Resolución de problemas de control estocástico de Mayer mediante ecuaciones en derivadas parciales

Josa Fombellida, Ricardo y Rincón Zapatero, Juan Pablo

Resumen

En este trabajo proporcionamos condiciones necesarias y suficientes de optimalidad en problemas de control óptimo estocástico de tipo Mayer en tiempo continuo. Nuestro enfoque está basado en el principio del máximo estocástico. Caracterizamos un control óptimo directamente mediante una ecuación en derivadas parciales, alternativa a la ecuación de Hamilton–Jacobi–Belman, pero que también permite obtener la función valor de una forma indirecta. Los resultados se ilustran con el análisis de un modelo dinámico de un plan de pensiones agregado.

Keywords: Programación dinámica, control estocástico, plan de pensiones
AMS: 93E20, 90C39

1. Introducción

El trabajo desarrolla un nuevo enfoque que caracteriza a un control markoviano óptimo de un problema de control estocástico de tipo Mayer como una solución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) cuasilineales. El sistema se obtiene a partir de las condiciones de optimalidad del principio del máximo estocástico. El sistema es equivalente a la ecuación de Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB), pero caracteriza directamente al control óptimo mientras que HJB a la función valor.

Aunque la idea inicial de obtener un sistema de EDPs para el control óptimo aparece en Bourdache–Siguerdidjane and Fliess [1] para problemas de control deterministas, los antecedentes principales de este trabajo son Rincón–Zapatero *et al* [14], en juegos diferenciales deterministas, y Josa–Fombellida and Rincón–Zapatero [9], en problemas de control estocástico con parámetro de difusión del proceso de estado independiente de las variables de control.

Josa–Fombellida and Rincón–Zapatero [9] obtiene un sistema de EDPs que debe satisfacer un control de Markov óptimo suave y también proporciona una condición suficiente para optimalidad, en el espíritu de los teoremas de verificación que aparecen en Fleming and Rishel [3] y Fleming and Soner [4]. En el caso tratado en aquél trabajo las ecuaciones del nuevo sistema son de diferente tipo a la de HJB, aunque ambas son semilineales.

El objetivo de este manuscrito es extender estos trabajos a un problema de control estocástico de tipo Mayer, es decir, sin función objetivo instantánea. En el problema de control considerado el coeficiente de difusión no depende de las variables de control, el control óptimo es interior a la región de los controles, y de clase $\mathcal{C}^{1,2}$, hay exactamente una variable de estado y al menos una variable de control. Estas características aparecen en algunos modelos de inversión óptima de la literatura financiera.

El trabajo se organiza como sigue. En la Sección 2 presentamos el problema de control de tipo Mayer que estudiaremos, así como algunas definiciones y notaciones. En la Sección 3 obtenemos condiciones necesarias de optimalidad mediante un sistema de EDPs que debe satisfacer un control óptimo. Una condición suficiente de optimalidad se da en la Sección 4. En la Sección 5 proporcionamos una fórmula explícita para obtener la función valor a través del sistema, sin recurrir a la ecuación de HJB. La Sección 6 contiene la aplicación de la teoría a problemas dinámicos de planes de pensiones. Se finaliza el trabajo con unas conclusiones en la Sección 7.

2. El problema de control

En esta sección formulamos el problema de control estocástico. Consideramos un intervalo de tiempo $[0,T]$ con $0 < T < \infty$ y un espacio probabilístico completo $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathrm{P})$, sobre el que está definido un movimiento Browniano d–dimensional $\{w(t)\}_{t\in[0,T]}$. Denotamos por E la esperanza bajo la medida de probabilidad P.

El espacio de estados es $\mathbb{R}$ y la región de los controles es algún conjunto convexo $U \subseteq \mathbb{R}$. Un *proceso de control* $\{u(s)\}$ definido en $[t,T]\times\Omega$ y con valores en U es una aplicación $\mathcal{F}_s$–medible de $[t,s]\times\Omega$ en U, es decir, $u(t,\omega)$ es $\mathcal{B}_s\times\mathcal{F}_s$–medible para cada $s\in[t,T]$, donde $\mathcal{B}_s$ denota la σ–álgebra de Borel en $[t,s]$.

El proceso de estado $\xi\in\mathbb{R}$ verifica la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$d\xi(s) = f(s,\xi(s),u(s))ds + \sigma(s,\xi(s),u(s))dw(s), \quad s \geq t, \tag{1}$$

con condición inicial $\xi(t) = x$. Aquí σ es una matriz $1\times d$.

Definición 2.1 (Control admisible). Un control $\{u(t)\}_{t\in[0,T]}$ es llamado admisible si

(i) para cada (t,x) la EDE (1) con condición inicial $\xi(t) = x$ admite una única solución fuerte;

(ii) existe una function $\phi : [0,T]\times\mathbb{R} \longrightarrow U$ de clase $\mathcal{C}^{1,2}$ tal que u es un *control feedback* relativo a ϕ, i.e. $u(s) = \phi(s,\xi(s))$ para cada $s\in[0,T]$.

$\mathcal{U}(t,x)$ denota el conjunto de los controles admisibles correspondientes a la condición inicial $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$.

De acuerdo con la definición, estamos considerando controles markovianos. u y ϕ serán identificados a veces en la notación. Dado que nuestro objetivo es resolver el problema *para cada* $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, a veces se escribe $\mathcal{U}$ en lugar de $\mathcal{U}(t,x)$.

Dado un dato inicial $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, el criterio de maximización es

$$J(t,x;u) = \mathrm{E}_{tx}\left\{S(T,\xi(T))\right\}, \tag{2}$$

donde E_{tx} denota esperanza condicionada con respecto a la condición inicial (t,x). Las funciones $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{1\times d}$ y $S : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se asumen de clase $\mathcal{C}^2$ con respecto a (x,u) y de clase $\mathcal{C}^1$ con respecto a t. Además suponemos que los parámetros deriva y difusión dependen de la variable de control u, i.e. $f_u \neq 0 \neq \sigma_u$.

En la especificación del problema hemos supuesto que la dimensión del vector de variables de control es uno. Ésta es una asunción crucial para los siguientes desarrollos. En la Nota 4.2 mostraremos que el caso con n controles, $n > 1$, se puede reducir al caso escalar.

La *función valor* se define como $V(t,x) = \sup_{u\in\mathcal{U}(t,x)} J(t,x;u)$. Un control admisible $\widehat{u} \in \mathcal{U}$ es *óptimo* si $V(t,x) = J(t,x;\widehat{u})$ para cada condición inicial (t,x).

El método clásico de resolución de un problema de control estocástico está basado en la programación dinámica. Consiste en encontrar la función valor a través de la ecuación de HJB y a partir de ella el control óptimo. Un resultado afirma que si V es de clase $\mathcal{C}^{1,2}$ entonces satisface la ecuación de HJB

$$V_t(t,x) + \max_{u\in U} G(t,x,u,V_x(t,x),V_{xx}(t,x)) = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}, \tag{3}$$
$$V(T,x) = S(T,x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y el argumento que maximiza en (3), si es admisible, es óptimo. Aquí $G(t,x,u,p,P) = f(t,x,u)p + \frac{1}{2}\sigma(t,x,u)\sigma^\top(t,x,u)P$ denota el Hamiltoniano generalizado.

3. Condiciones necesarias

En esta sección deducimos una EDP alternativa a la de HJB que debe satisfacer un control óptimo.

Sea (ξ,u) un control óptimo con $u(t) = \phi(t,\xi(t))$. Suponemos que los parámetros del problema nos permiten aplicar el principio del máximo estocástico; véase Assumption A1 en Josa–Fombellida and Rincón–Zapatero [9] o Yong and Zhou [15], p. 114. Aplicándolo, existe un proceso verificando la ecuación adjunta de primer orden

$$dp(s) = -H_x(s,\xi(s),\phi(s,\xi(s)),p(s),q(s))ds + q(s)dw(s), \quad s \in [t,T], \tag{4}$$
$$p(T) = S_x(T,\xi(T)), \tag{5}$$

donde $H(t,x,u,p,q) = f(t,x,u)p + \sigma(t,x,u)q^\top$ es el Hamiltoniano estocástico.

Ahora definimos la función η en $[0,T]\times\mathbb{R}\times U$ así

$$\eta(t,x,u) = \frac{-f_u}{\sigma_u\sigma^\top}(t,x,u). \tag{6}$$

El siguiente resultado establece una condición necesaria de optimalidad en términos de una nueva EDP. Para probarlo hace falta suponer que el proceso adjunto p depende de la variable de estado ξ a través de una función γ de clase $\mathcal{C}^{1,2}$ en $[0,T]\times\mathbb{R}$ definida de esta forma: $p(s) = \gamma(s,\xi(s))$.

Teorema 3.1 (Condición necesaria) *Si $\phi \in \mathcal{U}$ es un control óptimo interior markoviano del problema* (1)–(2) *tal que* $(\sigma_u \sigma^\top)(t,x,\phi(t,x)) \neq 0$ *para todo* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, *entonces ϕ satisface la EDP cuasilineal de segundo orden*

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f + \frac{\partial}{\partial x}\sigma\sigma^\top\eta + f\eta + \frac{1}{2}\sigma\sigma^\top\left(\eta^2 + \frac{\partial}{\partial x}\eta\right)\right) = 0, \tag{7}$$

para todo $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, *con la condición final*

$$\eta(T,x,\phi(T,x)) = \frac{S_{xx}(T,x)}{S_x(T,x)}, \tag{8}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

A continuación obtenemos la variable adjunta γ a partir de la EDP (7)–(8). Ésta será útil para hallar la función valor. Si denotamos por Ψ la expresión que aparece afectada en (7) por el signo $\partial/\partial x$,

$$\Psi(t,x,u) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\sigma^\top\eta + f\eta + \frac{1}{2}\sigma\sigma^\top\left(\eta^2 + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right), \tag{9}$$

es posible probar el siguiente resultado, que nos permite encontrar la variable adjunta a través una solución de la EDP cuasilineal.

Proposición 3.1 (Variable adjunta) *Sea $\widehat{\phi}$ un control admisible de clase $\mathcal{C}^{1,2}$ que verifica* (7)–(8). *Entonces, dada una condición inicial* (t,x), *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, γ *verifica*

$$\gamma(t,x) = S_x(T,\alpha)\exp\left\{\int_\alpha^x \eta(t,z,\widehat{\phi}(t,z))dz + \int_t^T \Psi(s,\alpha,\widehat{\phi}(s,\alpha))ds\right\}. \tag{10}$$

4. Condiciones suficientes

En esta sección mostramos que una solución $\widehat{\phi}$ de clase $\mathcal{C}^{1,2}$ de (7)–(8) que maximiza el Hamiltoniano para todo (t,x) es una solución del problema de control estocástico (1)–(2).

Consideramos la siguiente hipótesis:

(H) El proceso estocástico B definido por

$$B(s) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma(s,\xi(s),\widehat{\phi}(s,\xi(s)))\gamma(s,\xi(s))\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma(s,\xi(s),\widehat{\phi}(s,\xi(s)))\gamma(s,\xi(s))\right)\xi_x(s),$$

para todo $s \in [t,T]$, donde $\widehat{\phi}$ resuelve (7)–(8), verifica

$$\int_t^T \mathrm{E}_{tx}B^2(s)ds < \infty, \quad \forall t \in [0,T].$$

El siguiente teorema proporciona una condición suficiente para la optimalidad.

Teorema 4.1 (Teorema de verificación) *Sea* $\widehat{\phi}$ *una solución admisible de clase* $\mathcal{C}^{1,2}$ *de* (7)–(8)*, que verifica* **H** *y tal que* $(\sigma_u \sigma^\top)(t, x, \widehat{\phi}(t, x)) \neq 0$ *para todo* $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$. *Supongamos que se verifica la condición*

$$G(t, x, \widehat{\phi}, \gamma(t, x), \gamma_x(t, x)) \geq G(t, x, u, \gamma(t, x), \gamma_x(t, x)), \tag{11}$$

para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$*, y para cada control markoviano admisible* u*. Entonces* $\widehat{\phi}$ *es un control de Markov óptimo para el problema* (1)–(2)*.*

Nota 4.1 La condición (11) se da automáticamente cuando $\widehat{\phi}$ es interior al conjunto de controles U y el Hamiltoniano G es cóncavo con respecto a u para todo t, x, p, P, porque entonces

$$G_u(t, x, \widehat{\phi}, \gamma(t, x), \gamma_x(t, x)) = H_u(t, x, \widehat{\phi}, \gamma(t, x), \sigma(t, x, \widehat{\phi})\gamma_x(t, x)) = 0$$

se satisface, por el principio del máximo estocástico. Así, como $\widehat{\phi}$ es un punto crítico de la función cóncava $u \mapsto G(., ., u, ., .)$ entonces es un máximo global de G.

Nota 4.2 El problema de control se puede extender sin dificultad al caso con n variables de control, $n > 1$. Usando el principio del máximo estocástico se puede probar que un control óptimo verifica estas $n - 1$ igualdades:

$$\frac{f_{u_1}}{\sigma_{u_1} \sigma^\top} = \frac{f_{u_2}}{\sigma_{u_2} \sigma^\top} = \ldots = \frac{f_{u_n}}{\sigma_{u_n} \sigma^\top}.$$

Éstas, junto con (7)–(8), caracterizan el vector n–dimensional de controles óptimos.

5. Función valor

En esta sección obtenemos la función valor sin recurrir a la ecuación de HJB. Denotamos por $\mathcal{G}$ al Hamiltoniano generalizado, evaluado en la variable adjunta:

$$\mathcal{G}(t, x, u) = G(t, x, u, \gamma(t, x), \gamma_x(t, x)).$$

El siguiente teorema establece la relación entre la función valor del problema de control y la solución de la EDP cuasilineal.

Teorema 5.1 (Función valor) *Sea* $\widehat{\phi}$ *un control admisible que verifica las hipótesis del Teorema* 4.1 (*esto implica que es óptimo para el problema* (1)–(2)). *Entonces, la función valor* V *está dada por*

$$V(t, x) = \int_\alpha^x \gamma(t, z) dz + S(T, \alpha) + \int_t^T \mathcal{G}(s, \alpha, \widehat{\phi}(s, \alpha)) ds, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \tag{12}$$

donde α *es cualquier constante de* $\mathbb{R}$.

Este resultado nos permitirá encontrar la función valor a partir de la variable adjunta con la solución de la EDP cuasilineal, sin pasar por la ecuación de HJB. Para ello será suficiente usar (12). Es importante indicar que el valor α no influye en la función valor.

Ejemplo 5.1 (Lineal cuadrático) Dado $T > 0$ y la condición inicial $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, la variable de estado está dada por la EDE no–homogénea:

$$d\xi(s) = (A(s)\xi(s) + B(s)u(s) + b(s))\, ds + (C(s)\xi(s) + D(s)u(s) + \sigma(s))\, dw(s),$$

para $t \leq s \leq T$ y con $\xi(t) = x$. Todos los coeficientes son funciones derivables. El funcional objectivo es de tipo cuadrático:

$$J(t, x; \phi) = \mathrm{E}_{tx} \left\{ \frac{1}{2} R\xi^2(T) \right\},$$

con R una constante positiva. Suponemos que, dado u, la EDE admite una única solución y que la función objetivo está bien definida. Dada (t, x), el objetivo es minimizar $J(t, x; \phi)$ en el conjunto de los controles admisibles $\mathcal{U}$.

Por el Teorema 4.1, un control óptimo está caracterizado por (7)–(8), porque el Hamiltoniano es una función convexa de u. Efectuaremos algunos cálculos antes de establecer estas ecuaciones. A continuación omitiremos la dependencia de los coeficientes respecto de la variable de temporal s. Por (6) tenemos

$$\eta = -\frac{B}{D\,(Cx + Du + \sigma)} \tag{13}$$

y la EDP (7)–(8), que caracteriza a un control óptimo $u(s) = \phi(s, \xi(s))$, es

$$\begin{aligned} &- \dot{B}D\,(Cx + Du + \sigma) + B\dot{D}\,(Cx + Du + \sigma) + BD\left(\dot{C}x + \dot{D}u + Du_t + \dot{\sigma}\right) \\ &- BD\,((BC - AD)xu_x + (B\sigma - bD)u_x + (AD - BC)u + (A\sigma - bC)) \\ &+ \frac{1}{2} B u_{xx} D^2\,(Cx + Du + \sigma)^2 = 0, \\ &\phi(T, x) = -\left(\frac{B(T)}{D^2(T)} + \frac{C(T)}{D(T)}\right) x - \frac{\sigma(T)}{D(T)}. \end{aligned}$$

Ensayamos una solución lineal $\phi(t, x) = m(t)x + n(t)$ y obtenemos un sistema lineal no–homogéneo de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{m}(t) = \left(\frac{\dot{B}}{B} - 2\frac{\dot{D}}{D}\right) m(t) + \frac{1}{D}\left(\left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{D}}{D}\right) C - \dot{C}\right), \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \dot{n}(t) = &\left(\frac{B\sigma}{D} - b\right) m(t) \\ &+ \left(\frac{\dot{B}}{B} - 2\frac{\dot{D}}{D} + A - \frac{BC}{D}\right) n(t) + \frac{1}{D}\left(\left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{D}}{D} + A\right)\sigma - \dot{\sigma} - bC\right), \end{aligned} \tag{15}$$

con condiciones finales

$$m(T) = -\frac{1}{D(T)}\left(\frac{B(T)}{D(T)} + C(T)\right) \tag{16}$$

$$n(T) = -\frac{\sigma(T)}{D(T)}. \tag{17}$$

Este sistema tiene una única solución que puede obtenerse explícitamente. Así el control óptimo $\widehat{\phi}$ es una función lineal no–homogénea de la variable de estado.

A continuación vamos a encontrar la función valor. Para ello necesitamos obtener previamente la variable adjunta γ. El sistema (14)–(15)–(16)–(17) es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial s}(C+Dm)=\left(\frac{\dot{B}}{B}-\frac{\dot{D}}{D}\right)(C+Dm), \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(Dn+\sigma)=\left(\frac{\dot{B}}{B}-\frac{\dot{D}}{D}+A+Bm\right)(Dn+\sigma)-(C+Dm)(Bn+b), \tag{19}$$

$$(C+Dm)(T)=-\frac{B}{D}(T), \tag{20}$$

$$(Dn+\sigma)(T)=0. \tag{21}$$

Es inmediato integrar la ecuación (18) y llegar a

$$C+Dm=-\frac{B}{D}, \tag{22}$$

para todo t. Ahora vamos a encontrar γ con (10). Consideremos cualquier constante $\alpha\in\mathbb{R}$. En primer lugar, por (13), tenemos

$$\eta(t,z,\widehat{\phi}(t,z))=-\frac{B}{D\left((C+Dm)z+(Dn+\sigma)\right)},$$

y, por tanto, integrando

$$\int_\alpha^x \eta(t,z,\widehat{\phi}(t,z))dz=\ln\left((C+Dm)x+(Dn+\sigma)\right)-\ln\left((C+Dm)\alpha+(Dn+\sigma)\right),$$

por (22). En segundo lugar, es fácil obtener: $\ln\left(S_x(T,\alpha)\right)=\ln R+\ln\alpha$. Finalmente, la función Ψ, definida en (9), está dada por

$$\begin{aligned}\Psi(s,\alpha,\widehat{\phi}(s,\alpha))&=\frac{\left((A+Bm)\alpha+(Bn+\sigma)\right)(C+Dm)}{(C+Dm)\alpha+(Dn+\sigma)}+A+Bm+(C+Dm)^2\\&=2(A+Bm)+(C+Dm)^2+\frac{\dot{B}}{B}-\frac{\dot{D}}{D}-\frac{\partial_s(C+Dm)\alpha+\partial_s(Dn+\sigma)}{(C+Dm)\alpha+(Dn+\sigma)},\end{aligned}$$

por (18) y (19). Integrando,

$$\begin{aligned}\int_t^T\Psi ds=&\int_t^T\left(2(A+Bm)+(C+Dm)^2\right)ds\\&-\ln\left(\frac{-B}{D}\right)+\ln\left((C+Dm)\alpha+(Dn+\sigma)\right)-\ln\alpha,\end{aligned}$$

por (20) y (21). Ahora usamos (10) para obtener

$$\begin{aligned}\ln\gamma(t,x)=&\ln\left((C+Dm)x+(Dn+\sigma)\right)+\ln R\\&-\ln\left(\frac{-B}{D}\right)+\int_t^T\left(2(A+Bm)+(C+Dm)^2\right)ds.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\gamma(t,x) = -R\frac{D}{B}\exp\left\{\int_t^T \left(2(A+Bm)+(C+Dm)^2\right)ds\right\}((C+Dm)x+(Dn+\sigma)).$$

No es difícil integrar esta expresión con respecto a x, por (22),

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^x \gamma(t,z)dz\\ &= \frac{R}{2}\exp\left\{\int_t^T \left(2(A+Bm)+(C+Dm)^2\right)ds\right\}\left((x^2-\alpha^2)-2\frac{D}{B}(Dn+\sigma)(x-\alpha)\right),\end{aligned}$$

y obtener $S(T,\alpha) = R\alpha^2/2$. Por (22), el Hamiltoniano generalizado es

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(s,\alpha,\phi) = {}& RM\left(A+Bm+\frac{1}{2}(C+Dm)^2\right)\alpha^2\\ &+RM\left(Bn+b-\frac{D}{B}(A+Bm)(Dn+\sigma)+(C+Dm)(Dn+\sigma)\right)\alpha\\ &+RM\left(-\frac{D}{B}(Bn+b)(Dn+\sigma)+\frac{1}{2}(Dn+\sigma)^2\right),\end{aligned}$$

donde hemos denotado por $M(s)$, con $s\in[t,T]$, a

$$M(s) = \exp\left\{\int_s^T \left(2(A+Bm)+(C+Dm)^2\right)dv\right\}. \tag{23}$$

Después de algunos cálculos obtenemos las derivadas con respecto a s:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{R}{2}M\right) &= -RM\left(A+Bm+\frac{1}{2}(C+Dm)^2\right),\\ \frac{\partial}{\partial s}\left(R\frac{D}{B}(Dn+\sigma)M\right) &= RM\left(Bn+b-\frac{D}{B}(A+Bm)(Dn+\sigma)+(C+Dm)(Dn+\sigma)\right),\end{aligned}$$

por (22) y (19). Así tenemos

$$\begin{aligned}\int_t^T \mathcal{G}ds = {}& -\frac{R}{2}\alpha^2+\frac{R}{2}M(t)\alpha^2-R\frac{D}{B}(Dn+\sigma)M(t)\alpha\\ &+R\int_t^T M\left(-\frac{D}{B}(Bn+b)(Dn+\sigma)+\frac{1}{2}(Dn+\sigma)^2\right)ds\end{aligned}$$

por (21). La función valor es este polinomio de segundo grado en la variables de estado, obtenido con (12):

$$\begin{aligned}V(t,x) = {}& \frac{R}{2}M(t)x^2-R\frac{D(t)}{B(t)}(D(t)n(t)+\sigma(t))M(t)x\\ &+R\int_t^T M\left(-\frac{D}{B}(Bn+b)(Dn+\sigma)+\frac{1}{2}(Dn+\sigma)^2\right)ds,\end{aligned} \tag{24}$$

donde M está dado por (23).

6. Aplicación a la gestión óptima de un plan de pensiones

En esta sección aplicamos nuestro enfoque a la gestión óptima de un plan de pensiones. Los problemas que vamos a estudiar están muy relacionados con los trabajos Josa–Fombellida and Rincón–Zapatero [7, 8], donde se estudia la modelización de un plan de pensiones de prestaciones definidas y se resuelve mediante programación dinámica. En ambos trabajos se combinan algunos aspectos tratados en Haberman [5], Haberman and Sung [6] and O'Brien [12], junto con la teoría de selección de carteras de Merton [10].

Los elementos más importantes que intervienen en un plan de pensiones se refieren al grupo total de partícipes del fondo. Denotamos por $F(t)$ al valor de los activos del fondo en el instante t; $C(t)$ es el tanto de contribución realizada por el promotor al proceso de financiación y P son las prestaciones comprometidas con los partícipes en el momento del retiro del plan. El coste normal para todos los partícipes es NC; la responsabilidad actuarial, AL; la responsabilidad actuarial no financiada en t, $UAL(t)$ (diferencia entre AL y $F(t)$) y el coste suplementario en t, $SC(t)$, (diferencia entre $C(t)$ y NC).

Suponemos que P, NC y AL son constantes. Esto se justifica, como en Haberman and Sung [6], si el crecimiento de la población del plan es estacionario desde el comienzo y no hay inflación (o el crecimiento del salario es constante; en este caso el tanto de retorno es el neto de la inflación). Asumiendo que la valoración del plan se realiza a un tanto constante δ, las componentes del plan verifican la ecuación

$$\delta AL + NC - P = 0, \tag{25}$$

como se muestra en Bowers *et al* [2].

Denotamos por r al tipo de interés del mercado que suponemos constante. Como el plan es estacionario, suponemos que coincide con el tipo de interés técnico, $\delta = r$. A continuación usamos un método de amortización del fondo suponiendo que se verifica la relación

$$C(t) - NC = k(AL - F(t)), \tag{26}$$

con k una constante positiva. Esta hipótesis es conocida como *spread method*; véase Owadally and Haberman [13].

Consideremos una cartera formada por dos activos, uno S^0 sin riesgo verificando

$$dS^0(t) = rS^0(t)dt, \quad S^0(0) = 1,$$

y otro S^1, un activo con riesgo definido por la EDE

$$dS^1(t) = bS^1(t)dt + \sigma S^1(t)dw(t), \quad S^1(0) = s_1,$$

donde r, b, σ son constantes positivas con $b > r$. Los activos del fondo F son invertidos en esta cartera; una cantidad u en el activo con riesgo y el resto $F - u$ en el bono. La evolución del fondo es, por tanto,

$$dF(s) = (rF(s) + (b-r)u(s) + C(s) - P)\, ds + \sigma u(s)dw(s), \quad F(t) = F. \tag{27}$$

Usando (25), (26) y (27) se obtiene la EDE que verifica la responsabilidad actuarial no financiada *UAL*:

$$d\,UAL(s) = ((r-k)\,UAL(s) - (b-r)u(s))\,ds - \sigma u(s)dw(s), \quad UAL(t) = UAL. \tag{28}$$

A continuación consideramos dos problemas interesantes relacionados con el modelo de pensiones establecido previamente.

6.1. Minimizando el riesgo de solvencia final

Dado un horizonte temporal acotado $T > 0$, el objetivo es minimizar el riesgo de solvencia (véase Haberman [5]) es decir la desviación del fondo con respecto a su valor ideal, la responsabilidad actuarial, en el instante final del periodo. Así el funcional objetivo a minimizar es:

$$J(t, UAL; u) = \mathrm{E}_F\,(AL - F(T))^2 = \mathrm{E}_{UAL}\,UAL^2(T). \tag{29}$$

El problema de control estocástico (28)–(29) es de tipo lineal cuadrático con una variable de estado, *UAL*, y una variable de control u. Siguiendo el Ejemplo 5.1, la solución óptima es $u(t, UAL) = m(t)\,UAL + n(t)$, con m, n dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= 0, \qquad m(T) = \frac{b-r}{\sigma^2}, \\ \dot{n}(t) &= (r-k)\,n(t), \qquad n(T) = 0. \end{aligned}$$

La inversión óptima es independiente del tiempo y proporcional a la responsabilidad actuarial no financiada:

$$u(t, UAL) = \frac{b-r}{\sigma^2}\,UAL.$$

La evolución de *UAL* está dada por un movimiento Browniano geométrico:

$$d\,UAL(s) = \left(r - k - \left(\frac{b-r}{\sigma}\right)^2\right) UAL(s)ds - \frac{b-r}{\sigma}\,UAL(s)dw(s), \quad s \in [t, T],$$

con $UAL(t) = UAL$. La función valor se puede obtener con la EDE anterior o bien con (24), sin estudiar la dinámica del proceso *UAL*, resultando:

$$V(t, UAL) = E_{UAL}\,UAL^2(T) = \exp\left\{\left(2(r-k) - \left(\frac{b-r}{\sigma}\right)^2\right)(T-t)\right\} UAL^2.$$

6.2. Maximizando una utilidad final del fondo

Siguiendo Moore and Young [11], el objetivo es seleccionar la inversión tal que se maximice una utilidad exponencial:

$$\max_u E_F\left\{a - \frac{\beta}{\theta}e^{-\theta F(T)}\right\},$$

sujeto a la evolución del fondo, (27). Suponemos que a, β y γ son constantes, siendo β y θ estrictamente positivas.

Observamos que la función de utilidad $U(x) = a - \beta e^{-\theta x}/\theta$ es creciente y cóncava de x. La elección de esta utilidad implica que el decisor tiene aversión al riesgo, con coeficiente de aversión constante e igual a θ, porque el índice de Arrow–Pratt es $-U''(x)/U'(x) = \theta > 0$.

Es un problema de control estocástico con variable de estado F y variable de control u. El Hamiltoniano es una función cóncava de u. Si $u(t,F)$ es un control óptimo entonces debe satisfacer la EDP (7)–(8):

$$\frac{b-r}{\sigma^2 u^2} u_t + \frac{b-r}{\sigma^2 u^2}(k-r)\left(u + (AL - F)u_F\right) + \frac{b-r}{2} u_{FF} = 0, \quad \forall (t,F)$$

$$u(T,F) = \frac{b-r}{\theta\sigma^2}, \quad \forall F.$$

Ensayamos una solución independiente de F, $u(t,F) = u(t)$, y obtenemos que la proporción de fondo invertida en el activo con riesgo es

$$u(t,F) = u(t) = \frac{b-r}{\theta\sigma^2} e^{-(r-k)(T-t)}. \tag{30}$$

Los activos del fondo verifican la EDE

$$dF(s) = \left((k-r)(AL - F(s)) + \theta\left(\frac{b-r}{\sigma\theta}\right)^2 e^{-(r-k)(T-s)}\right) ds$$
$$+ \frac{b-r}{\sigma\theta} e^{-(r-k)(T-s)} dw(s), \quad t < s < T,$$

con $F(t) = F$. Así $F(s)$ es un proceso que sigue una distribución normal, con media

$$E_F F(s) = F e^{(r-k)(s-t)} + AL\left(1 - e^{(r-k)(s-t)}\right) + \theta\left(\frac{b-r}{\sigma\theta}\right)^2 (s-t) e^{-(r-k)(T-s)}, \quad \forall s.$$

A continuación obtenemos la función valor óptimo (máxima utilidad final), hallando previamente la variable adjunta. Usando que la inversión óptima (30) no depende del fondo y que $\eta(t,F,u) = -(b-r)/(\sigma^2 u)$ llegamos a que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(s,\alpha,\widehat{u}(s,\alpha)) = -\frac{1}{2}\frac{(b-r)^2}{\sigma^2} - (k-r) - \frac{(b-r)(k-r)}{\sigma^2 u}(AL - \alpha).$$

Observamos que u verifica: $-\dot{u}(s) = (k-r)u(s)$, $s \in [t,T]$. Esta propiedad permite obtener

$$\int_t^T \Psi ds = -\left(\frac{1}{2}\frac{(b-r)^2}{\sigma^2} + (k-r)\right)(T-t) - \theta\left(1 - e^{(r-k)(T-t)}\right)(AL - \alpha).$$

La integral de η es

$$\int_\alpha^F \eta(t,z,u)dz = -\theta e^{(r-k)(T-t)}(F - \alpha)$$

y el término final es $S_F(T,F) = \beta e^{-\theta F}$. La función adjunta se encuentra con (10):

$$\gamma(t,F) = \beta \exp\left\{ -\theta AL + \theta(AL - F)e^{(r-k)(T-t)} - \left(\frac{(b-r)^2}{2\sigma^2} + (k-r) \right)(T-t) \right\}.$$

Como

$$\begin{aligned} \gamma_F(s,F) &= -\theta e^{(r-k)(T-s)}\gamma(s,F), \\ \partial_s \left(e^{-(r-k)(T-s)}\gamma(s,F) \right) &= \left(\frac{(b-r)^2}{2\sigma^2} e^{-(r-k)(T-s)} + \theta(AL-\alpha)(k-r) \right)\gamma(s,F), \end{aligned}$$

se verifica, para todo $s \in [t,T]$ y para todo F; obtenemos

$$\mathcal{G}(s,\alpha,\widehat{u}(s)) = (k-r)(AL-\alpha)\gamma(s,\alpha) + \frac{(b-r)^2}{2\theta\sigma^2} e^{-(r-k)(T-s)}\gamma(s,\alpha),$$

$$\int_t^T \mathcal{G} ds = \frac{1}{\theta}\gamma(s,\alpha)e^{-(r-k)(T-s)}\Big]_t^T = \frac{\beta}{\theta}e^{-\theta\alpha} - \frac{1}{\theta}\gamma(t,\alpha)e^{-(r-k)(T-t)},$$

y la integral

$$\begin{aligned} \int_\alpha^F \gamma(t,z)dz &= \frac{\gamma(t,z)}{-\theta e^{(r-k)(T-t)}}\Big]_\alpha^F \\ &= -\frac{\beta}{\theta}\exp\left\{ -\theta AL + \theta(AL-F)e^{(r-k)(T-t)} - \frac{(b-r)^2}{2\sigma^2}(T-t) \right\} \\ &\quad + \frac{\beta}{\theta}\exp\left\{ -\theta AL + \theta(AL-\alpha)e^{(r-k)(T-t)} - \frac{(b-r)^2}{2\sigma^2}(T-t) \right\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores y $S(T,\alpha) = a - \beta e^{-\theta\alpha}/\theta$ en (12), encontramos la fórmula explícita para la máxima utilidad final:

$$V(t,F) = a - \frac{\beta}{\theta}\exp\left\{ -\theta AL + \theta(AL-F)e^{(r-k)(T-t)} - \frac{(b-r)^2}{2\sigma^2}(T-t) \right\}.$$

7. Conclusiones

Este trabajo proporciona una perspectiva diferente para el análisis de problemas de control estocástico de tipo Mayer. En lugar de los métodos clásicos basados en la programación dinámica, el nuevo método está basado en un sistema de EDPs que caracteriza directamente el control óptimo sin recurrir a la función valor. Además este sistema permite obtener la función valor mediante una fórmula cerrada a partir del control óptimo. La novedad del enfoque que proponemos está en las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad obtenidas. Nosotros pensamos que para algunos problemas este nuevo método puede ser interesante.

Referencias

[1] Bourdache–Siguerdidjane, H., and Fliess, M. (1987). Optimal Feedback Control of Nonlinear Systems, *Automatica* **23**, 365-372.

[2] Bowers, N.L., Hickman, J.C., and Nesbitt, C.J. (1976). Introduction to the dynamics of pension funding. *Transactions of the Society of Actuaries* **28**, 177-203.

[3] Fleming, W.H., and Rishel, R.W. (1975). *D*eterministic and Stochastic Optimal Control, *Springer–Verlag*, New York.

[4] Fleming W.H., and Soner, H.M. (1993). *C*ontrolled Markov Processes and Viscosity Solutions, *Springer–Verlag*, New York.

[5] Haberman, S. (1993). Stochastic investment returns and the present value of future contributions in defined benefit pension schemes. *Actuarial Research Paper* **49**. City University, London.

[6] Haberman, S., and Sung, J.H. (1994). Dynamics approaches to pension funding. *Insurance: Mathematics and Economics* **15**, 151-162.

[7] Josa–Fombellida, R., and Rincón–Zapatero, J.P. (2001). Minimization of risks in pension funding by means of contributions and portfolio selection. *Insurance: Mathematics and Economics* **29**, 35-45.

[8] Josa–Fombellida, R., and Rincón–Zapatero, J.P. (2004). Optimal risk management in defined benefit stochastic pension funds. *Insurance: Mathematics and Economics* **34**, 489-503.

[9] Josa–Fombellida, R., and Rincón–Zapatero, J.P. (2007). New approach to stochastic optimal control. *Journal of Optimization Theory and Applications*, to appear, Vol. **132**, No. 2.

[10] Merton, R.C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model. *Journal Economic Theory* **3**, 373-413.

[11] Moore, K.S., and Young, V.R. (2003). Pricing equity–linked endowments via the principle of equivalent utility. *Insurance: Mathematics and Economics* **33**, 497-516.

[12] O'Brien, T.V. (1987). A two parameter family of pension contribution functions and stochastic optimization. *Insurance: Mathematics and Economics* **6**, 129-134.

[13] Owadally, M.I., and Haberman, S. (1999). Pension fund dynamics and gains/losses due to random rates of investment return. *North American Actuarial Journal* **3**, 105-117.

[14] Rincón–Zapatero, J.P., Martínez, J., and Martín–Herrán, G. (1998). New method to characterize subgame perfect Nash equilibria in Differential Games. *Journal of Optimization Theory and Applications* **96**, 377-395.

[15] Yong, J., and Zhou, X.Y. (1999). *S*tochastic Controls. Hamiltonian Systems and HJB Equations, *Springer–Verlag*, New York.

Ricardo, Josa Fombellida

Universidad de Valladolid; Dpto. de Estadística e I.O.; Paseo Prado de la Magdalena s/n, 47005 Valladolid
ricar@eio.uva.es

Juan Pablo, Rincón Zapatero

Universidad Carlos III de Madrid; Dpto. de Economía; C/ Madrid 126, 28903 Getafe (Madrid)
jrincon@eco.uc3m.es

Ambos autores agradecen la financiación a la Junta de Castilla y León (VA099/04) y al Ministerio de Ciencia y Tecnología (MTM2005–06534).