



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y
TEORÍA DE ESTRUCTURAS

**ENSAYOS DE FLEXIÓN DINÁMICA SOBRE
VIGAS FISURADAS**

PROYECTO FIN DE CARRERA
Ingeniería Técnica Industrial Especialidad Mecánica

Autor: Gonzalo Benito López

Director: José Fernández Sáez

Leganés, Diciembre de 2009

a la paciencia

Índice

RELACIÓN DE FIGURAS	6
1 MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS	7
1.1 Motivación	8
1.2 Objetivos	9
2 ENSAYOS DE FLEXIÓN DINÁMICA	10
2.1 Introducción	11
2.2. Dispositivos utilizados	11
2.2.1. Ensayos en máquinas servo-hidráulicas convencionales	11
2.2.2. Ensayos en máquinas servo-hidráulicas especiales	11
2.2.3. Ensayos en péndulo Charpy y en torre de caída de peso	12
2.2.4. Ensayos de flexión en dispositivos de barra Hopkinson modificados	13
2.2.5. Otros ensayos en barra Hopkinson	14
2.3. Obtención del factor de intensidad de tensiones en ensayos de flexión dinámica en tres puntos	17
2.3.1. Métodos analíticos	17
2.3.2. Métodos Numéricos	19
2.3.3. Métodos experimentales	20
2.3.4. Métodos mixtos	23
2.4. Obtención del factor de intensidad de tensiones en ensayos de flexión dinámica en un punto	24
2.4.1. Métodos analíticos simplificados	25
2.4.2. Métodos numéricos	25
2.4.3. Métodos experimentales	26

2.5.	Obtención del tiempo de fractura	26
2.6.	Influencia de la velocidad de deformación en K_{Id}	27
3	MÉTODOS DE CÁLCULO	29
3.1.	Planteamiento del problema	30
3.2.	Obtención de las frecuencias y modos propios devibración de una viga fisurada libre de apoyos	30
3.3.	Evaluación numérica de la fuerza resultante y del desplazamiento de la viga en los apoyos	37
3.4.	Algoritmo de cálculo	41
3.4.1.	Frecuencias y modos propios de vibración	41
3.4.2.	Reacciones y desplazamientos en los apoyos	42
3.5	Breve descripción del programa	46
3.5.1.	Frecuencias y modos propios de vibración	46
3.5.2.	Reacciones y desplazamientos en los apoyos	48
4	CASOS ANALIZADOS, RESULTADOS Y DISCUSIÓN	50
4.1.	Caso de referencia analizado	51
4.2.	Análisis numérico de otros supuestos	55
4.2.1.	Casos con doble duración d_2	58
4.2.1.1.	Profundidad de Fisura a_2	58
4.2.1.2.	Profundidad de Fisura a_3	60
4.2.1.3.	Profundidad de Fisura a_4	62
4.2.2.	Casos con duración de referencia d_1	64
4.2.2.1.	Profundidad de Fisura a_2	64
4.2.2.1.	Profundidad de Fisura a_3	67
4.2.2.3.	Profundidad de Fisura a_4	70

4.2.3. Casos con la mitad de duración	72
4.2.3.1. Profundidad de Fisura: a_2	72
4.2.3.2. Profundidad de Fisura a_3	74
4.2.3.3. Profundidad de Fisura a_4	76
5 CONCLUSIONES Y FUTUROS DESARROLLOS	78
5.1. Resumen.....	79
5.2. Conclusiones	80
5.3. Estudios futuros	81
BIBLIOGRAFÍA.....	82
APÉNDICE.....	84

Relación de figuras

Figura 2.1: Dispositivo de ensayos de fractura dinámica en máquina servohidráulica convencional.

Figura 2.2: Dispositivos de barra Hopkinson modificados para ensayos de flexión dinámica en tres puntos.

Figura 2.3: Dispositivos para realizar ensayos de fractura dinámica sobre probetas compactas en una barra Hopkinson.

Figura 2.4: Dispositivos para realizar ensayos de fractura dinámica sobre probetas Charpa cargadas lateralmente.

Figura 2.5: Dispositivos para realizar ensayos de fractura dinámica sobre probetas compactadas de compresión en una barra Hopkinson.

Figura 3.1: Esquema del problema estudiado.

Figura 3.2: Geometría de las probetas.

Figura 3.3: Modelo bidimensional de la probeta ensayada.

Figura 4.1: Geometría de la probeta y configuración del ensayo.

Figura 4.2: Datos recogidos experimentalmente.

Figura 4.3: Resultados del cálculo de $R(t)$ variando el número de modos propios computados.

Figura 4.4: Fuerza incidente frente a las reacciones en los apoyos calculadas en el caso de referencia.

Figura 4.5: Desplazamiento en los apoyos calculados en el caso de referencia.

Figura 4.6-4.11: Reacciones y desplazamientos para los casos de doble duración $d2$.

Figura 4.12-4.17: Reacciones y desplazamientos para los casos con la duración de referencia $d1$.

Figura 4.18-4.23: Reacciones y desplazamientos para los casos con la mitad de duración $d1/2$.

Capítulo 1

Motivación y objetivos

1.1 Motivación

El diseño optimizado de componentes mecánicos, basado en las modernas teorías de tolerancia al daño, exige un conocimiento preciso del comportamiento del componente en las condiciones reales de servicio y suponer, además, la presencia de posibles defectos o fisuras que hayan podido aparecer como consecuencia de los procesos de fabricación y montaje o a lo largo de la vida en servicio. En muchas estructuras, instalaciones y equipos, las cargas de operación son de tipo impulsivo y, en otras, aparecen accidentalmente como en el caso, por ejemplo, del choque de un vehículo contra un obstáculo. Estas cargas pueden someter al material a elevadas velocidades de deformación. Así pues, garantizar la seguridad estructural y operacional de cualquier elemento mecánico sometido a cargas impulsivas requiere conocer su comportamiento frente a fractura en condiciones dinámicas

Los ensayos de flexión dinámica en tres puntos sobre probetas fisuradas han sido ampliamente usados para la determinación de la tenacidad de fractura dinámica de materiales frágiles. Durante estos ensayos la deformación de la probeta está causada por las reacciones en los apoyos y por la fuerza aplicada. Sin embargo, es habitual que tan solo se registren los valores de la fuerza incidente, $F(t)$, y debido al desconocimiento de los valores de las reacciones en los apoyos para definir las condiciones de contorno en el análisis teórico, normalmente se asume que probeta y apoyos permanecen en contacto, lo que contradice las observaciones experimentales, o bien se tienen en cuenta pérdidas de contacto en modelos de Elementos Finitos, computacionalmente muy costosos.

1.2 Objetivos

Los objetivos perseguidos por el estudio son los siguientes:

- Analizar el ensayo de flexión dinámica en tres puntos sobre probetas fisuradas. Con tal fin se aplicará un modelo simplificado basado en la dinámica de vigas de Timoshenko donde se considerarán las posibles pérdidas de contacto entre probeta y apoyos.
- Desarrollar e implementar en MATLAB un algoritmo de cálculo que permita resolver el problema de forma eficiente, donde necesariamente se calcularán las frecuencias y modos propios de vibración de la probeta, y por último las reacciones y desplazamientos que experimenta la probeta en los apoyos.

Capítulo 2

Ensayos de flexión dinámica

2.1 Introducción

Al lo largo del tiempo los investigadores han desarrollado y perfeccionado diferentes técnicas experimentales con el fin de estudiar las propiedades mecánicas de los materiales. A continuación se describen los dispositivos y métodos más utilizados para la determinación de las propiedades de fractura de los materiales elásticos y lineales en condiciones dinámicas.

2.2. Dispositivos utilizados

2.2.1. Ensayos en máquinas servo-hidráulicas convencionales

En este ensayo se cargan dos probetas fisuradas de tipo compacto con un sistema consistente en dos barras unidas a la máquina de ensayos y unidas entre sí mediante una pieza entallada lateralmente denominada probeta entallada de iniciación (ver figura 2.1). Una vez en carga, se secciona, mediante una herramienta de corte, la pieza entallada que mantiene unidas las barras, con lo cual se libera rápidamente la energía elástica almacenada en éstas y se produce lugar a la propagación inestable de la fisura contenida en ellas.

2.2.2. Ensayos en máquinas servo-hidráulicas especiales

Estas máquinas son capaces de desplazar el pistón móvil a una velocidad de 10m/s. Se han ensayado probetas compactas en este dispositivo para medir las propiedades de fractura dinámica de los materiales.

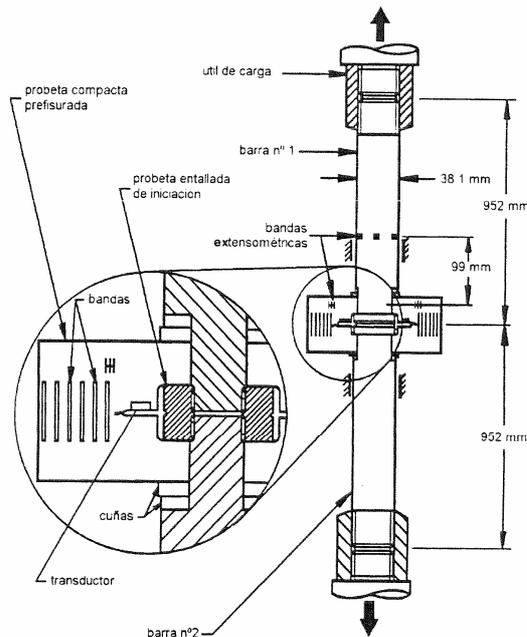


Figura 2.1: Dispositivo de ensayos de fractura dinámica en máquina servohidráulica convencional.

2.2.3. Ensayos en péndulo Charpy y en torre de caída de peso

Probablemente, los ensayos más populares para la determinación de la tenacidad de fractura dinámica de iniciación son los ensayos Charpy, donde un péndulo de masa y posición inicial conocidas golpea y rompe la probeta a ensayar, tras lo cual se mide la posición de mayor altura que alcanza el péndulo.

Sin embargo hay que destacar algunas de sus limitaciones:

- Cuando se usan probetas prefisuradas por fatiga de materiales relativamente tenaces, en el momento de la propagación de la fisura no se cumplen las condiciones requeridas para obtener la tenacidad de fractura de iniciación K_{Id} (no existen condiciones de deformación plana o la zona plástica es muy grande con relación a las dimensiones de la probeta). Por tanto, en estos casos, se hace

necesario usar probetas más grandes, de 20mm de canto, por ejemplo, lo cual es imposible en un péndulo Charpy convencional. Si el ensayo se realizara en una torre de caída de peso, ésta debería ser lo suficientemente rígida.

- En todo caso, en estos ensayos no se pueden superar velocidades de sollicitación, medidas en términos de variación temporal del factor de intensidad de tensiones, de $\dot{K}_I = 10^5 \text{MPa}\sqrt{\text{ms}^{-1}}$; así pues, si se desea superar esta velocidad de sollicitación, se debe recurrir a otros dispositivos.

2.2.4. Ensayos de flexión en dispositivos de barra Hopkinson modificados

Como alternativa a los ensayos de flexión dinámica en péndulo Charpy, y con objeto de superar las velocidades de sollicitación antes mencionadas, se han utilizado dispositivos de barra Hopkinson modificados (ver figura 2.2). Estos dispositivos constan esencialmente de una barra denominada barra incidente, la cual es impactada por otra barra más corta del mismo material, y de un sistema de apoyos que es diferente según los casos. El sistema se completa con un sistema de aire comprimido, que se usa para impulsar la barra más corta y con un medidor de velocidad. La probeta de flexión se coloca en el sistema de apoyos y recibe la onda de compresión generada por el impacto de las otras dos barras antes mencionadas. Parte de esta onda se propaga por el sistema de apoyos y parte se refleja viajando por la barra incidente como una onda de tracción. Las deformaciones generadas por estas ondas se miden por medio de bandas extensométricas situadas en la barra incidente. Se utilizan tanto barras incidentes

instrumentadas en dos secciones como sólo en una. En la siguiente figura se muestran dos variantes de este tipo de dispositivo. En cualquiera de ellos se pueden alcanzar velocidades de sollicitación del orden de $\dot{K}_I = 10^6 \text{ MPa}\sqrt{\text{ms}}^{-1}$.

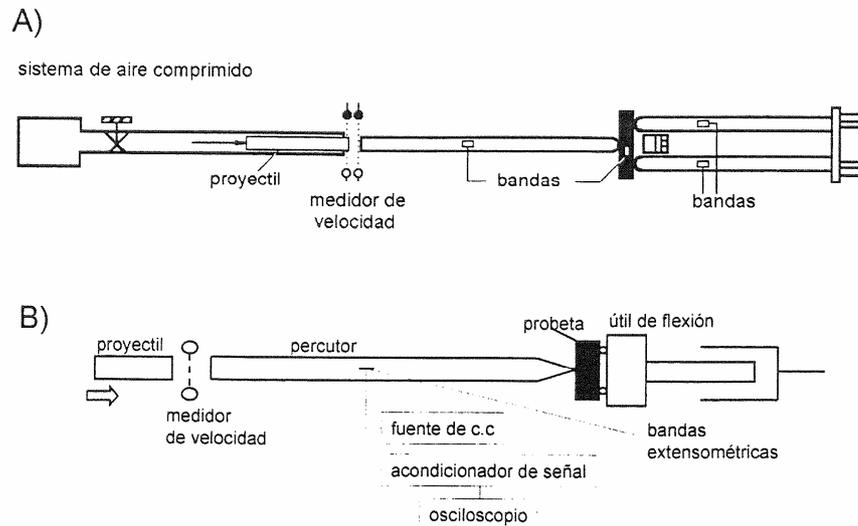


Figura 2.2: Dispositivos de barra Hopkinson modificados para ensayos de flexión dinámica en tres puntos.

2.2.5. Otros ensayos en barra Hopkinson

Además de los ensayos de flexión dinámica reseñados, se han desarrollado otros en los que se utilizan dispositivos de barra Hopkinson con otro tipo de probetas y configuraciones, con objeto de determinar las propiedades de fractura dinámica de los materiales. A continuación se citan algunos:

- a) Ensayos de tracción sobre probetas cilíndricas entalladas lateralmente formando circunferencias, a partir de las cuales se generan fisuras de fatiga y posteriormente se ensayan a tracción dinámica.

b) Ensayos sobre probetas compactas en dispositivos de barra Hopkinson de compresión, donde la probeta se carga mediante una cuña situada al final de la barra incidente, como se muestra en el siguiente esquema (figura 2.3).

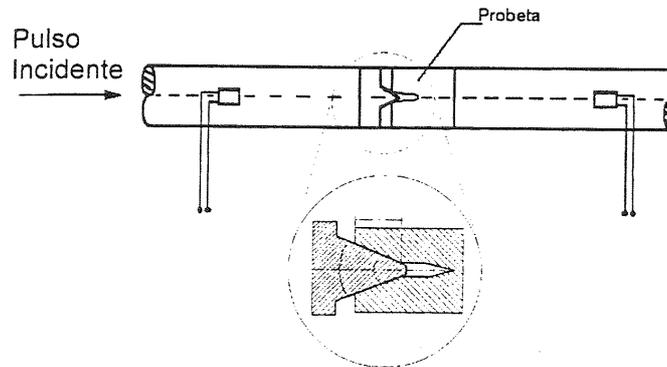


Figura 2.3: Dispositivos para realizar ensayos de fractura dinámica sobre probetas compactas en una barra Hopkinson.

c) Ensayos sobre probetas Charpy prefisuradas por fatiga y cargadas lateralmente mediante un dispositivo de barra Hopkinson modificado (figura 2.4). La probeta se carga en una de sus caras paralelas al plano que contiene la fisura mediante un pulso de compresión. Cuando alcanza la otra cara de la probeta, paralela a la anterior, que puede considerarse libre, se refleja como pulso de tracción y, dependiendo de su magnitud, cuando alcanza el extremo de la fisura puede provocar la propagación de ésta.

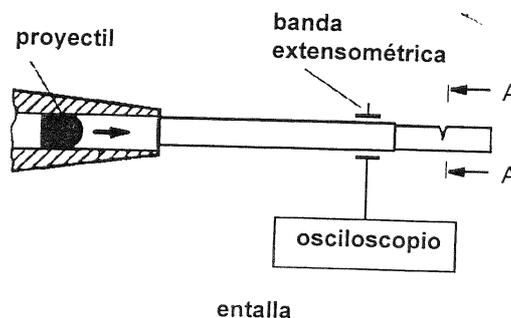


Figura 2.4: Dispositivos para realizar ensayos de fractura dinámica sobre probetas Charpy cargadas lateralmente.

d) Ensayos sobre probetas compactas de compresión (Compact Compression Specimen, CCS), usadas en una barra Hopkinson de compresión convencional, como se muestra a continuación.

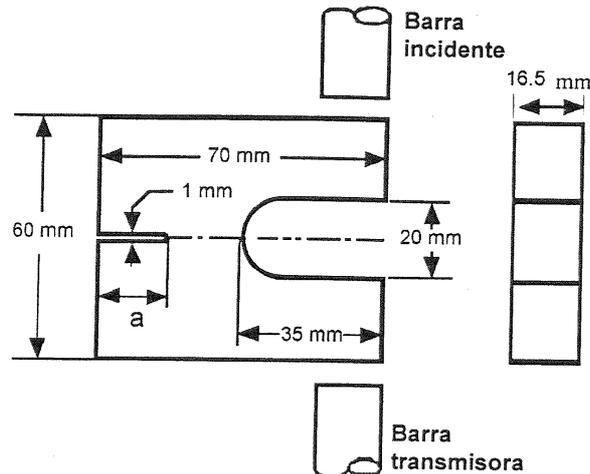


Figura 2.5: Dispositivos para realizar ensayos de fractura dinámica sobre probetas compactadas de compresión en una barra Hopkinson.

De los dispositivos experimentales reseñados para determinar las propiedades de fractura dinámica de los materiales a alta velocidad de deformación, capaces de alcanzar velocidades de sollicitación de $\dot{K}_I = 10^6 \text{ MPa}\sqrt{\text{ms}^{-1}}$, frente a las que se alcanzan en péndulo Charpy (como máximo $\dot{K}_I = 10^5 \text{ MPa}\sqrt{\text{ms}^{-1}}$) o las que se obtienen en ensayos cuasiestáticos ($\dot{K}_I = 1 \text{ MPa}\sqrt{\text{ms}^{-1}}$), los más extendidos son los que permiten realizar ensayos de flexión dinámica en barra Hopkinson modificada, como ponen de manifiesto el gran número de estudios existentes en comparación con el resto. Existen mayor experiencia y conocimientos teóricos para analizar los resultados de ese tipo de ensayos. Por tal motivo, a continuación se van a analizar los métodos que se usan

para la interpretación de los resultados de flexión dinámica en dispositivos de barra Hopkinson modificada.

2.3. Obtención del factor de intensidad de tensiones en ensayos de flexión dinámica en tres puntos

En este apartado se mencionan los métodos que se utilizan para evaluar el factor de intensidad de tensiones en ensayos de flexión dinámica en tres puntos, tanto para fisuras estacionarias, como para aquellas que se propagan a velocidad v . Se han clasificado los diferentes métodos en cuatro grupos: analíticos, numéricos, experimentales y mixtos. Los aspectos más relevantes de cada uno de ellos se exponen a continuación.

2.3.1. Métodos analíticos

Los métodos analíticos se basan en el establecimiento de un modelo simple del proceso de impacto sobre la probeta de flexión en tres puntos, con objeto de calcular los desplazamientos del punto donde se aplica la carga y , a partir de este dato, evaluar el factor de intensidad de tensiones, usando la misma relación que liga dichas variables en el caso estático.

Se han utilizado varios tipos de modelos, entre los que cabe destacar los basados en sistemas de un único grado de libertad con la variedad de condiciones e hipótesis iniciales descritas a continuación:

- Velocidad constante del elemento impactador durante el tiempo que dura el ensayo.
- Velocidad variable con el tiempo experimentada por la masa que representa la probeta de ensayo.
- Medición de la variación de la fuerza que se ejerce sobre la probeta mediante la instrumentación adecuada del elemento que impacta sobre ella.

También se ha modelado el proceso de impacto mediante un sistema de dos grados de libertad (probeta y elemento impactador) en el que, además, consideraron los posibles efectos de disipación viscosa provoca, bien por las características viscoelásticas del material ensayado (polímeros, por ejemplo), bien por el contacto probeta-martillo o probeta-apoyos. En este modelo se introduce como condición inicial la velocidad con la que impacta el martillo.

Utilizando sistemas de infinitos grados de libertad, (modelando la probeta como una viga fisurada) se han llevado a cabo los siguientes estudios:

- Cálculo de las frecuencias y modos propios de vibración de flexión de una viga de Euler-Bernouilli fisurada en su sección central y utilización del método de superposición modal para calcular, a partir de aquellas, el desplazamiento del punto de carga, conocida la fuerza que se ejerce sobre la probeta.
- Cálculo del mismo desplazamiento utilizando, únicamente, la primera frecuencia del sistema (frecuencia fundamental). En este caso la ecuación (22) sigue siendo válida y el cálculo preciso de la frecuencia fundamental de la viga fisurada, ω , es de vital importancia. Ésta puede ser evaluada por el método anterior,

considerando que la probeta se comporta como una viga de Euler-Bernouilli, aunque por las dimensiones normalizadas de las probetas de flexión en tres puntos, se debe considerar, en el cálculo de *omega*, el efecto de la fuerza cortante y de la energía cinética debida a la rotación de las secciones de la viga (viga de Timoshenko).

2.3.2. Métodos Numéricos

Otras investigaciones han utilizado métodos numéricos (principalmente por el Método de los Elementos Finitos) para la evaluación del factor de intensidad de tensiones.

Mediante análisis de modelos bidimensionales considerando la fisura estacionaria:

Simulación de ensayos de flexión dinámica realizados en un dispositivo de barra Hopkinson modificado, donde se modela la probeta de flexión en tres puntos fisurada y se utiliza como condición de carga la fuerza en la sección central de la probeta, así como las reacciones que aparecen en los apoyos. Estas fuerzas se obtienen experimentalmente en ensayos en los que tanto la barra incidente como los apoyos están instrumentados. Entonces se calcula el factor de intensidad de tensiones a partir del desplazamiento de un punto próximo al extremo de la fisura, suponiendo que la relación que existe entre este desplazamiento y el factor de intensidad de tensiones es la misma que en condiciones estáticas.

Estudios en los que a las condiciones del caso anterior se le añaden el modelado de la barra incidente y la consideración del contacto entre la barra incidente y la probeta (en los cuales la presencia de los apoyos se simula impidiendo el desplazamiento, en la dirección longitudinal de la barra incidente, del punto del punto de la probeta en contacto con los apoyos), o entre barra incidente y probeta más el contacto probeta-apoyos.

Tomando modelos tridimensionales se han realizado estudios similares al anterior.

También se han obtenido resultados numéricos de ensayos de flexión en tres puntos en los que se tiene en cuenta la propagación dinámica de la fisura. Para hacer este tipo de estudios es necesario, bien suponer una velocidad de propagación de la fisura $v(t)$, y calcular $K_I(v)$, o bien, partir de una relación, $K_I(v)$, conocida, para obtener la velocidad de propagación de la fisura.

2.3.3. Métodos experimentales

Los métodos que se denominan experimentales son aquellos que permiten obtener información sobre el campo de deformaciones, tensiones o desplazamientos en la probeta, para, a partir de ellos, calcular el factor de intensidad de tensiones en condiciones dinámicas. Entre los diferentes procedimientos utilizados para alcanzar dicho objetivo, cabe destacar los métodos ópticos, y entre ellos, los siguientes:

Métodos basados en fotoelasticidad. Se han usado técnicas fotoelásticas tanto por transmisión, únicamente aplicable a sólidos birrefringentes o a réplicas

realizadas con este tipo de material, como por reflexión, en los que es necesario recubrir el sólido con una fina capa de material birrefringente. Por estos procedimientos se puede visualizar el lugar geométrico de los puntos del sólido donde la diferencia de las tensiones principales es una constante conocida.

Método de las cáusticas. El método permite determinar el desplazamiento de los puntos de una superficie inicialmente plana en dirección perpendicular a dicha superficie y consiste en iluminar la superficie mediante luz colimada, recogiendo las rayos transmitidos o reflejados, dependiendo de si es un sólido transparente, o una superficie especular, en una pantalla situada en un plano que dista una magnitud conocida de la superficie iluminada. Debido a los cambios a los cambios de espesor en el sólido y al hecho de que se focaliza en un plano distinto al plano del mismo, parte de los rayos no son recogidos, produciéndose una zona oscura limitada por una línea luminosa, que es la denominada cáustica. Analizando la forma y tamaño de esta cáustica se pueden calcular los desplazamientos perpendiculares a la superficie en la zona visualizada. Para que aparezca una cáustica, es preciso que exista una importante deformación no coplanaria en la zona analizada. Este hecho permite su utilización en probetas de fractura, donde existe una fuerte concentración de deformaciones en el extremo de una fisura. Iluminando el campo cercano al extremo de ésta, aparece una cáustica cuyo tamaño se puede relacionar con el factor de intensidad de tensiones.

Métodos basados en difracción Moiré. Este método consiste en insertar en el haz de luz (que ha de ser coherente, un modelo de dos rejillas separadas una cierta distancia. Así consiguen medir variaciones del desplazamiento no coplanario con la superficie que se observa. A partir de esta información, y utilizando la soluciones elastodinámicas, se puede evaluar el factor de intensidad de tensiones. Aunque con este método no se pueden

determinar deformaciones coplanarias, tiene la ventaja de que es insensible a vibraciones del sistema.

Las aplicaciones de los métodos mencionados requieren el registro de las correspondientes imágenes para su posterior procesado. Dado el carácter dinámico de los eventos que se pretenden captar, es necesario disponer de cámaras de fotografía y video de alta velocidad.

Otro método que se ha utilizado para la obtención de $K_I(t)$ es el de la colocación de bandas extensiométricas cerca del extremo de la fisura para medir la deformación longitudinal en la dirección de la banda, y a partir de este dato obtener el factor de intensidad de tensiones.

Dado que, con los métodos experimentales citados, el factor de intensidad de tensiones se obtiene a partir de las soluciones elastodinámicas que describen los campos de tensiones, deformaciones y desplazamientos en un sólido fisurado, la precisión con que pueden evaluar dicha magnitudes (tensiones, deformaciones, desplazamientos), es que gran importancia.

Otros procedimientos mucho más complejos, y por ello menos utilizados, son los basados en la medida del cambio de temperatura en el extremo de la fisura y de la emisión acústica. Además de la complejidad de la instrumentación, ya mencionada, dichos métodos sólo son aplicables al caso de grietas que se están propagando.

2.3.4. Métodos mixtos

En este tipo de métodos puede ser incluido el denominado como "método de la curva de respuesta al impacto". Consiste básicamente en suponer que se cumple la siguiente expresión:

$$K_I(t) = (K_I)_{est} k^{din}(t) \quad (2.1)$$

donde $(K_I)_{est}$ es el factor de intensidad de tensiones calculado en condiciones estáticas y $k^{din}(t)$ en una función que ha de ser evaluada experimentalmente. Para ello se pueden utilizar bandas extensiométricas situadas cerca del extremo de la fisura o el método de las cáusticas. Se ha puesto de manifiesto que, cuando $k^{din}(t)$ se expresa en función de la variable adimensional $c_0 t/W$, dicha función es independiente de factores como la masa del elemento impactador, la velocidad de impacto y el espesor de la probeta, mientras que depende, sin embargo, de la relación entre la longitud de la fisura y el canto a/W , y de la relación entre el canto la distancia entre apoyos W/L .

Es imprescindible citar, pues sobre ellos trata el presente estudio, los trabajos que han usado un procedimiento mixto, numérico-experimental, basados en modelos descritos anteriormente, (donde utilizando sistemas de infinitos grados de libertad se calculan las frecuencias y modos propios de vibración de flexión de una viga de Euler-Bernouilli fisurada en su sección central y se aplica el método de superposición modal para calcular el desplazamiento del punto de carga, conocida la fuerza que se ejerce sobre la probeta), en el que se utiliza, como datos de partida para evaluar el factor de intensidad de tensiones, las medidas experimentales de la fuerza ejercida por el elemento impactador sobre la probeta y de la fuerza de reacción ejercida por los apoyos.

2.4. Obtención del factor de intensidad de tensiones en ensayos de flexión dinámica en un punto

Este ensayo consiste en impactar con una masa móvil una probeta fisurada como en el caso de un ensayo de flexión en tres puntos, pero con la importante diferencia de que la probeta, ahora, no está apoyada y por lo tanto las tensiones y deformaciones que se producen en ella están motivadas, exclusivamente, por las fuerzas de inercia (figura 2.6). Si, como consecuencia del estado de cargas generado, se alcanzan condiciones críticas en el extremo de la fisura, esta se propagará. La masa que impacta la probeta puede ser el martillo de un péndulo Charpy, el percutor de una torre de caída de peso o bien una masa lanzada mediante dispositivos neumáticos. También se han desarrollado sistemas de carga basados en la barra Hopkinson modificada. Normalmente, los ensayos de flexión en un punto se realizan utilizando el mismo tipo de probeta que la usada en los ensayos de flexión en tres puntos, aunque recientemente se ha propuesto la utilización de probetas en forma de arco, para aplicaciones específicas.

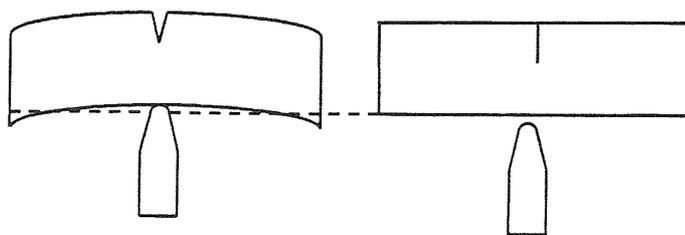


Figura 2.6: Esquema de ensayo de flexión en un punto.

Para obtener el factor de intensidad de tensiones en los ensayos de flexión en un punto se puede acudir a los mismos métodos mencionados para el caso de flexión en tres puntos.

2.4.1. Métodos analíticos simplificados

Se ha modelado el ensayo de flexión en un punto analizando el comportamiento de una viga de Euler-Bernouilli sin apoyar y con una fisura en su sección central, sometida a una carga concentrada $P(t)$ en esa misma sección, y tras calcular las frecuencias y modos propios de la viga en flexión, aplicando el método de superposición modal, se puede obtener el desplazamiento del punto de aplicación de carga, así como, también, el momento flexor transmitido por la sección fisurada. El factor de intensidad de tensiones se calcula haciendo la hipótesis de que es proporcional, bien al momento transmitido por la sección fisurada, bien a la diferencia entre el desplazamiento del punto de carga y el desplazamiento del punto que hubiera estado apoyado en caso de un ensayo de flexión en tres puntos. Las constantes de proporcionalidad usadas son las correspondientes al caso de flexión en tres puntos en condiciones estáticas.

2.4.2. Métodos numéricos

Los ensayos de flexión en un punto se han simulado numéricamente utilizando el método de los Elementos Finitos y el método de las Diferencias Finitas. La simulación numérica de este tipo de ensayos es más simple, dado que son más fáciles de imponer las condiciones de contorno, al no existir sistema de apoyo.

2.4.3. Métodos experimentales

En este caso, el método consiste en colocar bandas extensiométricas cerca del extremo de la fisura. El sistema es idéntico al que se describió en el caso de ensayos de flexión en tres puntos.

Comparando los ensayos de flexión en un punto con los de flexión en tres puntos, se puede decir que la ventaja de los primeros se deriva de la ausencia de apoyos, lo cual simplifica el dispositivo de ensayo y elimina las interacciones entre la probeta y el sistema de apoyos. Sin embargo, como han puesto de manifiesto análisis numéricos comparativos de ambos tipos de ensayo, los de flexión en un punto sólo son aplicables a materiales muy frágiles, dado que, para las mismas condiciones, los valores máximos de K_I que se alcanzan son inferiores a los de flexión dinámica en tres puntos.

2.5. Obtención del tiempo de fractura

La detección del instante en el que comienza la propagación de la fisura es de gran importancia en la determinación de la tenacidad de fractura dinámica de iniciación, K_{Ia} . La mayoría de las veces se utiliza una banda extensiométrica situada cerca del extremo de la fisura para detectar este instante. La banda registrará una cierta deformación hasta el momento en el que se produzca la propagación de la fisura, instante en el que en la banda se producirá una caída de dicha deformación. También se pueden usar bandas de hilo conductor sobre la fisura para detectar el instante en el que comienza la propagación. En ocasiones se ha utilizado un procedimiento consistente en magnetizar ligeramente la

probeta, registrándose con un dispositivo apropiado la variación del campo magnético que se produce cuando la fisura empieza a crecer.

Para la determinación de dicho instante en ensayos de flexión en un punto se propone en algunos estudios la utilización del método basado en la colocación de bandas extensiométricas cerca del extremo de la fisura, siempre y cuando el tiempo que transcurre desde que comienza el proceso de carga hasta que se inicia la propagación de la fisura, sea mayor de 50 ps. Cuando el tiempo hasta la fractura es menor de los citados 50 ps, se recomienda utilizar un método basado en la comparación de la evolución del factor de intensidad de tensiones (obtenido por algún procedimiento numérico o analítico) con el obtenido experimentalmente.

2.6. Influencia de la velocidad de deformación en K_{Ia}

Varios investigadores han puesto de manifiesto que en materiales como, por ejemplo, los aceros estructurales, cuando la rotura es de tipo frágil, la tenacidad de fractura disminuye cuando aumenta la velocidad de sollicitación. Este hecho no se puede explicar recurriendo exclusivamente a modelos basados en la Mecánica de Medios Continuos, sino que requiere conocer los micromecanismos que desencadenan la rotura en cada caso. Un modelo clásico aplicable a los citados materiales (aceros estructurales con rotura frágil) es el conocido como RKR, según el cual, en un sólido que contiene una fisura, ésta comenzará a propagarse cuando la tensión principal máxima supere una tensión crítica, σ_f , a una cierta distancia del extremo de la fisura, distancia que está relacionada con características microestructurales del material.

Por otra parte, alrededor del extremo de la fisura se forma una zona plástica (recuérdese que la solución elástica lineal predica tensiones y deformaciones infinitas en el mismo extremo de la fisura), dentro de la cual las tensiones y las deformaciones se pueden describir utilizando las soluciones del modelo HRR. Aplicando el criterio local de rotura, antes mencionado (modelo RKR), a dicha solución tensional, otros estudios han establecido que el factor de intensidad de tensiones en el momento en que la fisura empieza propagar, K_c (K_{Id} en el caso estático y K_{Id} en el caso dinámico), se puede obtener a partir de la expresión:

$$K_c \approx \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_y} \right)^{\lambda(n)} \quad (2.2)$$

donde σ_f es la tensión crítica antes mencionada, σ_y es el límite elástico del material, y $\lambda(n)$ es una función del coeficiente de endurecimiento por deformación del material, n . Hay evidencia experimental de que el límite elástico de los aceros estructurales aumenta con la velocidad de deformación, mientras que la tensión crítica, o es constante o aumenta en menor medida. Por lo tanto, con estas premisas y con la relación (24) se justifica la disminución de K_{Id} , observada en los aceros estructurales con rotura frágil, cuando aumenta la velocidad de sollicitación.

Capítulo 3

Métodos de cálculo

3.1. Planteamiento del problema

Se pretende analizar el comportamiento en flexión dinámica en tres puntos usando la teoría de vigas de Timoshenko, pero permitiendo la posibilidad real de pérdida de contacto entre probeta y apoyos.

El problema se va a formular considerando una viga de Timoshenko fisurada sin apoyos sometida a la carga incidente $F(t)$ y a las cargas de reacción $R(t)$, que se deben obtener como parte de la solución.

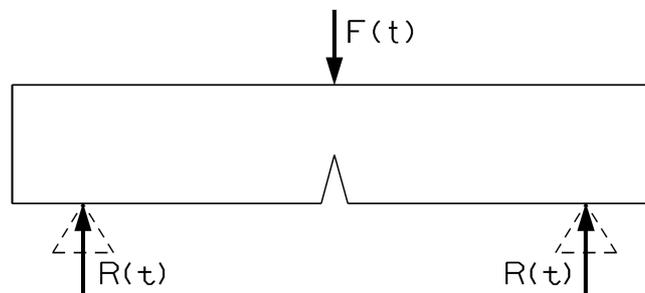


Figura 3.1: Esquema del problema estudiado.

Para la resolución del problema se aplicará Método de Superposición Modal, para lo cuál hay que calcular, como primer paso, las frecuencias y modos propios de vibración de la probeta ensayada.

3.2. Obtención de las frecuencias y modos propios de vibración de una viga fisurada libre de apoyos

Para obtener las frecuencias y modos propios de vibración de una viga fisurada en su sección central como la mostrada en el esquema (figura 3.2), aplicamos la teoría de vigas de Timoshenko, donde se supone que la presencia de

la fisura sólo afecta al momento de inercia de la viga en las cercanías de la fisura. Por ello la probeta se asimila a una viga prismática con tres regiones: dos regiones laterales con momento de inercia $I_g = BW^3/12$ y una región central con un momento de inercia menor. Tal variación del momento de inercia se describe como función de la variable adimensional $\xi (=x/L)$ en la expresión

$$I(\xi) = I_g [1 - D\delta(\xi - 1/2)] \quad (3.1)$$

donde δ es la función Dirac-delta y D depende del cociente a/W . El parámetro D se obtiene comparando el desplazamiento estático de la sección central de la viga usando la variación del momento de inercia dado en la ecuación anterior (3.1), con el desplazamiento obtenido mediante un análisis de tensiones:

$$D = \frac{\phi}{6(L/W)} \quad (3.2)$$

donde

$$\phi = \begin{cases} 65\lambda^2 - 87.3\lambda^3 + 205\lambda^4, & \text{para } W/L=4 \\ 67\lambda^2 - 82.3\lambda^3 + 203.25\lambda^4 & \text{para } W/L=8 \end{cases} \quad (3.3)$$

y

$$\lambda = a/W \quad (3.4)$$

Para valores distintos de W/L el valor de ϕ se obtendrá mediante interpolación lineal a partir de los dos valores anteriores.

Con esta descripción de la variación del momento de inercia, el análisis de las frecuencias y modos propios de vibración de una viga de Timoshenko fisurada se lleva a cabo haciendo uso de la transformada de Laplace en la forma en que se describe a continuación.

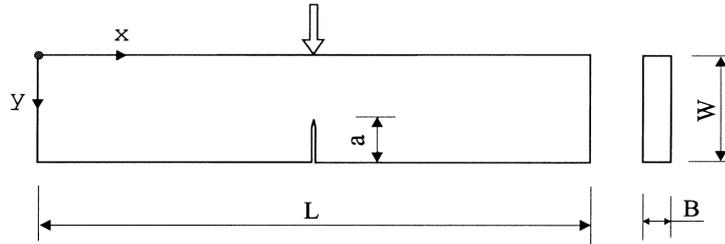


Figura 3.2: Geometría de las probetas.

Las ecuaciones acopladas de una viga de Timoshenko pueden ser escritas como

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\kappa G A \left(\frac{1}{L} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \psi \right) \right], \quad (3.5)$$

$$\rho I_s \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \kappa G A \left(\frac{1}{L} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \psi \right) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{E I(\xi)}{L} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \quad (3.6)$$

donde aparecen los siguientes parámetros

- y coordenada en el eje transversal de la probeta
- ρ densidad del material
- A área de la sección transversal de la viga
- E módulo de Young
- G módulo de elasticidad en cortadura
- κ coeficiente de cortadura
- ψ el giro de la viga.

Como se considera que la presencia de la fisura solo afecta al momento de inercia, las ecuaciones anteriores se pueden describir como

$$\rho A \ddot{y} = \frac{\kappa G A}{L^2} (y'' - L \psi'), \quad (3.7)$$

$$\rho I_s \ddot{\psi} = \frac{\kappa G A}{L} (y' - L \psi) + \frac{E}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi} [I(\xi) \psi'], \quad (3.8)$$

donde $(\dot{\quad})$ simboliza la derivada con respecto al tiempo y (\prime) la derivada con respecto a la coordenada adimensional ξ .

Suponiendo las soluciones del movimiento armónico de la forma

$$y = Y(\xi)e^{j\omega t} \quad y \quad \psi = \Psi(\xi)e^{j\omega t}, \quad (3.9)$$

donde

$$j = \sqrt{-1}$$

ω es la frecuencia propia de vibración de la viga,

conseguimos las siguientes ecuaciones para las funciones espaciales de Y y Ψ

$$Y'' = n^2 q^2 Y - L\Psi' = 0 \quad (3.10)$$

$$q^2 \left[\frac{I(\xi)}{I_g} \Psi' \right]' - (1 - n^2 q^2 r^2) \Psi + \frac{Y'}{L} = 0 \quad (3.11)$$

con

$$r^2 = \frac{I_g}{AL^2} \quad (3.12)$$

$$q^2 = \frac{2(1+\nu)}{\kappa} r^2 \quad (3.13)$$

$$n^2 = \frac{\omega^2 \rho AL^4}{EI_g} \quad (3.14)$$

ν coeficiente de Poisson

Para simplificar la solución anterior, las ecuaciones (3.10) y (3.11) pueden ser desacopladas mediante la eliminación de Ψ , obteniendo así la siguiente ecuación para Y

$$\begin{aligned} \frac{I(\xi)}{I_g} Y'' + n_i^2 \left(r^2 + q^2 \frac{I(\xi)}{I_g} \right) Y - n_i^2 (1 - n_i^2 r^2 q^2) \iint Y d\xi = \\ = \frac{1}{q^2} \left[(1 - n_i^2 r^2 q^2) (-A_1 \xi - A_2) + A_3 L \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde A_1 - A_3 son constantes de integración. Sustituyendo el valor de $I(\xi)$ (3.1), e introduciendo dos constantes linealmente independientes, B_1 y B_2 , derivadas de A_i , la ecuación diferencial para el movimiento transversal de la viga se puede escribir como

$$\begin{aligned} \left[1 - D \delta \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \right] Y'' + n_i^2 \left\{ r^2 + \left[1 - D \delta \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \right] q^2 \right\} Y - n_i^2 (1 - n_i^2 r^2 q^2) \iint Y d\xi = \\ = B_1 \xi + B_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene la ecuación de los modos propios de vibración asociada a los desplazamientos como función de la variable adimensional ξ ,

$$\begin{aligned} Y(\xi) = \left\{ B_1 \left(\frac{1}{a_i} \sin a_i \xi - \frac{1}{b_i} \sin b_i \xi \right) + B_2 (\cos a_i \xi - \cos b_i \xi) + \right. \\ \left. + B_3 (-a_i \sin a_i \xi + b_i \sin b_i \xi) + B_4 (-a_i^2 \cos a_i \xi + b_i^2 \cos b_i \xi) + \right. \\ \left. + D (Y''_{1/2} + n_i^2 q^2 Y_{1/2}) [-a_i \sin a_i (\xi - 1/2) + b_i \sin b_i (\xi - 1/2)] H(\xi - 1/2) \right\} / (b_i^2 - a_i^2), \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde H es la función de Heaviside, y a_i y b_i son parámetros descritos explícitamente como

$$\begin{pmatrix} a_i^2 \\ b_i^2 \end{pmatrix} = n_i^2 \left[(q^2 + r^2) \mp \sqrt{(q^2 - r^2)^2 + 4/n_i^2} \right] / 2, \quad (3.18)$$

y B_3 y B_4 son constantes indeterminadas.

Sustituyendo la ecuación (3.17) en (3.10), e integrando la expresión resultante, se obtiene una ecuación para los modos propios de vibración asociada a los giros también como función de ξ .

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) = & \left\{ B_1 \left(\frac{C_3}{a_i^2} \cos a_i \xi - \frac{C_4}{b_i^2} \cos b_i \xi \right) + B_2 \left(\frac{-C_3}{a_i} \sin a_i \xi - \frac{C_4}{b_i} \cos b_i \xi \right) + \right. \\ & + B_3 (-C_3 \cos a_i \xi + C_4 \cos b_i \xi) + B_4 (a_i C_3 \sin a_i \xi - b_i C_4 \cos b_i \xi) + \\ & \left. + \bar{D} (-C_3 \cos a_i \bar{\xi} + C_4 \cos b_i \bar{\xi}) H(\bar{\xi}) + \bar{D} (a_i \sin a_i \bar{\xi} + b_i \sin b_i \bar{\xi}) \delta(\bar{\xi}) \right\} / (b_i^2 - a_i^2) L, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde

$$C_3 = a_i^2 - n_i^2 q^2, \quad (3.20)$$

$$C_4 = b_i^2 - n_i^2 q^2, \quad (3.21)$$

$$\bar{D} = D(Y_{1/2}'' + n_i^2 q^2 Y_{1/2}), \quad (3.22)$$

$$\bar{\xi} = (\xi - 1/2) \quad (3.23)$$

Las constantes B_1 - B_4 se evalúan definiendo las condiciones de contorno en $\xi=0$ y $\xi=1$. El valor nulo del momento flector y del esfuerzo cortante en $\xi=0$, expresadas como $\Psi'_0 = Y'_0 - L\Psi_0 = 0$, permiten evaluar las constantes B_1 y B_2 como

$$B_1 = 0, \quad (3.24)$$

$$B_2 = (b^2 + a^2 - n_i^2 q^2) B_4. \quad (3.25)$$

Aplicando las condiciones de contorno en $\xi=1$, se obtienen las otras dos constantes

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} B_3 \\ B_4 \end{Bmatrix} &= \bar{D} \begin{bmatrix} a_i C_3 \sin a_i - b_i C_4 \sin b_i & -C_3 C_4 (\cos a_i - \cos b_i) \\ \cos a_i - \cos b_i & \frac{C_4}{a_i} \sin a_i - \frac{C_3}{b_i} \sin b_i \end{bmatrix}^{-1} \times \\ &\times \begin{Bmatrix} C_4 b_i \sin(b_i/2) - C_3 b_i \sin(a_i/2) \\ \cos(b_i/2) - \cos(a_i/2) \end{Bmatrix} = \bar{D} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Después de sustituir las constantes B_i , la función $Y(\xi)$, restringida al intervalo $0 \leq \xi \leq 1/2$, se puede escribir como sigue

$$\begin{aligned} Y(\xi) &= \frac{D(Y_{1/2}'' + n_i^2 q^2 Y_{1/2})}{b_i^2 - a_i^2} \{d_1[-a_i \sin a_i \xi + b_i \sin b_i \xi] + \\ &+ d_2[C_4 \cos a_i \xi - C_3 \cos b_i \xi]\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

De la evaluación de $Y_{1/2}$ e $Y_{1/2}''$ en la ecuación anterior resulta la ecuación de frecuencia

$$\begin{aligned} d_1[a_i C_3 \sin(a_i/2) - b_i C_4 \sin(b_i/2)] - d_2 C_3 C_4 [\cos(a_i/2) - \cos(b_i/2)] - \\ - \left[\frac{6(L/W)(b_i^2 - a_i^2)}{\phi} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Teniendo en cuenta la simetría de la viga fisurada, la ecuación de $Y(\xi)$ (3.27) se puede simplificar en la forma

$$Y(\xi) = C_1[-a_i \sin a_i \xi + b_i \sin b_i \xi] + C_2[C_4 \cos a_i \xi - C_3 \cos b_i \xi], \quad (3.29)$$

donde

$$C_1 = \frac{C_4}{a_i} \sin\left(\frac{a_i}{2}\right) - \frac{C_3}{b_i} \sin\left(\frac{b_i}{2}\right), \quad (3.30)$$

$$C_2 = \cos\left(\frac{b_i}{2}\right) - \cos\left(\frac{a_i}{2}\right). \quad (3.31)$$

Y usando la ecuación (3.29) con (3.10) se obtiene la función Ψ

$$\Psi(\xi) = \frac{C_1}{L} [-C_3 \cos a_i \xi + C_4 \cos b_i \xi] - \frac{C_2 C_3 C_4}{L} \left[\frac{1}{a_i} \sin a_i \xi - \frac{1}{b_i} \sin b_i \xi \right]. \quad (3.32)$$

3.3. Evaluación numérica de la fuerza resultante y del desplazamiento de la viga en los apoyos

Los ensayos instrumentados de probetas prefisuradas han sido ampliamente usados para la determinación de la tenacidad de fractura de materiales frágiles. Durante estos ensayos la deformación de la probeta está causada por las reacciones en los apoyos y por la fuerza aplicada. Sin embargo, es habitual que tan solo se registren los valores de la fuerza incidente, $F(t)$. Debido al desconocimiento de los valores de las reacciones en los apoyos para definir las condiciones de contorno en el análisis teórico, es usual que se asuma el contacto permanente entre la probeta y los apoyos. Desafortunadamente esta simplificación contradice las observaciones experimentales y puede conducir a errores notables en la determinación de $K(t)$.

Los ensayos estándar no disponen de la instrumentación necesaria para la medida de los valores de $F(t)$ y $R(t)$, fuerza incidente y fuerza de reacción en los apoyos, simultáneamente. Por lo tanto, se deben hallar los valores de $R(t)$ a partir de los de $F(t)$ mediante otros métodos. A continuación se describe uno de ellos, donde se propone la aplicación del Método de Superposición Modal (MSM).

Para definir la interacción entre la probeta y los apoyos se han impuesto las siguientes condiciones:

- El material de la probeta es elástico, lineal e isótropa.
- Los apoyos son indeformables.
- La interacción entre la probeta y los apoyos se define mediante dos fuerzas puntuales e iguales $R(t)$.

Se considera el modelo 2D de la figura

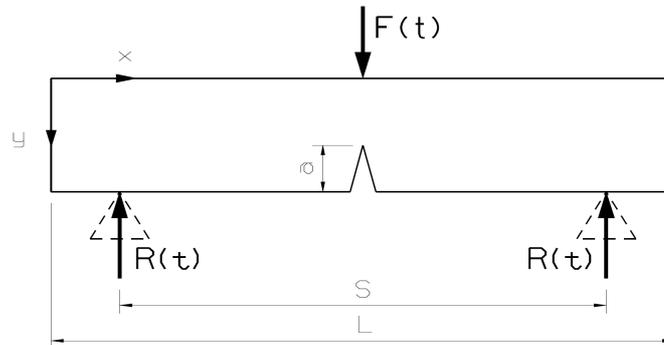


Figura 3.3: Modelo bidimensional de la probeta ensayada.

El Modelo de Superposición Modal usado predice dos situaciones en los puntos de apoyo de la probeta. En la primera la probeta permanece en contacto con los apoyos, y el desplazamiento de la misma, δ , es cero, mientras que en la segunda no existe tal contacto, y el desplazamiento se calcula mediante la ecuación de movimiento de la probeta. Teniendo en cuenta el sistema de coordenadas de la figura, ambas condiciones se pueden escribir como

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & u_R(t) > 0 \\ u_R(t) & u_R(t) \leq 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

donde

$u_R(t)$ es la componente y del desplazamiento de la probeta en los puntos de contacto con los apoyos.

Dicha componente se puede escribir en dos partes. La primera es el movimiento de la probeta como un sólido rígido,

$$u_R^{(sr)}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(\tau)(t-\tau)d\tau - \frac{2}{m} \int_0^t R(\tau)(t-\tau)d\tau, \quad (3.34)$$

donde

m es la masa de la probeta

τ es la variable temporal de integración

y $R(t)$ es positivo hacia arriba, en el sentido contrario a $F(t)$.

La segunda parte de $u_R(t)$ es el desplazamiento debido a la flexión de la probeta, $u_R^{(flexión)}(t)$. Usando el Modelo de Superposición Modal, ésta se puede escribir como

$$u_R^{(flexión)}(t) = \sum_{i=1}^{N_R} \frac{Y_i^F Y_i^R}{\omega_i m_i} \int_0^t F(\tau) \sin(\omega_i(t-\tau))d\tau - 2 \sum_{i=1}^{N_R} \frac{(Y_i^R)^2}{\omega_i m_i} \int_0^t R(\tau) \sin(\omega_i(t-\tau))d\tau \quad (3.35)$$

si son tenidos en cuenta N_R frecuencias propias simétricas (ω_i), y modos propios de vibración asociados a los desplazamientos (Y_i^F e Y_i^R) simétricos, de una probeta libre de apoyos. No se tienen en cuenta los modos propios antisimétricos debido a que no causan la apertura de la fisura, y por tanto factores de

intensificación de tensiones distintos de cero. Los superíndices en Y_i^F e Y_i^R indican el cálculo del modo propio en los puntos de aplicación de $F(t)$ y $R(t)$ respectivamente, según la variable espacial adimensional ξ , es decir,

$$\begin{aligned} Y_i^F &= Y_i(\xi_F) & \text{con} & \quad \xi_F = x_F/L \\ Y_i^R &= Y_i(\xi_R) & \text{con} & \quad \xi_R = x_R/L. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Las masas asociadas a cada modo propio, m_i , se definen como

$$m_i = 2\rho AL \int_0^{1/2} \left(Y_i^2(\xi) + \frac{I}{A} \Psi_i^2(\xi) \right) d\xi \quad (3.37)$$

donde también aparecen los modos propios de vibración asociados a los giros, Ψ_i , de los que, igualmente, solo se tienen en cuenta aquellos que son simétricos.

Combinando las ecuaciones (3.33), (3.34) y (3.35) resulta

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \int_0^t F(\tau) \left(\frac{t-\tau}{m} + \sum_{i=1}^{N_R} \frac{Y_i^F Y_i^R}{\omega_i m_i} \sin(\omega_i(t-\tau)) \right) d\tau - \\ &\quad - 2 \int_0^t R(\tau) \left(\frac{t-\tau}{m} + \sum_{i=1}^{N_R} \frac{(Y_i^R)^2}{\omega_i m_i} \sin(\omega_i(t-\tau)) \right) d\tau \end{aligned} \quad (3.38)$$

que es la ecuación que representa los desplazamientos de los puntos inicialmente apoyados.

3.4. Algoritmo de cálculo

3.4.1. Frecuencias y modos propios de vibración

Las frecuencias propias de vibración de la probeta son los valores de ω que cumplen la ecuación de frecuencia (3.28),

$$d_1[a_i C_3 \sin(a_i / 2) - b_i C_4 \sin(b_i / 2)] - d_2 C_3 C_4 [\cos(a_i / 2) - \cos(b_i / 2)] - \left[\frac{6(L/W)(b_i^2 - a_i^2)}{\phi} \right] = 0.$$

Estudiando dicha ecuación es fácil ver que todos los factores presentes en la misma dependen de propiedades geométricas y mecánicas de la probeta, todas ellas constantes, y de coeficientes definidos entre las mismas. Solo la frecuencia, ω , presente en la definición del coeficiente adimensional n (3.14),

$$n^2 = \frac{\omega^2 \rho A L^4}{EI_g}$$

es incógnita en dicha ecuación.

La resolución de la ecuación consistirá en variar el valor del coeficiente n , incrementándolo en pequeños intervalos desde cero. Así se compararán los valores que toma la función entre un punto y el siguiente, comprobando si se produce un cambio de signo, en cuyo caso, por ser continua, tomará un valor nulo en algún lugar del intervalo.

Para obtener con más exactitud qué valor de n anula la función se recurrirá diferentes métodos de búsqueda de ceros, como los de la Bisectriz y la Interpolación.

Tras haber recorrido el tramo necesario de la variable n para encontrar la cantidad de ceros deseados se recurrirá a la expresión (3.14), con el fin de obtener los valores de las frecuencias propias de vibración, ω_i , que corresponden a cada n anteriormente calculada.

3.4.2. Reacciones y desplazamientos en los apoyos

Mediante el desarrollo de la expresión de movimiento (3.38)

$$\delta = \int_0^t F(\tau) \left(\frac{t-\tau}{m} + \sum_{i=1}^{N_R} \frac{Y_i^F Y_i^R}{\omega_i m_i} \sin(\omega_i(t-\tau)) \right) d\tau - 2 \int_0^t R(\tau) \left(\frac{t-\tau}{m} + \sum_{i=1}^{N_R} \frac{(Y_i^R)^2}{\omega_i m_i} \sin(\omega_i(t-\tau)) \right) d\tau$$

se calcularán los desplazamiento de la probeta en las secciones de los apoyos y las reacciones que aparecen en estos como consecuencia de las fuerzas que la probeta ejerce sobre los mismos.

Suponiendo las funciones, δ , $F(t)$ y $R(t)$ lineales a tramos, la ecuación anterior se puede resolver analíticamente y describir como

$$\begin{aligned} \delta(t_2) = & \delta(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} F(\tau) \left(\frac{t_2-\tau}{m} + \sum_{i=1}^{N_R} h_i \sin(\omega_i(t_2-\tau)) \right) d\tau - \\ & - 2 \int_{t_1}^{t_2} R(\tau) \left(\frac{t_2-\tau}{m} + \sum_{i=1}^{N_R} f_i \sin(\omega_i(t_2-\tau)) \right) d\tau \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde

$$F(\tau) = F(t_1) + \frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1} (\tau - t_1), \quad (3.40)$$

$$R(\tau) = R(t_1) + \frac{R(t_2) - R(t_1)}{t_2 - t_1} (\tau - t_1), \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
 h_i &= \frac{Y_i^F Y_i^R}{\omega_i m_i}, \\
 f_i &= \frac{Y_i^F Y_i^R}{\omega_i m_i}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

y los valores de las masas equivalentes se hallarán aplicando la regla del trapecio en pequeños intervalos de su variable de integración.

Resolviendo las integrales y agrupando términos para abreviar, la expresión final que se obtiene es

$$\delta(t_2) = \delta(t_1) + \frac{(2F(t_1) + F(t_2))}{6m} (\Delta t)^2 + \sum_{i=1}^{N_R} H_i - \frac{(2R(t_1) + R(t_2))}{3m} (\Delta t)^2 - 2 \sum_{i=1}^{N_R} G_i \tag{3.43}$$

donde

$$\begin{aligned}
 H_i &= \frac{h_i}{\omega_i^2} \left(F(t_2) \omega_i - F(t_1) \omega_i \cos(\omega_i \Delta t) - \frac{\Delta F}{\Delta t} \sin(\omega_i \Delta t) \right), \\
 G_i &= \frac{f_i}{\omega_i^2} \left(R(t_2) \omega_i - R(t_1) \omega_i \cos(\omega_i \Delta t) - \frac{\Delta R}{\Delta t} \sin(\omega_i \Delta t) \right)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

y

$$\begin{aligned}
 \Delta F &= F(t_2) - F(t_1), \\
 \Delta R &= R(t_2) - R(t_1), \\
 \Delta t &= t_2 - t_1
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

La suposición de que las funciones son lineales por tramos está justificada en este caso, pues las reacciones y desplazamientos se calculan a partir de los valores que toma la fuerza incidente, datos que son obtenidos mediante procedimientos experimentales. Los resultados serán tanto más reales cuanto

mayor sea la frecuencia con la que se registran los valores de fuerza incidente-tiempo desde el instante del primer contacto entre elemento incidente-probeta.

Para resolver la ecuación (3.43), donde las incógnitas son $\delta(t_2)$ y $R(t_2)$, se comienza por sustituir los valores iniciales de $\delta(t_1)$ y $R(t_1)$, que corresponden al instante de la toma del primer dato de fuerza incidente y tiempo. En dicho momento la fuerza incidente todavía es cero, por tanto el desplazamiento también lo es, y las reacciones en los apoyos valen la mitad del peso de la probeta, de magnitud despreciable. De esta forma se calcularán los valores de $\delta(t_2)$ y $R(t_2)$, que referidos al instante de la segunda toma de datos de.

Procediendo de igual manera con los siguientes datos de fuerza incidente y tiempo se obtendrán los valores correspondientes al siguiente punto de la gráfica de $F(t)$, y así sucesivamente hasta el último intervalo.

Para poder resolver la ecuación se debe definir matemáticamente la relación que existe entre las incógnitas, $\delta(t_2)$ y $R(t_2)$, en cada uno de los dos casos posibles, haya o no contacto entre la probeta y los apoyos:

- a) Primero se supondrá que no hay contacto, por tanto la reacción será nula, $R(t_2) = 0$, y se resolverá la ecuación (3.43) para calcular $\delta(t_2)$. La suposición será acertada solo cuando $\delta(t_2) < 0$, resultado que corroborará que, efectivamente, en el instante t_2 la probeta ha perdido el contacto con los apoyos. Resultados diferentes para $\delta(t_2)$ significarán que la suposición de la pérdida de contacto es errónea, y que por el contrario el ensayo se encontrará en la segunda de las posibilidades.

b) Cuando la probeta esté en contacto con los apoyos el desplazamiento de la probeta será siempre nulo, $\delta(t_2) = 0$, debido a la suposición de que los apoyos no pueden deformarse, condición que excluye los valores de $\delta(t_2) > 0$. Entonces aparecerán fuerzas de reacción como oposición a las que ejerce la probeta sobre los apoyos. Las reacciones podrán tomar tanto valores muy cercanos a cero como otros de la misma magnitud que los de la fuerza incidente, lo que quiere decir que $R(t_2) \geq 0$. Sustituyendo $\delta(t_2) = 0$ y operando en la solución analítica de la ecuación de movimiento, (3.43), se obtendrá como resultado el valor de las reacciones en los apoyos en el instante t_2 .

A continuación se muestran los desarrollos de ambos casos a partir de la solución analítica de la ecuación de movimiento (3.43).

a) Al sustituir el valor $R(t_2) = 0$ el desplazamiento $\delta(t_2)$ se calcula como

$$\delta(t_2) = \delta(t_1) + \frac{2F(t_1) + F(t_2)}{6m} (\Delta t)^2 + \sum_{i=1}^{N_R} H_i - \frac{2R(t_1)}{3m} (\Delta t)^2 - 2 \sum_{i=1}^{N_R} \frac{f_i}{\omega_i^2} \left(-R(t_1) \omega_i \cos(\omega_i \Delta t) + \frac{R(t_1)}{\Delta t} \sin(\omega_i \Delta t) \right) \quad (3.46)$$

b) Sustituyendo $\delta(t_2) = 0$ y sacando factor común $R(t_1)$ y $R(t_2)$ se obtiene que

$$0 = \delta(t_1) + \frac{(2F(t_1) + F(t_2))}{6m} (\Delta t)^2 + \sum_{i=1}^{N_R} H_i - 2R(t_1) \left[\frac{(\Delta t)^2}{3m} + \sum_{i=1}^{N_R} \frac{f_i}{\omega_i^2} \left(-\omega_i \cos(\omega_i \Delta t) + \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\Delta t} \right) \right] - R(t_2) \left[\frac{(\Delta t)^2}{3m} + 2 \sum_{i=1}^{N_R} \frac{f_i}{\omega_i^2} \left(\omega_i - \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\Delta t} \right) \right] \quad (3.47)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 R(t_2) = & \left\{ \delta(t_1) + \frac{(2F(t_1) + F(t_2))(\Delta t)^2}{6m} + \sum_{i=1}^{N_R} H_i - \right. \\
 & \left. - 2R(t_1) \left[\frac{(\Delta t)^2}{3m} + \sum_{i=1}^{N_R} \frac{f_i}{\omega_i^2} \left(-\omega_i \cos(\omega_i \Delta t) + \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\Delta t} \right) \right] \right\} \cdot \\
 & \cdot \left[\frac{(\Delta t)^2}{3m} + 2 \sum_{i=1}^{N_R} \frac{f_i}{\omega_i^2} \left(\omega_i - \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\Delta t} \right) \right]^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

3.5 Breve descripción del programa

3.5.1. Frecuencias y modos propios de vibración

En la primera línea del código del programa “ceros” se definen las variables de entrada y salida de la función, que se refieren a las propiedades geométricas y físicas de la probeta las primeras, y como variable principal de salida, las frecuencias propias de vibración de la probeta.

A continuación, hasta la línea 13, se pide la introducción de los valores geométricos y físicos de la probeta a ensayar así como el número de frecuencias propias que se desea buscar, y se definen y calculan parámetros geométricos, como el área de la sección transversal, el momento de inercia de la misma o un cociente entre la profundidad de fisura y el canto de la probeta. La siguiente sentencia condicional, (líneas 14 a 22) calcula el parámetro *phi* mediante dos expresiones diferentes para sendos valores fijos del cociente de la longitud de la probeta entre su canto, e interpola su valor a partir de los anteriores en los demás casos.

En este punto (línea 23) se han calculado todos los parámetros que permanecen constantes en el programa, y se comienza el cálculo de los ceros de la función de frecuencia, f . Las operaciones necesarias para ello se repetirán tantas veces como el número de ceros a buscar definido anteriormente gracias al bucle “*while*” (líneas 28 a 58) y a su contador l , inicializado previamente y que se incrementará cada vez que se encuentre un cero. Ya se ha dicho que existirá un cero en los intervalos en que dicha función cambia de signo, es decir, entre el punto $f2$ y el anterior, $f1$, cuyos valores dependen de los que toma de la variable n entre el punto nj , y el anterior, ni , respectivamente, estos últimos separados por un paso $incn$. La referencia al punto anterior requiere que se inicialice el primer punto de f y n . Cuando se da con tal intervalo, condición representada con la sentencia “*if*” (líneas 39 a 56), se recurre a la función de Matlab “*fzero*”, que se encarga de aplicar reiteradamente los métodos de la bisección e interpolación a la función de frecuencia hasta encontrar un cero con la precisión especificada. Para ello recurre a una subfunción, fun , donde se define la función de frecuencia y sus parámetros únicamente como función de “ n ” (líneas 104 en adelante). Los datos de los parámetros que resultan en el cero, así otros parámetros dependientes de éstos, y la frecuencia correspondiente, se almacenan en la posición l de vectores con su nombre para su posterior uso, tras lo cual se incrementa el contador l , el intervalo sometido a estudio en $incn$, y $f1$ toma el valor calculado para $f2$. En el caso de no darse el cambio de signo necesario para la existencia de un cero solo se incrementa el intervalo de estudio y el valor de $f1$ y, como también ocurre en el caso anterior, el proceso continua hasta conseguir el número de ceros requeridos.

Por ser de utilidad, se ha incluido en este programa el cálculo de la masa equivalente asociada a cada modo propio, código que se explicará en el siguiente.

Finalmente los resultados del programa se almacenan para su posterior consulta.

3.5.2. Reacciones y desplazamientos en los apoyos

Como antes, en las primeras líneas se definen las variables del programa y se cargan tanto los datos de la probeta como los resultados del programa anterior, almacenados en los archivos “*probeta*” y “*ceroymasa*”. A continuación se pide que se defina el número de modos propios que el programa tendrá en cuenta, y se calculan parámetros constantes, como la masa de la probeta, la posición del primer apoyo, y las posiciones adimensionalizadas con L del primer apoyo y de la fuerza incidente (líneas 1 a 11).

En primer bucle “*for*” (líneas 12 a 15) se calculan y almacenan los Y_i^F e Y_i^R de cada modo propio simétrico recorriendo los vectores necesarios obtenidos en el programa anterior.

Los siguiente es calcular la masas equivalentes (líneas 16 a 31) de cada modo propio, para lo que el bucle “*for*” recorre los modos simétricos, y mediante el bucle anidado “*while*” se incrementa la variable de integración “*chi*” en intervalos previamente definidos, intervalos entre los que se calcula la integral de m aplicando la regla del trapecio. El valor total de la integral se consigue simplemente sumando el resultado del último cálculo ejecutado con el que tenía la variable anteriormente.

La tercera parte del programa (líneas 32 a 60) se encarga del cálculo de las reacciones y desplazamientos en los puntos que marcan los vectores de la fuerza incidente contra el tiempo, lo que consigue recorriendo éstos con el primer bucle “*for*”. Antes es necesario inicializar los primeros valores de R y $delta$, y una vez dentro del bucle se definen los valores de los incrementos de F y T para cada paso y se ponen a cero otros parámetros. Sendos bucles anidados “*for*” calculan

los sumatorios de parámetros dependientes de los modos propios de forma similar a como se hace en el cálculo de m . En la línea 44 se verifica el valor de δ , calculado en la anterior suponiendo que hay pérdida de contacto entre probeta y apoyos, que de ser cierto significaría que las reacciones en ese instante son cero (línea 45). En caso contrario, lo que representa con el condicional “*elseif*”, se da a δ valor cero y se realizan las operaciones necesarias para calcular las reacciones.

Finalmente se almacenan los vectores obtenidos de independientemente y en forma de matriz.

Capítulo 4

Casos analizados, resultados y discusión

4.1. Caso de referencia analizado

El primer caso analizado será uno en el que, mediante la instrumentación adecuada de los dispositivos del ensayo, se registraron los valores de la fuerza incidente.

Se ensayó sobre una probeta de Araldite B, cuya geometría y propiedades mecánicas se muestran a continuación junto con la configuración del ensayo:

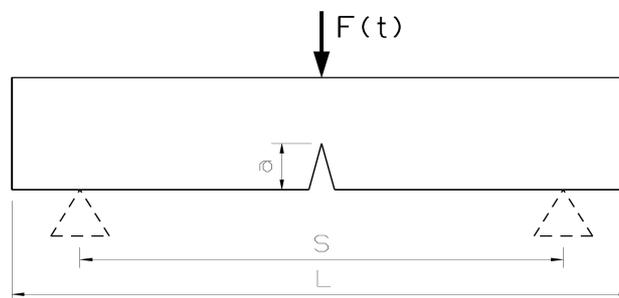


Figura 4.1: Geometría de la probeta y configuración del ensayo.

y cuyos valores son los siguientes

$$\begin{array}{ll}
 L=412 \text{ mm} & \rho= 1216 \text{ kg/m}^3 \\
 W=100 \text{ mm} & E= 3380 \text{ MPa} \\
 B= 10 \text{ mm} & \nu= 0.33 \\
 a= 30 \text{ mm} & \kappa= 5/6 \\
 S= 400 \text{ mm} & \\
 I_g=833333 \text{ mm}^4 &
 \end{array}$$

Las medidas de fuerza incidente y tiempo registradas durante el ensayo se representan gráficamente a continuación.

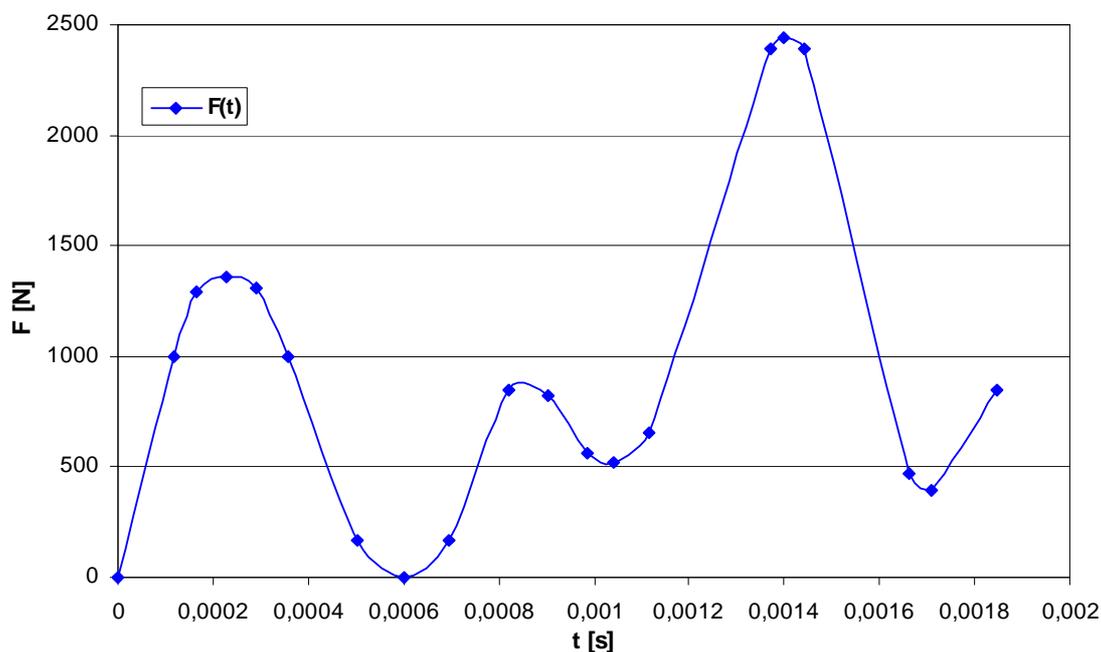


Figura 4.2: Datos recogidos experimentalmente.

La naturaleza dinámica y vibratoria del ensayo provoca el comportamiento oscilatorio de $F(t)$, que incluso alcanza el cero puntualmente.

Tras calcular las frecuencias y modos propios de vibración de la probeta en estado libre mediante el primer programa implementado, se simula numéricamente el ensayo teniendo en cuenta cada vez dos modos propios simétricos más, comenzando desde el primero. Con ello se persigue establecer el número de modos propios simétricos a tener en cuenta en la simulación para que los cambios en los resultados de salida del programa sean pequeños.

La siguiente gráfica nos permite comparar los resultados de los casos antes mencionados.

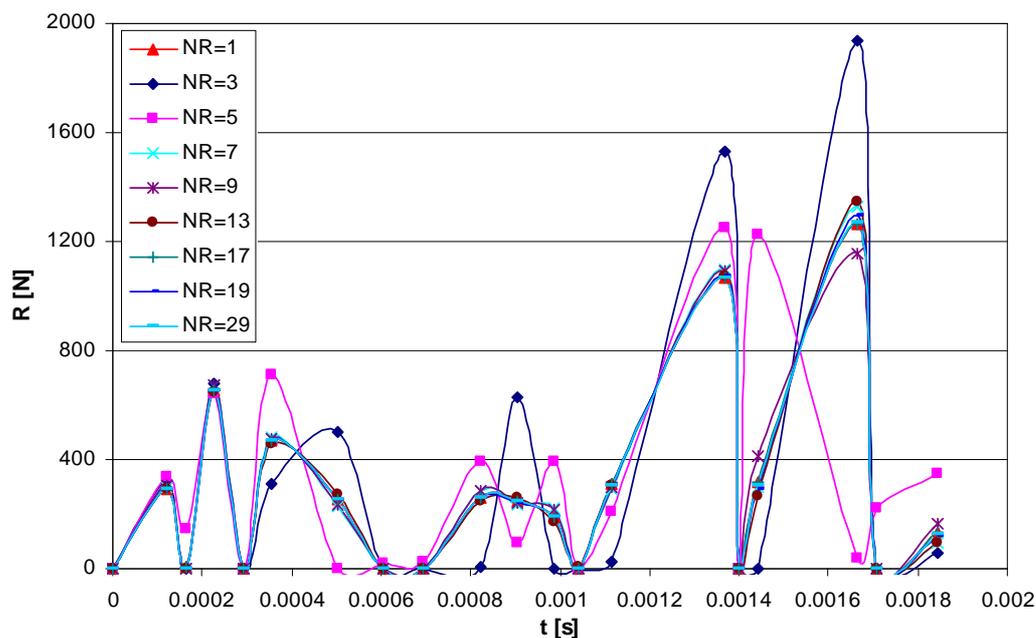


Figura 4.3: Resultados del cálculo de $R(t)$ variando el número de modos propios computados.

La gráfica muestra la convergencia de los resultados es rápida, y se observa que a partir del décimo modo propio de vibración simétrico los cambios son lo suficientemente pequeños para que se pueda prescindir de ellos en un análisis cualitativo. Por tanto los ensayos posteriores se simularán teniendo en cuenta los diez primeros modos propios de vibración simétricos.

Se muestra a continuación en la misma gráfica la serie de $R(t)$, producto del análisis numérico, y la de $F(t)$, medida experimentalmente. En la misma escala de tiempo se han reflejado también los desplazamientos de la probeta en los puntos de apoyo, $\delta(t)$, calculados en el mismo análisis.

Figura 4.4: Fuerza incidente frente a las reacciones en los apoyos calculadas en el caso de referencia.

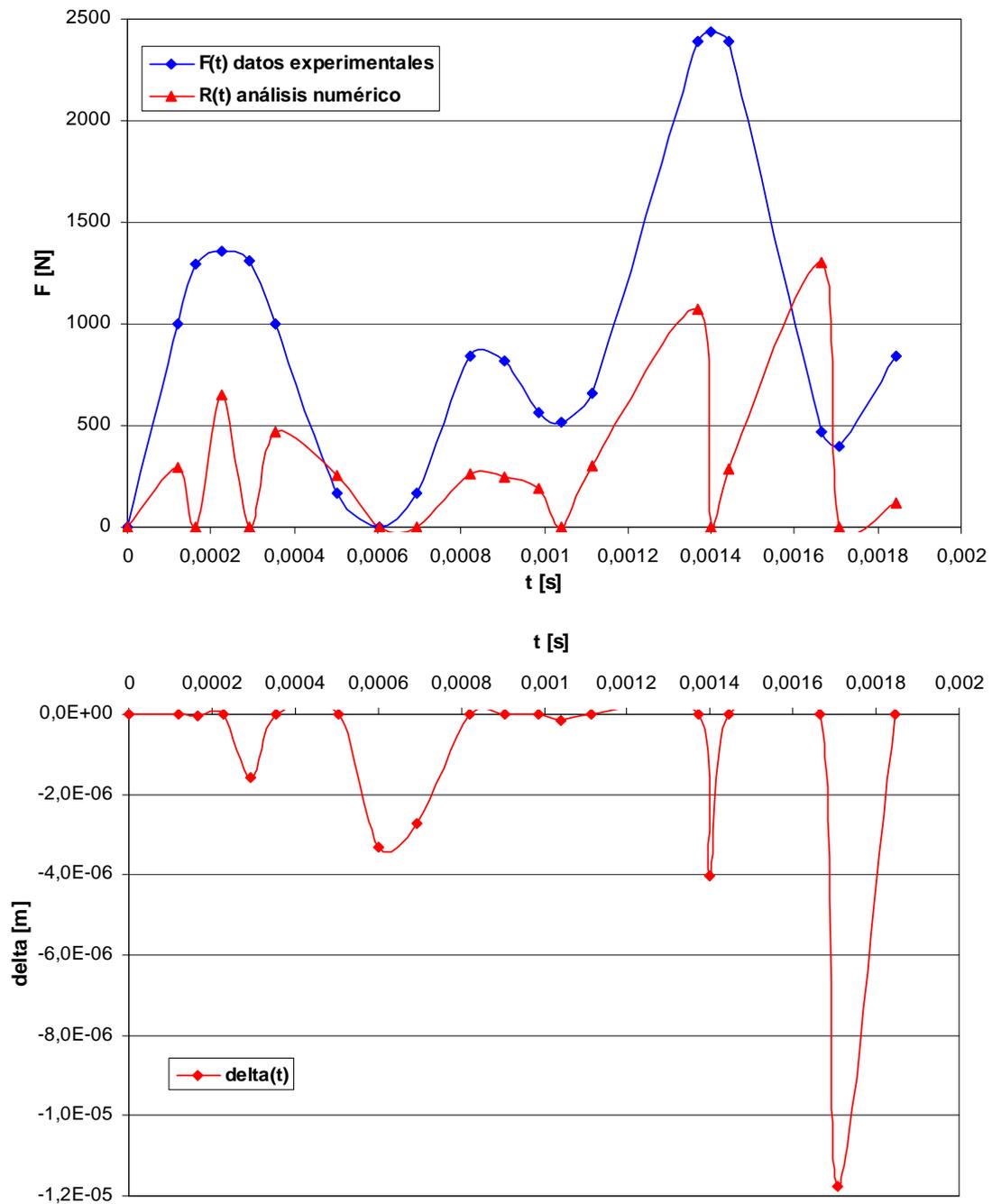


Figura 4.5: Desplazamiento en los apoyos calculados en el caso de referencia.

Se observan en la primera gráfica similitudes en las tendencias de ambas curvas, diferenciándose tres zonas que se corresponden a las tres oscilaciones de la fuerza incidente. Así, $R(t)$ presenta tres picos y dos breves pérdidas de contacto intermedias, finalizando con otra de mayor duración, donde $F(t)$ presenta la primera oscilación, continúa con otra oscilación a la par que la curva de la fuerza incidente, y presenta dos picos más pronunciados durante la última oscilación de $F(t)$.

En lo que atañe a los desplazamientos, los valores de salida del programa son de signo negativo, de acuerdo con el sistema de referencias definido anteriormente. Coincidiendo con los ceros de la curva de las reacciones se descubren cuatro puntos, de los siete en total calculados por el programa, en los que los desplazamientos son mayores de la milésima de milímetro. La evolución del desplazamiento de la probeta es más suave y de menor valor en las pérdidas de contacto que sufre durante la primera mitad del ensayo, donde se encuentra la pérdida de contacto de mayor duración. La evolución de los desplazamientos en la segunda mitad ensayo son más abruptas, y se registran los mayores valores. El más alto se corresponde con el rebote que experimenta la probeta tras alcanzarse la mayor reacción en los apoyos, y supera la centésima de milímetro.

4.2. Análisis numérico de otros supuestos

Mediante los programas implementados se han simulado otros ensayos variando alguna de las condiciones del ensayo experimental en la forma siguiente:

- Variación de la duración del ensayo:

Debido a los cambios en modos propios de vibración de cada probeta se prevé que el comportamiento entre diferentes velocidades de excitación sea también diferente. Partiendo de la curva de la fuerza incidente original se obtendrán otras dos, una que se extenderá durante el doble de tiempo que el ensayo original, lo que se consigue multiplicando por 2 el vector de tiempo del ensayo, y otra cuyo desarrollo se reducirá a la mitad de tiempo que el mismo ensayo, es decir, se divide el vector de tiempo entre dos. Se definirá cada caso mediante la siguiente nomenclatura:

$d2$	caso con doble duración	$t*2$
$d1$	caso de referencia	$t *1$
$d1/2$	caso con la mitad de duración	$t *1/2$

- Variación de la distancia entre apoyos. Este parámetro influye en la capacidad de deformación de la probeta, y por tanto en las fuerzas de inercia y vibraciones que se producen en la misma. Las distancias entre apoyos ensayadas se definieron relacionándola con el canto de la probeta, multiplicando este valor por dos y medio, tres y cuatro. En adelante se representará como:

$S2,5$	$S=2,5*W=250mm$	$W/S=2/5=0.4$
$S3$	$S=3*W=300mm$	$W/S=1/3=0.33$
$S4$	$S=4*W=400mm$	$W/S=1/4=0.25$

- Variación de la profundidad de la fisura. Al igual que en el caso anterior la fisura aporta un extra de flexibilidad a la probeta al disminuir la sección de la misma, lo que provoca que sea más fácil deformarla cuanto mayor sea aquella. De las variables que se modifican, ésta es la única que afecta al cálculo de las frecuencias propias de vibración de las diferentes probetas, pues, como se ha descrito antes, aquellas se calculan para probetas libres de apoyos ven afectado su momento de inercia por la disminución de la sección central del sólido. Las longitudes de fisura ensayadas son las siguientes:

$$a2 \quad a=0,2*W=20mm$$

$$a3 \quad a=0,3*W=30mm$$

$$a4 \quad a=0,4*W=40mm$$

Combinando los diferentes cambios del modelo propuestos se obtienen un total de veintisiete casos diferentes, cada uno de los cuales se ha ensayado mediante los programas ya descritos.

Para comparar los resultados de las reacciones y desplazamientos en los apoyos, éstos se presentan en gráficas, agrupadas por tríos, donde la duración del ensayo y la profundidad de la fisura permanecen constantes en los diferentes cálculos, mientras que la distancia entre apoyos toma los valores acordados. Por razones de la enorme diferencia entre las magnitudes de las reacciones y los desplazamientos, sus series de datos se muestran en gráficas diferentes.

Debido a la gran similitud que guardan las gráficas que se muestran en adelante con las obtenidas en el caso de referencia, similitud patente sobre todo en las gráficas de las reacciones en los apoyos, se comentarán también dividiéndolas en tres partes.

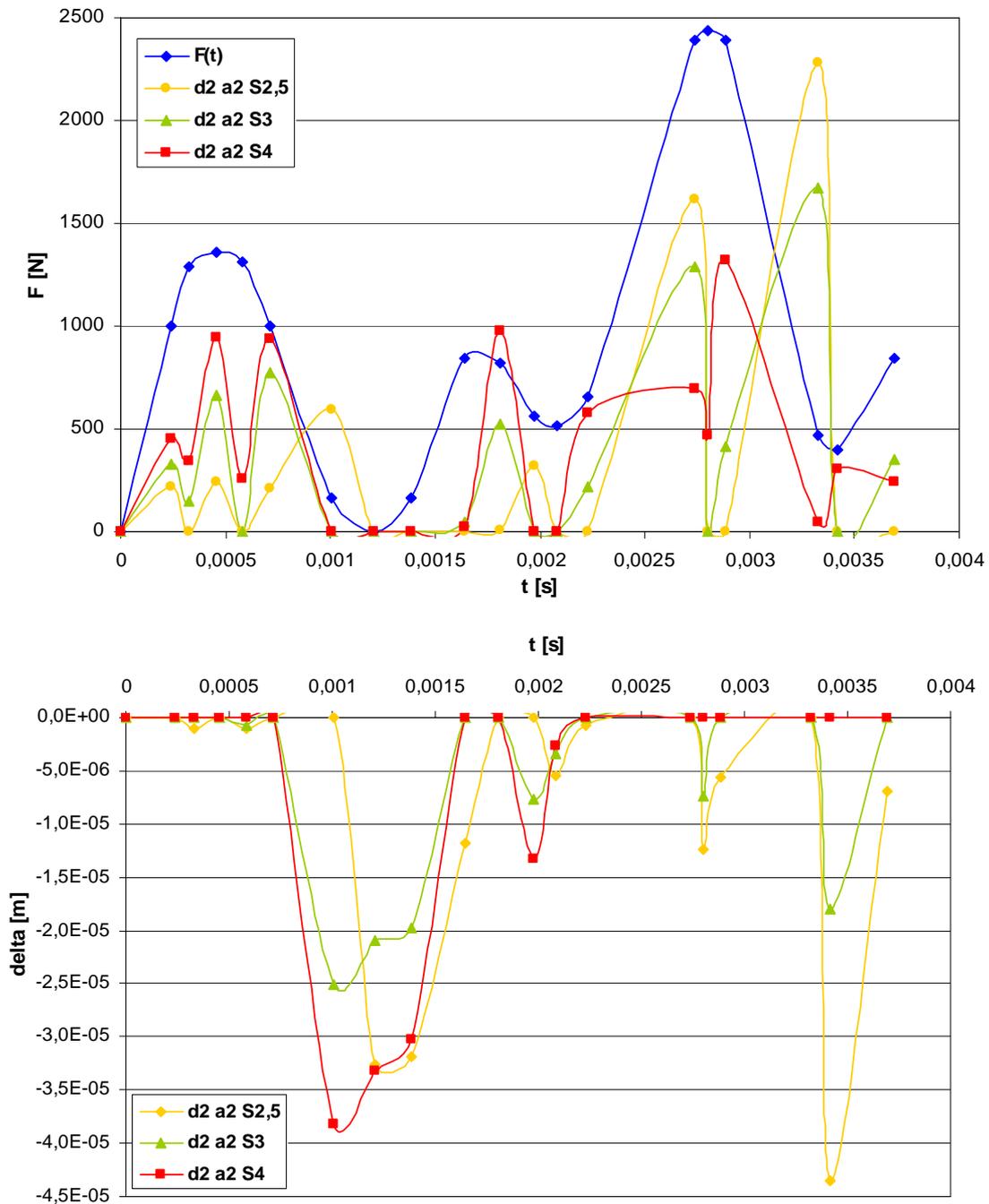
4.2.1. Casos con doble duración $d2$

4.2.1.1. Profundidad de Fisura $a2$

Las curvas de reacciones presentan, en la primera de las tres zonas diferenciadas, tres picos y una parte continuada de reacciones nulas. Las oscilaciones son similares, excepto en el caso $S2,5$, donde el último pico se alarga más en el tiempo. La magnitud de las reacciones crece con la distancia entre apoyos, y número de rebotes disminuye de tres a uno. La zona de reacción nula dura aproximadamente lo mismo en los tres casos, pero en $S2,5$ se retrasa con respecto a los otros. Los desplazamientos que calcula el programa son muy pequeños en los rebotes instantáneos del comienzo y de varias centésimas de milímetro en la zona de despegue continuado. Es $S4$ el que experimenta el desplazamiento mayor.

En la zona intermedia presentan alternativamente, en los tres casos, un pico y un intervalo de pérdida de contacto. La tendencia vuelve a ser como la del principio: los desplazamientos, como las reacciones, crecen con la distancia entre apoyos, mientras que su valor es mucho menor que el de los anteriores.

Como en el caso de referencia, el último tramo de las reacciones presentan dos picos en todos los casos, algo más suave en $S4$, donde el primero de ellos se achata y alcanza la mitad de amplitud que en los otros casos, y el segundo adelanta su máximo, que es también bastante menor. Las curvas de $S2,5$ y $S3$ son similares salvando la diferencia de la mayor amplitud de la primera. Los dos últimos casos experimentan un pequeño crecimiento final. $S2,5$ y $S3$ rebotan dos veces, mientras que el último caso no lo hace, y la tendencia de crecimiento se invierte, aumentando con la disminución de S , lo que también se cumple con los desplazamientos. Llama la atención la magnitud del último desplazamiento en el caso $S3$.

Figura 4.6: Reacciones para los casos $d2 a2$.Figura 4.7: Desplazamientos para los casos $d2 a2$.

4.2.1.2. Profundidad de Fisura a_3

En este caso se observa, en el primer tramo, que las reacciones en los apoyos también presentan tres picos, esta vez sin ningún paso por cero entre ellos. Su valor aumenta con la distancia entre apoyos, y lo hace en mayor medida entre los dos primeros casos, $S_{2,5}$ y S_3 . El intervalo de pérdida de contacto es casi la mitad de duradero en el caso de menor distancia entre apoyos, y el valor que alcanza el desplazamiento de la probeta cuatro veces menor, sin alcanzar la centésima de milímetro. Las otras dos curvas son similares entre sí y de valores altos.

La zona central muestra dos picos sin rebote intermedio en el primer caso, y uno en los otros. Las magnitudes de los primeros son similares, y pequeñas en comparación con la de S_4 , pico mucho más abrupto. Al final de estos picos los casos de menor y mayor valor de S experimentan un rebote, algo más duradero en S_4 , mientras que en la probeta de S_3 permanece en contacto con los apoyos. El desplazamiento es mucho mayor en S_4 que en $S_{2,5}$.

El tramo final muestra en todos los casos dos picos, con un descenso súbito de las curvas entre ellos, que en los casos $S_{2,5}$ y S_3 alcanzan el cero, y tras ellos un rebote y un ascenso final. Se observa que los picos de las reacciones son más suaves que los del principio del ensayo y que la tendencia de crecimiento de sus magnitudes se invierte primero para romperse al final. Los desplazamientos obtenidos en el descenso súbito entre picos son muy pequeños y casi idénticos. En el último rebote el valor de las magnitudes de los desplazamientos se invierte con respecto a los que tienen después las reacciones. Esta vez es S_4 el caso que obtiene, en este tramo, el rebote más amplio de los ensayos.

Figura 4.8: Reacciones para los casos *d2 a3*.

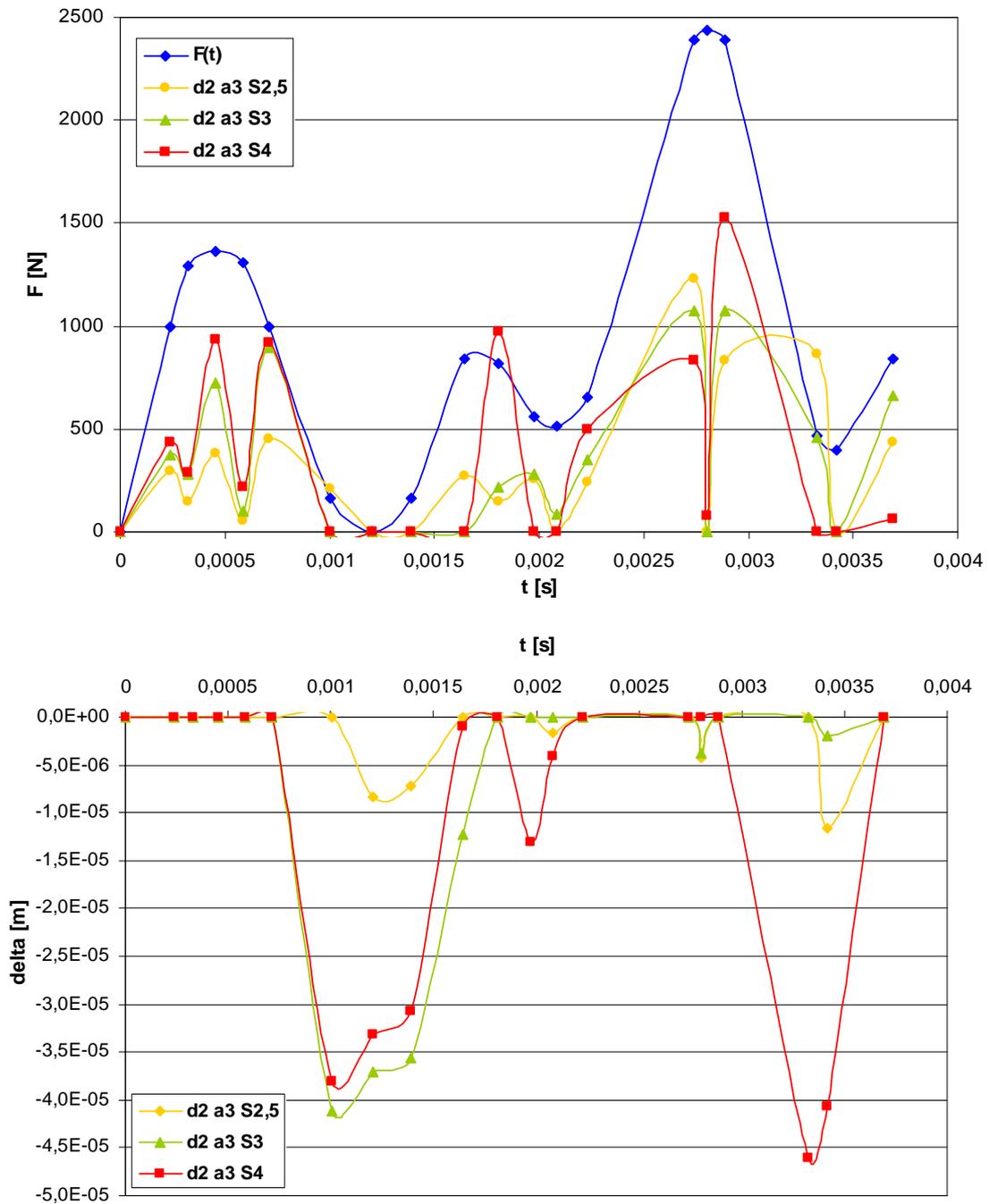


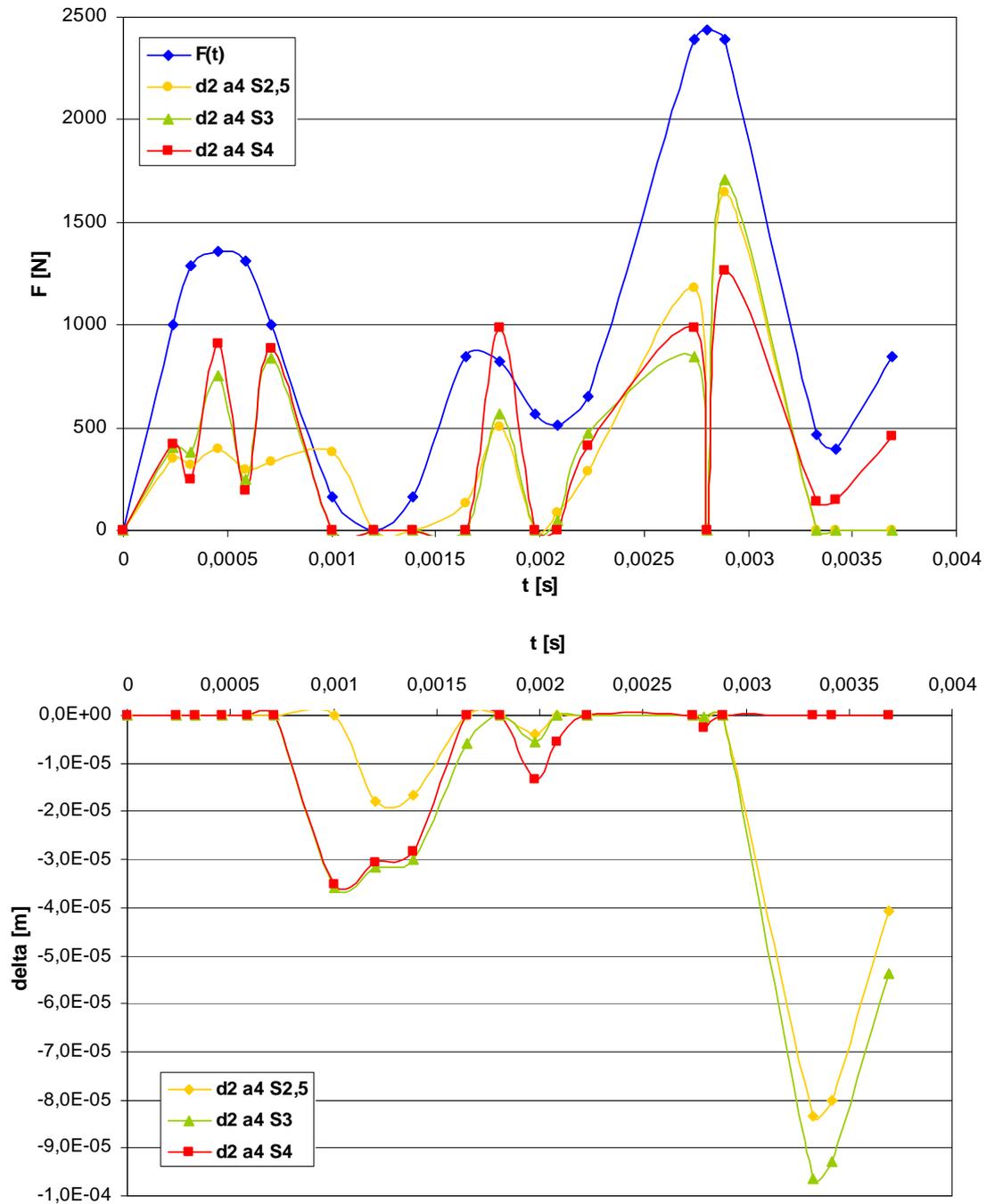
Figura 4.9: Desplazamientos para los casos *d2 a3*.

4.2.1.3. Profundidad de Fisura a4

Para esta profundidad de fisura se obtienen resultados muy similares a los de la anterior en la primera parte del ensayo, aquella que comprende las oscilaciones iniciales y el intervalo de reacciones nulas, en los casos *S3* y *S4*, mientras que la curva de *S2,5* presenta oscilaciones más suaves alrededor de un valor algo más elevado. El desplazamiento que experimentan las distintas probetas posteriormente disminuye un poco su magnitud en los casos *S3* y *S4*, mientras que la curva de *S2,5* duplica su valor máximo. La forma de las curvas es muy similar a las del caso *a3*.

En la zona central las tres curvas muestran un pico en las reacciones en los apoyos, casi el doble de pronunciado en *S4* que en los anteriores, de la misma magnitud. La pérdida de contacto posterior es más duradera en el último caso, así como el doble de amplia en los otros dos casos, que presentan la misma duración. La tendencia de esta zona de la gráfica es de crecimiento de las reacciones y los desplazamientos con el aumento de la distancia entre apoyos.

El crecimiento de las reacciones en los apoyos en el tramo siguiente es similar en los tres casos, si bien se diferencian más en el punto máximo del primer pico, tras el cual, otra vez, ocurre un descenso muy abrupto hasta el cero. En este rebote los desplazamientos en todos los casos apenas alcanzan la milésima de milímetro. De nuevo las reacciones crecen casi en vertical hasta los mayores valores de los ensayos, y con tendencia de crecimiento distinta al pico anterior. El descenso, algo menos pronunciado, llega hasta cero en los primeros casos, donde las probetas experimentan el despegue más grande, casi de la décima de milímetro, mientras que el caso *S4* experimenta un crecimiento considerable.

Figura 4.10: Reacciones para los casos $d2 a4$.Figura 4.11: Desplazamientos para los casos $d2 a4$.

4.2.2. Casos con duración de referencia $d1$

4.2.2.1. Profundidad de Fisura $a2$

En los casos con igual duración que el experimento, para la menor profundidad de fisura se observa que los tres picos iniciales son bastante más pronunciados en $S4$ que el los otros dos similares en magnitud y forma. En $S2,5$ y $S3$ se producen dos rebotes intermedios mientras que en $S4$ tan sólo uno, y en todos ellos el desplazamiento de la probeta es muy pequeño. En el tramo de reacciones bajas la curva de $S4$ tan solo alcanza el cero al final, donde comienza el ascenso de la siguiente zona, y el desplazamiento es ínfimo. De las otras dos, es la curva de $S2,5$ la que llega al cero en primer lugar, y ambas lo dejan casi al mismo tiempo. Los desplazamientos en este intervalo son pequeños, pues apenas alcanzan la milésima de milímetro, pero se observa un incremento de su magnitud con la disminución de S .

El tramo central de las reacciones sus curvas presentan en todos los casos dos picos sin cero intermedio, cuyas amplitudes crecen con S desde valores bastante pequeños. En el descenso todas alcanzan el cero, la curva de $S2,5$ se retrasa con respecto a las otras y el desplazamiento es muy pequeño, mientras que en $S4$ no alcanza las dos milésimas de milímetro.

El primer pico del siguiente tramo de las reacciones es muy similar en todas las curvas, con pendiente de subida pronunciada y muy abrupta de bajada, pero la tendencia anterior de crecimiento con el aumento de S se rompe. Tras pasar por cero, $S2,5$ y $S3$ crecen y decrecen más rápidamente que antes, alcanzando valores muy elevados pero con una notable diferencia entres sus máximos, mientras que la curva que describe $S4$ es casi cuadrada y de valor máximo mucho menor. Ésta curva experimenta un crecimiento considerable tras otro rebote, mientras que $S2,5$ y $S3$ terminan el ensayo sin contacto con los apoyos. En los tres casos se

produce un rebote de la probeta entre los dos picos, muy breve en $S4$ y algo más duradero en los demás, cuyos valores van de tres a cinco milésimas de milímetro, crecientes con la disminución de S . La última pérdida de contacto es la de mayores valores de los desplazamientos, si bien en $S4$ queda muy por debajo de las otras curvas, que no mantienen la tendencia anterior.

Figura 4.12: Reacciones para los casos *d1 a2*.

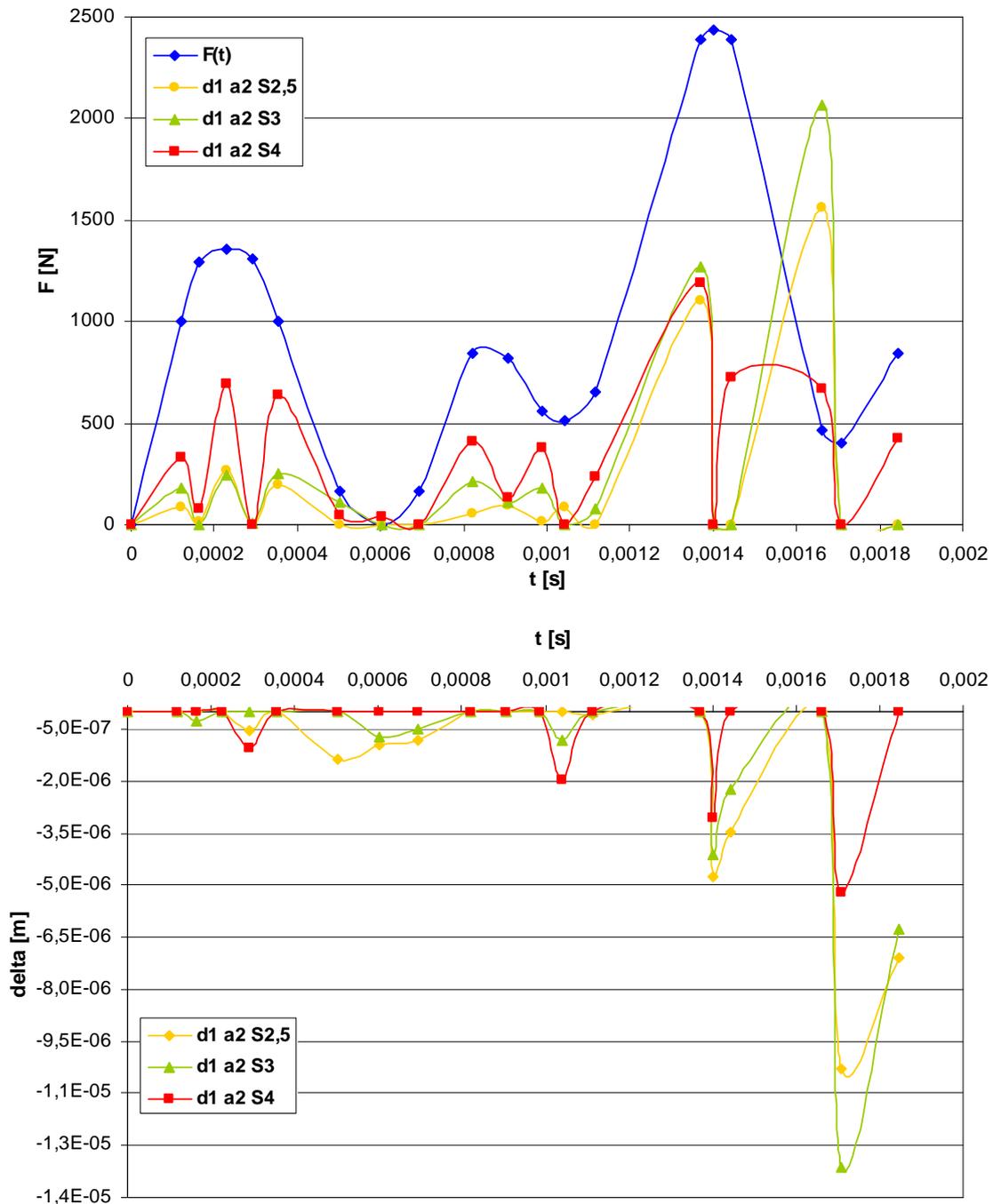


Figura 4.13: Desplazamientos para los casos *d1 a2*.

4.2.2.1. Profundidad de Fisura a_3

Entre los siguientes casos se encuentra, en rojo y con distancia entre apoyos S_4 , el resultado del análisis numérico del ensayo experimental.

Las tres curvas de las reacciones presentan, en el primer tramo de la gráfica, oscilaciones pronunciadas con frecuencias similares, excepto el tercer pico de S_4 , que se extiende más en el tiempo, y dos ceros intermedios, excepto en el caso $S_{2,5}$, que solo presenta uno en el segundo mínimo. Los desplazamientos en los rebotes intermedios del comienzo del ensayo son pequeños, apenas superándose la milésima de milímetro en S_4 . Después todas las probetas pierden de nuevo el contacto con los apoyos: durante un tiempo bastante largo en el caso de $S_{2,5}$, cuyo desplazamiento casi alcanza la centésima de milímetro, de forma breve en S_3 , para tomar contacto de nuevo ejerciendo una fuerza pequeña sobre los apoyos y rebotar otra vez, ambos rebotes con pequeños desplazamientos, y de forma moderada en S_4 , donde el desplazamiento supera las tres milésimas de milímetro.

En el tramo central, S_3 y S_4 presentan curvas similares en las pendientes de subida y bajada, si bien la primera forma dos picos mientras que S_4 es casi plana. $S_{2,5}$ retoma el contacto muy tarde tras su largo rebote y la fuerza que ejerce forma un pico pronunciado pero no muy amplio. Las tres probetas rebotan al tiempo y brevemente con desplazamientos pequeños.

En la última parte del ensayo las reacciones presentan dos picos, más pronunciados los segundos, especialmente S_3 , que alcanza un valor muy alto seguido de lejos por los máximos de $S_{2,5}$ y S_4 , mucho más cercanos entre sí, que los primeros, donde los máximos de las curvas siguen el mismo orden en un rango mucho más reducido. Entre los picos todas las probetas despegan de los apoyos, durante el mismo intervalo de tiempo $S_{2,5}$ y S_4 pero con mayor desplazamiento S_4 , e igual desplazamiento que este S_3 , que tarda algo más en

retomar contacto con los apoyos. La última pérdida de contacto se produce tras el abrupto y casi idéntico decremento de las reacciones en el último pico, y la evolución de las curvas es tan brusca y similar entre los distintos casos como en aquellas. *S3* y *S4* experimentan los mayores desplazamientos del ensayo con mucha diferencia, y sólo *S4* retoma el contacto antes de la finalización del ensayo.

Figura 4.14: Reacciones para los casos *d1 a3*.

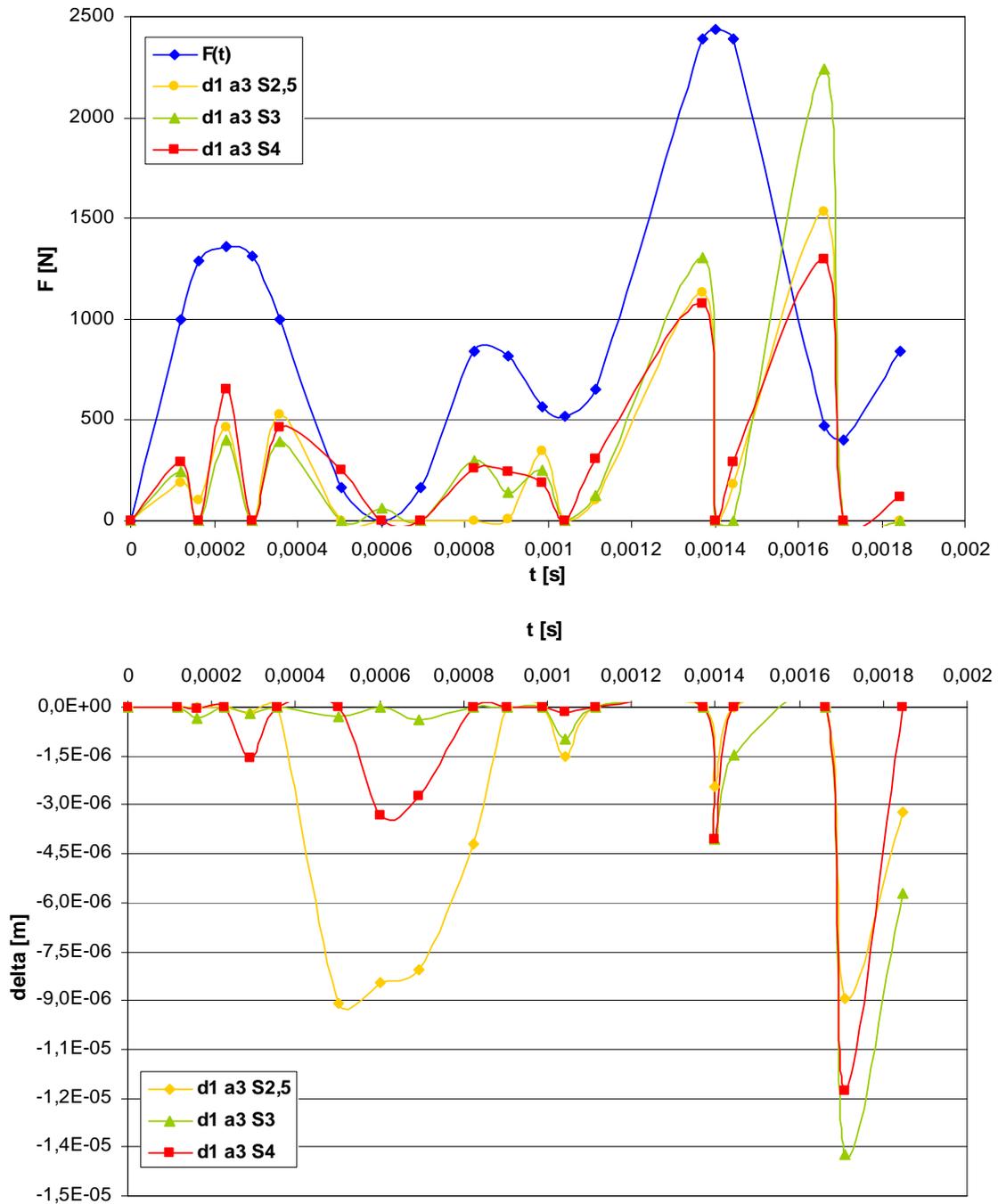


Figura 4.15: Desplazamientos para los casos *d1 a3*.

4.2.2.3. Profundidad de Fisura a_4

En este se obtienen resultados similares, en cuanto a la forma que toman las curvas, a los de profundidad de fisura a_3 tanto en las reacciones en los apoyos como en los desplazamientos, si bien cambian significativamente algunas magnitudes y tendencias.

Las oscilaciones del principio del ensayo son casi idénticas en S_3 y S_4 , mientras que $S_{2,5}$ sobrepasa a las anteriores al crecer sus máximos. Los rebotes son los mismos que en el caso anterior, también con desplazamientos pequeños. Tras el tercer pico el descenso hacia el cero se produce en los mismos instantes que en a_3 , con la diferencia de que en S_3 la probeta permanece sin contacto más tiempo y el desplazamiento supera la milésima de milímetro, mientras que el $S_{2,5}$ crece considerablemente.

La situación en el tramo central es prácticamente la misma que en a_3 , con mayor diferencia entre las reacciones de S_3 y S_4 .

En la reacciones del tramo final los valores máximos de las reacciones cambian su orden con respecto a a_3 , apareciendo S_4 en el medio. El primer pico tiene valores muy parecidos, mientras que en el segundo, cuando la curva de S_3 alcanza de nuevo un máximo muy alto, seguido del también elevado valor de S_4 , la curva del ensayo de distancia entre apoyos $S_{2,5}$ se aplanan y reduce mucho su máximo. Entre los picos todas las probetas rebotan, instantáneamente $S_{2,5}$ y durante un breve tiempo las otras dos, con desplazamientos de una a cinco micras. Tras la última caída de las reacciones también se produce pérdida de contacto con los apoyos, que continúa hasta el final del ensayo excepto en $S_{2,5}$, que experimenta un nuevo crecimiento en las reacciones. Aquí los desplazamientos alcanzan el orden de magnitud de centésima de milímetro en los ensayos de S_3 y S_4 , mientras que en $S_{2,5}$ es de tres micras. En las dos zonas de pérdida de contacto se mantiene la tendencia de mayor desplazamiento cuanto mayor es la distancia entre apoyos.

Figura 4.16: Reacciones para los casos *d1 a4*.

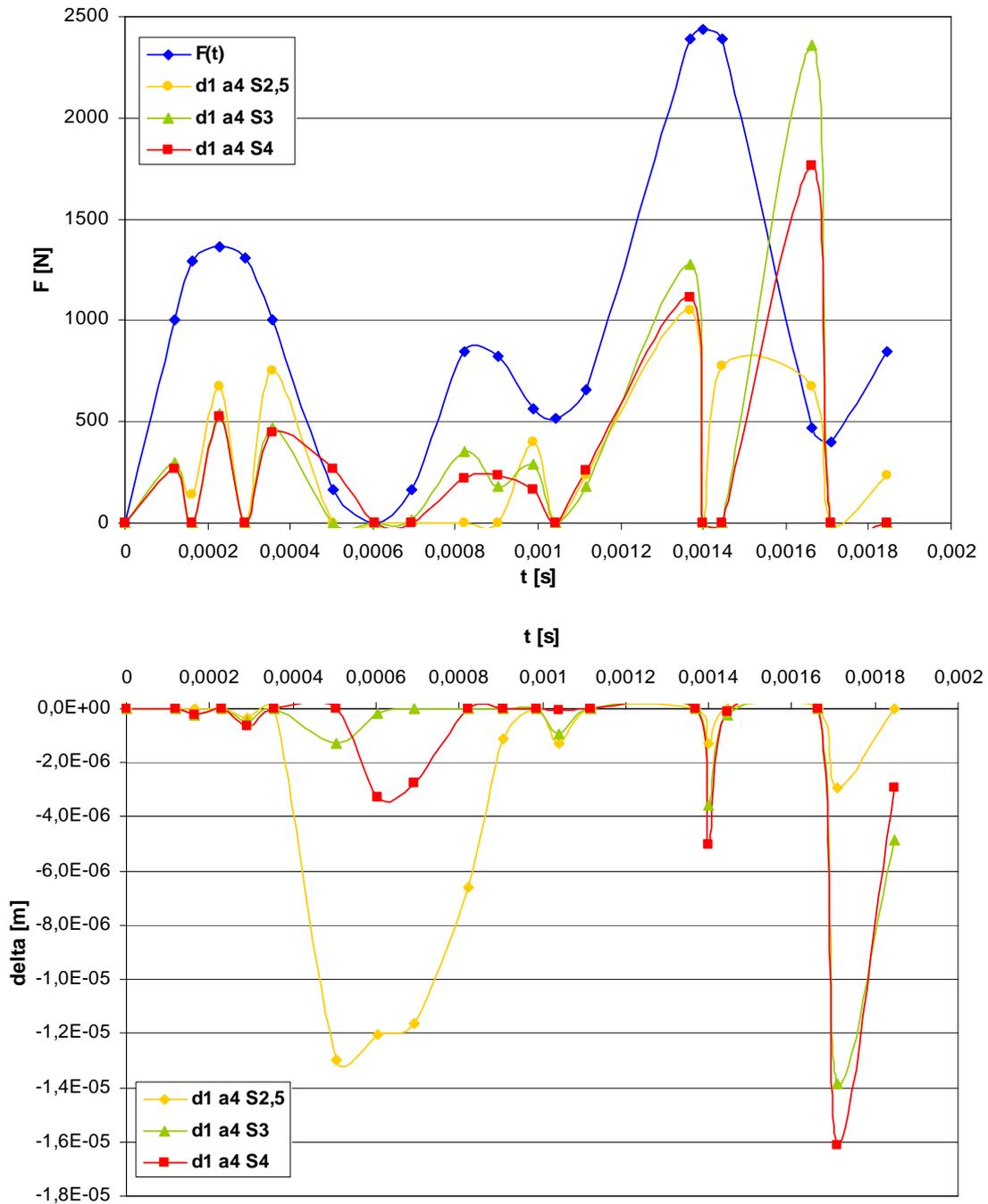


Figura 4.17: Desplazamientos para los casos *d1 a4*.

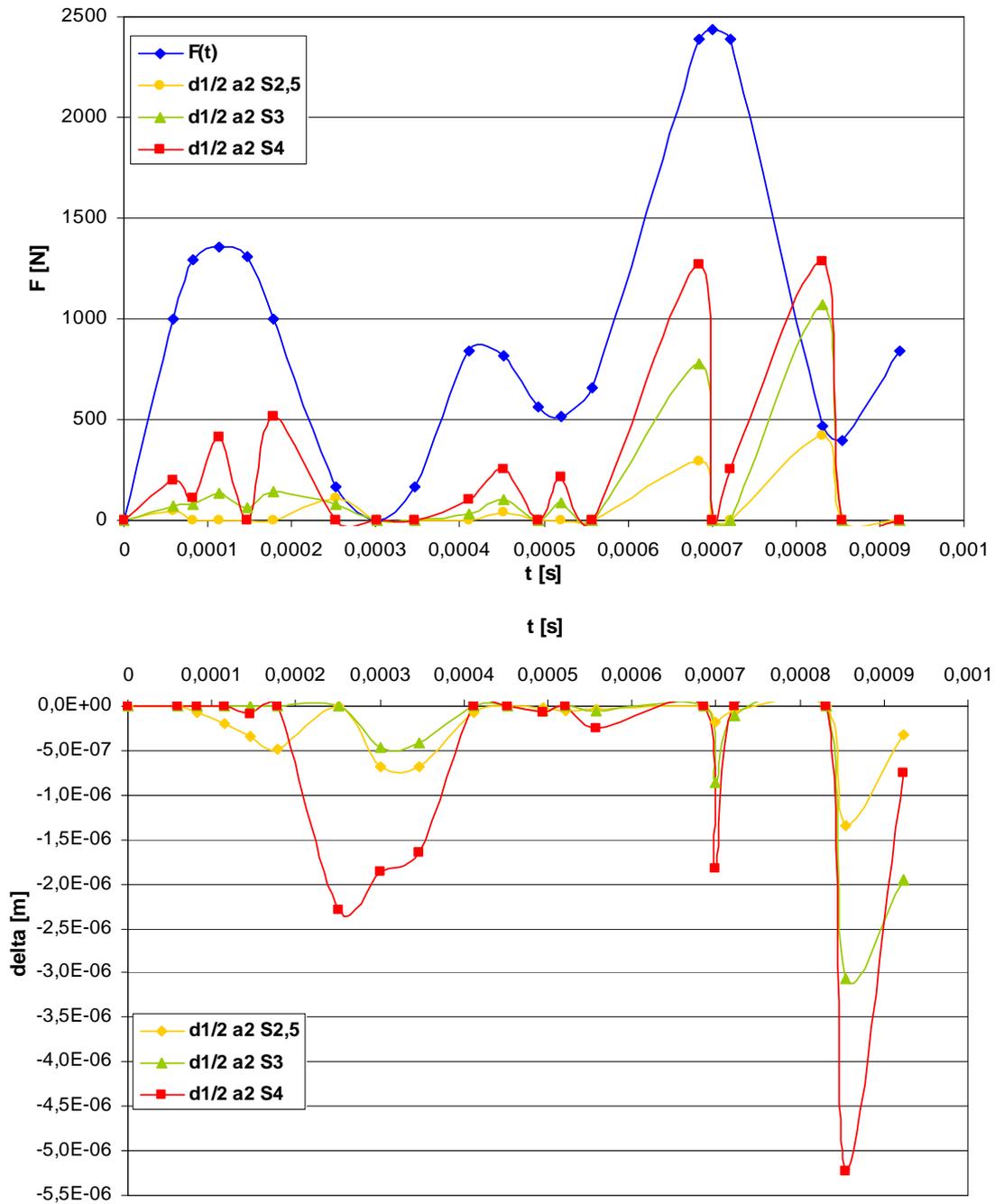
4.2.3. Casos con la mitad de duración $d1/2$

4.2.3.1. Profundidad de Fisura: $a2$

En éstas probetas el ensayo más rápido produce, en el primer tramo de las curvas de reacciones, resultados cualitativamente muy diferentes. Mientras que el caso de $S4$ presenta los tres picos acostumbrados, crecientes en amplitud, con un cero intermedio entre los dos últimos y una posterior pérdida de contacto prolongada, la curva de $S3$ describe dos suaves vaivenes con valores pequeños sin rebotes intermedios, y $S2,5$ forma dos picos también de máximos pequeños con una pérdida de contacto prolongada en el medio. La tendencia de crecimiento de las reacciones es uniforme en todo el ensayo, y es de crecimiento de las reacciones con la distancia entre apoyos. Los desplazamientos intermedios de $S4$ y $S2,5$ son pequeños, como los que se producen tras los picos en las reacciones, de los cuales solo $S4$, que despega antes que el resto, alcanza la micra.

El contacto se produce de nuevo a la vez en los casos $S3$ y $S4$, y es $S2,5$ el que se retrasa. Todas las curvas de las reacciones forman dos picos, de valores muy pequeños en los dos primeros casos, con un rebote intermedio cuyos desplazamientos son ínfimos, y otro antes de las pronunciadas pendientes finales, con valores algo mayores.

Los tres ensayos presentan en el último tramo dos picos en las curvas de las reacciones con un rebote intermedio, y terminan con una pérdida de contacto prolongada. Como anteriormente, la diferencia entre los valores de las reacciones de $S2,5$ y $S4$ es muy grande, y en éste tramo la curva de $S3$ se acerca más a la de éste último. En los dos rebotes los desplazamientos siguen la tendencia de aumento del desplazamiento con la profundidad de fisura, con valores por debajo de la micra en $S2,5$ y $S3$ y de dos en $S4$ en el primero, y desde una hasta cinco en el segundo, donde se dan los mayores desplazamientos del ensayo.

Figura 4.18: Reacciones para los casos $d1/2 a2$.Figura 4.19: Desplazamientos para los casos $d1/2 a2$.

4.2.3.2. Profundidad de Fisura a_3

Se aprecia a primera vista en estos ensayos que, en el primer tramo, la curva de reacciones de la probeta $S_{2,5}$, que evoluciona en oscilaciones con amplitud creciente con un rebote intermedio, se atrasa con respecto a las de S_3 y S_4 , quedando desfasada. Éstas dos sufren dos rebotes y en ellas se suaviza la forma del tercer pico. Los desplazamientos de los rebotes son muy pequeños, si bien destaca el de S_4 sobre el resto. Más adelante todas las probetas pierden el contacto a la par durante un tiempo prolongado, produciéndose desplazamientos que rondan las dos micras en $S_{2,5}$ y S_4 .

Al retomar contacto con los apoyos, $S_{2,5}$ se retrasa de nuevo y forma un pico, como S_4 , antes de rebotar de nuevo, a diferencia de S_3 , cuya curva oscila por segunda vez tras pasar por cero. Aquí los valores de las reacciones son similares a los anteriores y los desplazamientos menores que la micra.

En el tramo siguiente las curvas de reacciones de S_3 y S_4 son casi idénticas, formando dos picos crecientes en amplitud y de elevados valores con un rebote intermedio y otro prolongado al final. Sin embargo la de $S_{2,5}$ forma dos picos, el segundo casi plano, de valores mucho menores y sin experimentar el rebote intermedio, sino tras ellos, para crecer de nuevo de forma significativa. Los desplazamientos son los mayores del ensayo en los casos S_3 y S_4 con bastante diferencia. Tanto éstos como las reacciones crecen con la profundidad de fisura en esta zona.

Figura 4.20: Reacciones para los casos $d1/2 a3$.

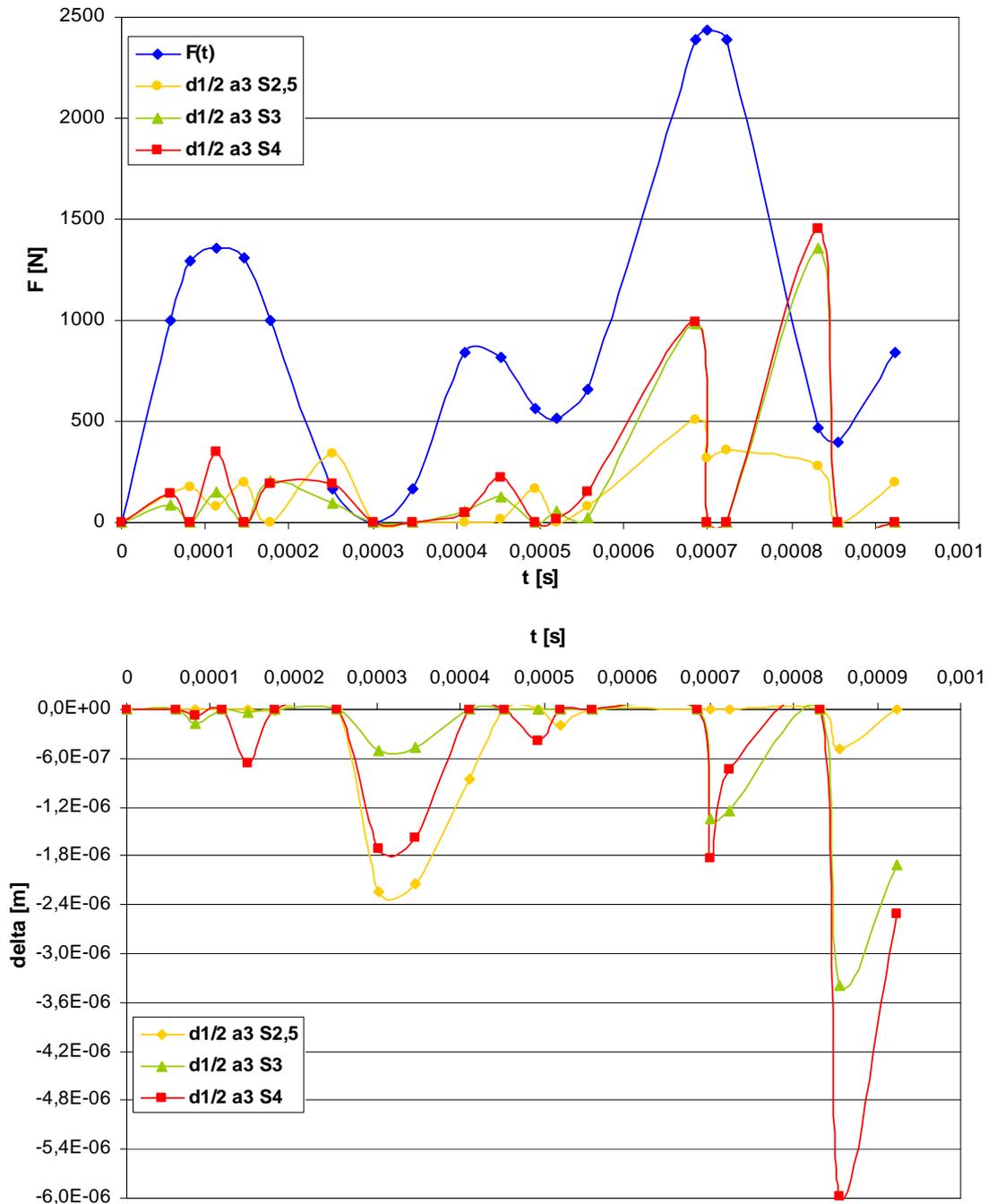


Figura 4.21: Desplazamientos para los casos $d1/2 a3$.

4.2.3.3. Profundidad de Fisura a_4

En la última gráfica de reacciones salta a la vista la evolución casi idéntica de los casos S_3 y S_4 , cuyas curvas forman tres picos, los dos primeros más bruscos que el tercero, más suave y duradero, de valores bajos y con rebotes entre ellos. Mientras tanto la curva de $S_{2,5}$ oscila alrededor de un valor más alto, con máximos mayores, sin pasar por cero. Seguidamente pierden el contacto con los apoyos a la vez, y vuelven a retomarlo pasado un tiempo breve. Los desplazamientos intermedios de S_3 y S_4 son los menores de estos ensayos, y los siguientes aumentan bastante sus valores, pero solo supera la micra S_4 . La evolución de las curvas muestra la tendencia de aumento del desplazamiento con el crecimiento de la profundidad de fisura a lo largo de todo el ensayo.

Al retomar al contacto de nuevo las reacciones de S_3 y S_4 crecen lentamente primero, más rápidamente luego, y alcanzan un máximo de valor similar a los anteriores, tras lo cual caen a cero y permanecen allí durante un pequeño intervalo de tiempo. Mientras tanto la reacción de $S_{2,5}$ crece más rápido hasta alcanzar a los otros casos, oscila con poca amplitud formando dos picos, y cae a cero en el punto desde donde las tres curvas retoman el ascenso. Aquí los desplazamientos, excepto el de $S_{2,5}$, muy pequeño, son como los iniciales.

En los casos S_3 y S_4 encontramos de nuevo dos picos abruptos y de valores altos, similares a los de los mismos casos de la profundidad de fisura anterior, también con cero intermedio y otro más duradero al final. Las reacciones de $S_{2,5}$ evolucionan de forma diferente, alcanzando sus máximos, más cercanos entre sí, valores menores, sin pasar por cero aunque quedando cerca hacia el final del ensayo. Los desplazamientos de las probetas S_3 y S_4 en el rebote producido entre los picos de las reacciones se desarrollan más abruptamente que los anteriores, pero su magnitud es similar. Al final del ensayo las probetas experimentan el mayor movimiento.

Figura 4.22: Reacciones para los casos $d1/2 a4$.

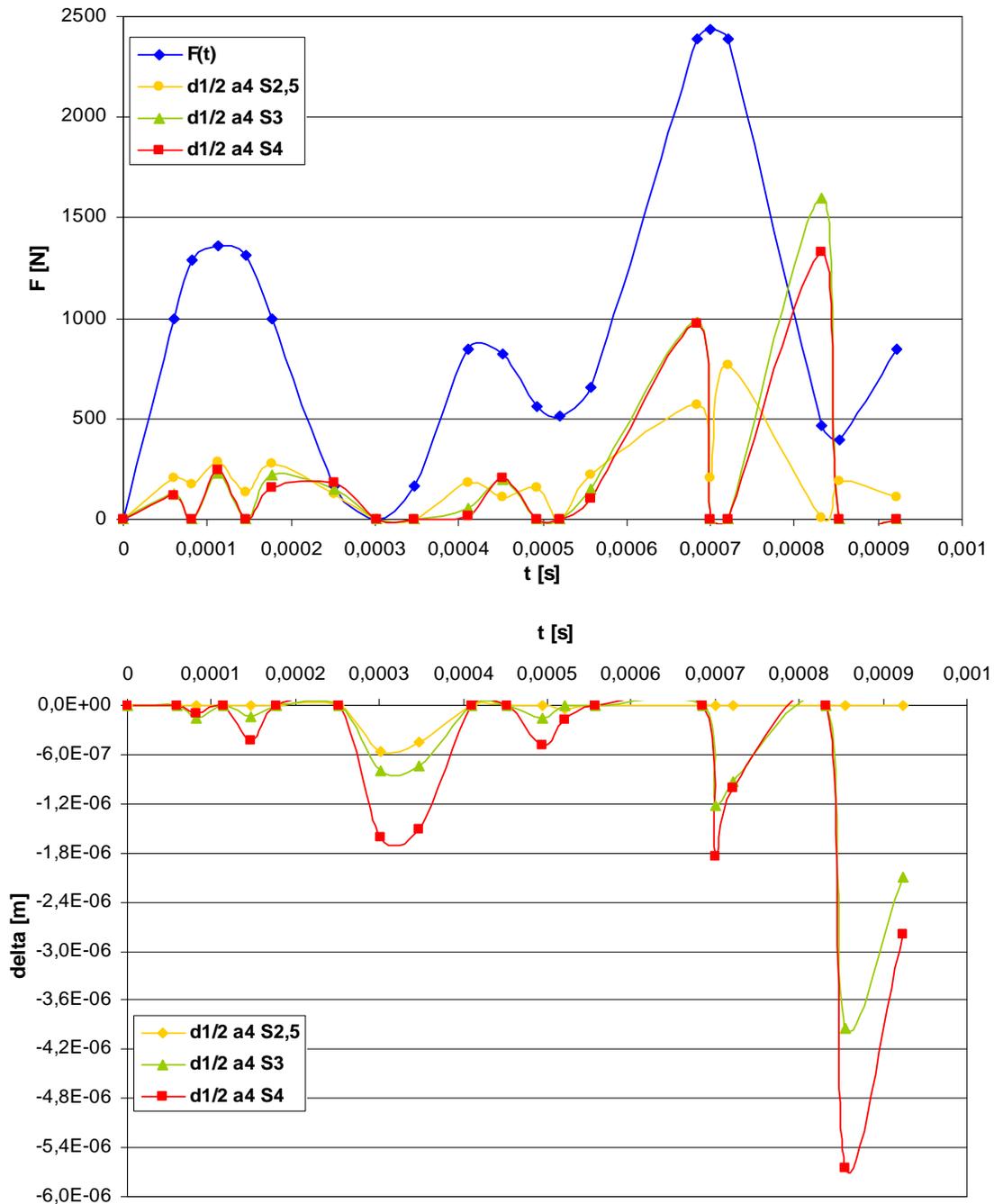


Figura 4.23: Desplazamientos para los casos $d1/2 a4$.

Capítulo 5

Conclusiones y Futuros desarrollos

5.1. Resumen

Con el presente estudio se ha pretendido analizar los ensayos de flexión dinámica en tres puntos sobre probetas fisuradas, considerando las posibles pérdidas de contacto entre probeta y apoyos. Para ello se han utilizado modelos simplificados basados en la dinámica de vigas de Timoshenko y se ha aplicado el Método de Superposición Modal que requiere el cálculo de las frecuencias y modos propios de la viga. Con este modelo se han calculado los desplazamientos de los puntos inicialmente apoyados, así como las reacciones en los apoyos cuando existen.

En la primera parte del documento se han descrito los dispositivos desarrollados por diferentes investigadores obtener las propiedades de fractura en condiciones dinámicas de los materiales, así como los métodos utilizados para calcular el factor de intensificación de tensiones en ensayos de flexión dinámica en uno y tres puntos.

Seguidamente se han expuesto los modelos matemáticos utilizados aquí, basados en la Teoría de Vigas de Timoshenko y en el Método de Superposición Modal respectivamente, con el fin de simular un ensayo de flexión dinámica en tres puntos sobre una viga fisurada, tras lo cual se han resuelto las ecuaciones necesarias y descrito los algoritmos de cálculo que permiten obtener los resultados numéricos perseguidos en el estudio: las frecuencias y modos propios de vibración de la viga y las reacciones y desplazamientos de la misma en los puntos de apoyo. Todo ello a partir de varios datos de entrada, como son la geometría del ensayo, las propiedades del material de la probeta y el desarrollo con respecto al tiempo de la fuerza incidente. Con dichos planteamientos se han implementado dos programas en el lenguaje MATLAB, cuyo código se comenta a en el siguiente punto.

En el apartado de casos analizados, tomando los datos del ensayo experimental, se ha establecido el número de modos propios que se tendrán en cuenta en los cálculos y a partir del cual los cambios en los resultados pueden ser despreciados. Después se han contrastado gráficamente los resultados del ensayo experimental y los del modelo, y se han definido las variaciones de los parámetros más influyentes del ensayo con el objetivo de comparar gráficamente los resultados que se obtienen aplicando el modelo analítico en cada uno de los casos.

5.2. Conclusiones

De la observación de los resultados generados por el modelo analítico implementado se desprenden los siguientes comentarios:

- Los cálculos que el modelo obtiene de las reacciones en los apoyos convergen adecuadamente cuando aumenta el número de modos propios computados, lo que indica que, salvando los primeros, los modos propios mayores tienen menos influencia en el comportamiento dinámico de la probeta.
- En general, cuando se comparan las magnitudes de las reacciones calculadas con las de la fuerza incidente, sus valores son aceptables, teniendo en cuenta que se calcula la reacción de uno de los apoyos. Los desplazamientos son pequeños, alcanzando los mayores la centésima de milímetro.

- En las agrupaciones de curvas en tríos, donde únicamente varía la distancia entre apoyos, S , la tendencia que más se repite, tanto para las reacciones como para los desplazamientos, es el crecimiento de ambos con el crecimiento de la distancia entre apoyos.
- Observando los resultados globalmente se observa también que los valores de reacciones y desplazamientos disminuyen considerablemente cuando lo hace la duración del ensayo.

5.3. Estudios futuros

Como estudios futuros se podría ahondar en los siguientes puntos:

- Mediante algunos cambios en la programación se pueden obtener los desplazamientos de la probeta en cualquier punto a lo largo de la misma, pudiendo así calcular los esfuerzos que se producen en todas las secciones de la viga, en particular en la que contiene la fisura.
- Para comprobar la precisión de los resultados del modelo expuesto se pueden llevar a cabo la comparación de sus resultados con datos obtenidos mediante la instrumentalización y toma de medidas en ensayos experimentales.
- Más barato y sencillo que la proposición anterior sería analizar el problema mediante modelos 2D y 3D utilizando el Método de Elementos Finitos.

Bibliografía

-
- [1] Singiresu S. Rao, “*Mechanical Vibrations*”, AdisonWesley, Third Edition, 1995.
- [2] José Fernández-Sáez, Lourdes Rubio, Susana de Luna, José Luis Pérez-Castellanos, Carlos Navarro, “*Obtención de la tenacidad de fractura dinámica de iniciación de materiales elásticos y lineales*” Revista de Metalurgia de Madrid 37 (2001) 34-48.
- [3] Prabhakar R Marur, “*Dynamic analysis of one-point bend impact test*”, Engineering fracture Mechanics 67 (2000) 41-53, Elsevier Science.
- [4] I.V.Rokach, “*On the numerical evaluation of the anvil force accurate dynamic stress intensity factor determination*”, Engineering Fracture Mechanics 70 (2003) 2059-2074, Elsevier Science
- [5] J. A. Loya, J. Fernández-Sáez, C. Navarro, “*Análisis simplificado de los ensayos de flexión en un punto*”, Anales de Mecánica de Fractura vol.20 (2003).
- [6] L. Rubio, “*Determinación de parámetros de fractura dinámica a alta velocidad de deformación*”, Tesis Doctoral, Universidad Carlos III de Madrid, (1999)
- [7] Shoihiro Nakamura, “*Análisis numérico y visualización gráfica con Matlab*”, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1997
- [8] Cleve B. Moler, “*Numerical computing with matlab*”, SIAM, 2004.
- [9] Cesar Pérez, “*Matlab y sus aplicaciones en las ciencias e ingeniería*”, Prince Hall, 2002.
- [10] Charles F. van Loan, *Introduction to scientific computing: a matrix-vector approach using MATLAB*, Prince Hall, 1997

Apéndice

Código fuente

Cálculo de las frecuencias propias de vibración

```
1 function [o,m]=frecuenciaspropias(W,L,p,B,rho,nu,k,E,)  
   % Busca los ceros de la función y almacena los datos.  
   % Cambios para que tenga en cuenta todos los ceros encontrados y calcule  
   % las masas equivalentes de cada uno  
  
2 clear all  
3 global W L p B rho nu k E nceros q r phi  
4 format short e  
  
5 disp 'Introduzca los valores de entrada y guárdelos en el archivo "probeta.mat."'  
6 disp 'W L p B rho nu k E'  
7 load probeta  
  
8 nceros=input('Introduzca el número de frecuencias propias que desea obtener.')  
9 A=B*W;  
10 lg=B*W^3/12;  
11 r=sqrt(lg/(A*L^2));  
12 q=sqrt(2*(1+nu)/k*r^2);  
13 lambda=p/W;  
  
14 if L/W==4  
  
15     phi=65*lambda^2-87.3*lambda^3+205*lambda^4;  
  
16 elseif L/W==8  
  
17     phi=67*lambda^2-82.3*lambda^3+203.25*lambda^4;  
  
18 else  
  
19     phi4=65*lambda^2-87.3*lambda^3+205*lambda^4;  
20     phi8=67*lambda^2-82.3*lambda^3+203.25*lambda^4;  
  
21     phi=(phi8-phi4)/(8-4)*(L/W-4)+phi4;           %Interpolación lineal  
  
22 end  
  
23 f1=0           %Inicialización de variables  
24 ni=0;  
25 nj=0.001;  
26 l=1;           %Inicialización del contador "l"  
27 incn=0.001;   %incremento de "n"  
  
28 while l <= nceros           %Se repite hasta calcular el número de ceros estipulado  
  
29     a=sqrt(nj^2/2*((q^2+r^2)-sqrt((q^2-r^2)^2+4/nj^2)));  
30     b=sqrt(nj^2/2*((q^2+r^2)+sqrt((q^2-r^2)^2+4/nj^2)));  
  
31     C3=a^2-nj^2*q^2;  
32     C4=b^2-nj^2*q^2;  
  
33     T=[a*C3*sin(a)-b*C4*sin(b),-C3*C4*(cos(a)-cos(b))];
```

```

34 cos(a)-cos(b),C4/a*sin(a)-C3/b*sin(b)];
35 v=[C4*b*sin(b/2)-C3*a*sin(a/2);
36 cos(b/2)-cos(a/2)];

37 d= inv(T)*v;

38 f2= d(1)*(a*C3*sin(a/2)-b*C4*sin(b/2))-d(2)*C3*C4*(cos(a/2)-cos(b/2))-(6*(L/W)*(b^2-a^2)/phi);

39 if f2*f1<0           %Comprueba la existencia de un cero en el intervalo. En caso afirmativo la
función              %fval busca los puntos de n y f correspondientes. Después se almacenan los
                    datos
                    %en interés en vectores.

40 [n,fval]=fzero(@fun,[ni,nj],optimset('display','iter','tolfun',1e-12,'tolx',1e-12),L,W,r,q,phi);
41 F(l)=fval;
42 N(l)=n;
43 a(l)=a;
44 b(l)=b;
45 C3(l)=C3;
46 C4(l)=C4;
47 C1(l)=C4/a*sin(a/2)-C3/b*sin(b/2);
48 C2(l)=cos(b/2)-cos(a/2);
49 o(l)=sqrt(E*Ig*n^2/(rho*A*L^4));

50 l=l+1;
51 f1=f2;
52 ni=nj;

53 else

54 f1=f2;
55 ni=nj;

56 end

57 nj=nj+incn;

58 end

59 masa= rho*A*L;
60 xR= (L-S)/2;           %posición del primer apoyo
61 chiR=0;               %Adimensionalización de la posición del apoyo y su reacción
"R"
62 chiF= 1/2;           %Adimensionalización de la posición de la fuerza "F"
63 NR=nceros;

64 for i= 1:NR           %Cálculo de "YR" e "YF" según "chiR" y "chiF" respectivamente para cada
                        %modo propio de vibración.
                        %"i" recorre tanto el vector donde se almacenan los modos propios
                        %como otras variables y funciones de las cuales depende.

65 YF(i)= C1(i)*(-a(i)*sin(a(i)*chiF)+b(i)*sin(b(i)*chiF))+C2(i)*(C4(i)*cos(a(i)*chiF)-C3(i)*cos(b(i)*chiF));
66 YR(i)= C1(i)*(-a(i)*sin(a(i)*chiR)+b(i)*sin(b(i)*chiR))+C2(i)*(C4(i)*cos(a(i)*chiR)-C3(i)*cos(b(i)*chiR));

67 end

68 incchi= 0.001;       %Intervalo de la variable de integración "chi" para el cálculo de la masa
equivalente m.
69 m=[];                %Declaración de la variable de masa equivalente "m".
70 m=zeros([1,NR]);    %Vector "m" con "NR" valores, uno para cada modo propio.

```

```

71  for i= 1:NR          %For y While para calcular la "m" de cada uno de los modos propios de
    vibración.
                                %El contador "i", uno por cada modo a tener en cuenta, recorre las variables de
                                %entrada y salida necesarias.
                                %Se calculan "Y1(i)" y "phi1(i)" en "chi1", y "Y2(i)" y "phi2(i)" en
                                "chi2=chi1+incchi".
                                %Después se calcula m(i) y se le suma a su valor anterior, consiguiendo el
                                %sumatorio de cada %intervalo y la integral.

72  chi1= 0;            %Puesta a cero con el cálculo de cada nuevo modo propio.
73  chi2= incchi;      %Primer valor de "chi2=chi1+incchi".

74  while chi2 <= 1/2    %Barra "chi" desde 0 hasta 1/2 incrementando "chi1" y "chi2".

75  Y1(i)= C1(i)*(-a(i)*sin(a(i)*chi1)+b(i)*sin(b(i)*chi1))+C2(i)*(C4(i)*cos(a(i)*chi1)-C3(i)*cos(b(i)*chi1));
76  Y2(i)= C1(i)*(-a(i)*sin(a(i)*chi2)+b(i)*sin(b(i)*chi2))+C2(i)*(C4(i)*cos(a(i)*chi2)-C3(i)*cos(b(i)*chi2));

77  phi1(i)= C1(i)/L*(-C3(i)*cos(a(i)*chi1)+C4(i)*cos(b(i)*chi1))-C2(i)*C3(i)*C4(i)/L*(sin(chi1*a(i))/a(i)-
78  -sin(chi1*b(i))/b(i));
79  phi2(i)= C1(i)/L*(-C3(i)*cos(a(i)*chi2)+C4(i)*cos(b(i)*chi2))-C2(i)*C3(i)*C4(i)/L*(sin(chi2*a(i))/a(i)-
80  -sin(chi2*b(i))/b(i));

81  m(i)= m(i)+(2*rho*A*L)*incchi/2*(Y1(i)^2+Y2(i)^2+lg/A*(phi1(i)^2+phi2(i)^2));

82  chi1= chi2;        %Valores del siguiente intervalo en el cálculo de la integral.
83  chi2= chi2+incchi;

84  end %while
85  end %for

86  save frecuenciaspropias A lg r q F N o a b C3 C4 C1 C2 masa m YF YR

87  'fin'

88  function f=fun(n,L,W,r,q,phi)          % Define la función "fun".

89  a=sqrt(n^2/2*((q^2+r^2)-sqrt((q^2-r^2)^2+4/n^2)));
90  b=sqrt(n^2/2*((q^2+r^2)+sqrt((q^2-r^2)^2+4/n^2)));

91  C3=a^2-n^2*q^2;
92  C4=b^2-n^2*q^2;

93  T=[a*C3*sin(a)-b*C4*sin(b),-C3*C4*(cos(a)-cos(b));
94  cos(a)-cos(b),C4/a*sin(a)-C3/b*sin(b)];
95  v=[C4*b*sin(b/2)-C3*a*sin(a/2);
96  cos(b/2)-cos(a/2)];

97  d=inv(T)*v;

98  f=d(1)*(a*C3*sin(a/2)-b*C4*sin(b/2))-d(2)*C3*C4*(cos(a/2)-cos(b/2))-(6*(L/W)*(b^2-a^2)/phi);

```

Cálculo de las reacciones y los desplazamientos

```

1  function []=reaccionesydesplazamientos()

2  tic
3  clear all
4  load probeta           %Dimensiones y propiedades de la barra
5  load cerosymasa       %Frecuencias propias y demás resultados
6  load FT               %Vectores de Fuerza 'F' y sus Tiempos Experimentales "T".

7  NR= input('Introduzca el número de modos propios a computar')

8  masa= rho*A*L;
9  xR= (L-S)/2;         %Posición del primer apoyo
10 chiR= xR/L;          %Adimensionalización de la posición del apoyo y su reacción "R"
11 chiF= 1/2;           %Adimensionalización de la posición de la fuerza "F"

12 for i= 1:2:NR         %Cálculo de YR e YF según chiR y chiF respectivamente para cada
modo                                     %propio de vibración.
                                     %"i" recorre tanto el vector donde se almacenan los modos propios
                                     como                                     %otras variables y funciones de las cuales depende.

13  YF(i)= C1(i)*[-a(i)*sin(a(i)*chiF)+b(i)*sin(b(i)*chiF)]+C2(i)*[C4(i)*cos(a(i)*chiF)-
C3(i)*cos(b(i)*chiF)];
14  YR(i)= C1(i)*[-a(i)*sin(a(i)*chiR)+b(i)*sin(b(i)*chiR)]+C2(i)*[C4(i)*cos(a(i)*chiR)-
C3(i)*cos(b(i)*chiR)];

15  end

16  incchi= 0.0001;     %Intervalo de la variable de integración chi para el cálculo de la masa
                                     %equivalente m
17  m=[];               %Declaración de la variable de masa equivalente: m
18  m=zeros([1,NR]);   %Vector m con NR valores, uno para cada modo propio.

19  for i= 1:2:NR       %For y While para calcular la m de cada uno de los modos propios
                                     %de vibración.
                                     %El contador i, uno por cada modo a tener en cuenta, recorre las
                                     %variables %de entrada y salida necesarias.
                                     %Se calculan Y1(i) y phi1(i) en chi1, y Y2(i) y phi2(i) en
ch2=chi1+incchi.                                     %Después se calcula m(i) y se le suma a su valor anterior,
                                     consiguiendo el %sumatorio de cada intervalo y por tanto la integral.

20  chi1= 0;           %Puesta a cero con el cálculo de cada nuevo modo propio
21  chi2= incchi;      %Primer valor de chi2=chi1+incchi.

22  while chi2 <=1/2   %Barre chi desde 0 hasta 1/2 i crementando chi1 y chi2

23  Y1(i)= C1(i)*[-a(i)*sin(a(i)*chi1)+b(i)*sin(b(i)*chi1)]+C2(i)*(C4(i)*cos(a(i)*chi1)-
C3(i)*cos(b(i)*chi1));
24  Y2(i)= C1(i)*[-a(i)*sin(a(i)*chi2)+b(i)*sin(b(i)*chi2)]+C2(i)*(C4(i)*cos(a(i)*chi2)-
C3(i)*cos(b(i)*chi2));

25  phi1(i)= C1(i)/L*(-C3(i)*cos(a(i)*chi1)+C4(i)*cos(b(i)*chi1))-C2(i)*C3(i)*C4(i)/L*(sin(chi1*a(i))/a(i)-
sin(chi1*b(i))/b(i));
26  phi2(i)= C1(i)/L*(-C3(i)*cos(a(i)*chi2)+C4(i)*cos(b(i)*chi2))-C2(i)*C3(i)*C4(i)/L*(sin(chi2*a(i))/a(i)-
sin(chi2*b(i))/b(i));

```

```

m(i)= m(i)+(2*rho*A*L)*incchi/2*(Y1(i)^2+Y2(i)^2+lg/A*(phi1(i)^2+phi2(i)^2));

27  chi1= chi2           %Valores del siguiente intervalo en el cálculo de la integral.
28  chi2= chi2+incchi;

29  end %while

30  end %for

31  delta(1)=0;
32  R(1)=0;

33  for j=2:length(F)

34  G=0;
35  H=0;
36  incF=F(j)-F(j-1);
37  incT=T(j)-T(j-1);

38  for i=1:2:NR

39  G=G+(YF(i)*YR(i)/(YF(i)^2*m(i)*o(i)^3))*(F(j)*o(i)-F(j-1)*o(i)*cos(o(i)*incT)-
incF/incT*sin(o(i)*incT));
40  H=H+YR(i)^2/(YF(i)^2*m(i)*o(i)^3)*(sin(o(i)*incT)/incT-o(i)*cos(o(i)*incT));

41  end %for

42  delta(j)=delta(j-1)+((2*F(j-1)+F(j))*incT^2)/(6*masa)+G-2*R(j-1)*(incT^2/(3*masa)+H);

43  if delta(j)<0

44  R(j)=0;

45  elseif delta(j)>=0

46  D=delta(j);
47  delta(j)=0;
48  C=0;

49  for i=1:2:NR

50  C=C+YR(i)^2/(YF(i)^2*m(i)*o(i)^3)*(o(i)-sin(o(i)*incT)/incT);

51  end %for

52  R(j)=D/(incT^2/(3*masa)+2*C);

53  end %if

54  end %for
55  delta=delta';
56  R=R';
57  m=m';
58  matrizresultado=[T F R delta];

59  save solucionanalitica delta F T R matrizresultado m

60  'FIN'

```