuencia $\eta \to 0$, y para cada η, un equilibrio σ^η de (Γ,η). La secuencia $\{\sigma^\eta\}_{\eta\to 0}$ tiene una subsecuencia que converge y cuyo límite es un equilibrio perfecto.

2. σ *el el límite de una secuencia* $\{\sigma^{\varepsilon}\}_{\varepsilon\to 0}$, *donde* σ^{ε} *es un equilibrio* ε*-perfecto de* Γ, *para todo* ε, *y*
3. σ *es el límite de una secuencia* $\{\sigma^{\varepsilon}\}_{\varepsilon\to 0}$ *de estrategias completamente mixtas con la propiedad que, para todo* t, σ_t *es una mejor respuesta contra cada elemento* σ^{ε} *de esta secuencia.*

DEMOSTRACIÓN. (1)$\to$(2): Sea σ el límite de la secuencia $\{\sigma^{\eta}\}_{\eta\to 0}$, donde σ^{η} es equilibrio de $\Gamma(\eta)$ para todo η. Definimos $\varepsilon(\eta)\in\mathbb{R}_{++}$ como

$$\varepsilon(\eta)=\max_{t,c}\eta_t(c).$$

Entonces σ^{η} es un equilibrio $\varepsilon(\eta)$-perfecto de Γ.

(2)$\to$(3): Sea $\{\sigma^{\varepsilon}\}_{\varepsilon\to 0}$ una secuencia de equilibrios ε-perfectos con límite σ. Por continuidad, todo elemento del soporte de σ, que de ahora en adelante denotaremos como $\mathcal{C}(\sigma)$, es una mejor respuesta contra $\sigma(\varepsilon)$ para ε suficientemente cercano a cero.

(3)$\to$(1): Sea $\{\sigma^{\varepsilon}\}_{\varepsilon\to 0}$ una secuencia como la de (3) con límite σ. Definimos η^{ε} como:

$$\eta_t^{\varepsilon}(c)=\begin{cases}\sigma_t^{\varepsilon}(c) & \text{si } c\notin C(\sigma_t)\\ \varepsilon & \text{en caso contrario}\end{cases}\qquad \text{para todo } t,c.$$

Para ε suficientemente pequeño σ^{ε} es un equilibrio del juego de Poisson perturbado $(\Gamma,\eta^{\varepsilon})$, lo cual establece (1). $\square$

EJEMPLO 3.4 (Continuación). Ya vimos que la acción b está dominada por la acción a y que ambas son mejores respuestas contra $\sigma=1/2a+1/2b$. Por el lema 3.1, la acción $\theta=1/2a+1/2b$ también está dominada por a. Sin embargo, es una mejor respuesta contra la estrategia σ. Como consecuencia, la estrategia dominada σ es un equilibrio perfecto.

El siguiente ejemplo es más ilustrativo para mostrar como el equilibrio perfecto falla en eliminar estrategias dominadas en los juegos de Poisson.

EJEMPLO 3.5. Consideramos el juego de Poisson $\Gamma = \{n,T,r,C,u\}$, con $n = 2$ jugadores esperados, conjunto de tipos $T = \{1,2\}$, con la misma probabilidad para ambos tipos $r(1) = r(2) = 1/2$, conjunto de opciones $C = \{a,b\}$, y función de utilidad:

$$u_1(a,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(b) = 1 \\ 0 & \text{si } x(b) \neq 1 \end{cases} \qquad u_2(a,x) = e^{-1} \quad \forall x \in Z(C)$$

$$u_1(b,x) = e^{-1} \quad \forall x \in Z(C) \qquad u_2(b,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(a) = 1 \\ 0 & \text{si } x(a) \neq 1 \end{cases}$$

El número de jugadores tipo 1 es una variable aleatoria de Poisson con valor esperado igual a 1. Lo mismo sucede para el tipo 2. Nótese también que e^{-1} coincide con la probabilidad de que una variable aleatoria de Poisson con parámetro 1 sea igual a 1. La acción a está dominada para los jugadores tipo 1, mientras que la acción b está dominada para los jugadores tipo 2. Afirmamos que la estrategia $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2) = (a,b)$ es un equilibrio perfecto. Tomamos la secuencia de equilibrios ε-perfectos $\sigma_1^\varepsilon = (1-\varepsilon)a + \varepsilon b$, $\sigma_2^\varepsilon = \varepsilon a + (1-\varepsilon)b$. Para todo ε, $U_t(a,\sigma^\varepsilon) = U_t(b,\sigma^\varepsilon)$, y la secuencia $\{\sigma^\varepsilon\}_{\varepsilon\to 0}$ converge a σ.

Cada uno del anterior de ejemplos prueba la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 3.1. *Un equilibrio perfecto puede ser dominado.*

Por consiguiente, las dudas que planteamos al final de la sección anterior están justificadas. En los juegos de Poisson, la relación entre α y γ de los posibles conceptos de admisibilidad enumerados por Mertens es diferente a la que se mantiene para los juegos en forma normal.

En el último ejemplo, el equilibrio no dominado $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2) = (b,a)$ es también perfecto. La siguiente pregunta a responder es si todos los equilibrios no dominados son perfectos. La proposición 3.2 muestra que en este caso las cosas funcionan igual que en los juegos en forma normal.

PROPOSICIÓN 3.2. *Un equilibrio no dominado puede no ser perfecto.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un juego de Poisson Γ, con n jugadores esperados, dos tipos posibles con la misma probabilidad, i.e. $T = \{1,2\}$ y $r(1) = r(2) = 1/2$, conjunto de opciones disponibles $C = \{a,b,c\}$ y función de utilidad:[6]

$$\begin{aligned} u_1(a,x) &= x(a) + x(b) & u_2(a,x) &= x(a) \\ u_1(b,x) &= |x(a) + x(b) - x(c)| & u_2(b,x) &= 0 \quad \forall x \in Z(C) \\ u_1(c,x) &= 0 \quad \forall x \in Z(C) & u_2(c,x) &= 0 \quad \forall x \in Z(C). \end{aligned}$$

El juego tiene un continuo de equilibrios dominados $(\lambda a + (1-\lambda)b, a)$, con λ tomando valores en el intervalo cerrado $[0,1]$. En particular, nótese que la acción b es no dominada para los jugadores tipo 1 ya que es mejor que la acción a contra la estrategia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = (c,c)$. Sin embargo, la estrategia $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) = (a,a)$ es el único equilibrio perfecto del juego. $\square$

El ejemplo usado en la prueba de la proposición anterior muestra que puede haber equilibrios no dominados que no son razonables. Tómese la estrategia $\sigma' = (\lambda a + (1-\lambda)b, a)$ con $\lambda \in [0,1)$. Es difícil justificar que un jugador tipo 1 se mantenga con la estrategia prescrita. Un jugador racionar no debería arriesgar su pago de equilibrio, sobre todo cuando no hay ningún posible beneficio que venga de ese comportamiento. Supongamos que hubiera una desviación no esperada desde σ' hacia c, poner peso en la acción

---

[6] Nótese que la función de utilidad que usamos en este ejemplo, y en algunos de los que vienen, no están acotadas, al contrario de como supusimos en nuestra descripción general de los juegos de Poisson hacha en la sección 3.2. Las características principales de todos los ejemplos se preservan si pusiéramos una cota superior en la utilidades, es decir, si las utilidades vinieran dadas por $\tilde{u}_t(y,x) = \text{mín}\{u_t(y,x), K\}$, donde K es un número suficientemente grande comparado con n. Sin embargo, mantendremos las funciones de utilidad no acotadas por mayor sencillez.

b valdría la pena para los jugadores tipo 1 si y sólo si esa desviación fuera drástica y sería perjudicial en caso contrario.

Dado que los equilibrios perfectos pueden ser dominados y que los equilibrios no dominados pueden se no perfectos, nos gustaría tener un concepto de equilibrio que fuera perfecto y no dominado. A estas alturas, no queremos apartarnos mucho del concepto de perfección. En cualquier caso, observamos que el equilibrio discutido en el ejemplo 3.5 es también propio, para una extensión directa del concepto a los juegos de Poisson,[7] ya que todo jugador sólo tiene dos opciones posibles.[8] El equilibrio estrictamente perfecto tampoco ayuda. Como ya se ha dicho, la estrategia

---

[7]La estrategia completamente mixta σ^ε es un equilibrio ε-propio si satisface:

$$U_t(c,\sigma^\varepsilon) < U_t(d,\sigma^\varepsilon), \text{ entonces } \sigma_t^\varepsilon(c) \leq \varepsilon\sigma_t^\varepsilon(d) \text{ para todo } t \in T.$$

La estrategia σ es un equilibrio propio si es el límite de una secuencia $\{\sigma^\varepsilon\}_{\varepsilon\to 0}$, donde σ^ε es un equilibrio ε-propio de Γ, para todo ε.

[8]Tal y como debería esperarse, no todo equilibrio propio es perfecto. Considérese el juego de Poisson $\Gamma = \{n,T,r,C,u\}$, con $n = 2$ jugadores esperados, dos tipos posibles que tienen la misma probabilidad, es decir $T = \{1,2\}$ y $r(1) = r(2) = 1/2$, conjunto de opciones $C = \{a,b,c,d\}$ y función de utilidad:

$$\begin{aligned}
u_1(x,a) &= 0 \quad \forall x & u_2(x,a) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x(b) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\
u_1(x,b) &= x(d) - x(c) & u_2(x,b) &= e^{-1} \quad \forall x \\
u_1(x,c) &= -1 \quad \forall x & u_2(x,c) &= -1 \quad \forall x \\
u_1(x,d) &= -2 \quad \forall x & u_2(x,d) &= -2 \quad \forall x.
\end{aligned}$$

La acción a está dominada para los jugadores tipo 2 por la acción b. La estrategia $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2) = (b,a)$ es perfecta. Para verlo considérese la secuencia e equilibrios ε-perfectos:

$$\sigma_1^\varepsilon = \tfrac{1}{3}\varepsilon a + (1-\varepsilon)b + \tfrac{1}{3}\varepsilon c + \tfrac{1}{3}\varepsilon d$$
$$\sigma_2^\varepsilon = (1-\varepsilon-2\varepsilon^2)a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c + \varepsilon^2 d$$

Para todos los tipos, la acción d es siempre peor que la acción c, por consiguiente, en cualquier equilibrio ε-propio, la primera acción se juega probabilidad estrictamente inferior

$\sigma = 1/2a + 1/2b$ es un equilibrio del juego de Poisson descrito en el ejemplo 3.4. Nótese que este equilibrio usa estrategias completamente mixtas, y consecuentemente, es un equilibrio estrictamente perfecto(nuevamente, usando una extensión directa del concepto a los juegos de Poisson).[9]

Los ejemplos 3.4 y 3.5 sugieres que quizá podríamos demandar estabilidad contra perturbaciones diferentes a los temblores. (En el ejemplo 3.4, el pago e^{-2} coincide con la probabilidad de que $x(a) = x(b) = 1$ bajo la estrategia $\sigma = 1/2a + 1/2b$. En el ejemplo 3.5 el pago e^{-1} es la probabilidad de que $x(a) = 1$, y de que $x(b) = 1$, bajo la estrategia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = (a, b)$.) Para ser más específicos, perturbaciones en el parámetro de Poisson n parece el candidato natural ya que el modelo es de incertidumbre poblacional. Estudiemos el siguiente concepto de equilibrio.

DEFINICIÓN 3.6. La estrategia σ es un equilibrio perfecto* del juego de Poisson $\Gamma = (n, T, r, C, u)$ si existe un $\xi > 0$ tal que σ es un equilibrio perfecto del juego de Poisson $\tilde{\Gamma} = (\tilde{n}, T, r, C, u)$ para todo $\tilde{n} \in (n - \xi, n + \xi)$.

---

a la última. Por lo tanto, un jugador tipo 1 juega la acción b con probabilidad inferir a ε veces la probabilidad de a, y en ningún equilibrio propio jugará b con probabilidad positiva.

[9] Además el equilibrio estrictamente perfecto no satisface existencia. Considérese el juego de Poisson con $n > 0$ jugadores esperados, un único tipo posible, cuatro opciones diferentes $C = \{a, b, c, d\}$ y función de utilidad:

$$u(a, x) = 1 + x(c)$$
$$u(b, x) = 1 + x(d)$$
$$u(c, x) = 0 \quad \forall x$$
$$u(d, x) = 0 \quad \forall x.$$

Ningún equilibrio es "robusto" ante todos los posibles temblores.

Un equilibrio perfecto* es un equilibrio perfecto, no sólo del juego original, sino también de todos los juegos que se obtienen de pequeñas perturbaciones en el número esperado de jugadores. Nótese que no podemos confiar simplemente en las perturbaciones en el número esperado de jugadores. Es posible construir ejemplo fácilmente que no impongan restricciones en el número esperado de jugadores con equilibrios de Nash no razonables. Véase el ejemplo 3.1.

Veamos porqué el equilibrio perfecto* no es adecuado mediante el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.6. Consideremos la familia de juegos de Poisson con número esperado de jugadores igual a $n > \frac{4}{7}$,[10] un único tipo, conjunto de opciones $C = \{a, b\}$, y función de utilidad:

$$u(a,x) = \quad x(b)$$

$$u(b,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(a) = x(b) = 0 \\ 2x(a) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Todo juego tiene un único equilibrio que depende de n.[11] Por lo tanto, no hay un equilibrio perfecto*.

El ejemplo nos insta a descartar el concepto de equilibrio anterior y revela que pedir estabilidad ante variaciones en el parámetro de Poisson n nos fuerza a tolerar, al menos, pequeñas variaciones en la estrategia de equilibrio si queremos mantener la existencia. Por lo tanto, si σ es un equilibrio perfecto de Γ, podríamos pretender que todo juego que difiera de Γ en que poseyera un número de jugadores esperados ligeramente diferente que tuviera un equilibrio perfecto que no estuviera muy distante de σ.

[10] Es suficiente que n sea tal que $ln\ n > -n$.

[11] El equilibrio es $\sigma = \alpha a + (1-\alpha)b$, donde $\alpha = \left(1 - \frac{1}{ne^n}\right) / \left(3 - \frac{2}{e^n}\right)$.

Como el siguiente ejemplo muestra, esta relación traería de vuelta los equilibrios dominados.

EJEMPLO 3.7. Sea Γ un juego de Poisson con $n = 6$ jugadores esperados, dos tipos diferentes $T = \{1,2\}$ con $r(1) = 2/3$ y $r(2) = 1/3$, conjunto de opciones disponibles $C = \{a,b,c,d\}$, y utilidad

$$
\begin{aligned}
u_1(h,x) &= \quad 0 \quad \forall x \in Z(C), \forall h \in C \\
u_2(a,x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x(c) = x(d) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\
u_2(b,x) &= \quad e^{-2} \quad \forall x \in Z(C) \\
u_2(h,x) &= -1 \qquad \forall x \in Z(C), h = c,d.
\end{aligned}
$$

El número de jugadores de tipo 1 es una variable aleatoria de Poisson con parámetro 4. La estrategia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = (1/4a + 1/4b + 1/4c + 1/4d, a)$ implica que el evento $x(c) = x(d) = 1$ ocurre con probabilidad e^{-2}. La estrategia σ es un equilibrio perfecto en el que los jugadores tipo 2 juegan estrategias dominadas. Sea g un número pequeño. El juego de Poisson $\Gamma^g = \{n+g, T, r, C, u\}$ tiene un equilibrio perfecto dominado muy cercano a σ en el que los jugadores tipo 1 juegan la acción $(1/4+\kappa, 1/4+\kappa, 1/4-\kappa, 1/4-\kappa)$, para $\kappa = g/(24+4g)$, y los jugadores tipo 2 juegan la acción a. Por otro lado, el juego de Poisson $\Gamma^g = \{n-g, T, r, C, u\}$ también tiene un equilibrio perfecto dominado muy cercano a σ, donde los jugadores tipo 1 juegan la acción $(1/4-\kappa', 1/4-\kappa', 1/4+\kappa', 1/4+\kappa')$, para $\kappa' = g/(24-4g)$, y los jugadores tipo 2 juegan la acción a.

Hasta ahora hemos suministrado varios resultado y ejemplos que muestran que algunos de los conceptos de equilibrio propuestos para los juegos en forma normal carecen o bien de la propiedad de existencia o de la de admisibilidad cuando se extienden a los juegos de Poisson. En la siguiente sección propondremos un concepto de equilibrio que muestra que, en este contexto, ambas propiedades no son incompatibles.

3.5. Equilibrio Perfecto No Dominado

Los mismos argumentos que en juegos en forma normal nos instan a no considerar las estrategias no dominadas que no son perfectas también están bien fundados aquí. La perfección es un requerimiento débil, pide estabilidad ante una única perturbación, no ante todas. Como resultado, los equilibrios que no son perfectos son muy inestables.

La diferencia principal en el contexto actual es que hay equilibrios perfectos que son dominados . Queremos proponer una versión estricta de admisibilidad para juegos con incertidumbre poblacional. Dicha definición comprende a los elementos α y γ de la lista de los conceptos posibles de admisibilidad propuestos por Mertens (2004) y enumerados al final de la sección 3.3.

DEFINICIÓN 3.7. θ es una admisible mejor respuesta contra σ si es no dominada y si existe una secuencia de estrategias completamente mixtas σ^k que converja a σ tal que θ es una mejor respuesta contra cada (σ^k).

De la misma manera, podemos decir que la estrategia σ es admisible si para todo t, σ_t es una admisible mejor respuesta contra σ. Por lo tanto, si σ es una estrategia admisible, es un equilibrio perfecto, y podremos hablar del conjunto de equilibrios admisibles.

Queremos proponer un concepto de equilibrio que sea admisible y que genere un conjunto no vacío de equilibrios para cualquier juego. Tal concepto es introducido en la definición 3.8, la propiedad de admisibilidad vendrá directamente de la definición y el resultado de existencia se ofrece en la proposición 3.4. La proposición siguiente muestra que todo juego de Poisson tiene un equilibrio en estrategias no dominadas. Se podría haber propuesto como un corolario de nuestro resultado de existencia principal. Sin embargo, preferimos invertir el orden de presentación para que el argumento de la demostración principal se pueda seguir con mayor facilidad.

Pasamos a demostrar que todo juego de Poisson tiene un equilibrio en estrategias no dominadas. El lema 3.2 implica que el conjunto de estrategias no dominadas no es convexo, y por lo tanto, no podemos demostrar la existencia usando un argumento de punto fijo. Una prueba constructiva ensaña que:

PROPOSICIÓN 3.3. *Todo juego de Poisson tiene un equilibrio de Nash en estrategias no dominadas.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos un juego de Poisson Γ, con conjunto de opciones C y vector de utilidades u. Recordemos que si θ es una acción, $\mathcal{C}(\theta)$ denota al soporte de θ. Si $\mathcal{C}(\theta) \subseteq \mathcal{C}(\theta')$ entonces existe un $\lambda \in (0,1)$ y una acción θ'' tal que $\theta' = \lambda\theta + (1-\lambda)\theta''$. Si θ está dominada para los jugadores tipo t, existe una $\tilde{\theta}$ que la domina, y una $\hat{\sigma}$ tal que $U_t(\theta, \hat{\sigma}) < U_t(\tilde{\theta}, \hat{\sigma})$. Además, si $\mathcal{C}(\theta) \subseteq \mathcal{C}(\theta')$ entonces $\theta' = \lambda\theta + (1-\lambda)\theta''$ está dominada por $\tilde{\theta}' = \lambda\tilde{\theta} + (1-\lambda)\theta''$ y $U_t(\theta', \hat{\sigma}) < U_t(\tilde{\theta}', \hat{\sigma})$.

Esto implica que podemos hablar sobre soportes dominado y que, dado un soporte dominado $\mathcal{C}$ existe una estrategia $\hat{\sigma}$ tal que cualquier acción con soporte que contenga $\mathcal{C}$ está dominada por una acción que es estrictamente una mejor respuesta ante $\hat{\sigma}$.

Consideramos el conjunto de todos los soportes posibles, llamamos D_t al conjunto finito de todos los soportes dominados para los jugadores tipo t. Para cada elemento mínimo de D_t, digamos d_t, sea σ_{d_t} una estrategia tal que cualquier acción con soporte que contenga d_t está dominada por una acción que es estrictamente una mejor respuesta ante dicha estrategia. Sea M_t el conjunto de elementos mínimos de D_t.

Para $\lambda > 0$, definimos un nuevo juego de Poisson Γ^{λ}, con vector de utilidad dado por

$$u_t^{\lambda}(c,x) = u_t(c,x) + \lambda \sum_{d_t \in M_t} U_t(c, \sigma_{d_t})$$

que implica utilidades esperadas,

$$U_t^{\lambda}(\theta_t, \sigma) = U_t(\theta_t, \sigma) + \lambda \sum_{d_t \in M_t} U_t(\theta_t, \sigma_{d_t}).$$

Este nuevo juego de Poisson tiene un equilibrio. Además, ninguna acción dominada del juego original se toma pon probabilidad positiva en dicho equilibrio. Tómese una secuencia de $\lambda \to 0$. Existe una subsecuencia de equilibrios $\{\sigma^{\lambda}\}_{\lambda}$ que converge a algún $\bar{\sigma}$. Por continuidad de la función de utilidad, $\bar{\sigma}$ es un equilibrio en estrategias no dominadas del juego original. $\square$

En la sección 3.4 hemos definido los juegos de Poisson perturbados. En un juego perturbado (Γ, η) una acción $\theta \in \Sigma_t(\eta_t)$ está dominada para el tipo t si existe una acción alternativa $\theta' \in \Sigma_t(\eta_t)$ tal que $U_t(\theta, \sigma) \leq U_t(\theta', \sigma)$, para toda estrategia posible $\sigma \in \Sigma(\eta)$ y $U_t(\theta, \sigma') < U_t(\theta', \sigma')$ para al menos una $\sigma' \in \Sigma(\eta)$.

Podemos reforzar el definición de equilibrio perfecto (definición 3.5), pidiendo a los miembros de la secuencia que sean no dominados.

DEFINICIÓN 3.8. La estrategia σ es un equilibrio perfecto no dominado del juego de Poisson Γ si es el límite de una secuencia $\{\sigma^{\eta}\}_{\eta \to 0}$ donde σ^{η} es un equilibrio no dominado de (Γ, η) para todo η.

Todo juego de Poisson perturbado tiene un equilibrio no dominado.[12] Además, para η cercano a cero los conjuntos de soportes dominados en

[12] Para ver eso, una modificación de la demostración de la proposición 3.3 serviría, donde el soporte de una acción se define como el conjunto de acciones puras que reciben una probabilidad estrictamente mayor que el peso mínimo impuesto por η.

Γ y en (Γ, η) coinciden para todos los tipos. Por lo tanto, todo equilibrio perfecto no dominado es perfecto y no dominado (es decir, satisface nuestra versión más restrictiva de admisibilidad). Dado que todo juego de Poisson perturbado tiene un equilibrio no dominado y dado que este equilibrio está contenido en el conjunto compacto $(\Delta(C))^T$ se sigue que:[13]

PROPOSICIÓN 3.4. *Todo juego de Poisson tiene un equilibrio perfecto no dominado.*

La definición parece ser más fuerte que requerir separadamente perfección y no dominación dado que impone restricciones en la secuencia de equilibrios de los juegos de Poisson perturbados. La siguiente proposición muestra que ambas definiciones con equivalentes. Este hecho, en vista del lema 3.6, simplifica el análisis de los equilibrios perfectos no dominados en los juegos de Poisson.

PROPOSICIÓN 3.5. *El conjunto de equilibrios perfectos no dominados coincide con la intersección del conjunto de equilibrios no dominados con el conjunto de equilibrios perfectos.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un σ que pertenezca al conjunto de equilibrios perfectos y al conjunto de equilibrios no dominados de Γ. Como σ es perfecto es el límite de una secuencia $\{\sigma^\eta\}_{\eta \to 0}$ donde σ^η es un equilibrio de (Γ, η). Dado que σ no está dominada, su soporte tampoco está dominado. Además, para η cercano a cero el conjunto de soportes dominados en Γ y en (Γ, η) coinciden para cualquier tipo. Para cada η, definamos η' como:

$$\eta'_t(c) = \begin{cases} \sigma_t^\eta(c) & \text{si } \sigma_t(c) = 0 \\ \eta_t(c) & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad \text{para todo } c, t.$$

[13]Véase el pie de página 5.

Entonces, $\sigma^{\eta'} = \sigma^{\eta}$ es un equilibrio no dominado de (Γ, η'). Además la secuencia de η' converge a cero. Por lo tanto σ es el límite de la secuencia $\{\sigma^{\eta'}\}_{\eta' \to 0}$ de equilibrios no dominados de (Γ, η'). $\square$

CAPíTULO 4

Determinación Genérica del Equilibrio de Nash en Juegos de Formación de Redes

4.1. Introducción

Una herramienta básica para aplicar teoría de juegos no cooperativa es tener un conjunto finito de distribuciones de probabilidad en los resultados derivados equilibrio.[1] Cuando las utilidades se definen sobre el conjunto de resultados relevante, es bien sabido que genéricamente esto es cierto cuando podemos asignar un resultado diferente a cada perfil de estrategias puras (Harsanyi, 1973), o a cada nodo final de un juego extensivo (Kreps y Wilson, 1982).[2]

Una *estructura de juego* dota a los jugadores con conjuntos de estrategias finitos y especifica cual es el resultado que se obtiene de cara perfil de estrategias puras.[3] Podría identificar, por ejemplo, dos nodos finales en una forma extensiva con el mismo resultado. Govindan y McLennan (2001) dan un ejemplo de una estructura de juego que, en un conjunto abierto de utilidades en resultados, produce un número infinito de distribuciones de

[1]Con *resultados* queremos decir el conjunto de resultados físicos o económicos que se derivan del equilibrio (es decir, el conjunto de las diferentes alternativas económicas que se pueden encontrar una vez que el juego ha concluido) y no el conjunto de distribuciones de probabilidad generadas por equilibrios. Nos referiremos a este concepto con el término de distribuciones de equilibrio.

[2]Harsanyi (1973) en realidad demuestra que el conjunto de equilibrios de Nash es finito para una asignación genérica de pagos a perfiles de estrategias puras.

[3]Con mayor generalidad, especifica una distribución de probabilidad en el conjunto de resultados. Las estructuras de juego están definidas formalmente en la sección 4.2.2

equilibrio en resultados. Viendo este resultado negativo, tenemos que acudir a clases de juegos específicas para encontrar resultados positivos sobre la determinación del equilibrio de Nash. Algunos ejemplos son Park (1997) para juegos de señalización, y De~Sinopoli (2001), De~Sinopoli y Iannantuoni (2005) para juegos de votación.

Este artículo estudia la determinación genérica del equilibrio de Nash cuando los pagos individuales dependen de la red que los conecta. La literatura de redes ha sido prolija para describir la interacción económica y social. Véase por ejemplo Jackson y Wolinsky (1996), Jackson y Watts (2002), Kranton y Minehart (2001), o Calvo-Armengol (2004). Por lo tanto es importante tener teorías a cerca de cómo estas redes se forman. Diferentes procedimientos de formación de redes se han propuesto. Una revisión comprensiva de estas teorías es ofrecida por Jackson (2003).

Este artículo trata sobre el enfoque no cooperativo en la formación de redes. Nos centraremos en el juego de formación de redes propuesto por Myerson (1991). Se puede describir de la siguiente manera: cada jugador simultáneamente propone una lista de jugadores con los que desea formar un vínculo, y un vínculo directo entre dos jugadores es formado si y sólo si ambos jugadores están de acuerdo en ello. Este juego es simple e intuitivo, sin embargo, dado que son necesarios dos jugadores para formar un vínculo, surge un problema de coordinación que causa que el juego tenga múltiples equilibrios. En cualquier caso, podemos probar que aunque un juego de formación de redes pueda tener un gran número de equilibrios, toda distribución de probabilidad en el espacio de redes está genéricamente aislada.

El juego de formación de redes se presenta formalmente en la siguiente sección. La sección 4.3 discute un ejemplo. La sección 4.4 contiene el resultado principal y su demostración. Para concluir, la sección 4.5 discute algunas extensiones del resultado a otros juegos de formación de redes así como un resultado parecido para el juego extensivo de formación de redes introducido por Aumann y Myerson (1989).

4.2. Preliminares

Dado un conjunto finito A, denotaremos como $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de las partes de A, y como $\Delta(A)$ al conjunto de distribuciones de probabilidad en A.

4.2.1. Redes. Dado un conjunto de jugadores N, una *red* g es una colección de vínculos bilaterales. Un vínculo bilateral en la red g entre dos jugadores diferentes i y j se denota como $ij \in g$. De momento nos centraremos en redes no dirigidas. En un red no dirigida $ij \in g$ es equivalente a $ji \in g$.[4] El conjunto de los vínculos directos del jugador i en g es $L_i(g) = \{jk \in g : j = i \text{ ó } k = i\}$.

La red completa g^N es tal que $L_i(g^N) = \{ij : j \neq i\}$, para todo $i \in N$. En g^N el jugador i está vinculado directamente con cada uno de los otros jugadores. El conjunto de todas las redes no dirigidas en N es $\mathcal{G} = \mathcal{P}(g^N)$.

Cada jugador i puede estar vinculado directamente con $N-1$ jugadores diferentes. El número de vínculos en la red completa g^N es $N(N-1)/2$, dividiendo entre 2 para no contar los vínculos dos veces. Dado que $\mathcal{G}$ es el conjunto de las partes de g^N, tiene $2^{N(N-1)/2}$ elementos.

4.2.2. Estructuras de Juego. Una *estructura de juego* viene dada por un conjunto de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, conjuntos de estrategias finitos y no vacíos $S_1, \ldots, S_n$, un conjunto finito de resultados Ω, una función

[4] En una red dirigida, si i y j son dos agentes diferentes, el vínculo ij es diferente del vínculo ji. Estos dos vínculos se pueden considerar diferentes si, por ejemplo, explican cual es la dirección de la información, o cuál es el jugador que patrocina el vínculo.

$\theta\colon S \to \Delta(\Omega)$, y utilidades definidas sobre el conjunto de resultados Ω, esto es, $u_1,\dots,u_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Una vez que fijamos N, $S_1,\dots,S_n$, Ω, y θ, una estructura de juego viene dada por un punto en $\left(\mathbb{R}^{\Omega}\right)^N$.

Las funciones de utilidad $u_1,\dots,u_n$ sobre Ω inducen funciones de utilidad $v_1,\dots,v_n$ en S de acuerdo con $u_1\circ\theta,\dots,u_n\circ\theta$. Por lo tanto, toda estructura de juego tiene asociada su juego finito en forma normal.

4.2.3. El Juego de Formación de Redes. El siguiente juego de formación de redes se debe a Myerson (1991). El conjunto de jugadores es N. Todos los jugadores en N simultáneamente anuncian el conjunto de vínculos que desean formar. Formalmente, el conjunto de estrategias puras del jugador i es $S_i = \mathcal{P}(N\setminus\{i\})$. Por lo tanto, una estrategia $s_i \in S_i$ es un subconjunto de $N\setminus\{i\}$ y se interpreta como el conjunto de jugadores que no son i con los que el jugador i desea formar un vínculo. Consentimiento mutuo es necesario para la creación de vínculos, es decir, si se juega s, ij se crea si y sólo si $j\in s_i$ y $i\in s_j$.

Podemos adaptar la descripción general anterior de estructuras de juego al este contexto para especificar la estructura de juego que articula el juego de formación de redes. Sean el conjunto de jugadores y la colección de conjuntos de estrategias puras como antes. El conjunto de resultados es el conjunto de redes no dirigidas, es decir, $\Omega = \mathcal{G}$. La función θ es una función determinística, formalmente, $\theta\colon S\to\mathcal{G}$. Dado un perfil de estrategias puras, θ especifica qué red se forma respetando la regla de consentimiento mutuo para crear vínculos directos. Las utilidades son funciones $u_1,\dots,u_n\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$. Una vez que el conjunto de jugadores se da, los conjuntos de estrategias puras se crean automáticamente y el juego de formación de redes se define mediante un punto en $\left(\mathbb{R}^{\mathcal{G}}\right)^N$.

Si los jugadores a parte de i juegan de acuerdo a $s_{-i} \in S_{-i}$,[5] la utilidad del jugador i por jugar la estrategia s_i es igual a $v_i(s_i, s_{-i}) = u_i(\theta(s_i, s_{-i}))$.

Sea $\Sigma_i = \Delta(S_i)$ el conjunto de estrategias mixtas del jugador i. Además, sea $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$. Mientras que un perfil de estrategias puras s resulta en la red $\theta(s)$ con certidumbre, un perfil de estrategias mixtas σ genera una distribución de probabilidad en $\mathcal{G}$, donde la probabilidad de que $g \in \mathcal{G}$ se forme es igual a

$$\mathbf{P}(g \mid \sigma) = \sum_{s \in \theta^{-1}(g)} \left(\prod_{i \in N} \sigma_i(s_i) \right).$$

Si los jugadores a parte de i juegan según σ_{-i} en Σ_{-i},[6] la utilidad del jugador i por jugar la estrategia mixta σ_i es igual a $V_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{g \in \mathcal{G}} \mathbf{P}(g \mid (\sigma_i, \sigma_{-i})) u_i(g)$.

DEFINICIÓN 4.1 (Equilibrio de Nash). El perfil de estrategias $\sigma \in \Sigma$ es un equilibrio de Nash del juego de formación de redes si $V_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq V_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$ para todo σ_i' en Σ_i, y para todo i en N.

4.2.4. Finitud Genérica de las Distribuciones de Probabilidad. Demos primero la definición de conjunto genérico.

DEFINICIÓN 4.2. Para cualquier $m \geq 0$, diremos que $G \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto genérico, o simplemente genérico, si $\mathbb{R}^m \setminus \mathrm{int}(G)$ tiene medida de Lebesgue igual a 0.

Govindan y McLennan (2001) dan un ejemplo de una estructura de juego que, en un conjunto abierto de utilidades sobre resultados, produce un número infinito de distribuciones de equilibrio en el espacio de resultados.[7]

---

[5] $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$.

[6] $\Sigma_{-i} = \prod_{j \neq i} \Sigma_j$.

[7] Su contraejemplo necesita al menos tres jugadores. En un artículo reciente Kukushkin et~al. (2007) ofrecen un contraejemplo para el caso de dos jugadores.

Sin embargo, también ofrecen varios resultados positivos. Considérese la especificación general de estructuras de juego dada en la sección 4.2.2. El siguiente teorema es una modificación del teorema 5.3 en Govindan y McLennan (2001).

TEOREMA 4.1. *Si* θ *es tal que en todas las estrategias completamente mixtas, y para cada jugador i el conjunto de distribuciones en* Ω *que el agente i puede inducir cambiando su estrategia tiene dimensión igual a* $(|S_i|-1)$*, entonces para utilidades genéricas hay un número finito de equilibrios completamente mixtos.*

La demostración del teorema 4.1 se ofrece en el apéndice.

4.3. Un Ejemplo

Tómese un juego de formación de redes para 3 personas. La estructura de juego correspondiente se representa en la figura 4.1. El jugador 1 elige la fila, el jugador 2 la columna, y el jugador 3 la matriz. El símbolo g^0 denota la red vacía, g^N denota la red completa, g^{ij} denota la red que sólo contiene el vínculo ij, y g^i denota la red donde el jugador i está conectado a cualquier otro jugador y tal que no hay ningún otro vínculo.[8]

Supongamos que la función de utilidad del jugador $i=1,2$ es $u_i(g) = |L_i(g)|$, es decir, el jugador $i=1,2$ deriva una utilidad de la red g igual al número de vínculos directos que mantiene en g. Supongamos también que el jugador 3 tiene la misma función de utilidad que los jugadores 1 y 2,

[8] Esta arquitectura de red es usualmente denominada *estrella*, Véase Bala y Goyal (2000)

	$\{\emptyset\}$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{1,3\}$	$\{\emptyset\}$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{1,3\}$
$\{\emptyset\}$	g^0	g^0	g^0	g^0	g^0	g^0	g^0	g^0
$\{2\}$	g^0	g^{12}	g^0	g^{12}	g^0	g^{12}	g^0	g^{12}
$\{3\}$	g^0	g^0	g^0	g^0	g^{13}	g^{13}	g^{13}	g^{13}
$\{2,3\}$	g^0	g^{12}	g^0	g^{12}	g^{13}	g^1	g^{13}	g^1
		$\{\emptyset\}$				$\{1\}$		

$\{\emptyset\}$	g^0	g^0	g^{23}	g^{23}	g^0	g^0	g^{23}	g^{23}
$\{2\}$	g^0	g^{12}	g^{23}	g^2	g^0	g^{12}	g^{23}	g^2
$\{3\}$	g^0	g^0	g^{23}	g^{23}	g^{13}	g^{13}	g^3	g^3
$\{2,3\}$	g^0	g^{12}	g^{23}	g^2	g^{13}	g^1	g^3	g^N
		$\{2\}$				$\{1,2\}$		

FIGURA 4.1. La estructura de juego del juego de formación de redes con tres jugadores.

salvo que deriva una utilidad igual a 2 de la red g^2. Para ser específicos,

$$u_i(g^0) = 0 \quad \text{para todo } i,$$

$$u_i(g^{jk}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ ó } i = j \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

$$u_i(g^j) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{si } i = 3 \text{ y } j = 2 \\ 1 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

$$g_i(g^N) = 2 \quad \text{para todo } i.$$

La figura 4.2 muestra el conjunto de equilibrios de Nash de este juego. El subconjunto de equilibrios de Nash de la línea (i) respalda la red vacía, los subconjuntos de la línea (ii) respaldan, respectivamente, las redes g^{12},

g^{13} y g^{23}, los subconjuntos de la línea (iii) respaldan, respectivamente, las redes g^1, g^2 y g^3.

(I)

$$\mathrm{NE} = \Big\{ (\{\emptyset\},\{\emptyset\},\{\emptyset\}) \Big\} \bigcup$$

(II)

$$\Big\{ (\{2\},\{1\},\{\emptyset\}) \Big\} \bigcup \Big\{ (\{3\},\{\emptyset\},\{1\}) \Big\} \bigcup \Big\{ (\{\emptyset\},\{3\},\{2\}) \Big\} \bigcup$$

(III)

$$\Big\{ (\{2,3\},\{1\},\{1\}) \Big\} \bigcup \Big\{ (\{2\},\{1,3\},\{2\}) \Big\} \bigcup \Big\{ (\{3\},\{3\},\{1,2\}) \Big\} \bigcup$$

(IV)

$$\Big\{ (\{2,3\},\{1,3\},\lambda\{2\} + (1-\lambda)\{1,2\}) : \lambda \in [0,1] \Big\}.$$

FIGURA 4.2. El conjunto de equilibrios de Nash del juego de formación de redes para 3 personas discutido en la sección 4.3.

El subconjunto de equilibrios de la línea (iv) induce un continuo de distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de redes que dan probabilidad λ a la red g^2 y probabilidad $(1-\lambda)$ a la red completa g^N para $\lambda \in [0,1]$.

Ahora perturbemos las utilidades que cada jugador obtiene de casa red independientemente. Los subconjuntos de perfiles de estrategias de las líneas desde la (i) a la (iii) todavía son perfiles de estrategias de equilibrio. Además, hay dos posibilidades:

- El jugador 3 prefiere la red completa g^N a la red g^2. En este caso el conjunto de equilibrios de Nash se compone de las líneas de la (i) a la (iii) unidas a

  $$\Big\{ (\{2,3\},\{1,3\},\{1,2\}) \Big\},$$

  que respalda a la red completa.

- El jugador 3 prefiere la red g^2 a la red completa g^N. Entonces, ningún equilibrio de Nash da probabilidad positiva a la red completa. El conjunto de equilibrios de Nash se compone de las líneas de la (i) a la (iii) unidas a

$$\Big\{(\lambda\{2\}+(1-\lambda)\{2,3\},\{1,3\},\{2\}):\lambda\in[0,1)\Big\},$$

que respalda a la red g^2.

En cualquier caso, existe un número finito de distribuciones de probabilidad sobre redes inducidas por equilibrios.

4.4. El Resultado

PROPOSICIÓN 4.1. *Para $u\in\left(\mathbb{R}^{\mathcal{G}}\right)^N$ genérico, el conjunto de distribuciones de probabilidad inducidas sobre redes por equilibrios del juego de formación de redes es finito.*

DEMOSTRACIÓN. Dado un juego de formación de redes, hay un número finito de diferentes juegos en forma normal que se obtienen asignado a cada jugador i un elemento de $\mathcal{P}(S_i)$ como su conjunto de estrategias.

Sea $T=T_1\times\cdots\times T_n$, donde $T_i\subseteq S_i$. El juego en forma normal Γ_T se define mediante el conjunto de jugadores N, la colección de conjuntos de estrategias $\{T_i\}_{i\in N}$, y la colección de funciones de utilidad $\{v_i^T\}_{i\in N}$, donde v_i^T es la restricción de v_i a T. Además, sea $\mathcal{G}_T=\theta(T)$.

Es suficiente demostrar que para una asignación genérica de utilidades a redes, los equilibrios de Nash completamente mixtos de cada uno de estos juegos inducen un número finito de distribuciones de probabilidad en $\mathcal{G}$. Nótese que todo equilibrio de cualquier juego se puede obtener como un equilibrio completamente mixto del juego modificado eliminando las estrategias no usadas.

Consideremos el juego Γ_T. Si existe una estrategia $t_i \in T_i$ con $j \in t_i$ y no existe una estrategia $t_j \in T_j$ tal que $i \in t_j$, reemplazaremos la estrategia t_i por $t_i' = t_i \setminus \{j\}$ en el caso de que t_i' no está todavía contenida en T_i, en otro caso, simplemente eliminaremos la estrategia t_i de T_i. Nótese que haciendo este cambio, el conjunto de distribuciones de probabilidad en $\mathcal{G}_T$ que se pueden obtener a través de estrategias completamente mixtas permanece inalterado. Más importante es que, para cualquier equilibrio de Nash completamente mixto de Γ_T, existe un equilibrio de Nash completamente mixto del juego modificado que induce la misma distribución de probabilidad en $\mathcal{G}_T$.

Repetimos el mismo procedimiento con t_i': si existe un $k \in t_i'$ y no existe una estrategia t_k en T_k con $i \in t_k$ substituimos t_i' por $t_i'' = t_i' \setminus \{k\}$ en el caso de que t_i'' no esté ya contenido en T_k. Continuamos eliminando y reemplazando estrategias puras de la misma manera, para todo t_i en T_i y para todo i en N, hasta que cada vínculo que se proponga por cualquier jugador en cualquiera de sus estrategias puras se forme con probabilidad positiva bajo un perfil de estrategias completamente mixto. Denotaremos $\hat{T}$ al conjunto de perfiles de estrategias puras que resulta de este proceso, y vemos que $\mathcal{G}_{\hat{T}} = \mathcal{G}_T$.

En cualquier perfil de estrategias completamente mixto σ del juego $\Gamma_{\hat{T}}$, toda red en $\mathcal{G}_T$ recibe probabilidad positiva. En el perfil de estrategias (t_i, σ_{-i}), sólo aquellas redes $g \in \mathcal{G}_T$ tales que $\{ij : j \in t_i\} \subset g$ reciben probabilidad positiva, y dado que para todo jugador i cada una de sus estrategias es diferente, tenemos que:

$$\operatorname{rank} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \sigma_i}(\cdot \mid \sigma) = |\hat{T}_i| - 1.$$

Por lo tanto, en todo perfil de estrategias completamente mixto de $\Gamma_{\hat{T}}$ el conjunto de distribuciones de probabilidad en $\mathcal{G}_T$ que el jugador i puede inducir cambiando su estrategia tiene dimensión igual a $(|\hat{T}_i| - 1)$. Podemos aplicar el teorema 4.1 a la estructura de juego dada por $\hat{T}$ y $\theta_{\hat{T}}$, la restricción de θ a $\hat{T}$. Esto implica que para utilidades genéricas sobre $\mathcal{G}_T$ hay un número finito de equilibrios completamente mixtos de $\Gamma_{\hat{T}}$, que a su vez implica que el conjunto de distribuciones de probabilidad en $\mathcal{G}_T$ inducidas por equilibrios de Nash completamente mixtos de Γ_T es genéricamente finito.

Sea $T \subseteq S$, podemos escribir $\left(\mathbb{R}^{\mathcal{G}}\right)^N = \left(\mathbb{R}^{\mathcal{G}_T}\right)^N \times \left(\mathbb{R}^{\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_T}\right)^N$. Sea K un conjunto cerrado de medida cero en $\left(\mathbb{R}^{\mathcal{G}_T}\right)^N$, es decir, el cierre del conjunto de pagos sobre $\mathcal{G}_T$ tales que el conjunto de equilibrios de Nash completamente mixtos de Γ_T induce un número infinito de distribuciones de probabilidad en $\mathcal{G}_T$, entonces para cualquier conjunto cerrado H en $\left(\mathbb{R}^{\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_T}\right)^N$ el conjunto cerrado $K \times H$ tiene medida cero en $\left(\mathbb{R}^{\mathcal{G}}\right)^N$. Lo mismo es cierto para cualquier otro $T' \subseteq S$. Esto concluye la prueba. $\square$

4.5. Notas

4.5.1. Ausencia de Consentimiento Mutuo. Se pueden encontrar en la literatura modelos de formación de redes que no requieren consentimiento mutuo de las partes para crear vínculos directos, véase por ejemplo Bala y Goyal (2000). Por lo tanto, supongamos que no es necesario el consentimiento mutuo para crear vínculos directos. Sea N el conjunto de jugadores, sea $S_1, \ldots, S_n$ la colección de conjuntos de estrategias puras, donde $S_i = \mathcal{P}(N \setminus \{i\})$ para todo i en N, y sea $\mathcal{G}$ el conjunto de resultados. En el modelo analizado en la sección 4.4, un vínculo puede no ser creado aunque un jugador quiera crearlo. En el modelo actual, un vínculo puede crease incluso si un jugador no quiere que se cree.

En este juego de formación de redes modificado, genéricamente, el conjunto de distribuciones de equilibrio en $\mathcal{G}$ es también finito. Nótese que podemos reinterpretar las estrategias puras $s_i \in S_i$ como el conjunto de jugadores diferentes de i con los que el jugador i no quiere formar un vínculo. El vínculo ij no se crea ´si y sólo si el jugador i no quiere estar vinculado con el jugador j y el jugador j no quiere estar vinculado con el jugador i. Definimos $\theta' : S \to \mathcal{G}$ de acuerdo con $\theta'(s) = g^N \setminus \theta(s)$, donde θ es el ya definido en la sección 4.2.3. Ahora podemos aplicar la demostración de la sección 4.4.

4.5.2. Redes Dirigidas. Aveces los vínculos ij y jino se pueden considerar como equivalentes por motivos derivados de la naturaleza del fenómeno que está siendo analizado. Las redes dirigidas responden a esta necesidad, como ejemplos véase de nuevo Bala y Goyal (2000). Denotamos el conjunto de redes dirigidas como $\mathcal{G}^d$. Supongamos en primer lugar que la formación de vínculos no requiere consentimiento mutuo. El conjunto de estrategias del jugador i es $S_i = \mathcal{P}(N \setminus \{i\})$. Una estrategia $s_i \in S_i$ se interpreta como el conjunto de jugadores diferentes de i con los que el jugador i quiere empezar un vínculo en forma de flecha que apunta a si mismo, es decir, el conjunto de vínculos que el jugador i desea recibir. [9]

Nótese que cada perfil de estrategias puras conduce a un elemento diferente de $\mathcal{G}^d$: cada jugador tiene 2^{N-1} estrategias puras, y hay $2^{N(N-1)}$ redes no dirigidas. Por lo tanto, estamos en el caso de juegos en forma normal donde la finitud genérica de los equilibrios de Nash está garantizada.

Supongamos ahora que si el jugador i quiere recibir un vínculo del jugador j, el jugador j necesita declarar que quiere enviar un vínculo al jugador i para crearlo. Para ubicar este caso, consideremos que el conjunto de estrategias del jugador i es $S_i = S_i^r \times S_i^s = \mathcal{P}(N \setminus \{i\}) \times \mathcal{P}(N \setminus \{i\})$. Una estrategia $s_i \in S_i$ tiene dos partes, s_i^r y s_i^s. Interpretamos s_i^r como el conjunto de jugadores que no son i desde los que el jugador i desea recibir un vínculo, y s_i^s como el conjunto de jugadores que no son i a los que el jugador i quiere enviar un vínculo. Supongamos que el perfil de estrategias puras s se juega. El vínculo ij se crea si y sólo si $j \in s_i^r$ y $i \in s_j^s$.

[9] Podemos suponer, por ejemplo, que la dirección de la flecha nos dice cuál es la dirección del flujo de información.

Una demostración similar a la usada en la sección 4.4 establece la determinación genérica del equilibrio de Nash en este escenario. El paso clave que debemos cambiar es el siguiente: Sea $T = T_1 \times \cdots \times T_n$ donde $T_i \subset S_i$ para todo i. Considérese el juego en forma normal Γ_T. Si existe una estrategia $t_i \in T_i$ tal que $j \in t_i^r$ (tal que $j \in t_i^s$) y no existe una estrategia $t_j \in T_j$ tal que $i \in t_j^s$ (tal que $i \in t_j^r$), reemplazamos la estrategia t_i por $t_i' = (t_i^r \setminus \{j\}, t_i^s)$ (por $t_i' = (t_i^r, t_i^s \setminus \{j\})$). Finalmente, repetimos el mismo procedimiento para todo $t_i, t_i', \ldots$ y para todo i hasta que las hipótesis del teorema 4.1 se cumplan.

4.5.3. Un Juego Extensivo de Formación de Redes.

Nos hemos centrado en juegos en forma normal de formación de redes. Sin embargo, existe un importante juego extensivo de formación de redes que es debido a Aumann y Myerson (1989). Propusieron la primera formalización explícita del proceso de formación de redes como un juego. Necesita de un orden exógenamente dado sobre los posibles vínculos. Sea $(i_1 j_1, \ldots, i_m j_m)$ dicho orden.

El juego tiene m etapas. En la primera etapa los jugadores i_1 y j_1 juegan un juego de movimientos simultáneos para decidir si forman el vínculo $i_1 j_1$. Cada uno de ellos escoge una acción del conjunto $\{yes, not\}$. El vínculo $i_1 j_1$ se establece si y sólo si ambos jugadores eligen *yes*. Una vez que la decisión sobre el vínculo $i_1 j_1$ se ha tomado, todo jugador es informado, y el juego avanza hacia la decisión sobre el vínculo $i_2 j_2$. El juego continúa de la misma manera, y acaba con la etapa en la que los jugadores i_m y j_m deciden sobre el vínculo $i_m j_m$.[10] La red resultante se forma por el conjunto de vínculos $i_k j_k$ tales que ambos jugadores i_k y j_k eligen *yes* en la etapa k. Aunque nos

[10] Si a los jugadores se les informa de la posición final del juego simultáneo en cada etapa, el mimo argumento que se ofrece a continuación es válido.

Varias características se pueden añadir a este juego. Por ejemplo, un par de jugadores pueden ser llamados a reconsiderar su decisión en el caso en el que cierto conjunto de vínculos se forme, o a otro par de jugadores puede que no se les permita decidir sobre el hemos referido a redes no dirigidas, el juego también se puede aplicar a la formación de redes dirigidas.

El siguiente argumento es una modificación del usado por Govindan y McLennan (2001) para probar que, para una asignación dada de resultados a nodos finales en un juego extensivo de información perfecta, y para utilidades tales que ningún jugador es indiferente entre dos redes, todo equilibrio de Nash induce una distribución de probabilidad degenerada en el conjunto de resultados. Ese argumento es a su vez una generalización del usado por Kuhn (1953) para probar su teorema de "inducción hacia atrás" que caracteriza los equilibrios perfectos en subjuegos para los juegos de información perfecta.

Considérese el siguiente conjunto genérico de utilidades

$$U_G = \left\{ u \in \left(\mathbb{R}^{\mathcal{G}}\right)^N : u_i(g_1) \neq u_i(g_2) \text{ para todo } i \in N \text{ y todo } g_1, g_2 \in \mathcal{G} \right\}.$$

La afirmación es que si el vector de utilidades es $u \in U_G$, todo equilibrio de Nash induce una distribución de probabilidad en $\mathcal{G}$ que asigna probabilidad uno a alguna red $g \in \mathcal{G}$.

Denotemos como S_i al conjunto de estrategias puras del jugador i, ahora una estrategia pura es una función que asigna un elemento en $\{yes, not\}$ a cada conjunto de información del jugador i. Como siempre, $\Sigma_i = \Delta(S_i)$ y $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$.

Sea $\sigma \in \Sigma$ un equilibrio de Nash para $u \in U_G$. La variación apropiada de σ, digamos $\overline{\sigma}$, es un equilibrio de Nash completamente mixto del juego extensivo que es obtenido eliminando todos los conjuntos de información y ramas que suceden con probabilidad cero cuando σ se juega. En este juego reducido, todos los conjuntos de información tienen una probabilidad

vínculo que los conecta. A este respecto, si los jugadores se encuentran formando una red no dirigida, m puede ser diferente de $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$.

condicionada perfectamente definida sobre redes y, obviamente, $\bar{\sigma}$ induce la misma probabilidad en $\mathcal{G}$ que σ.

Si existe una etapa en la que un jugador aleatoriza entre *yes* y *not* y el otro jugador elige *yes* con probabilidad positiva, debe existir una última etapa como esa. Pero en esta última etapa, digamos la $i_h j_h$, dicho agente, pongamos, i_h, no puede estar optimizando, dado que no es indiferente entre $g \setminus \{i_h j_h\}$ y $g \cup \{i_h j_h\}$ para cualquier $g \in \mathcal{G}$.

Podemos adaptar el argumento previo para el caso en el que no sea necesario un consentimiento mutuo para crear vínculos. Sea $(i_1 j_1, \dots, i_m j_m)$ un orden de vínculos. En la etapa k, el jugador i_k decide si crear el vínculo $i_k j_k$. Su decisión es conocimiento común. Se trate de un juego de información perfecta y el mismo argumento ofrecido por Govindan y McLennan (2001) cubre este caso.

4.6. Apéndice: Demostración del Teorema 4.1

La siguiente demostración está basada en la ofrecida por Govindan y McLennan (2001). Usa algunos conceptos y resultados de geometría semi-algebraica que revisaremos a continuación. Exposiciones en geometría semi-algebraica aparecen en Blume y Zame (1994), Schanuel et~al. (1991) y Govindan y McLennan (2001). Omitiremos las demostraciones de los resultados importantes.

DEFINICIÓN 4.3. Un conjunto A es semi-algebraico si es la unión finita de conjuntos con la forma

$$\{x \in \mathbb{R}^m : P(x) = 0 \text{ y } Q_1(x) > 0 \text{ y} \dots \text{y } Q_k(x) > 0\}$$

donde P y $Q_1, \dots, Q_k$ son polinomios en $x_1, \dots, x_m$ con coeficientes reales. Una función (o correspondencia) $g : A \to B$ con dominio semi-algebraico $A \subset \mathbb{R}^n$ y rango $B \subset \mathbb{R}^m$ es semi-algebraica si su gráfico es un conjunto semi-algebraico de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Cada conjunto semi-algebraico es la unión finita de componentes conectados. Cada componente es una *variedad semi-algebraica* de determinada dimensión. Una *variedad semi-algebraica d-dimensional* en $\mathbb{R}^m$ es un conjunto semi-algebraico $M \subset \mathbb{R}^m$ tal que para cada $p \in M$ existen polinomios $P_1, \ldots, P_{m-d}$ y U, una vecindad de p, tal que $DP_1(p), \ldots, DP_{m-d}(p)$ son linearmente independientes y

$$M \cap U = \{q \in U : P_1(q) = \ldots = P_{m-d}(q) = 0\}.$$

TEOREMA 4.2 (Estratificación, Whitney (1957)). *Si A es un conjunto semi-algebraico, entonces A es la unión de un conjunto finito de variedades semi-algebraicas disjuntas y conectadas A^j con $A^j \subset \mathrm{cl}(A^k)$ siempre que $A^j \cap \mathrm{cl}(A^k) \neq \emptyset$.*

De ahora en adelante, el superíndice de un conjunto indexa componentes de una descomposición como la del teorema 4.2, mientras que un subíndice continúa indicando los conjuntos de estrategias por jugadores. El teorema 4.2 tiene consecuencias importantes. Entre ellas, usaremos las siguientes: Sean $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos semi-algebraicos, entonces

- la dimensión de A, $\dim A$, es igual a la mayor dimensión de los elementos de cualquier estratificación,
- si A es 0-dimensional entonces A es finito,
- A is genérico si y sólo si $\dim(\mathbb{R}^m \setminus A) < m$,
- $\dim(A \times B) = \dim A + \dim B$.

Necesitamos un resultado más. Mientras que el teorema 4.2 descompone conjuntos semi-algebraicos, el siguiente descompone funciones semi-algebraicas.

TEOREMA 4.3 (Trivialidad Local Genérica, Hardt (1980)). *Sean A y B conjuntos semi algebraicos, y sea $g\colon A \to B$ una función semi-algebraica continua. Existe un conjunto semi-algebraico relativamente cerrado $B' \subset B$*

con $\dim B' < \dim B$ *tal que cada componente* B^j *de* $B \setminus B'$ *tiene la siguiente propiedad: hay un conjunto semi-algebraico* F^j *y un homomorfismo semi-algebraico* $h\colon B^j \times F^j \to A^j$*, donde* $A^j = g^{-1}(B^j)$*, con* $g(h(b,f)) = b$ *para todo* $(b,f) \in B^j \times F^j$.

Podemos proceder a demostrar el teorema 4.1. Recordemos que en todos los perfiles de estrategias completamente mixtos $\sigma \in \Sigma$, el conjunto de distribuciones de probabilidad en resultados que el jugador i puede inducir cambiando su estrategia es $(|S_i| - 1)$-dimensional.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.1. Sea

$$A = \{(\sigma, u) : \sigma \text{ es un equilibrio completamente mixto para } u\}.$$

Sea π_Σ la proyección de A en Σ. Aplicamos el teorema 4.3 a π_Σ y elegimos Σ^j tal que $\dim A^j = \dim A$.[11] Tenemos que $\dim A = \dim \Sigma^j + \dim F^j \leq \dim \Sigma + \dim F^j$. Elijamos σ que pertenezca a Σ^j, entonces $\dim \pi_\Sigma^{-1}(\sigma) = \dim\{\sigma\} + \dim F^j = \dim F^j$. Ahora consideramos un u dado, el conjunto

$$\{\tilde{u}_i \in U_i : \sigma \text{ es un equilibrio completamente mixto para } (\tilde{u}_i, u_{-i})\}$$

es $(\dim U_i - (|S_i| - 1))$-dimensional. Consecuentemente, la dimensión de $\pi_\Sigma^{-1}(\sigma)$ y F^j es igual a $\dim U - \dim \Sigma$, lo cual implica que $\dim A \leq \dim U$.

Ahora aplicamos el teorema 4.3 a π_U, la proyección de A en U. Elegimos U^j que tenga la misma dimensión que U. Por lo tanto, $\dim A^j = \dim U + \dim \pi_U^{-1}(u)$. Esto implica que $\dim \pi_U^{-1}(u) \leq \dim A - \dim U \leq 0$, es decir, existe un conjunto finito de equilibrios de Nash siempre que u pertenezca a un conjunto U^j con máxima dimensión. Esto concluye la demostración dado que conjuntos U^j con una menor dimensión no son genéricos. □

[11] Tal Σ^j se puede encontrar ya que podemos seguir aplicando el teorema 4.3 a $\pi_\Sigma : \pi_\Sigma^{-1}(\Sigma') \to \Sigma'$, donde Σ' tiene el papel de B'.

Bibliografía

B. Adão y T. Temzelides. Sequential equilibrium and competition in a Diamond-Dybvig banking model. *Review of Economic Dynamics*, 1: 859–877, 1998.

R.J. Aumann y R.B. Myerson. Endogenous formation of links between players and of coalitions: an application of the Shapley value. In *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, pages 175–191. Cambridge University Press, 1989.

V. Bala y S. Goyal. A Noncooperative Model of Network Formation. *Econometrica*, 68(5):1181–1229, 2000.

T. Besley y S. Coate. An economic model of representative democracy. *Quaterly Journal of Economics*, 112:85–114, 1997.

L.E. Blume y W.R. Zame. The algebraic geometry of perfect and sequential equilibrium. *Econometrica*, 62:783–794, 1994.

A. Calvo-Armengol. Job Contact Networks. *Journal of Economic Theory*, 115(1):191–206, 2004.

F. De Sinopoli. On the Generic Finiteness of Equilibrium Outcomes in Plurality Games. *Games and Economic Behavior*, 34(2):270–286, 2001.

F. De Sinopoli y C. Gonzalez Pimienta. Undominated (and) perfect equilibria in poisson games. Economics Working Papers we073117, Universidad Carlos III, Departamento de Economía, 2007.

F. De Sinopoli y G. Iannantuoni. On the generic strategic stability of Nash equilibria if voting is costly. *Economic Theory*, 25(2):477–486, 2005.

D. Diamond y D. Dybvig. Bank runs, deposit insurance, and liquidity. *Journal of Political Economy*, 91:401–419, 1983.

D. Fudenberg y J. Tirole. Perfect bayesian equilibrium and sequential equilibrium. *Journal of Economic Theory*, 53:236–260, 1991.

D. Fudenberg y J. Tirole. *Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, 1996.

Drew Fudenberg y David Levine. Subgame-perfect equilibria of finite- and infinite-horizon games. *Journal of Economic Theory*, 31:251–268, 1983.

C. Gonzalez Pimienta y C.M. Litan. On the equivalence between subgame perfection and sequentiality. Economics Working Papers we052616, Universidad Carlos III, Departamento de Economía, 2005.

S. Govindan y A. McLennan. On the Generic Finiteness of Equilibrium Outcome Distributions in Game Forms. *Econometrica*, 69(2):455–471, 2001.

R.M. Hardt. Semi-Algebraic Local-Triviality in Semi-Algebraic Mappings. *American Journal of Mathematics*, 102(2):291–302, 1980.

J.C. Harsanyi. Oddness of the number of equilibrium points: A new proof. *International Journal of Game Theory*, 2(1):235–250, 1973.

M.O. Jackson. A Survey of Models of Network Formation: Stability and Efficiency. In *Group Formation in Economics: Networks, Clubs and Coalitions*. Cambridge University Press, 2003.

M.O. Jackson y A. Watts. The Evolution of Social and Economic Networks. *Journal of Economic Theory*, 106(2):265–295, 2002.

M.O. Jackson y A. Wolinsky. A Strategic Model of Social and Economic Networks. *Journal of Economic Theory*, 71(1):44–74, 1996.

E. Kohlberg y J.F. Mertens. On the strategic stability of equilibria. *Econometrica*, 54:1003–1038, 1986.

R.E. Kranton y D.F. Minehart. A Theory of Buyer-Seller Networks. *The American Economic Review*, 91(3):485–508, 2001.

D.M. Kreps y R. Wilson. Sequential equilibria. *Econometrica*, 50:863–894, 1982.

HW Kuhn. Extensive games and the problem of information. *Annals of Mathematical Studies*, 28:193–216, 1953.

N.S. Kukushkin, C.M. Litan, y F. Marhuenda. On the generic finiteness of outcome distributions for bimatrix game forms. Economics Working Paper Series we073520, Universidad Carlos III, Departamento de Economía, 2007.

J.F. Mertens. Ordinality in non cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 32(3):387–430, 2004.

Igal Milchtaich. Random-player games. *Games and Economic Behavior*, 47(2):353–388, May 2004.

J. Moore y R. Repullo. Subgame perfect implementation. *Econometrica*, 56:1191–1220, 1988.

R.B. Myerson. *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press, Cambridge, 1991.

R.B. Myerson. Large Poisson Games. *Journal of Economic Theory*, 94(1): 7–45, 2000.

R.B. Myerson. Comparison of Scoring Rules in Poisson Voting Games. *Journal of Economic Theory*, 103(1):219–251, 2002.

R.B. Myerson. Refinements of the Nash equilibrium concept. *International Journal of Game Theory*, 7(2):73–80, 1978.

Roger B. Myerson. Population uncertainty and poisson games. *International Journal of Game Theory*, 27(3):375–392, 1998.

M.J. Osborne y A. Rubinstein. *A Course in Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, 1994.

IU Park. Generic Finiteness of Equilibrium Outcome Distributions for Sender-Receiver Cheap-Talk Games. *Journal of Economic Theory*, 76

(2):431–448, 1997.

S.H. Schanuel, L.K. Simon, y W.R. Zame. The algebraic geometry of games and the tracing procedure. In R. Selten, editor, *Game Equilibrium Models, Vol. 2: Methods, Morals and Markets*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

R. Selten. Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nachfragetraheit. *Z. ges. Staatswissen*, 12:301–324, 1965.

R. Selten. Re-examination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, 4:24–55, 1975.

Eric van Damme. *Stability and Perfection of Nash Equilibria*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

H. Whitney. Elementary Structure of Real Algebraic Varieties. *The Annals of Mathematics*, 66(3):545–556, 1957.