



**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**  
**ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR**  
*DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA*

*INGENIERÍA INDUSTRIAL*

**CALCULO ANALÍTICO Y VALIDACIÓN  
EXPERIMENTAL DE LAS VELOCIDADES CRÍTICAS  
Y RESPUESTA AL DESEQUILIBRIO EN EL ROTOR  
KIT MFS2004**

Marzo 2010

**AUTOR:**

Altamira Garzón Ortiz de Luna

**TUTORES PROYECTO:** Cristina Castejón Sisamón  
Alberto J. Ordoñez Rangel

*Agradecimientos,*

*Quisiera agradecer a mis padres la oportunidad que me han dado para realizar los estudios que ahora finalizo y de los cuales guardo un buen recuerdo. Sin su apoyo jamás lo habría logrado. Gracias a mi hermana que siempre ha estado a mi lado, ayudándome y animándome en todo momento.*

*También quisiera darles las gracias a mis amigos, a todos los que siempre han creído en mí, que me han ayudado a superar obstáculos. Gracias por acompañarme durante estos años, espero que me acompañéis muchos más.*

*Mi más sincero agradecimiento a la Universidad Carlos III de Madrid, y en especial al grupo Maqlab, que sin él no habría conseguido realizar este proyecto. No puedo dejar de agradecerle a Gustavo Loaiza su paciencia por enseñarme y estar disponible para todas mis dudas.*

*Y por último, gracias a las personas que han hecho posible la realización de este proyecto, mis tutores, Alberto Ordoñez y Cristina Castejón, cuya ayuda ha sido indispensable. Gracias por vuestra disponibilidad, vuestra paciencia, vuestra entrega en pro de este proyecto y por todo lo que me habéis enseñado.*

*Muchas gracias a todos.*

**ÍNDICE**

|   |    |
|---|----|
| 1. PRESENTACIÓN .....                               | 1  |
| 1.1 Introducción .....                              | 2  |
| 1.2 Antecedentes.....                               | 2  |
| 1.3 Objetivos.....                                  | 6  |
| 1.4 Organización del documento .....                | 6  |
| 2. MÉTODO ANALÍTICO.....                            | 8  |
| 2.1 Planteamiento del problema .....                | 9  |
| 2.2 El rotor Jeffcott.....                          | 9  |
| 2.3 Velocidad crítica .....                         | 10 |
| 2.4 Modelación de la grieta.....                    | 12 |
| 2.5 Modelo matemático.....                          | 18 |
| 2.6 Resultados.....                                 | 22 |
| 3. MODELADO EN ELEMENTOS FINITOS .....              | 25 |
| 3.1 Introducción .....                              | 26 |
| 3.2 Método de Elementos Finitos.....                | 26 |
| 3.2.1 Origen del Método de Elementos Finitos .....  | 28 |
| 3.2.2 Pasos en el Método de Elementos Finitos ..... | 30 |
| 3.3 Modelado del rotor.....                         | 30 |
| 3.3.1 Análisis estático .....                       | 31 |
| 3.3.2 Análisis dinámico .....                       | 47 |
| 4. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL .....                    | 58 |
| 4.1 Introducción .....                              | 59 |
| 4.2 Procedimiento experimental.....                 | 59 |
| 4.2.1 Descripción del equipo.....                   | 59 |
| 4.2.2 Metodología experimental.....                 | 63 |
| 4.3 Herramientas para analizar señales.....         | 64 |
| 4.3.1 Espectrograma .....                           | 64 |
| 4.3.2 Diagrama en Cascada .....                     | 65 |
| 4.4 Procesamiento de señales.....                   | 65 |

---

|   |    |
|---|----|
| 5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS..... | 70 |
| 5.1 Conclusiones .....                  | 71 |
| 5.2 Trabajos futuros.....               | 72 |
| 6. BIBLIOGRAFÍA .....                   | 73 |

## ÍNDICE DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 1. Turbina de vapor De Laval. ....   | 3  |
| Figura 2. Modelo rotor Jeffcott.....  | 10 |
| Figura 3. Efectos de la rigidez de los soportes del eje, para los modos propios del eje... ..                         | 11 |
| Figura 4. Dos primeros modos propios de un eje con dos discos. ....   | 11 |
| Figura 5. 'Respiro de una grieta'.....  | 13 |
| Figura 6. Función propuesta por Gash del mecanismo de respiro de la fisura.....                                       | 14 |
| Figura 7. Función de Mayes y Davies.....  | 15 |
| Figura 8. Sección transversal del eje fisurado mostrando los sistemas de coordenadas fijo y móvil. ....               | 16 |
| Figura 9. Plano transversal del eje mostrando los vectores unitarios de los sistemas fijo y móvil de coordenadas..... | 17 |
| Figura 10. Fuerzas que actúan en el rotor Jeffcott.....   | 19 |
| Figura 11. Rotor Jeffcott con disco de acero. ....  | 20 |
| Figura 12. Rampa de velocidad de giro del rotor. ....   | 22 |
| Figura 13. Desplazamientos y velocidades horizontales y verticales del rotor sin fisura. ..                           | 22 |
| Figura 14. Desplazamientos y velocidades del rotor fisurado al 12.5% en el centro. ....                               | 23 |
| Figura 15. Desplazamientos y velocidades del rotor fisurado al 50%. ....  | 23 |
| Figura 16. Mallado.....   | 27 |
| Figura 17. Discos. ....   | 31 |
| Figura 18. Discos, a la izquierda disco desequilibrado por una masa.....  | 31 |
| Figura 19. Eje, una parte.....  | 32 |
| Figura 20. Paso para calcular el análisis de frecuencia. ....   | 33 |
| Figura 21. Eje con las condiciones de encastre en los rodamientos.....  | 34 |
| Figura 22. Mallado poco denso del rotor. ....   | 34 |
| Figura 23. Modos propios del rotor.....   | 35 |
| Figura 24. Eje y disco aluminio.....  | 36 |
| Figura 25. Eje con dos discos de aluminio. ....   | 36 |
| Figura 26. Eje con tres discos de aluminio. ....  | 37 |
| Figura 27. Eje con disco de aluminio.....   | 38 |
| Figura 28. Eje con dos discos de aluminio.....  | 38 |
| Figura 29. Eje con disco de acero. ....   | 39 |
| Figura 30. Eje con disco de acero. ....   | 40 |
| Figura 31. Eje con fisura y disco de acero.....   | 40 |
| Figura 32. Eje con disco de acero. ....   | 41 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 33. Eje con dos discos de acero.....  | 42 |
| Figura 34. Eje con dos discos de acero centrados. ....   | 42 |
| Figura 35. Eje con disco de acero de 3.5 kg.....   | 43 |
| Figura 36. Eje con disco de acero de 5 kg.....   | 44 |
| Figura 37. Esquema del rotor con un disco. ....  | 44 |
| Figura 38. Esquema del rotor con dos disco.....  | 45 |
| Figura 39. Esquema del rotor con tres disco. ....  | 45 |
| Figura 40. Configuración 12 modificada y configuración 13.....   | 47 |
| Figura 41. A la izquierda caso con fisura al 50%, a la derecha caso sin fisura. ....   | 48 |
| Figura 42. Creación de restricciones. ....   | 48 |
| Figura 43. Paso dinámico.....  | 49 |
| Figura 44. Carga de la gravedad. ....  | 49 |
| Figura 45. Rampa de arranque del rotor.....  | 50 |
| Figura 46. Condición de desplazamiento en los rodamientos.....   | 50 |
| Figura 47. Condición de velocidad en el eje. ....  | 50 |
| Figura 48. Set seleccionado, .....   | 51 |
| Figura 49. Mallado del rotor.....  | 51 |
| Figura 50. Nodos seleccionados. ....   | 52 |
| Figura 51. Configuración 12. Desplazamiento en x en el nodo 13. A la izquierda caso sin<br>fisura, a la derecha caso con fisura.....         | 52 |
| Figura 52. Configuración 13. Desplazamiento en x en los nodo 33. A la izquierda caso sin<br>fisura, a la derecha caso con fisura.....        | 53 |
| Figura 53. Configuración 12, Desplazamiento en x en los nodos 14 y 31. A la izquierda<br>caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.....  | 53 |
| Figura 54. Configuración 13. Desplazamientos en x en los nodos 27 y 67. A la izquierda<br>caso sin fisura, a la derecha caso con fisura..... | 53 |
| Figura 55. Configuración 12. Desplazamiento en y en el nodo 13. A la izquierda caso sin<br>fisura, a la derecha caso con fisura.....         | 53 |
| Figura 56. Configuración 13. Desplazamiento en y en el nodo 33. A la izquierda caso sin<br>fisura, a la derecha caso con fisura.....         | 54 |
| Figura 57. Configuración 12. Desplazamientos en y en los nodos 14 y 31. A la izquierda<br>caso sin fisura, a la derecha caso con fisura..... | 54 |
| Figura 58. Configuración 13. Desplazamientos en y en los nodos 27 y 67. A la izquierda<br>caso sin fisura, a la derecha caso con fisura..... | 54 |
| Figura 59. Configuración 12. Velocidad en x en el nodo 13. A la izquierda caso sin fisura,<br>a la derecha caso con fisura. ....             | 54 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 60. Configuración 13. Velocidad en x en el nodo 33. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura. ....                  | 55 |
| Figura 61. Configuración 12. Velocidades en x en los nodos 14 y 31. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura. ....         | 55 |
| Figura 62. Configuración 13. Velocidades en x en los nodos 27 y 67. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura. ....         | 55 |
| Figura 63. Configuración 12. Velocidad en y en el nodo 13. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura. ....                  | 55 |
| Figura 64. Configuración 13. Velocidad en y en el nodo 33. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura. ....                  | 56 |
| Figura 65. Configuración 12. Velocidades en y en los nodos 14 y 31. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura. ....         | 56 |
| Figura 66. Configuración 13. Velocidades en y en los nodo 27 y 67. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura. ....          | 56 |
| Figura 67. Banco de ensayos MFS de Spectra Quest. ....   | 59 |
| Figura 68. Banco de ensayos MFS de Spectra Quest con pantalla protectora. ....   | 60 |
| Figura 69. Rodamientos. ....   | 60 |
| Figura 70. Ejes de aluminio, arriba sin fisura abajo con fisura. ....  | 60 |
| Figura 71. Eje de aluminio con disco de acero montado en el banco de ensayos. ....   | 61 |
| Figura 72. Tacómetro. ....   | 61 |
| Figura 73. Acelerómetro y amplificador. ....   | 61 |
| Figura 74. Tarjeta de adquisición de datos. ....   | 62 |
| Figura 75. Llaves hexagonales y cables de conexión. ....   | 62 |
| Figura 76. Rampa de arranque del rotor. ....   | 63 |
| Figura 77. Variador de frecuencias. ....   | 63 |
| Figura 78. Señales caso sin fisura. Arriba aceleraciones en 'y', y abajo diagramas en cascada, escala 1:32, de las aceleraciones. ....         | 66 |
| Figura 79. Señales caso con fisura al 12.5%. Arriba aceleraciones en 'y', y abajo los correspondientes diagramas en cascada, escala 1:32. .... | 66 |
| Figura 80. Vista de los diagramas en cascada de las señales sin eje fisurado. ....   | 67 |
| Figura 81. Vista de los diagramas en cascada de las señales con eje fisurado al 12.5%. ....  | 67 |
| Figura 82. Señales sin fisura. Arriba velocidad de giro del rotor, abajo espectrograma. ..   | 68 |
| Figura 83. Señales con fisura. Arriba velocidad de giro del rotor, abajo espectrograma. ..   | 68 |

## ÍNDICE DE TABLAS

|  |    |
|--|----|
| Tabla 1. Parámetros del rotor KIT MFS2004. ....  | 21 |
| Tabla 2. Valores de los desplazamientos horizontales máximos de los determinados casos. .... | 24 |
| Tabla 3. Características mecánicas de los materiales. ....                                   | 32 |
| Tabla 4. Dimensiones de los elementos del rotor. ....  | 32 |
| Tabla 5. Resultados de la configuración 1. ....  | 36 |
| Tabla 6. Modos propios de la configuración 2. ....   | 37 |
| Tabla 7. Resultados de la configuración 3. ....  | 37 |
| Tabla 8. Resultado de la configuración 4. ....   | 38 |
| Tabla 9. Modos propios de la configuración 5. ....   | 39 |
| Tabla 10. Resultados modos propios de la configuración 6. ....                               | 39 |
| Tabla 11. Resultados modos propios de la configuración 7. ....                               | 40 |
| Tabla 12. Resultados modos propios de la configuración 8. ....                               | 41 |
| Tabla 13. Resultados de la configuración 9. ....   | 41 |
| Tabla 14. Resultados de la configuración 10. ....  | 42 |
| Tabla 15. Resultados de la configuración 11. ....  | 43 |
| Tabla 16. Modos propios de la configuración 12. ....   | 43 |
| Tabla 17. Modos propios de la configuración 13. ....   | 44 |
| Tabla 18. Primeras frecuencias naturales de los sistemas con un disco. ....                  | 45 |
| Tabla 19. Primeras frecuencias naturales de los sistemas con dos discos. ....                | 45 |
| Tabla 20. Primeras frecuencias naturales de los sistemas con tres discos. ....               | 46 |



# Capítulo 1

---

# PRESENTACIÓN

## 1.1 INTRODUCCIÓN.

En la maquinaria industrial, los ejes rotativos son empleados en turbinas de gas y de vapor, turbogeneradores, motores de combustión interna, compresores etc. Debido a la creciente demanda para la energía y el transporte a alta velocidad, los rotores de estas máquinas se hacen muy flexibles, lo que conlleva que el estudio del movimiento vibratorio sea una parte esencial del diseño. Los ejes de transmisión de estas máquinas se someten a fuertes vibraciones de torsión y flexión y, en algunos casos, a condiciones inestables de operación.

Algunas máquinas rotativas tales como turbo-alternadores, sistemas de propulsión de buques, trenes de alta velocidad..., pueden desarrollar esfuerzos excesivos de torsión, debido a las bajas frecuencias de torsión natural de los sistemas que las componen. Por este motivo la determinación de las frecuencias naturales y las formas modales, son muy importantes desde un punto de vista de diseño.

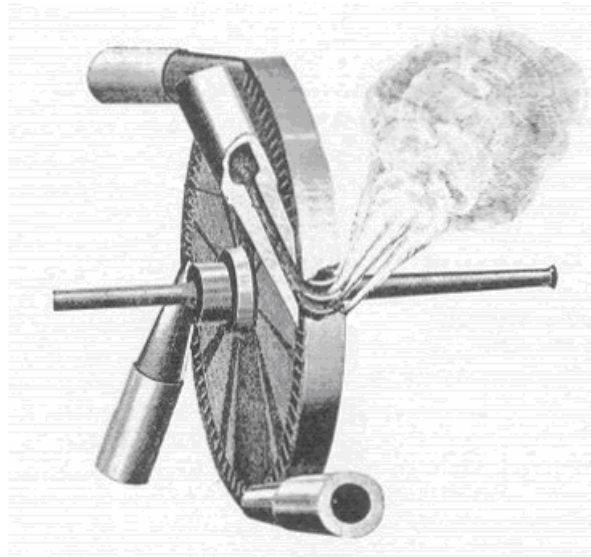
También se deberán tener en cuenta otros factores, como carga de pasajeros, desequilibrio en generadores eléctricos, etc.; que son consideraciones importantes del diseño, ya que éstos provocan un desgaste a fatiga.

Por la importancia que tiene en el diseño las frecuencias propias y la velocidad crítica de un eje rotativo, se analizará en este proyecto el comportamiento de un rotor Jeffcott. Para ello, se obtendrán las ecuaciones que describen el movimiento del eje rotativo; por medio de los elementos finitos se propondrán varios modelos de rotores estudiando sus frecuencias propias. Por último se validará experimentalmente un modelo simulado en elementos finitos.

## 1.2 ANTECEDENTES.

La investigación en el campo de la rotodinámica tiene unos 140 años de historia. Sus comienzos se inician con un artículo de Rankine acerca de los movimientos giratorios de un rotor en el año 1869 [26]. La investigación en este campo progresó significativamente a finales del siglo XIX, gracias a las contribuciones De Laval así como de otros científicos. De Laval inventó una turbina de vapor de una etapa (figura 1) y tuvo éxito en su operación, demostró experimentalmente que ésta podía funcionar por encima de la

frecuencia crítica. Sus conocimientos teóricos adquiridos aún tienen aplicaciones en esta área de la mecánica.



**Figura 1.** Turbina de vapor De Laval.

Stodola fue el primero que empleó un rotor rígido, para posteriormente usar un rotor flexible, y demostró que este último puede operar a una velocidad de rotación igual a siete veces la velocidad crítica [1].

Al principio, el tema principal para investigadores y diseñadores de máquinas rotativas fue predecir la velocidad crítica, porque lo que más interesaba era evitar la resonancia. En 1894, Dunkerley derivó una fórmula experimental que expresaba la velocidad crítica más baja para un sistema multirrotor, fue el primero en usar el término de velocidad crítica para la velocidad angular de resonancia [2]. Holtzer en 1921, propuso un método aproximado para calcular las frecuencias naturales y las formas de modos torsionales.

El primer registro de teoría fundamental de la rotodinámica se encuentra en un artículo escrito por Jeffcott en 1919. El modelo de Jeffcott consiste en un eje con un disco situado en el centro, se conoce con el nombre de rotor Jeffcott. Este será el modelo de estudio en el presente proyecto. Además este sistema rotor también se llama rotor de Laval, especialmente en Europa [3].

Los desarrollos que se realizaron a lo largo del siglo XX se describen en el trabajo de Stodola publicado en [1]. Este libro explica detalladamente todo lo relacionado con el campo de las turbinas de vapor. Además incluye la dinámica de rotores elásticos con

discos, la dinámica de rotores continuos considerando momentos giroscópicos, el equilibrado de rotores rígidos, y los métodos para determinar valores aproximados de velocidades críticas con sección transversal variable [1].

A partir de ese momento, otros efectos relacionados con la rotodinámica se estudiaron, como el análisis de la velocidad de rotación por encima de la velocidad crítica, las vibraciones autoexcitadas causantes de problemas serios. En 1924, Newkirk [5] y Kimball [4] fueron los primeros en reconocer que la fricción interna del material del eje podría causar un movimiento rotativo inestable. En 1925 Newkirk y Taylor [6] investigaron una vibración inestable llamada 'oil whip', debida a la capa de lubricante en los apoyos. Este fenómeno es un tipo de vibración autoexcitada que se presenta en sistemas rotores con apoyos hidrodinámicos.

Aproximadamente una década más tarde, se comenzó a estudiar los sistemas de rotores asimétricos. Primero, mediante sistemas con diferencia direccional en la rigidez del rotor. Esta diferencia conllevó a la aparición de términos con coeficientes variables en las ecuaciones de movimiento, por lo que estos sistemas están clasificados como sistemas excitados paraméricamente. La principal cualidad que poseen es la aparición de vibraciones inestables en algún rango de la velocidad de rotación. El artículo de Smith en 1933 es un trabajo pionero en este tema [7].

La presencia de fenómenos no estacionarios durante el paso a través de las velocidades críticas se han estudiado desde que Lewis presentó su investigación sobre el rotor Jeffcott en 1932 [8]. Varios estudios acerca de este tema se clasifican en dos grupos, el primero de ellos lo forman los fenómenos estacionarios que ocurren con aceleración constante y el segundo lo conforman aquellos que ocurren con un par motriz limitado. Como el análisis teórico de estos problemas transitorios es más complicado que el de las oscilaciones estacionarias, muchos investigadores emplearon la integración numérica para calcularlos.

Las vibraciones de rotores continuos (con masa uniformemente distribuida) se estudiaron. El modelo de rotor continuo más simple es el correspondiente a la viga de Euler y fue estudiado en el libro de Stodola en 1927 [1]. En la década de los 50 y 60, Bishop junto con otros investigadores publicaron una serie de artículos sobre la respuesta al desequilibrio de un rotor continuo. Posteriormente se dedujeron ecuaciones de movimiento más generales que consideraban los efectos de la inercia de rotación, la deformación cortante y los momentos giroscópicos.

El procedimiento más importante para amortiguar vibraciones perjudiciales consiste en eliminar el desequilibrio geométrico en el rotor. Para ello se desarrollaron técnicas de equilibrado, tanto para ejes rígidos como flexibles. Las teorías más representativas son: el método del equilibrio modal propuesto por Bishop y Gladwell en 1959 [9]; y el método de los coeficientes de influencia propuesto a principios de la década de los 60, desarrollado principalmente en los Estados Unidos con el progreso de las computadoras.

Mientras que los rotores se hacen más ligeros y las velocidades rotatorias más altas, la aparición de resonancias no lineales como resonancias subarmónicas llegan a ser un serio problema. Yamamoto en 1957 estudió varios tipos de resonancias no lineales después de que publicó resonancias subarmónicas debidos a cojinetes de bolas así como también discutió sistemas con no linealidades débiles que pueden ser expresadas por medio de series de potencias de baja orden. Además de resonancias subarmónicas, también investigó la combinación de resonancias y combinación de tonos [10]. En 1966, Ehrich mostró resonancias subarmónicas observadas en una turbina de gas de avión. Después, en 1988 y 1991, Ehrich publicó la aparición de varios tipos de resonancias subarmónicas hasta un alto orden y vibraciones caóticas en motores [11].

Las máquinas rotativas son muy comunes en la industria. Por ejemplo, son fundamentales en la industria del papel y textil, así como también en petroquímicas, por ello en el diseño de maquinaria rotativa es necesario conocer acertadamente las frecuencias naturales, modos y fuerzas de reacción a desequilibrios en los sistemas. Las técnicas representativas usadas para este propósito son el método de la matriz de transferencia y el método de elementos finitos. En 1945, Prohl [29] usó el método de matriz de transferencia en el análisis de un sistema rotor por sistemas rotor-cojinetes y se ha desarrollado rápidamente desde la década de 1960 por la contribución de varios investigadores como Lund. El método de elementos finitos fue primeramente desarrollado en dinámica de estructuras y después usado en varios campos tecnológicos. La primera aplicación del método de elemento finito a un sistema rotor fue hecho por Ruhl y Broker en 1972 [30]. En seguida en 1976, Nelson y McVaugh [31] lo generalizaron considerando inercias rotatorias, momentos giroscópicos y fuerzas axiales.

En la década de los 60, se encontraron grietas en los rotores de algunas turbinas de vapor. Desde entonces comenzó la investigación en vibraciones de ejes agrietados para prevenir accidentes similares y desarrollar un sistema de diagnóstico de vibraciones para la detección de grietas.

En la década de los 70, Gasch [27] en 1976 y Henry y Okan-Avae [32] en 1976 investigaron las vibraciones considerando no linealidades en la rigidez, debidas al mecanismo de apertura y cierre de la grieta. Mostraron que una región inestable aparece o desaparece en la mayor velocidad crítica, dependiendo de la dirección del desequilibrio.

### **1.3 OBJETIVOS.**

El principal objetivo de este proyecto es el de analizar analítica y experimentalmente las velocidades críticas en el rotor KIT MFS2004. Para ello se establecerá la configuración más adecuada para obtenerlas con los medios que se disponen. Se estudiarán dos casos particulares: uno en el que el eje presenta una fisura en la zona central y otro en el que no la presenta. Se verá como este hecho afecta a las frecuencias propias.

Para llevar a cabo el objetivo, primero se realizará un estudio analítico de las ecuaciones de movimiento del rotor Jeffcott, las cuales se resolverán mediante la aplicación informática Matlab®; esta parte dará la base teórica necesaria para comprender y analizar los resultados que se obtengan. Posteriormente se modelará el sistema, con ciertas variantes, en elementos finitos mediante el programa Abaqus®. Por último, se validará experimentalmente los resultados obtenidos, para ello se procesarán las señales obtenidas mediante el programa Matlab®.

### **1.4 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO.**

La memoria de este documento se divide en cinco capítulos:

Capítulo 1. La presente introducción.

Capítulo 2. En este capítulo se expondrá la base teórica del proyecto. Se analizarán las ecuaciones de movimiento de un rotor Jeffcott, para los casos de un eje sin fisura y uno con fisura, explicando como se modela la grieta. Se resolverán las ecuaciones para un caso en concreto (el mismo que se validará experimentalmente).

Capítulo 3. En este capítulo se llevará a cabo el estudio de elementos finitos del rotor. Se modelarán distintas configuraciones del rotor, de las cuales se obtendrán los modos propios y se seleccionarán dos de ellas para analizar dinámicamente. En concreto, los modelos elegidos serán aquellos que posteriormente sean posibles experimentar en el banco de ensayos.

Capítulo 4. En este capítulo se realizará la parte experimental de esta memoria, se describirá el procedimiento para obtener las señales, el material utilizado y las condiciones seleccionadas para llevarlo a cabo. También se realizarán análisis espectrales de las señales mediante Matlab®.

Capítulo 5. Por último, se expondrán las conclusiones a las que se ha llegado, a partir de los resultados presentados en los capítulos 3 y 4, aplicando los conceptos vistos en el capítulo 2.

En las últimas páginas se encuentra la bibliografía del documento.

## Capítulo 2

---

# MÉTODO ANALÍTICO



## 2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

En este capítulo se explicará el modelo del rotor Jeffcott y el concepto de velocidad crítica. Además, se desarrollarán las principales teorías de modelización de grietas en ejes y las ecuaciones de movimiento de dicho rotor. De este modo el lector tendrá toda la base teórica sobre la cual se fundamenta este proyecto. Se estudiarán dos casos uno en el que el eje se encuentra agrietado (con una grieta al 50%) y otro en el que el eje este en perfectas condiciones.

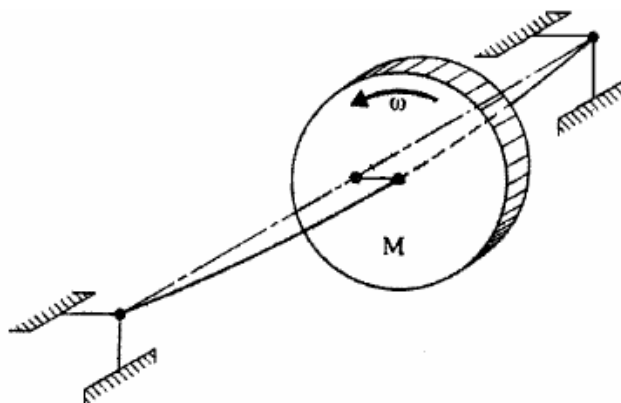
En primer lugar, se muestra la configuración de un rotor Jeffcott, explicando sus principales características. Se continuará con una breve descripción de la velocidad crítica que se encuentra cuando coincide la velocidad del eje con la frecuencia propia.

En segundo lugar, se verán las teorías de modelización de grietas, éstas nos proporcionan funciones periódicas para explicar el cambio que se produce en la fisura del eje cuando gira. Una de ellas es la teoría de 'respiro de la fisura' de Gash, que mediante una función periódica nos explica como la fisura se abre y cierra mientras el eje rota [27]. Otra de ellas, es la teoría de Mayes y Davies [28], que es la que se empleará en este proyecto, ya que suaviza el cambio brusco de la apertura y cierre de la grieta.

Por último, se obtendrán las ecuaciones de movimiento, estableciendo las condiciones que más se ajusten al modelo seleccionado para los siguientes apartados, en especial para el modelo que posteriormente se validará en el laboratorio. Para terminar se resolverán dichas ecuaciones mediante el programa informático Matlab®.

## 2.2 EL ROTOR JEFFCOTT.

En este proyecto se utilizará un modelo de eje denominado rotor Jeffcott. Este rotor está compuesto de un eje y un disco que se encuentra instalado en el centro del eje. El sistema se encuentra apoyado sobre dos soportes rígidos, como se puede observar en la figura 2.



**Figura 2.** Modelo rotor Jeffcott.

En este modelo se asume que los soportes son infinitamente rígidos. El único amortiguamiento que hay es el derivado del medio fluido que rodea al rotor, en nuestro caso se trata de aire.

Al añadir mayor masa al disco se obtiene una mayor flecha debido al giro y a la gravedad a la que está sometido el conjunto.

### **2.3 VELOCIDAD CRÍTICA.**

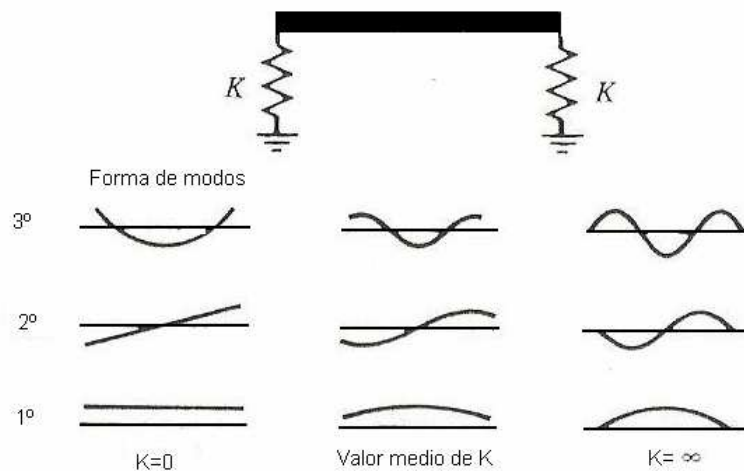
La frecuencia natural es la frecuencia a la que un sistema mecánico continúa vibrando una vez que se ha quitado la señal de excitación. La frecuencia natural de un rotor depende de la rigidez del eje y de la masa del disco que soporta el eje.

Cada rotor tiene un número de frecuencias naturales, asociada con cada frecuencia natural existe un modo de vibración, que es una forma característica en la que vibra el rotor. Cuando una de las frecuencias naturales es excitada por el desequilibrio rotativo del rotor (debido a la velocidad del eje), entonces la velocidad del eje, la cual coincide con la frecuencia natural es conocida como velocidad crítica. Ésta es la velocidad de rotación en la que el eje se vuelve dinámicamente inestable y es probable que se desarrollen grandes vibraciones perjudiciales para el funcionamiento del rotor.

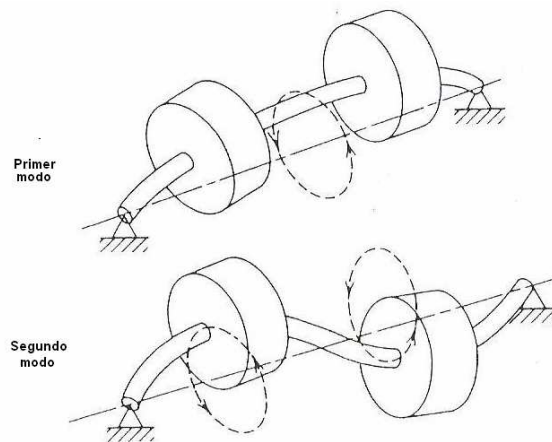
En términos matemáticos, las frecuencias naturales se denominan autovalores y los modos son llamados autovectores de la matriz de rigidez del sistema mecánico. Teóricamente, un sistema elástico distribuido tiene un número infinito de autovalores y sus correspondientes autovectores. Aunque en la práctica, solo las tres o cuatro

velocidades críticas más bajas y sus correspondientes modos de giro son excitados en turbomáquinas a través de su rango de velocidad.

Los modos propios están determinados por la distribución de masa y la rigidez a lo largo del rotor, también por la rigidez de los rodamientos. Los tres primeros modos, asociados con las tres frecuencias naturales más bajas de un eje uniforme, cambian aumentando la rigidez del soporte como se observa en la figura 3. Hay que notar que los dos primeros modos que tienen baja rigidez de los soportes implican que en el eje se produce poco curvado (figura 4).



**Figura 3.** Efectos de la rigidez de los soportes del eje, para los modos propios del eje.



**Figura 4.** Dos primeros modos propios de un eje con dos discos.

Las velocidades críticas pueden ser calculadas como partes imaginarias de los autovalores complejos del sistema rotor-apoyos, bajo la condición de que la velocidad de rotación  $\omega_d$  es igual a la velocidad del eje  $\omega$  (velocidad síncrona). Durante el giro lateral del rotor, las frecuencias naturales pueden cambiar con la velocidad del eje debido a los

efectos giroscópicos y a las propiedades de los apoyos. De este modo, la restricción  $\omega_d = \omega$  debe ser especificada e incorporada en el análisis para el giro síncrono.

El autovalor próximo al cálculo de las velocidades críticas se obtenía sin incluir amortiguamiento al modelo. Esto se basó en el concepto de equilibrio indiferente en el cual el desamortiguamiento del motor puede girar en equilibrio dinámico con cualquier amplitud a la velocidad crítica. Incluso sin amortiguamiento, las ecuaciones diferenciales para el análisis de autovalores son siempre homogéneas, ya que no hay desequilibrio, ni ninguna otra función de fuerza en el modelo. Por lo tanto, al realizar el estudio de los autovalores se obtendrán solamente las frecuencias naturales del rotor, sin que influyan otras vibraciones del sistema mecánico. Para conseguir lo anterior el análisis se realizará bajo la limitación de que  $\omega_d = \omega$ .

La velocidad crítica, también puede ser identificada mediante el cálculo de la respuesta al desequilibrio. Para ello se emplea la definición de velocidad crítica que consiste en graficar la respuesta del sistema mostrando los efectos de amortiguamiento y de distribución y desequilibrio a lo largo del rotor [22].

## 2.4 MODELACIÓN DE LA GRIETA.

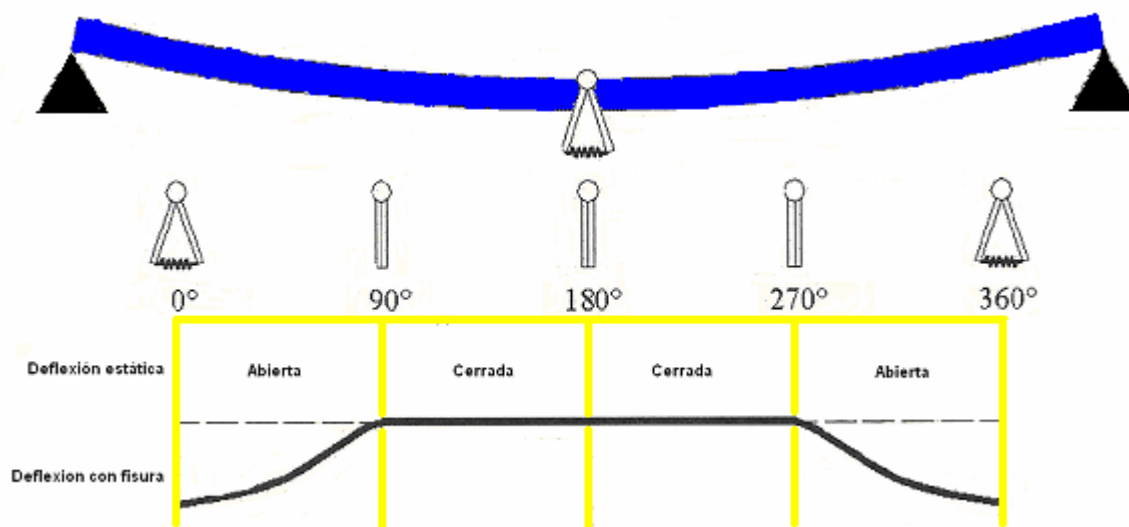
Uno de los problemas más serios en las máquinas rotatorias de alta velocidad, las turbinas de vapor, los generadores, etc., es el riesgo de una falla catatrófica debido a la generación de grietas transversales. A pesar de la alta calidad de los ejes, es necesario realizar minuciosas inspecciones tanto en la puesta en servicio, así como también periódicamente durante su vida operativa.

La presencia de una grieta transversal en un eje altera la flexibilidad de éste, la hace máxima cuando la fisura cierra y mínima cuando la fisura abre, y por lo tanto describe el comportamiento dinámico del rotor. Por todo esto, es necesario conocer las variaciones de flexibilidad en el tiempo que introduce la grieta cuando el eje rota.

En los ejes de máquinas rotatorias, las grietas se abren y se cierran regularmente, por lo que se requiere formular un modelo que considere el 'respiro' de la grieta o su 'apertura y cierre'. Los modelos utilizados se pueden clasificar en dos grupos. El primero lo forman los modelos que determinan la flexibilidad que introduce la grieta en el eje para

cada grupo de apertura de ésta. Y el segundo son los modelos que determinan las flexibilidades extremas cuando la grieta está totalmente abierta y totalmente cerrada, y proponen una ley predeterminada de variación entre estos valores [12].

La mayoría de los autores utilizan modelos del segundo tipo. El modelo más sencillo es el tipo escalón que considera que la grieta pasa abruptamente de completamente abierta a completamente cerrada y viceversa. Se considera que la grieta está completamente abierta para ángulos comprendidos entre  $-90^\circ$  y  $90^\circ$  y completamente cerrada para los ángulos entre  $90^\circ$  y  $270^\circ$  [13], tal y como se observa en la figura 5.



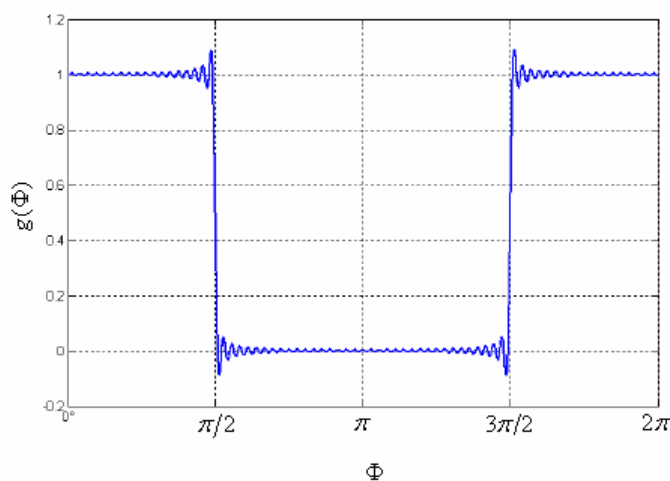
**Figura 5.** 'Respiro de una grieta'.

Diferentes modelos han sido propuestos para simular el cambio de rigidez en ejes horizontales que rotan. La modelación del mecanismo de apertura y cierre de la grieta durante de la rotación es compleja ya que depende de la profundidad de la grieta y de la fricción de las caras de ésta.

En la mayoría de las investigaciones publicadas, la transición de la grieta abierta a cerrada se ha asumido como una función cuadrada o una ley sinusoidal. Ésta es independiente del contenido armónico real producido por la deflexión en ejes horizontales agrietados cargados por el peso. El mecanismo de respiro es el resultado de la resistencia y distribución de tensiones alrededor del área agrietada debido a las cargas estáticas (peso) y de las cargas dinámicas (desequilibrio). Cuando las cargas estáticas superan a las dinámicas, el respiro viene determinado por la posición angular del eje con respecto a la dirección inmóvil de la carga, y la grieta abre y cierra otra vez totalmente, una vez cada revolución.

La presencia de una grieta transversal se considera mediante un modelo que muestra la variación periódica de la rigidez estructural del rotor, la cual se expresa en función del tiempo. Existen algunos modelos propuestos del mecanismo de respiro de la grieta durante el giro del rotor, que se basan en funciones periódicas  $g(\Phi)$  dependientes de la posición angular de la grieta con respecto al vector de la gravedad. Gasch [27] presenta un modelo (figura 6) de la siguiente forma:

$$g(\Phi) = \begin{cases} 1 & \cos \omega t > 0 \\ 0 & \cos \omega t < 0 \end{cases} \quad (2.4.1)$$



**Figura 6.** Función propuesta por Gasch del mecanismo de respiro de la fisura.

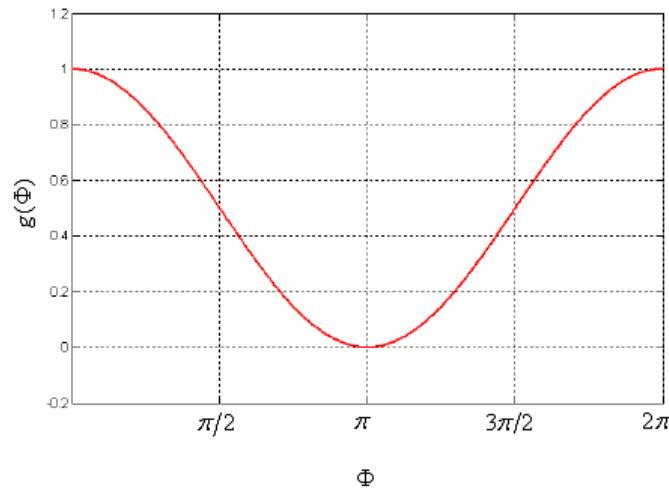
Esta función también puede ser representada mediante una serie de Fourier:

$$g(\Phi) = \left( \frac{2}{\pi} \right) \left( \frac{\pi}{4} + \cos \Phi - \frac{1}{3} \cos 3\Phi + \frac{1}{5} \cos 5\Phi - \frac{1}{7} \cos 7\Phi + \dots \right) \quad (2.4.2)$$

Mayes y Davies [28] propusieron una modificación los modelos anteriores, que evitan el cambio brusco de la apertura y cierre de la grieta. Su función es:

$$g(\Phi) = \frac{1 + \cos \Phi}{2} \quad (2.4.3)$$

que está representada en la figura 7.



**Figura 7.** Función de Mayes y Davies.

Experimentalmente las rigideces  $k_\eta$  y  $k_\xi$  se obtienen al colocar una carga vertical ( $F$ ) conocida hacia abajo y estableciendo las condiciones de contorno de una viga simplemente apoyada en sus extremos y midiendo la deflexión ( $\delta$ ) máxima en el centro del eje, con esto obtenemos la rigidez del eje en flexión:

$$k = \frac{F}{\delta} \quad (2.4.4)$$

Haciendo los parámetros adimensionales  $\Delta k_\eta$  y  $\Delta k_\xi$  quedaría definida como:

$$\Delta K_\eta = \frac{k - k_\eta}{k} = \frac{\Delta k_\eta}{k} \quad (2.4.5)$$

$$\Delta K_\xi = \frac{k - k_\xi}{k} = \frac{\Delta k_\xi}{k} \quad (2.4.6)$$

Siendo:  $k$  rigidez del eje íntegro

$k_\eta$  Rigidez del eje agrietado en la dirección de la grieta

$k_\xi$  Rigidez del eje agrietado en la dirección ortogonal a la grieta

$\Delta k_\eta$  Incremento de la rigidez en la dirección  $\eta$

$\Delta k_\xi$  Incremento de la rigidez en la dirección  $\xi$

Los parámetros adimensionales,  $\Delta K_\eta$  y  $\Delta K_\xi$  disminuyen al aumentar la longitud del eje y aumentan para la longitud del eje.

En el presente proyecto se considerará que la variación de la rigidez del eje debido a la fisura es solamente una función del tiempo y que el peso tiene un efecto dominante en el sistema. Por lo que el incremento de la rigidez varía periódicamente, este cambio

estará descrito por la función  $g(\Phi)$  propuesta por Mayes y Davies [28] que describe el fenómeno de apertura y cierre de la grieta según la ecuación 2.4.3.

Esta función depende de la posición de rotación de la siguiente manera:

$$\Phi = \omega t + \phi + \beta \quad (2.4.7)$$

Donde:  $\Phi$  es el ángulo de rotación instantáneo

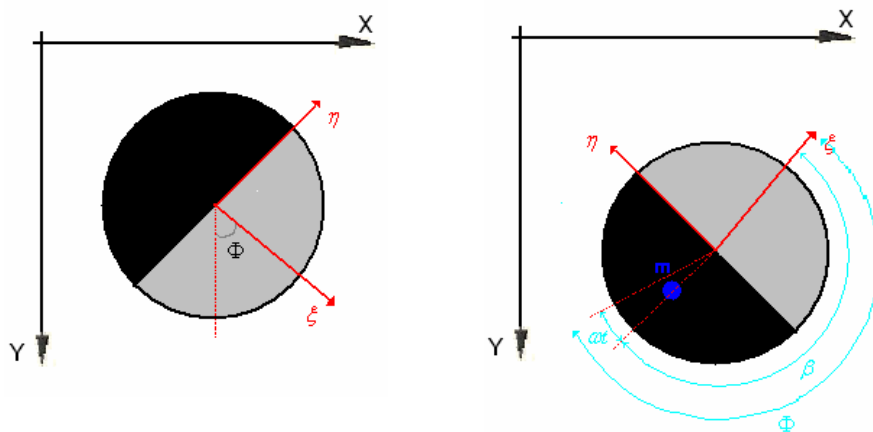
$\omega t$  es el ángulo que gira el eje, dependiente del tiempo

$\phi$  es el ángulo entre las direcciones de los desbalances que ocurren en el sistema

$\beta$  es el ángulo entre el desbalance del disco y la fisura

En la figura 8 se ha representado la sección transversal del eje en la zona central donde se encuentra la grieta. En el caso que se desarrolla de eje con fisura en este proyecto, ésta será al 50%, como se ve en la figura 8. En dicha figura se observan dos sistemas de coordenadas, uno móvil ( $\eta, \xi$ ) y el otro fijo (X,Y). El sistema móvil tiene dos direcciones principales,  $\xi$  que tiene la dirección de la grieta y  $\eta$  que es perpendicular a  $\xi$ .

En el proyecto los valores de los ángulos de la expresión 2.4.7 serán  $\phi = 0$  y  $\beta = 180^\circ$ .



**Figura 8.** Sección transversal del eje fisurado mostrando los sistemas de coordenadas fijo y móvil.

La rigidez del eje cuando la grieta se abre es menor que la rigidez en flexión, y se representa por  $k_\xi$ . Esto sucede cuando  $\Phi$  es igual a cero, o lo que es lo mismo que la grieta se sitúe por debajo del eje. La rigidez del eje en la dirección a  $\Phi = 90^\circ$  se representa por  $k_\eta$  y es mayor que  $k_\xi$ . Cuando  $\Phi = 180^\circ$ , se considera que no hay cambio en la rigidez y se podría asumir que la rigidez es  $k$ .



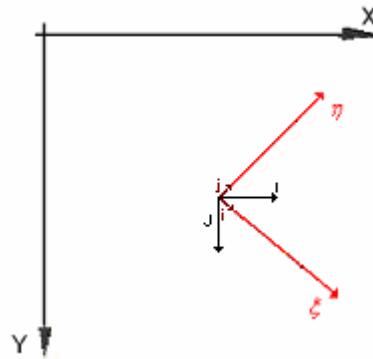
La fuerza que actúa sobre el disco será:

$$\vec{F}_{elas} = -k_{\xi}\xi i - k_{\eta}\eta j \quad (2.4.8)$$

La ecuación anterior se escribe en el sistema de coordenadas fijo mediante la siguiente matriz de cambio:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi & \text{sen} \Phi \\ -\text{sen} \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \quad (2.4.9)$$

Donde  $i, j$  son los vectores unitarios en el sistema de coordenadas móvil y  $I, J$  son los vectores unitarios en el sistema fijo de coordenadas, tal y como muestra la figura 9.



**Figura 9.** Plano transversal del eje mostrando los vectores unitarios de los sistemas fijo y móvil de coordenadas.

Empleando la matriz 2.4.9 se obtiene las componentes de las fuerzas que actúan sobre el disco en el sistema fijo de coordenadas.

$$\vec{F}_{elas} = -k_{\xi}(x \cos \Phi + y \text{sen} \Phi)(\cos \Phi I + \text{sen} \Phi J) - k_{\eta}(y \cos \Phi - x \text{sen} \Phi)(\cos \Phi J + \text{sen} \Phi I) \quad (2.1.11)$$

Operando:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{elas} = & -k_{\xi}(x \cos^2 \Phi I + y \text{sen} \Phi \cos \Phi I + x \text{sen} \Phi \cos \Phi J + y \text{sen}^2 \Phi J) \\ & - k_{\eta}(y \cos^2 \Phi J - x \text{sen} \Phi \cos \Phi J - y \text{sen} \Phi \cos \Phi I + x \text{sen}^2 \Phi I) \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{elas} = & \left[ -k_{\xi}(x \cos^2 \Phi + y \text{sen} \Phi \cos \Phi) - k_{\eta}(x \text{sen}^2 \Phi - y \text{sen} \Phi \cos \Phi) \right] \cdot I + \\ & \left[ -k_{\xi}(x \text{sen} \Phi \cos \Phi + y \text{sen}^2 \Phi) - k_{\eta}(y \cos^2 \Phi - x \text{sen} \Phi \cos \Phi) \right] \cdot J \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Se tiene en cuenta las siguientes relaciones trigonométricas, para que se simplifique el sistema:

$$\text{sen} 2\Phi = 2 \text{sen} \Phi \cos \Phi \quad (2.4.12)$$

$$\cos 2\Phi = \cos^2 \Phi - \text{sen}^2 \Phi = 2 \cos^2 \Phi - 1 \quad (2.4.13)$$

$$\text{sen}^2 \Phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\Phi \quad (2.4.14)$$

$$\cos^2 \Phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\Phi \quad (2.4.15)$$

Ahora ya se puede escribir la ecuación, de manera más reducida empleando las simplificaciones 2.4.12-15.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{elas} = & -\frac{1}{2} \left[ (k_{\xi} + k_{\eta})x + (k_{\xi} + k_{\eta})y \operatorname{sen} 2\Phi + (k_{\xi} - k_{\eta})x \cos 2\Phi \right] \cdot I \\ & -\frac{1}{2} \left[ (k_{\xi} + k_{\eta})y + (k_{\xi} - k_{\eta})x \operatorname{sen} 2\Phi - (k_{\xi} - k_{\eta})y \cos 2\Phi \right] \cdot J\end{aligned}\quad (2.4.16)$$

Las componenetes de rigidez del eje  $k_{\eta}$  y  $k_{\xi}$  están representadas por:

$$k_{\eta} = k - g(\Phi)\Delta k_{\eta} \quad (2.4.17)$$

$$k_{\xi} = k - g(\Phi)\Delta k_{\xi} \quad (2.4.18)$$

Se obtienen las relaciones necesarias para sustituir la ecuación 2.4.16.

$$k_{\xi} + k_{\eta} = 2k - g(\Phi)(\Delta k_{\xi} + \Delta k_{\eta}) = 2k - g(\Phi)\Delta k_1 \quad (2.4.19)$$

$$k_{\xi} - k_{\eta} = -g(\Phi)(\Delta k_{\xi} - \Delta k_{\eta}) = -g(\Phi)\Delta k_2 \quad (2.4.20)$$

$$\text{Siendo } k_{\xi} + k_{\eta} = \Delta k_1 \text{ y } k_{\xi} - k_{\eta} = \Delta k_2 \quad (2.4.21)$$

Finalmente se sustituyen las ecuaciones 2.4.19 y 2.4.20 en 2.4.16.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{elas} = & -\frac{1}{2} \left[ (2k - g(\Phi)\Delta k_1)x - g(\Phi)\Delta k_2 (y \operatorname{sen} 2\Phi + x \cos 2\Phi) \right] \cdot I \\ & -\frac{1}{2} \left[ (2k - g(\Phi)\Delta k_1)y - g(\Phi)\Delta k_2 (x \operatorname{sen} 2\Phi - y \cos 2\Phi) \right] \cdot J\end{aligned}\quad (2.4.22)$$

La ecuación 2.4.22, expresada sobre el sistema de coordenadas fijo (X, Y), queda:

$$F_{elas}^x = -kx + \frac{1}{2} g(\Phi) \left[ (\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)x + (\Delta k_2 \operatorname{sen} 2\Phi)y \right] \quad (2.4.23)$$

$$F_{elas}^y = -ky + \frac{1}{2} g(\Phi) \left[ (\Delta k_2 \operatorname{sen} 2\Phi)x + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)y \right] \quad (2.4.24)$$

## 2.5 MODELO MATEMÁTICO.

En este apartado se va a proceder a obtener las ecuaciones del movimiento del rotor Jeffcott, para ello supondremos que se trata de un modelo formado por un disco rígido soportado por un eje flexible, uniforme, isotrópico y sin masa. El disco se encuentra localizado en la mitad del eje que está considerado como una viga biapoyada.

Se supone que el amortiguamiento del sistema completo es debido al efecto aerodinámico del movimiento del disco dentro del aire. Los efectos giroscópicos en el

disco son ignorados debido a la simetría del sistema. Primero se obtendrá el caso que presenta el modelo con fisura, y posteriormente sin fisura. Se supone que el eje está fisurado al 50% en donde se encuentra el disco.

En la figura 10 se pueden ver las fuerzas, tanto en el eje x como en el eje y, que actúan en el rotor Jeffcott.

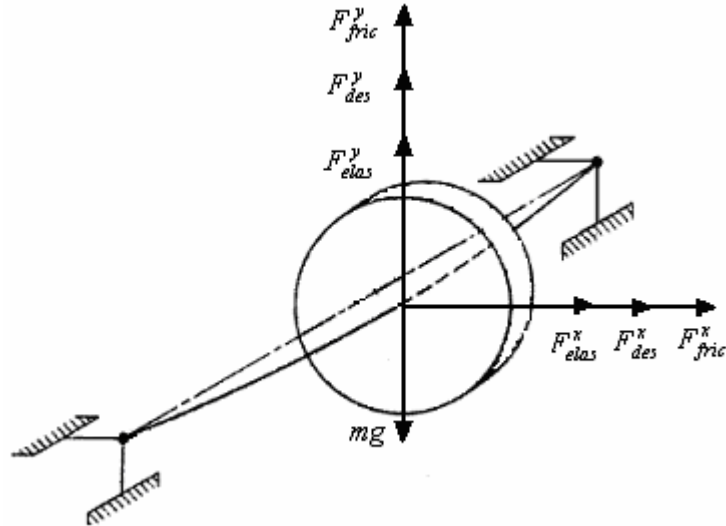


Figura 10. Fuerzas que actúan en el rotor Jeffcott.

En la figura,  $mg$  es el peso del disco,

$F_{fric}$  es la fuerza amortiguadora,

$F_{des}$  es la fuerza del desequilibrio del disco,

$F_{elas}$  es la fuerza elástica del eje

Aplicando la Segunda Ley de Newton al sistema, se obtiene:

$$m\ddot{x} = F_{elas}^x + F_{des}^x + F_{fric}^x \quad (2.5.1)$$

$$m\ddot{y} = F_{elas}^y + F_{des}^y + F_{fric}^y + mg \quad (2.5.2)$$

Las componentes de la fuerza de amortiguamiento son:

$$F_{fric}^x = -c\dot{x} \quad (2.5.3)$$

$$F_{fric}^y = -c\dot{y} \quad (2.5.4)$$

Las componentes de las fuerzas de desequilibrio en el disco son:

$$F_{des}^x = m\omega^2(e^x \cos \omega t - e^y \sin \omega t) = m\omega^2 e \cos(\omega t + \phi) \quad (2.5.5)$$

$$F_{des}^y = m\omega^2(e^x \sin \omega t + e^y \cos \omega t) = m\omega^2 e \sin(\omega t + \phi) \quad (2.5.6)$$

Siendo  $e$  el desequilibrio, que está causado por el hecho de que el centro de gravedad del rotor no coincide con el centro de rotación del eje. Esto genera la aparición de una fuerza centrífuga cuya dirección de aplicación se encuentra desviada del centro de rotación [18].

Las componentes de la fuerza elástica ya han sido expresadas en las ecuaciones 2.4.23 y 2.4.24.

Así las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - \frac{1}{2}g(\Phi)[(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)x + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)y] = m\omega^2 e \cos(\omega t + \phi) \quad (2.5.7)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky - \frac{1}{2}g(\Phi)[(\Delta k_2 \sin 2\Phi)x + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)y] = mg + m\omega^2 e \sin(\omega t + \phi) \quad (2.5.8)$$

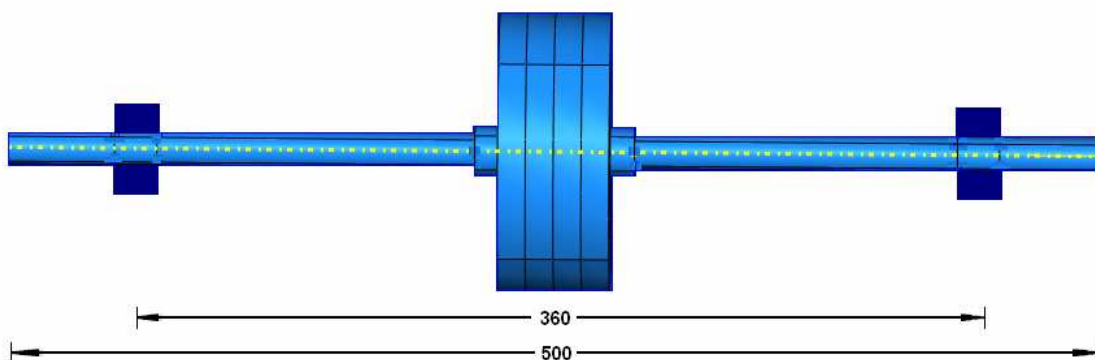
En el caso en el que no haya fisura las ecuaciones del movimiento son:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\omega^2 e \cos(\omega t + \phi) \quad (2.5.9)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = mg + m\omega^2 e \sin(\omega t + \phi) \quad (2.5.10)$$

Que son el resultado de suprimir el término en el que la rigidez varía en el tiempo y posición, entonces en este caso vemos que la rigidez es constante en todo momento.

Para la resolución de las ecuaciones presentadas se ha utilizado el programa Matlab<sup>®</sup>. Se tiene en cuenta que los análisis se realizan en función de los elementos con que es posible experimentar en el rotor KIT MFS2004 que se dispone en el laboratorio y que son representados en la figura 11 y la tabla 1.



**Figura 11.** Rotor Jeffcott con disco de acero.

**Tabla 1.** Parámetros del rotor KIT MFS2004.

|                                 |                         |
|---------------------------------|-------------------------|
| Longitud del eje                | $L = 500 \text{ mm}$    |
| Longitud efectiva del eje       | $L_e = 360 \text{ mm}$  |
| Desequilibrio                   | $e = 2.2 \cdot 10^{-5}$ |
| Radio del disco                 | $R_d = 65 \text{ mm}$   |
| Radio del eje                   | $R_e = 8 \text{ mm}$    |
| Beta                            | $\beta = 180^\circ$     |
| Masa del disco                  | $L = 5 \text{ kg}$      |
| Módulo Young del eje (aluminio) | $M_d = 72 \text{ GPa}$  |
| Relación de amortiguamiento     | $\xi = 0.005$           |

Las relaciones usadas para el caso particular de este proyecto son:

El momento de inercia de la sección transversal circular del eje:  $I = \frac{\pi R_e^4}{4}$  (2.5.10)

La rigidez del eje íntegro:  $k = \frac{48EI}{L_e^3}$  (2.5.11)

La rigidez del eje agrietado en la dirección de la grieta:  $k_\eta = 0.4 \cdot k$  (2.5.12)

La rigidez del eje agrietado en la dirección ortogonal a la grieta:  $k_\xi = \frac{k_\eta}{6}$  (2.5.13)

La frecuencia natural se determinará como:  $\omega = \sqrt{\frac{k}{M_d}}$  (2.5.14)

La relación de amortiguamiento es:  $\xi = \frac{c_{crítica}}{c_{real}}$  (2.5.15), siendo  $c_{crítica} = \frac{2k}{\omega}$  (2.5.16)

Los valores de las rigideces agrietadas son valores experimentales, obtenidos de la referencia [23].

El valor de la relación de amortiguamiento también es experimental, se ha obtenido de la referencia [24].

La rampa de velocidad es, en ambos casos:

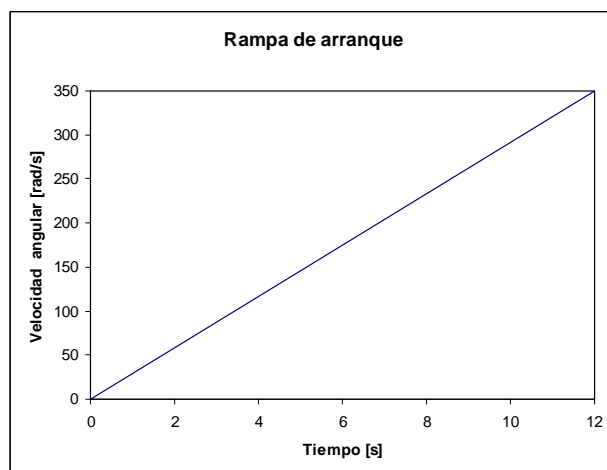


Figura 12. Rampa de velocidad de giro del rotor.

Con todos estos datos, se procede a resolver el sistema de ecuaciones.

## 2.6 RESULTADOS.

Estos resultados se corresponden con las ecuaciones de movimiento del rotor en el caso que no presente fisura y en los casos de que la fisura sea al 12.5% y al 50%. En las figuras 13, 14 y 15 se pueden ver los desplazamientos y velocidades lineales horizontales y verticales del rotor, así como una tabla que recoge los valores de los desplazamientos horizontales máximos para cada caso (tabla 2).

### A) Caso sin fisura.

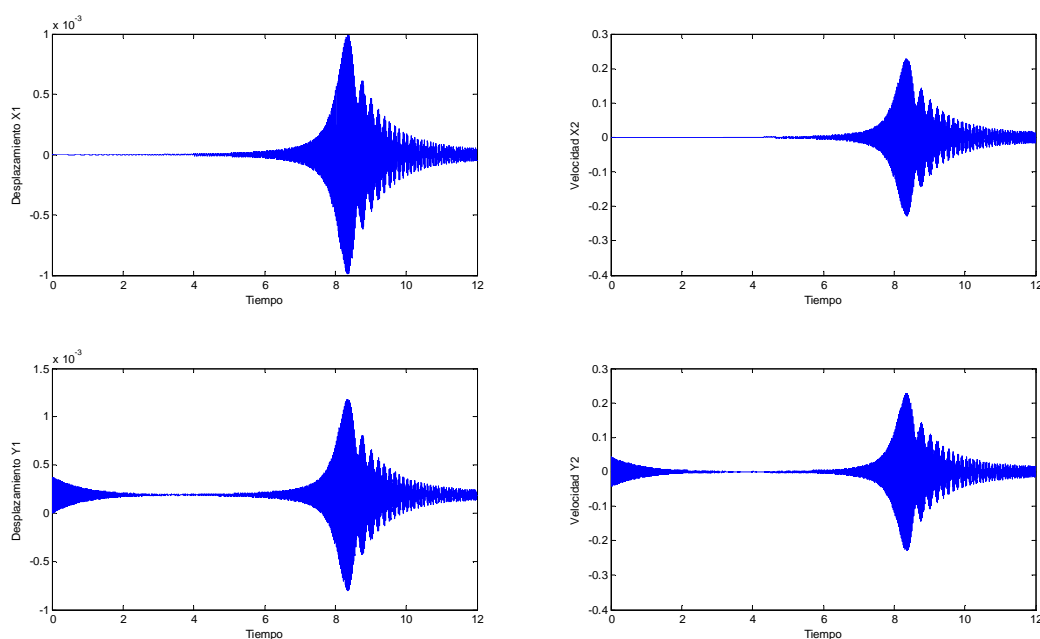


Figura 13. Desplazamientos y velocidades horizontales y verticales del rotor sin fisura.

## B) Caso con fisura al 12.5%.

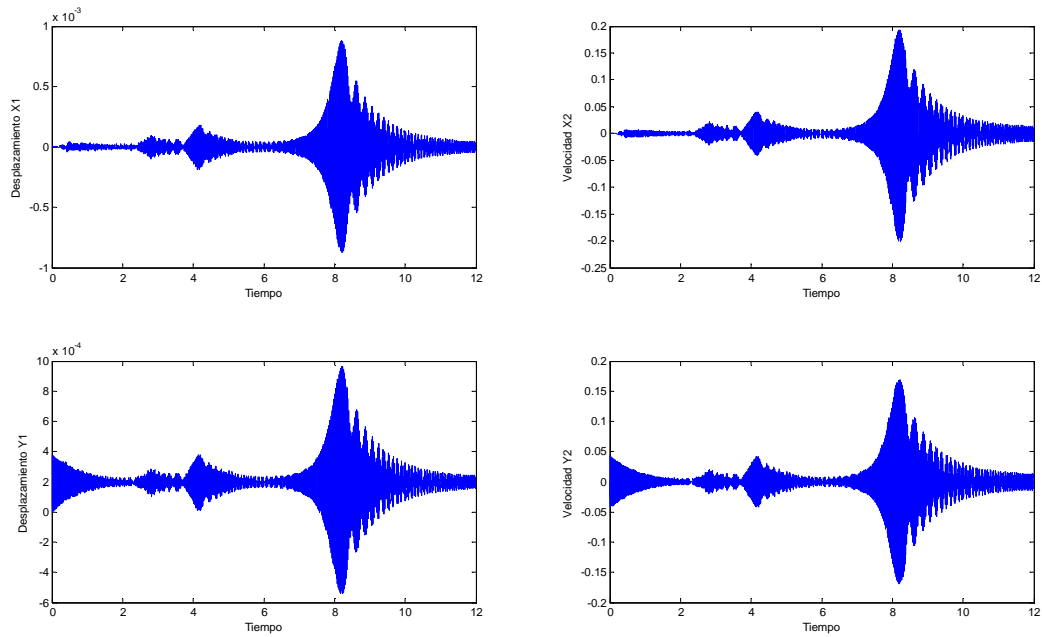


Figura 14. Desplazamientos y velocidades del rotor fisurado al 12.5% en el centro.

## C) Caso con fisura al 50%.

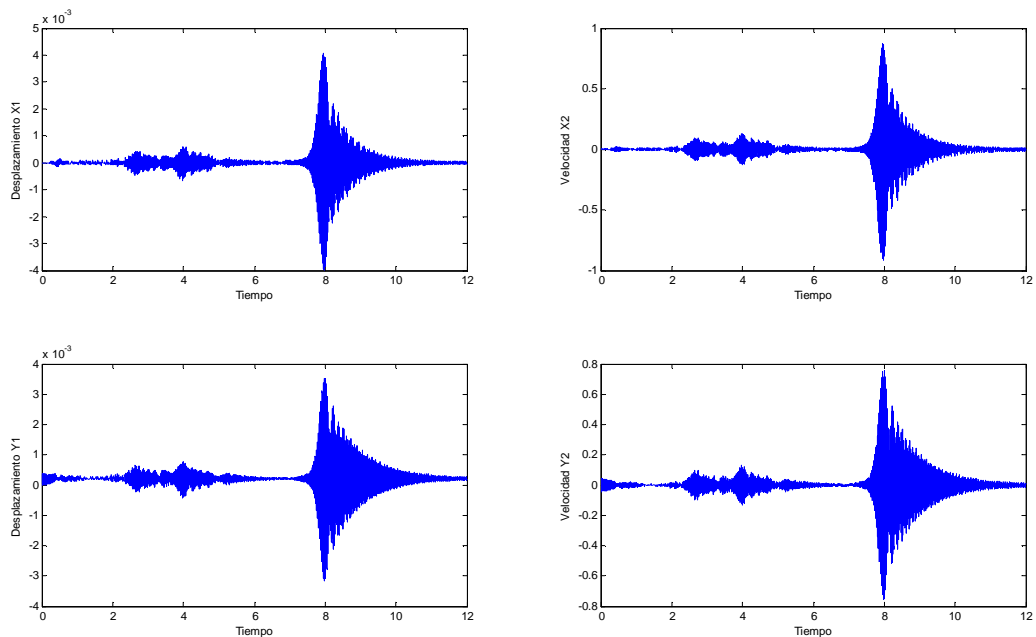


Figura 15. Desplazamientos y velocidades del rotor fisurado al 50%.

De los gráficos anteriores se pueden extraer la posición de los picos máximos y los valores de los tiempos donde se alcanzan. Por ejemplo, en la tabla 2 se ha extraído el desplazamiento horizontal máximo para comparar los tres casos.

**Tabla 2.** Valores de los desplazamientos horizontales máximos de los determinados casos.

| Fisura [%] | Tiempo [s] | Desplazamiento horizontal [m] |
|------------|------------|-------------------------------|
| 0          | 8.31       | 0.00099                       |
| 12.5       | 8.21       | 0.00088                       |
| 50         | 7.96       | 0.00405                       |

Los resultados gráficos que se han conseguido son muy satisfactorios puesto que las figuras obtenidas son muy similares a la realidad. En todos los casos se aprecia la respuesta del rotor en el arranque y se logra ver su comportamiento antes y después de alcanzar su velocidad crítica.

A partir de estos gráficos se obtienen varias conclusiones. En primer lugar en todos los casos, en las componentes verticales se puede ver el que el efecto de la gravedad es dominante durante los primeros segundos del arranque. Este efecto se aprecia hasta que el rotor alcanza el equilibrio y disminuye la amplitud de la magnitud correspondiente.

En segundo lugar, se puede afirmar que a medida que aumenta la fisura, produce mayor inestabilidad en la respuesta del rotor. En el caso sin fisura se ve que antes de acercarse a la velocidad crítica el rotor presenta una señal con de amplitud pequeña, cercana a cero. Sin embargo en los casos donde existe fisura en la zona previa a alcanzar la velocidad crítica las señales muestran amplitudes mayores que en el caso sin fisura.

Finalmente, se concluye que, la presencia de fisura en el rotor influye significativamente en la velocidad crítica; la tabla 2 muestra que cuanto mayor es la fisura menor es el tiempo en que se alcanza dicha velocidad, con lo que las frecuencias naturales también disminuyen debido a que la rigidez del eje decrece. En el siguiente capítulo se analizará detenidamente el efecto de la fisura en las frecuencias propias.



## Capítulo 3

---

# MODELADO EN ELEMENTOS FINITOS

### 3.1 INTRODUCCIÓN.

El método de elementos finitos es un procedimiento numérico que puede ser usado para obtener soluciones de un gran número de problemas en ingeniería, involucrando análisis de esfuerzos, transferencia de calor, electromagnetismo y flujos de fluido.

El programa elegido para realizar este proyecto es Abaqus<sup>®</sup>. Éste es un programa destinado a resolver problemas de ciencias e ingeniería y está basado en el método de los elementos finitos. El programa puede resolver casi todo tipo de problemas, desde un sencillo análisis lineal hasta simulaciones complejas no lineales. Abaqus<sup>®</sup> permite resolver problemas de mecánica del sólido, lineal y no lineal, en los rangos estático y dinámico. Incluye modelos de material de tipo elastoplástico y viscoplástico, entre otros. En cuanto se refiere a problemas de no linealidad geométrica incluye formulaciones para grandes deformaciones y problemas de contacto [15].

Abaqus<sup>®</sup> posee una extensa librería de elementos finitos que permite modelar virtualmente cualquier geometría, así como su larga lista de modelos que simulan el comportamiento de una gran mayoría de materiales, permitiendo su aplicabilidad en distintas áreas de ingeniería.

En este capítulo, se modelarán distintas configuraciones de rotores, de las cuales se realizarán estudios de frecuencia con el fin de encontrar las mejores configuraciones que se ajusten a los elementos disponibles en el banco de ensayos. Posteriormente, para las configuraciones seleccionadas, se intentará simular un arranque del rotor superando la primera frecuencia propia.

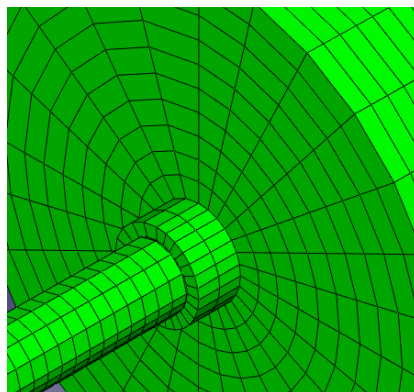
### 3.2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

El método de elementos finitos (MEF en castellano o FEM en inglés) es un procedimiento numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales, muy utilizado en diversos problemas de ingeniería y física. El método está pensado para ser usado en computadoras ya que permite resolver ecuaciones diferenciales asociadas a un problema físico sobre geometrías complicadas.

El MEF permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio, sobre el que están definidas ciertas ecuaciones diferenciales en

forma débil o integral que caracterizan el comportamiento físico del problema, dividiéndolo en un número elevado de subdominios denominados 'elementos finitos'. El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados nodos. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito; además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se denomina malla.

Los cálculos se realizan sobre una malla de puntos, llamados nodos (figura 16), que sirven a su vez de base para discretización del dominio en elementos finitos. La generación de la malla se realiza habitualmente con programas especiales llamados generadores de mallas, en una etapa previa a los cálculos que se denomina preproceso. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables, incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable y los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas). La matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.



**Figura 16.** Mallado.

Normalmente el método de los elementos finitos calcula desplazamientos y tensiones mediante relaciones cinemáticas y constitutivas en problemas de mecánica de medios continuos. El método de los elementos finitos se emplea debido a su generalidad y a la facilidad de introducir dominios de cálculo complejos (en dos o tres dimensiones). Además el método es fácilmente adaptable a problemas de transmisión de calor, de mecánica de fluidos para calcular campos de velocidades y presiones (mecánica de fluidos computacional) o de campo electromagnético. Dada la imposibilidad práctica de encontrar la solución analítica de estos problemas, con frecuencia en la práctica ingenieril

los métodos numéricos y, en particular, los elementos finitos, se convierten en la única alternativa práctica de cálculo.

Una importante propiedad del método es la convergencia; si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas, la solución numérica calculada converge rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones.

### 3.2.1 Origen del Método de Elementos Finitos.

El origen del método moderno de elementos finitos se remonta a los inicios del siglo veinte, cuando algunos investigadores aproximaron y modelaron un continuo elástico usando barras elásticas equivalentes discretas. El primero en desarrollar el método fue Courant [14] en 1943, quien utilizó el método de Ritz de análisis numérico y minimización de las variables de cálculo para obtener soluciones aproximadas a un sistema de vibración. Poco después, un documento publicado en 1956 por Turner, Clough, Martin y Topp [20] estableció una definición más amplia del análisis numérico. El documento se centró en la rigidez y la deformación de estructuras complejas. Con la llegada de los primeros ordenadores se instauró el cálculo matricial de estructuras. Éste parte de la discretización de la estructura en elementos lineales tipo barra de los que se conoce su rigidez frente a los desplazamientos de sus nodos. Se plantea entonces un sistema de ecuaciones resultado de aplicar las ecuaciones de equilibrio a los nodos de la estructura. Este sistema de ecuaciones se esquematiza de la siguiente manera:

$$\vec{f} = k \cdot \vec{u} \quad (3.2.1)$$

Donde las incógnitas son los desplazamientos en los nodos (vector  $\vec{u}$ ) que se hallan a partir de las fuerzas o sollicitaciones en los nodos (vector  $\vec{f}$ ) y de la rigidez de las barras (matriz de rigidez  $k$ ). Conocidos dichos desplazamientos es posible determinar los esfuerzos en las barras. La solución obtenida es exacta.

Cuando se produce la llegada de los primeros equipos de cálculo en la década de 1950, el cálculo de estructuras se encontraba en un punto en el que los métodos de cálculo predominantes consistían en métodos iterativos (métodos de Cross y Kani), que se realizaban de manera manual y, por tanto, resultaban bastante tediosos. El cálculo de una estructura de edificación de varios pisos, por ejemplo, podía llevar varias semanas, lo cual suponía un coste sustancial de tiempo en detrimento de la posibilidad de invertir éste en la optimización de la estructura.

La llegada de la computadora permitió el resurgimiento del método de los desplazamientos ya conocidos en siglos anteriores (Navier, Lagrange, Cauchy), pero que eran difíciles de aplicar dado que al final conducían a la resolución de enormes sistemas de ecuaciones inabordables desde el punto de vista manual.

Cuando las aplicaciones prácticas de elementos finitos crecieron en tamaño, los requerimientos de tiempo de cálculo y memoria de los ordenadores crecieron. En ese punto el desarrollo de algoritmos más eficientes se volvió importante. Para la resolución de los sistemas de ecuaciones se potencia el estudio de la adaptabilidad de los algoritmos ya conocidos (Gauss, Cholesky, Crout, Gradiente conjugado, etc). El ahorro de tiempo es impensable y con ello el uso del método matricial se extiende. Este desarrollo se hace especialmente notable en estructuras de edificación donde la discretización de los pórticos en barras, es prácticamente inmediata a partir de las vigas y los pilares.

Sin embargo, y a pesar de desarrollarse modelizaciones de elementos superficiales mediante barras (losas con emparrillados, elementos curvos mediante aproximaciones de elementos rectos, etc.), se plantean grandes dificultades ante estructuras continuas (superficies y volúmenes) y con geometrías complejas. De ahí que sea precisamente dentro del campo aeroespacial donde comienzan a desarrollarse las nuevas técnicas del MEF. Dada su generalidad el método se amplió a otros campos no estructurales como la conducción de calor, la mecánica de fluidos, etc. donde compitió con otros métodos numéricos como el de método de las diferencias finitas que aún siendo más intuitivo, tenía de nuevo dificultades de planteamiento para geometrías complejas.

Con la llegada de los centros de cálculo y los primeros programas comerciales en los años 60, el MEF a la vez que se populariza en la industria refuerza sus bases teóricas en los centros universitarios.

En los años 70 se produce un gran crecimiento de la bibliografía así como la extensión del método a otros problemas como los no lineales. El MEF estaba limitado a caros ordenadores centrales que disponían las industrias aeronáuticas, de automoción, de defensa y nucleares. Se estudian nuevos tipos de elementos y se sientan las bases matemáticas rigurosas del método, que había aparecido antes como técnica de la ingeniería que como método numérico de la matemática.

Por último, a partir de la década de los 80, con la generalización de los ordenadores personales, se extiende el uso de los programas comerciales que se especializan en los

diversos campos, instaurándose el uso de procesadores gráficos que realizan el mallado y la representación gráfica de los resultados. Se continúa con el estudio de la aplicación del método a nuevos modelos de comportamiento (plasticidad, fractura, daño continuo, etc.) y en el análisis de los errores.

En la actualidad, dentro del campo estructural, el MEF comparte protagonismo con el método matricial, siendo muchos los programas que mezclan el análisis por ambos métodos, debido sobre todo a la mayor necesidad de memoria que requiere el análisis por elementos finitos. Así se ha dejado la aplicación del MEF para el análisis de elementos continuos tipo losa o pantalla, mientras que los pórticos siguen todavía discretizándose en barras y utilizando el método matricial. Y desde el rápido declive en el coste de los ordenadores y el fenomenal incremento en la potencia de cálculo, el MEF ha desarrollado una increíble precisión. A día de hoy, los superordenadores son capaces de dar resultados exactos para todo tipo de parámetros [16].

### **3.2.2 Pasos en el Método de Elementos Finitos.**

Los pasos para un análisis de elementos finitos son:

- Fase de Preproceso: en esta fase se crea el modelo objeto de estudio, se imponen las condiciones iniciales y de contorno y se malla dicho objeto.
- Fase de Solución: durante esta fase el programa resuelve el problema durante el tiempo necesario.
- Fase de Posproceso: en esta fase se visualizan los resultados obtenidos.

A continuación se aplica cada una de estas fases a nuestros casos de estudio en este proyecto.

### **3.3 MODELADO DEL ROTOR.**

En este apartado, se seguirá paso a paso la realización del modelado del rotor en elementos finitos, mediante el programa Abaqus<sup>®</sup>. Para el análisis del problema se efectuará un estudio estático y otro dinámico. El estático sirve para obtener las frecuencias naturales del sistema. Y del segundo análisis se obtendrán el desplazamiento y la velocidad del rotor al simular un arranque.

La importancia de obtener las frecuencias propias es porque la primera velocidad crítica coincide con la frecuencia natural del sistema, por lo que en el análisis dinámico se pretende simular un arranque en el que el rotor supere la velocidad crítica.

### 3.3.1 Análisis estático.

#### Fase de preproceso.

Para comenzar, se debe decidir como simular nuestro rotor, hay que tener en cuenta los materiales de los que se dispone en el laboratorio para poder validar experimentalmente los resultados posteriormente.

El eje será de aluminio y los discos de acero y aluminio. El eje estará sin fisurar y también se estudiará fisurado al 50%, por ello para facilitar la creación del modelo haremos el eje en dos partes, esto es, si el eje mide 0.5 m, estará formado por dos ejes de 0.25 m cada uno, de esta manera al juntar ambas partes se podrá definir la fisura o no fisura. En las figuras 17 y 18 se pueden ver los discos que se estudiarán en este capítulo y la figura 19 muestra una parte del eje. Las propiedades mecánicas de estos elementos se encuentran en la tabla 3, y las dimensiones de todos ellos en la tabla 4.

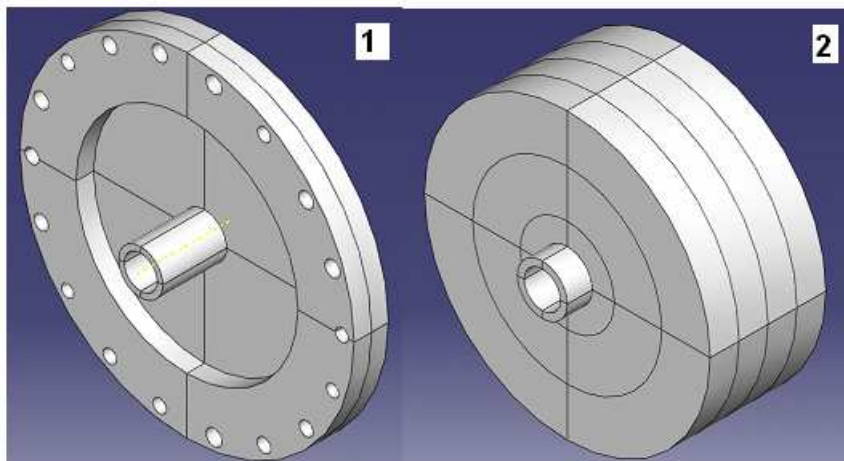


Figura 17. Discos.

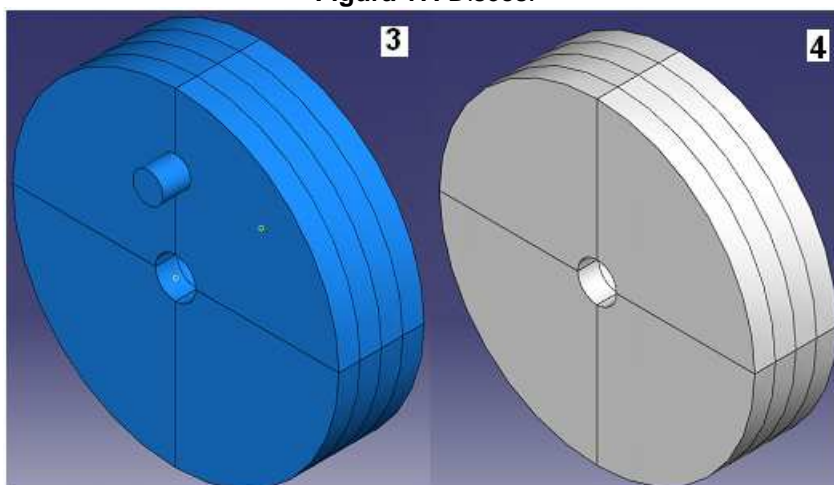
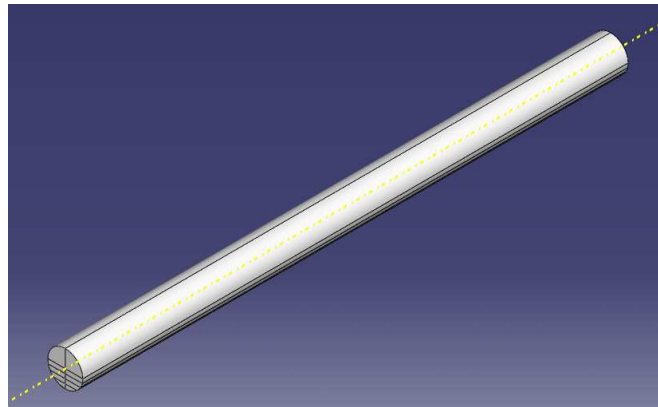


Figura 18. Discos, a la izquierda disco desequilibrado por una masa.



**Figura 19.** Eje, una parte.

Los materiales empleados son acero y aluminio, sus características mecánicas son:

**Tabla 3.** Características mecánicas de los materiales.

|                               | Aluminio | Acero |
|-------------------------------|----------|-------|
| Densidad [kg/m <sup>3</sup> ] | 2800     | 7850  |
| Módulo de Young [GPa]         | 72       | 210   |
| Coefficiente de Poisson       | 0.3      | 0.3   |

Las dimensiones de los elementos mostrados en las figuras 17, 18 y 19 son:

**Tabla 4.** Dimensiones de los elementos del rotor.

|         | Longitud<br>[mm] | Radio exterior<br>[mm] | Radio interior<br>[mm] |
|---------|------------------|------------------------|------------------------|
| Disco 1 | 16               | 76                     | 7.9                    |
| Disco 2 | 51               | 63                     | 7.9                    |
| Disco 3 | 34               | 65                     | 7.9                    |
| Disco*  | 11               | 6                      | 0                      |
| Disco 4 | 34               | 65                     | 7.9                    |
| Eje     | 500              | 15.87                  | 0                      |

\*disco adicional del disco número 3, el cual provoca un desequilibrio en el sistema.

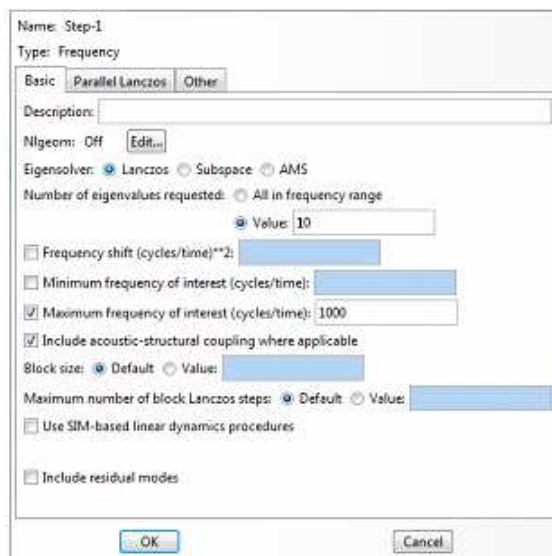
Una vez que se disponen de todas las partes creadas, se crea un paso ('step') de frecuencia.

Este tipo de paso se utiliza para la obtención de los valores propios, el cálculo de la frecuencia natural, las correspondientes formas modales y si son requeridos calcula los modos residuales del sistema. Es un análisis de perturbación lineal. Incluye los esfuerzos iniciales y los efectos debido a condiciones de pre-cargas, tal que, pequeñas vibraciones



de una estructura pre-cargada pueden ser modeladas. Los esfuerzos iniciales no podrán ser incluidos en la obtención de la frecuencia si se realiza en el primer paso del análisis, además, si no existe un paso general no lineal anterior a la obtención y se requieren los esfuerzos iniciales se debe implementar otro paso estático el cual incluya no linealidad geométrica. Durante la obtención de la frecuencia las cargas aplicadas son ignoradas. La densidad del material debe ser definida y las siguientes propiedades no están activas durante el cálculo de la frecuencia: plasticidad y otros efectos inelásticos, propiedades térmicas, de difusión de masa y propiedades eléctricas [17].

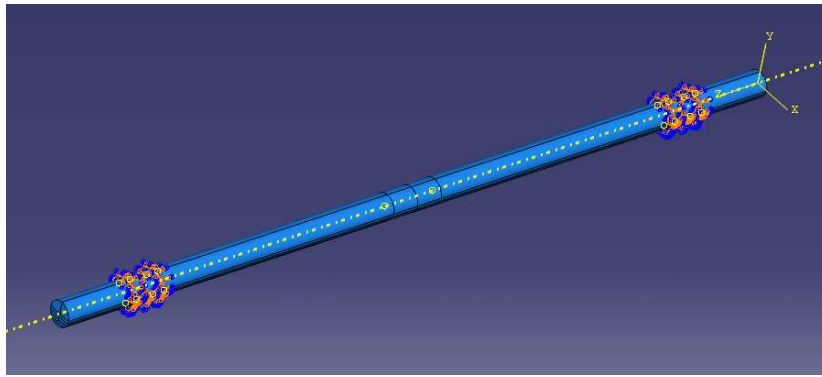
Se configura el paso (figura 20) para buscar las primeras diez frecuencias naturales que se encuentran en 1000Hz.



**Figura 20.** Paso para calcular el análisis de frecuencia.

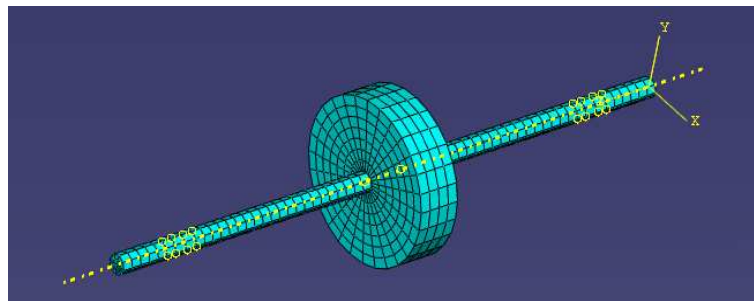
Para unir las partes (cada parte del eje y el eje con el disco), se crean restricciones ('constraint tie') que permiten que dos superficies estén unidas: para ello, los nodos de la primera superficie tendrán los mismos valores en sus grados de libertad que los de la segunda superficie, es decir, cada nodo de la primera superficie tiene el mismo movimiento y valor de temperatura, presión, etc. que la segunda superficie. Pueden ser usado en simulaciones mecánicas, de presión acústica, análisis acoplados temperatura-desplazamiento, presión acústica...

Posteriormente se imponen las condiciones de contorno o 'boundary condition', el rotor estará apoyado sobre dos rodamientos uno a cada lado. Para simularlo empleamos una condición que encastrará (esto es bloqueará los movimientos) la zona de los rodamientos como se ve en la figura 21.



**Figura 21.** Eje con las condiciones de encastrado en los rodamientos.

Por último se procede a efectuar el mallado del conjunto, la malla en este caso será poco densa de 0.005 m (figura 22), para agilizar el cálculo.



**Figura 22.** Mallado poco denso del rotor.

Este proceso se repetirá para cada configuración que se estudie.

### **Fase de Solución.**

Esta fase se limita a ejecutar el análisis, mediante la creación de una tarea ('job') cuyo resultado nos dará los modos naturales. El programa tarda unos pocos minutos en resolverlo.

### **Fase de Postproceso.**

En esta última fase se visualiza el resultado obtenido. Se obtienen los diez primeros modos propios menores de 1000 Hz, ya que así se configuró en el paso de frecuencia.

Para comprender mejor que son los modos propios, ver la figura 23, donde se puede comprobar como afecta cada modo al sistema. En esta figura se ven las deformaciones que sufre el rotor cuando alcanza una frecuencia natural de vibración. En los primeros cinco modos el elemento que más sufre dichas deformaciones es el eje, mientras que en los restantes modos es el disco el que se deforma notablemente.

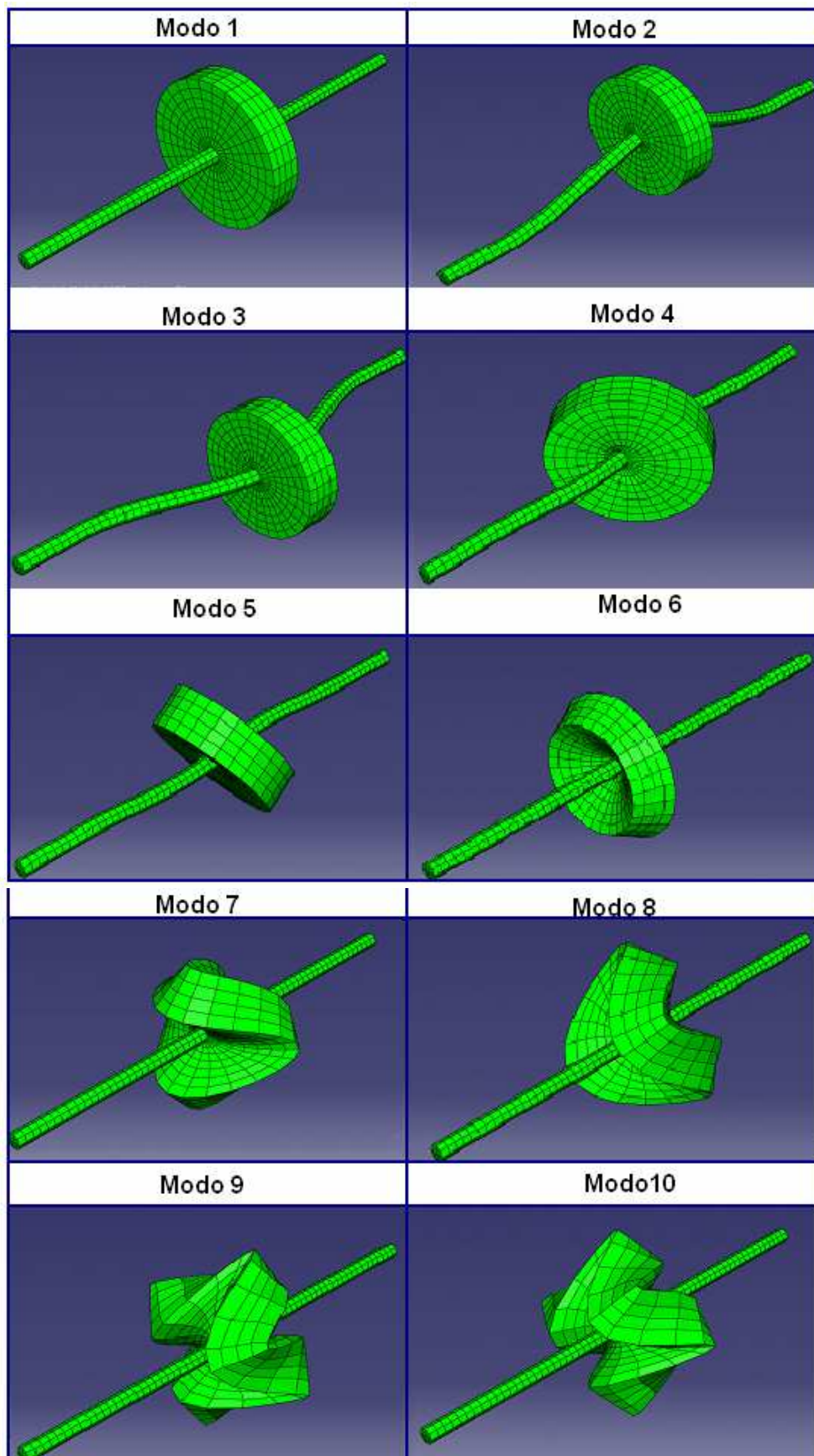
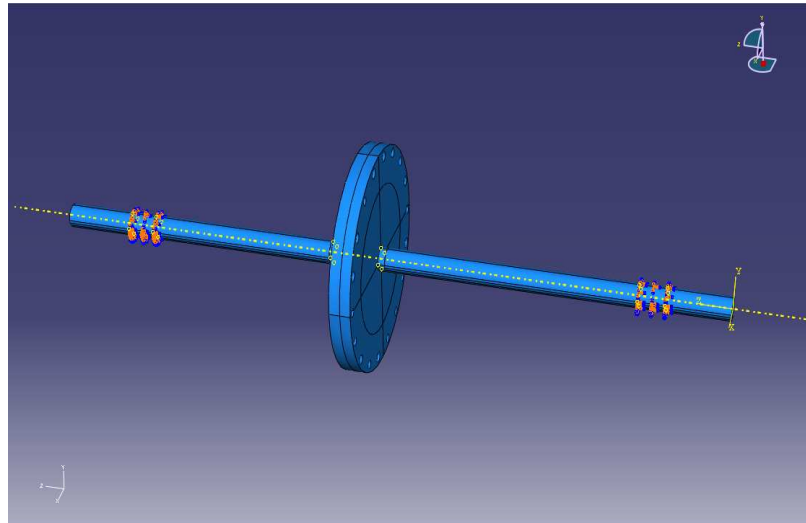


Figura 23. Modos propios del rotor.

En las siguientes páginas se encuentran los valores de los modos propios de todos los casos analizados. Se recuerda que para cada configuración, el eje estará fisurado al 50% y en el otro caso no presentará fisura.

**Configuración 1.-** Disco de aluminio desplazado 5 mm del centro del eje.

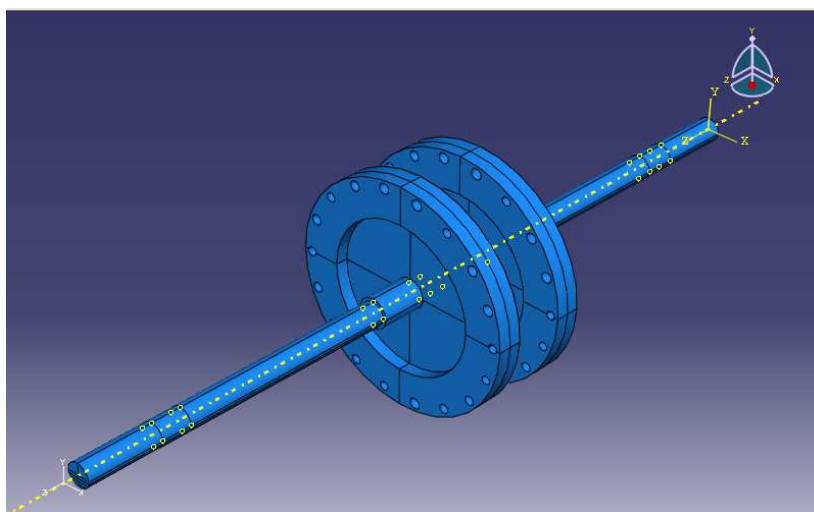


**Figura 24.** Eje y disco aluminio.

**Tabla 5.** Resultados de la configuración 1.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 151.74                | 150.06                |
| 2    | 181.60                | 155.64                |
| 3    | 182.60                | 175.58                |
| 4    | 447.31                | 421.77                |
| 5    | 449.64                | 439.74                |

**Configuración 2.-** Dos disco de aluminio desplazados 5 mm del centro del eje.

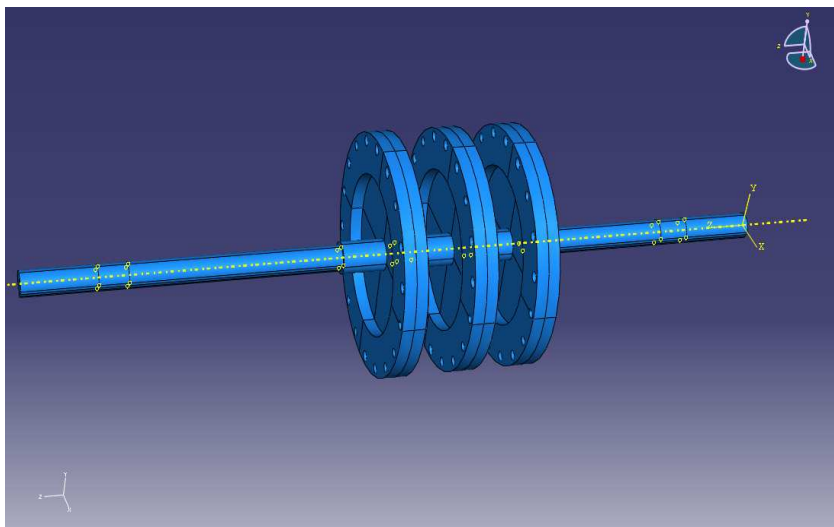


**Figura 25.** Eje con dos discos de aluminio.

**Tabla 6.** Modos propios de la configuración 2.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 114.84                | 114.84                |
| 2    | 144.70                | 122.48                |
| 3    | 145.35                | 139.71                |
| 4    | 380.69                | 355.98                |
| 5    | 382.48                | 380.42                |
| 6    | 419.18                | 381.77                |
| 7    | 577.29                | 466.13                |
| 8    | 579.89                | 543.18                |

**Configuración 3.-** Tres discos de aluminio centrados desplazados 10 mm uno del otro.

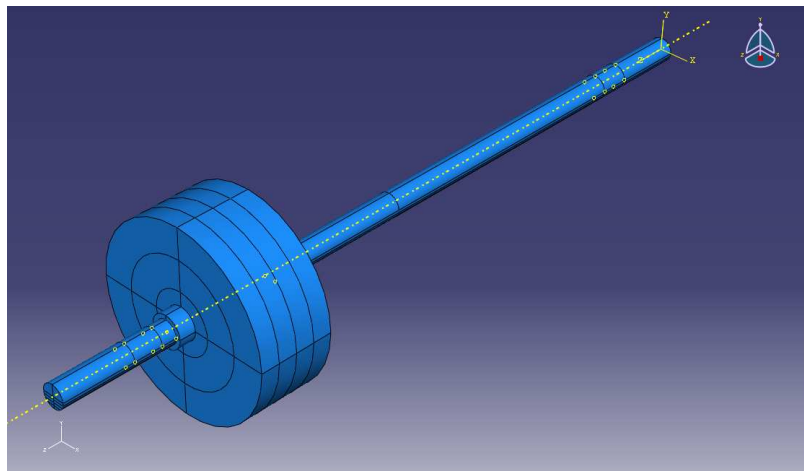


**Figura 26.** Eje con tres discos de aluminio.

**Tabla 7.** Resultados de la configuración 3.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 101.63                | 101.69                |
| 2    | 111.66                | 131.68                |
| 3    | 127.09                | 132.38                |
| 4    | 292.32                | 326.62                |
| 5    | 352.04                | 355.21                |
| 6    | 354.14                | 357.43                |
| 7    | 447.3                 | 526.58                |
| 8    | 501.69                | 527.98                |
| 9    | 505.67                | 530.42                |
| 10   | 594.88                | 616.03                |

**Configuración 4.-** Disco de aluminio situado a 40 mm del rodamiento.

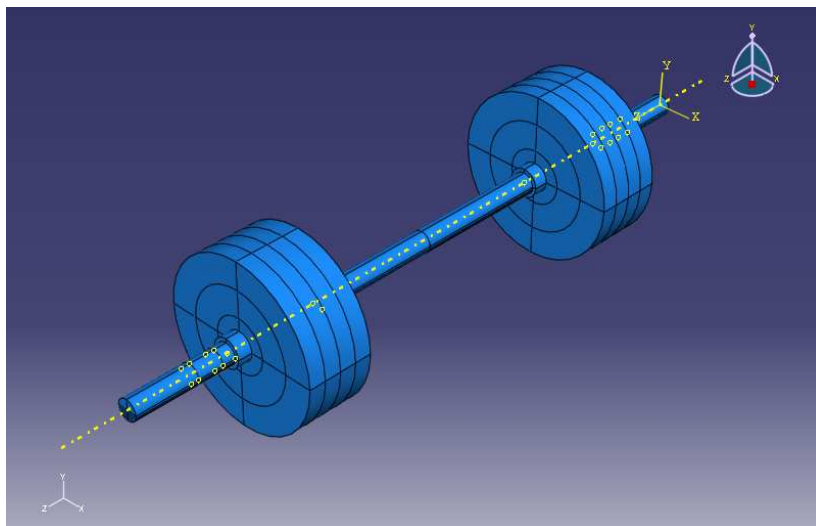


**Figura 27.** Eje con disco de aluminio.

**Tabla 8.** Resultado de la configuración 4.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 282.73                | 283.37                |
| 2    | 283.17                | 286.95                |
| 3    | 285.75                | 288.72                |
| 4    | 814.52                | 844.82                |
| 5    | 836.91                | 850.43                |

**Configuración 5.-** Dos discos de aluminio situados a 40 mm de cada rodamiento.

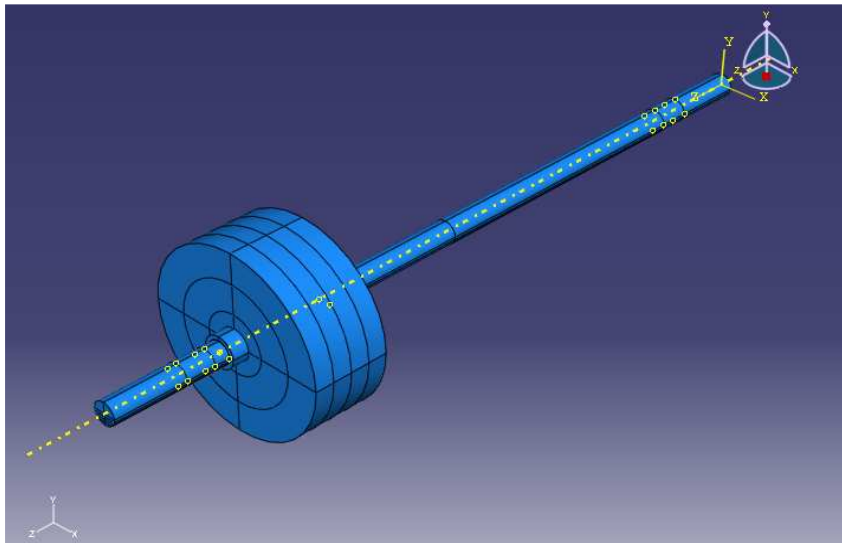


**Figura 28.** Eje con dos discos de aluminio.

**Tabla 9.** Modos propios de la configuración 5.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 262.70                | 265.16                |
| 2    | 264.31                | 266.84                |
| 3    | 277.93                | 277.93                |
| 4    | 295.44                | 296.24                |
| 5    | 376.42                | 376.49                |
| 6    | 378.70                | 378.73                |

**Configuración 6.-** Disco de acero situado a 40 mm del rodamiento.

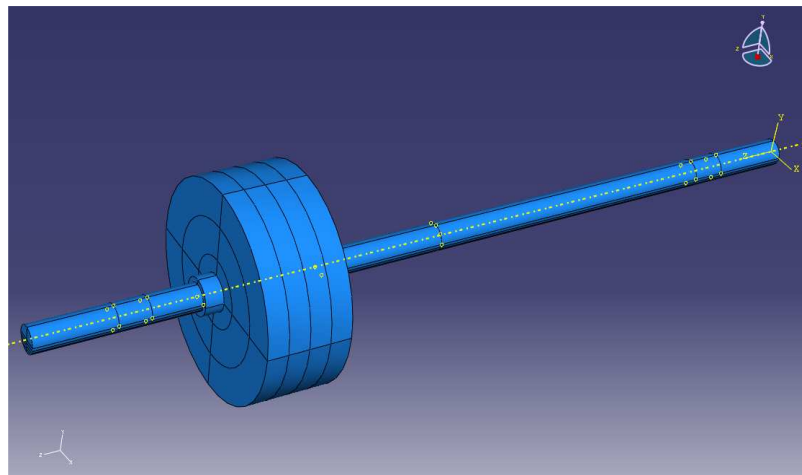


**Figura 29.** Eje con disco de acero.

**Tabla 10.** Resultados modos propios de la configuración 6.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 72.363                | 72.363                |
| 2    | 124.29                | 124.29                |
| 3    | 124.92                | 124.92                |
| 4    | 245.76                | 245.76                |
| 5    | 246.02                | 246.02                |
| 6    | 249.69                | 249.69                |
| 7    | 379.31                | 379.31                |
| 8    | 379.32                | 379.32                |
| 9    | 584.28                | 584.28                |
| 10   | 611.72                | 611.72                |

**Configuración 7.-** Disco de acero situados a 60 mm del rodamiento.

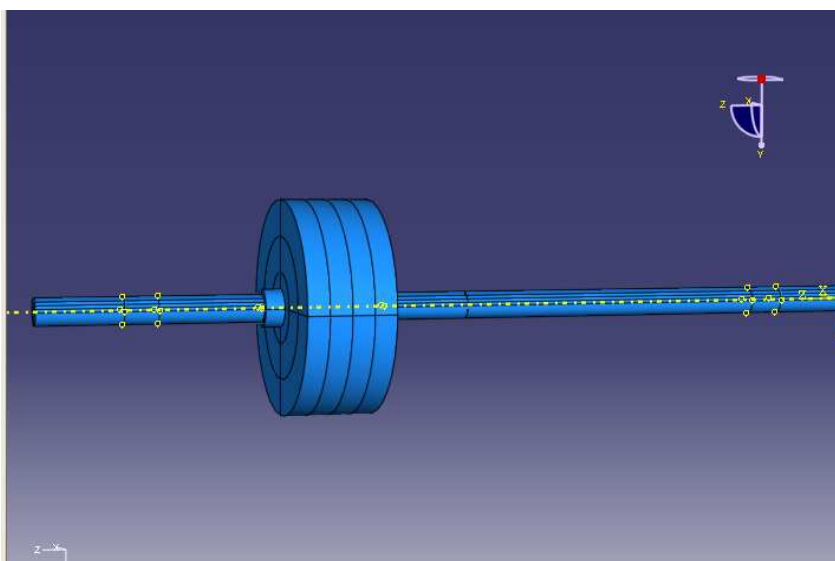


**Figura 30.** Eje con disco de acero.

**Tabla 11.** Resultados modos propios de la configuración 7.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 66.387                | 67.623                |
| 2    | 104.82                | 118.09                |
| 3    | 105.50                | 118.74                |
| 4    | 204.95                | 209.47                |
| 5    | 205.39                | 209.66                |
| 6    | 248.38                | 236.32                |
| 7    | 379.31                | 373.70                |
| 8    | 379.32                | 373.70                |
| 9    | 629.61                | 583.96                |
| 10   | 629.63                | 611.07                |

**Configuración 8.-** Disco de acero situados a 90 mm del rodamiento.



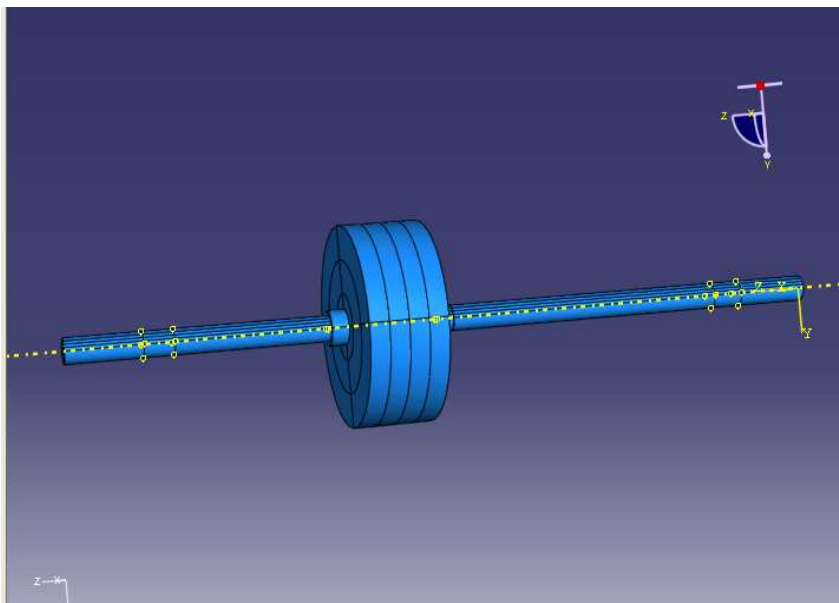
**Figura 31.** Eje con fisura y disco de acero.



**Tabla 12.** Resultados modos propios de la configuración 8.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 60.734                | 60.545                |
| 2    | 83.352                | 80.566                |
| 3    | 83.954                | 82.661                |
| 4    | 172.69                | 172.28                |
| 5    | 173.22                | 172.64                |
| 6    | 246.76                | 246.53                |
| 7    | 379.31                | 379.31                |
| 8    | 379.32                | 379.32                |
| 9    | 629.61                | 629.61                |
| 10   | 629.63                | 629.63                |

**Configuración 9.-** Disco de acero situados a 130 mm del rodamiento.

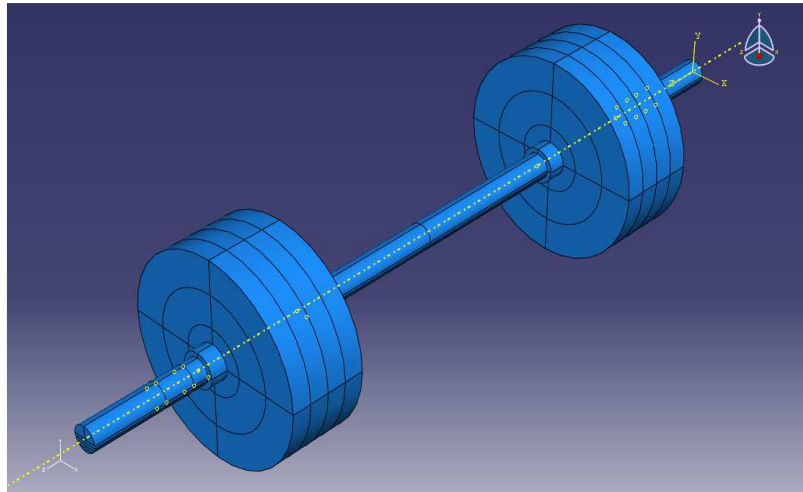


**Figura 32.** Eje con disco de acero.

**Tabla 13.** Resultados de la configuración 9.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 57.692                | 56.533                |
| 2    | 68.764                | 63.963                |
| 3    | 69.282                | 66.963                |
| 4    | 156.97                | 151.80                |
| 5    | 158.88                | 154.87                |
| 6    | 250.57                | 244.97                |
| 7    | 378.85                | 379.31                |
| 8    | 378.89                | 379.32                |
| 9    | 630.29                | 629.61                |
| 10   | 630.58                | 629.63                |

**Configuración 10.-** Dos discos de acero situados a 40 mm de cada rodamiento.

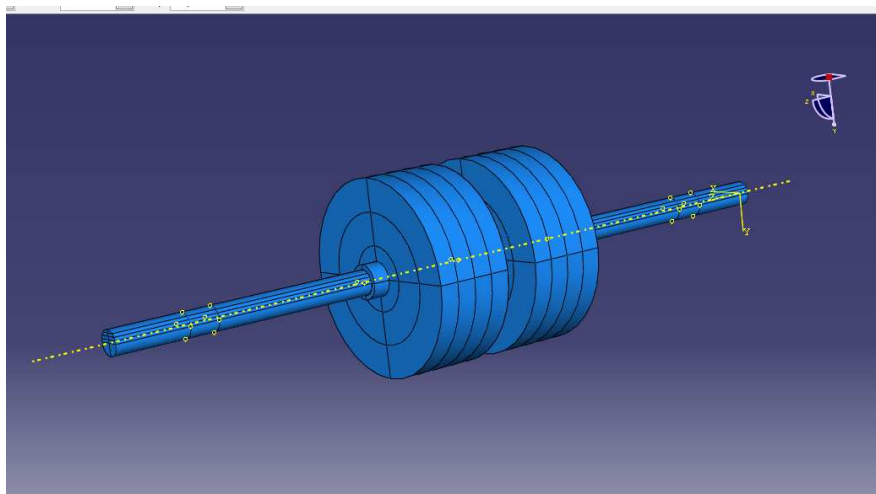


**Figura 33.** Eje con dos discos de acero.

**Tabla 14.** Resultados de la configuración 10.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 70.734                | 70.729                |
| 2    | 76.159                | 76.03                 |
| 3    | 113.73                | 112.36                |
| 4    | 114.44                | 113.33                |
| 5    | 145.64                | 145.63                |
| 6    | 146.35                | 146.34                |
| 7    | 245.39                | 245.36                |
| 8    | 245.71                | 245.62                |
| 9    | 249.18                | 249.18                |
| 10   | 249.46                | 249.45                |

**Configuración 11.-** Dos discos de acero situados en el centro del eje.

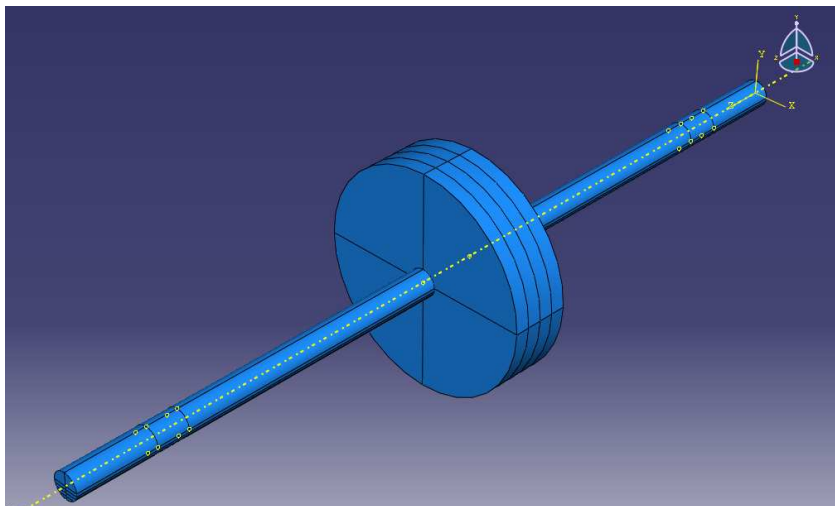


**Figura 34.** Eje con dos discos de acero centrados.

**Tabla 15.** Resultados de la configuración 11.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 3.278                 | 3.278                 |
| 2    | 4.268                 | 3.613                 |
| 3    | 4.308                 | 4.112                 |
| 4    | 12.237                | 12.225                |
| 5    | 12.385                | 12.382                |
| 6    | 18.011                | 14.526                |
| 7    | 26.702                | 18.854                |
| 8    | 26.751                | 23.856                |
| 9    | 41.230                | 41.230                |
| 10   | 106.13                | 96.886                |

**Cofiguración 12.-** Disco de acero de 3.5 kg situado en el centro del eje.

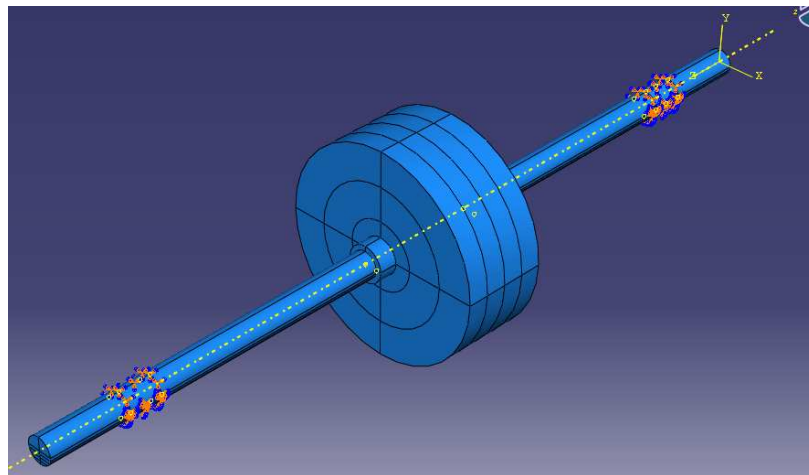


**Figura 35.** Eje con disco de acero de 3.5 kg.

**Tabla 16.** Modos propios de la configuración 12.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 57.764                | 57.764                |
| 2    | 72.541                | 66.6361               |
| 3    | 73.088                | 70.915                |
| 4    | 134.83                | 134.51                |
| 5    | 135.09                | 134.97                |
| 6    | 202.15                | 202.13                |
| 7    | 285.72                | 285.71                |
| 8    | 285.72                | 285.71                |
| 9    | 536.04                | 536.04                |
| 10   | 536.04                | 536.04                |

**Configuración 13.-** Disco de acero de 5 kg situado en el centro del eje.

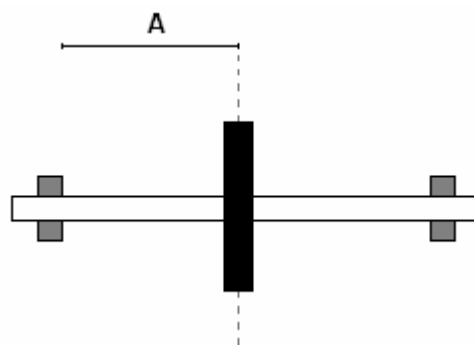


**Figura 36.** Eje con disco de acero de 5 kg.

**Tabla 17.** Modos propios de la configuración 13.

| Modo | Sin fisura            | Con fisura            |
|------|-----------------------|-----------------------|
|      | Frecuencia [ciclos/s] | Frecuencia [ciclos/s] |
| 1    | 56.500                | 56.500                |
| 2    | 64.720                | 60.968                |
| 3    | 65.570                | 63.581                |
| 4    | 150.08                | 149.78                |
| 5    | 150.95                | 150.83                |
| 6    | 242.13                | 242.13                |
| 7    | 339.95                | 339.95                |
| 8    | 349.14                | 349.14                |
| 9    | 350.42                | 350.42                |
| 10   | 361.01                | 361.01                |

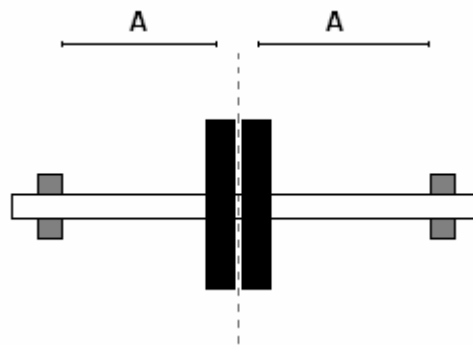
A continuación se muestran unas tablas 18, 19 y 20 que resumen los resultados obtenidos de los sistemas, agrupándose según el número de discos (figuras 37, 38 y 39). En ellas se presenta la primera frecuencia natural de cada configuración y se recuerdan las principales diferencias de una configuración a otra (material y masa del disco).



**Figura 37.** Esquema del rotor con un disco.

**Tabla 18.** Primeras frecuencias naturales de los sistemas con un disco.

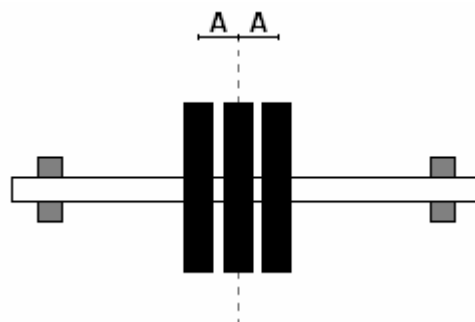
| Configuración | A [mm] | Disco(*) | Masa Disco [kg] | Material | Sin fisura Frecuencia [Hz] | Con fisura Frecuencia [Hz] |
|---------------|--------|----------|-----------------|----------|----------------------------|----------------------------|
| 1             | 183    | 1        | 0.8             | Aluminio | 151.74                     | 150.06                     |
| 4             | 40     | 2        | 1.75            | Aluminio | 282.73                     | 283.37                     |
| 6             | 40     | 2        | 5               | Acero    | 72.663                     | 72.363                     |
| 7             | 60     | 2        | 5               | Acero    | 66.623                     | 67.387                     |
| 8             | 90     | 2        | 5               | Acero    | 60.734                     | 60.545                     |
| 9             | 130    | 2        | 5               | Acero    | 57.692                     | 56.533                     |
| 12            | 183    | 4        | 3.5             | Acero    | 57.764                     | 57.764                     |
| 13            | 183    | 2        | 5               | Acero    | 56.500                     | 56.500                     |



**Figura 38.** Esquema del rotor con dos disco.

**Tabla 19.** Primeras frecuencias naturales de los sistemas con dos discos.

| Configuración | A [mm] | Disco(*) | Masa Disco [kg] | Material disco | Sin fisura Frecuencia [Hz] | Con fisura Frecuencia [Hz] |
|---------------|--------|----------|-----------------|----------------|----------------------------|----------------------------|
| 2             | 178    | 1        | 0.8             | Aluminio       | 114.84                     | 114.64                     |
| 5             | 70     | 2        | 1.75            | Aluminio       | 262.70                     | 265.16                     |
| 10            | 40     | 2        | 5               | Acero          | 70.734                     | 70.229                     |
| 11            | 153    | 2        | 5               | Acero          | 3.278                      | 3.278                      |



**Figura 39.** Esquema del rotor con tres disco.

**Tabla 20.** Primeras frecuencias naturales de los sistemas con tres discos.

| Configuración | A [mm] | Disco (*) | Masa Disco [kg] | Material disco | Sin fisura Frecuencia [Hz] | Con fisura Frecuencia [Hz] |
|---------------|--------|-----------|-----------------|----------------|----------------------------|----------------------------|
| 3             | 10     | 1         | 0.8             | Aluminio       | 101.73                     | 101.64                     |

(\*) Siendo los discos referidos a la figura 5.

**Conclusiones.**

Para analizar los resultados se empleará la siguiente aproximación de la frecuencia natural de oscilación,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{48EI/L^3}{m}} = \sqrt{\frac{48EI}{mL^3}} \tag{3.1.1}$$

donde  $k$  es la rigidez del eje

$m$  es la masa del disco

Se observa que la frecuencia depende de la rigidez del eje y de la masa del disco. Como se ha visto en el capítulo anterior, la presencia de una fisura afecta negativamente a la rigidez del eje, por lo que es lógico esperar que las frecuencias naturales de los casos con fisura tengan valores menores que cuando el eje se encuentra en perfecto estado. Esto se cumple tal y como se ve en las tablas anteriores; aunque se debe tener en cuenta que esta diferencia se encuentra más reflejada a partir del modo 2.

Respecto a los materiales, se ha diferenciado entre discos de acero y disco de aluminio, estos últimos son más ligeros. De acuerdo a la expresión 3.1.1, al ser mayor la masa del disco, la frecuencia es menor y de nuevo esto se comprueba en los resultados.

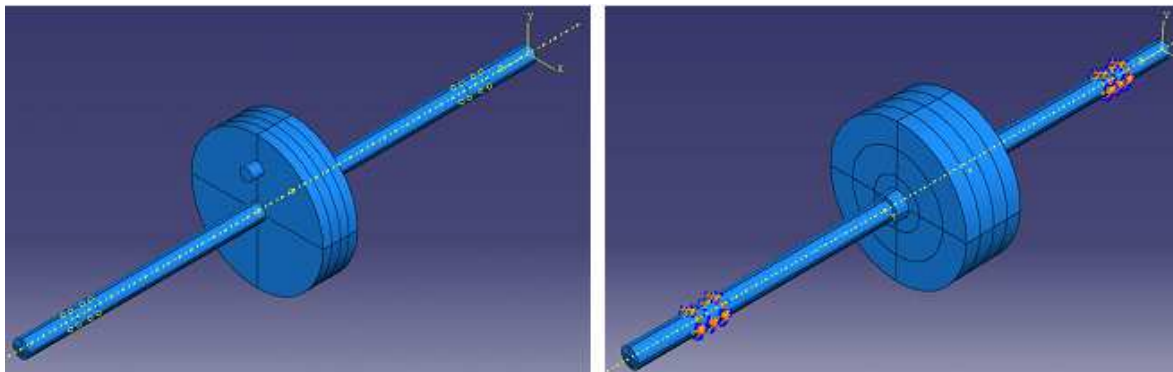
Para finalizar, se observa que la posición de los discos en el eje es un factor importante. A medida que el disco se aleja del centro del eje y se sitúa en posiciones más cercanas a los rodamientos, las frecuencias propias son menores y se aprecia menor diferencia entre el caso sin fisura y con fisura.

Con todo esto, se puede decir que el caso más crítico (frecuencias menores) es aquel en el que el disco más pesado se posicione en el centro del eje fisurado. Este caso es el correspondiente a la configuración 13.

### 3.3.2 Análisis dinámico.

Para el siguiente apartado, el análisis dinámico del rotor, se ha decidido centrarse en dos casos particulares: *configuraciones 12 y 13* (figura 40). El principal motivo de esta decisión es el validar experimentalmente los resultados, y por ello se debe tener en cuenta la frecuencia natural que es capaz de alcanzar el rotor, ya que se pretende sobrepasar la velocidad crítica. El banco de ensayos está limitado a 100 Hz, por lo que estas dos opciones se encuentran por debajo de este valor y nos dejan margen para comprobar que pasa después y así averiguar si se llega a alcanzar la velocidad crítica. Por otra parte se dispone en el laboratorio de un disco de 5 kg, para llevar a cabo el ensayo.

El motivo de escoger la *configuración 12* es para ver como varían los resultados con la masa del disco y de este modo establecer comparaciones entre discos del mismo material pero distintas dimensiones, además se ha añadido una masa de 10 g al disco para desequilibrar el rotor.

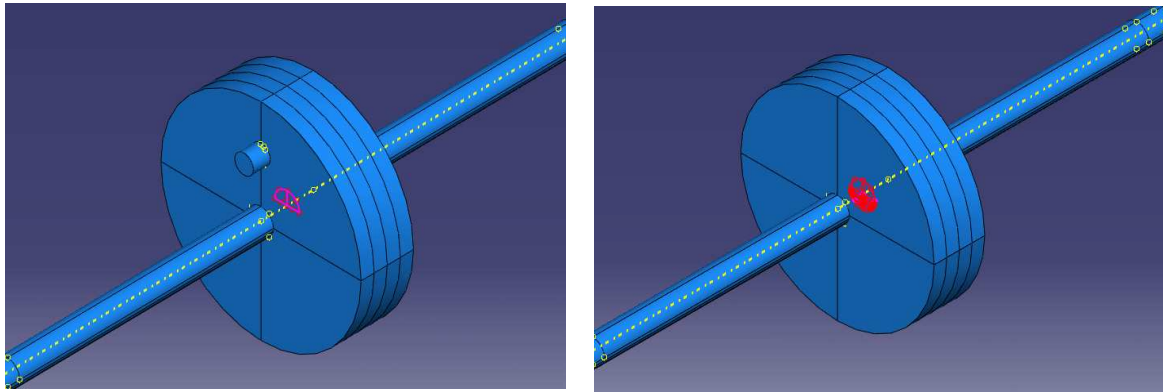


**Figura 40.** Configuración 12 modificada y configuración 13.

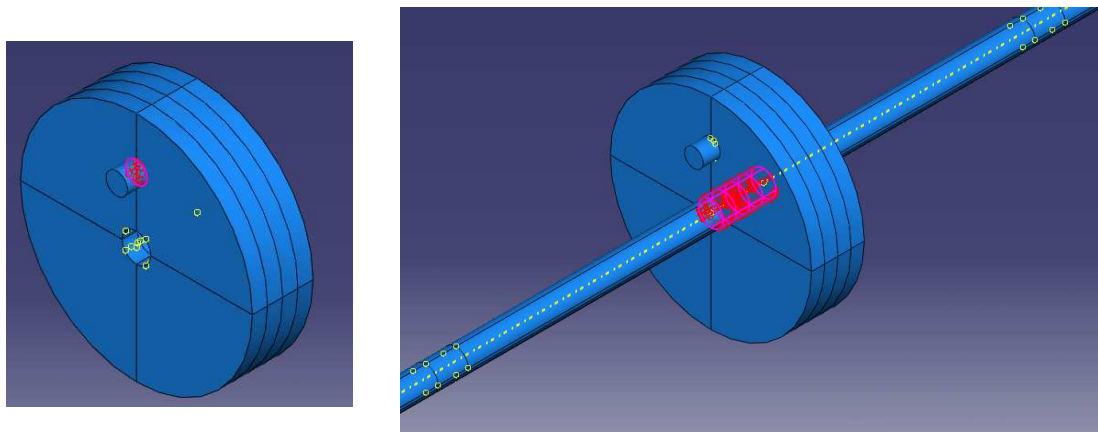
#### Fase de preproceso.

Las partes ya creadas en el análisis estático son válidas para este nuevo estudio, tan sólo se necesita crear la masa de 10 g. En la figura 40 se observa como la masa queda colocada en el disco.

Las restricciones que se han realizado en el anterior análisis seguirán siendo las mismas, que son las que unen cada parte del eje, dando lugar a los dos casos: con fisura y sin fisura (figura 41), y la que une el disco con el eje (figura 42).



**Figura 41.** A la izquierda caso con fisura al 50%, a la derecha caso sin fisura.



**Figura 42.** Creación de restricciones.

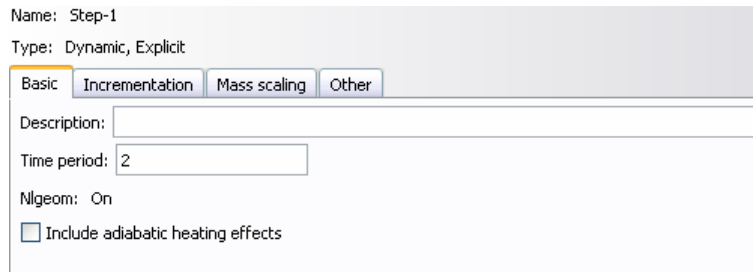
Todos los demás pasos realizados son eliminados del modelo, ya que se implantará un nuevo paso dinámico y se impondrán las cargas y condiciones de contorno requeridas por el modelo, tratando de asemejarlo a la realidad en mayor medida de lo posible.

El paso que se emplea es explícito dinámico, denominando por Abaqus® 'dynamic explicit'. Un análisis dinámico explícito es computacionalmente más eficiente que el análisis dinámico implícito para modelos grandes con respuesta dinámica relativamente corta, así como para caracterizar procesos o eventos discontinuos. Permite definir condiciones de contacto, así como el comportamiento inelástico del material, además del amortiguamiento de la estructura, introduciendo energía de disipación dentro del modelo. Usa una consistente teoría para representar grandes rotaciones y grandes deformaciones, pero puede usar la teoría de deformación lineal para representar pequeñas rotaciones de la estructura. Este tipo de análisis se utiliza en problemas cuasi-estáticos con condiciones de contacto complicadas. Permite emplear incrementos de tiempo de forma automática o fija por el usuario. Abaqus® usa el operador de diferencias centrales como regla de integración en el tiempo, cada incremento es relativamente menos costoso con el método de integración directa ya que no se lleva a cabo la solución



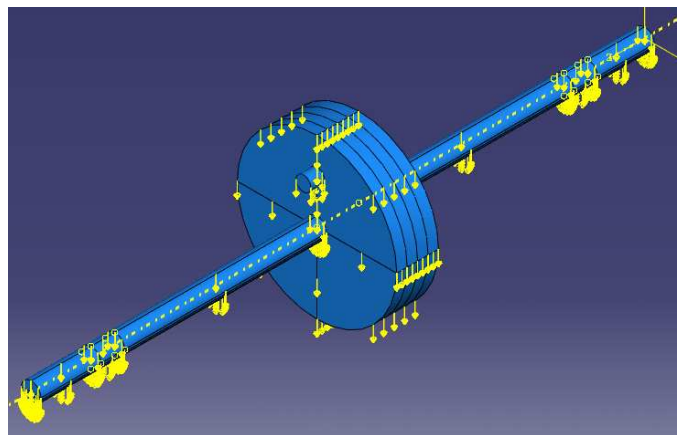
de un conjunto de ecuaciones simultáneamente. El operador explícito satisface las ecuaciones de equilibrio dinámico al comienzo de cada incremento [17].

Se configura el paso (ver figura 43) para que tenga una duración de 2 segundos, que es el tiempo en que el rotor estará girando.



**Figura 43.** Paso dinámico.

Seguidamente, se procede a colocar las cargas a las que se encuentra sometido el rotor; en este caso el rotor solo está afectado por la gravedad (ver figura 44).



**Figura 44.** Carga de la gravedad.

Se imponen las condiciones de contorno, se tendrán que fijar donde se encuentran los rodamientos, serán dos condiciones de desplazamiento en las cuales se inicializarán a cero las posiciones en el eje 'x', eje 'y' así como el giro en 'z'. La otra condición es que el eje entero está sometido a una condición de velocidad angular; ésta impone que la velocidad angular en torno al eje 'z' sea aproximadamente  $1.4\omega$ , donde  $\omega$  es la primera frecuencia natural. Con esto conseguiremos ver que sucede cuando el rotor alcanza y sobrepasa la primera velocidad crítica. Para la *configuración 12* este valor será 510 rad/s y para la *configuración 13* será 490 rad/s.

Como se quiere simular un arranque que alcance la primera frecuencia natural y la sobrepase, se debe crear una rampa de velocidad con una amplitud que nos proporcione

esta condición. Esta rampa se puede ver en la figura 45, su duración será igual que la duración del paso dinámico.

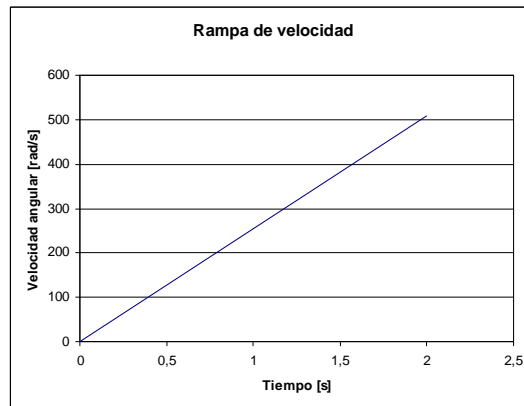


Figura 45. Rampa de arranque del rotor.

Todas estas condiciones que se han ido describiendo pueden resumirse en las figuras 46 y 47.

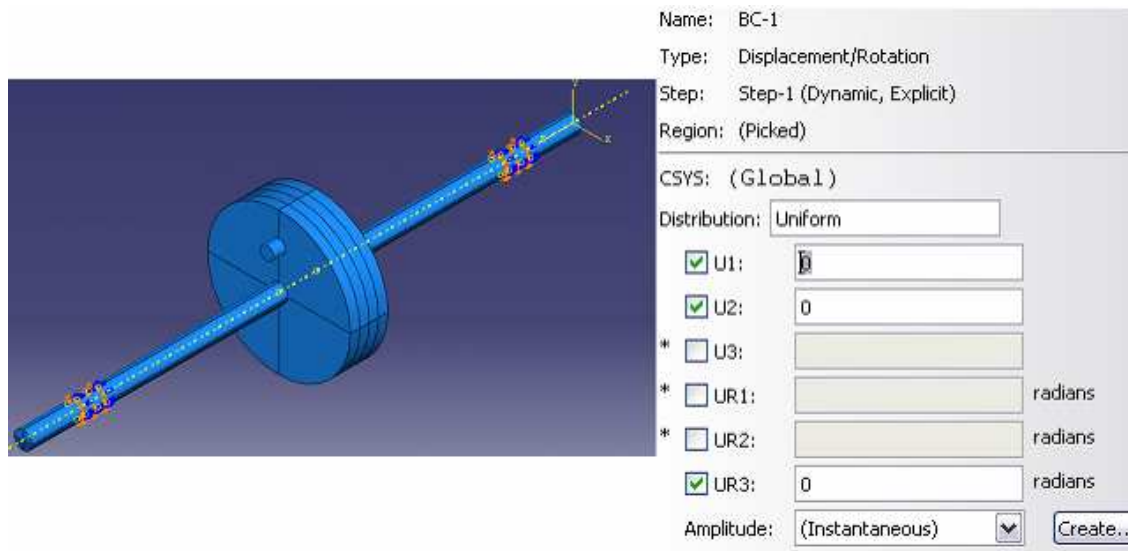


Figura 46. Condición de desplazamiento en los rodamientos.

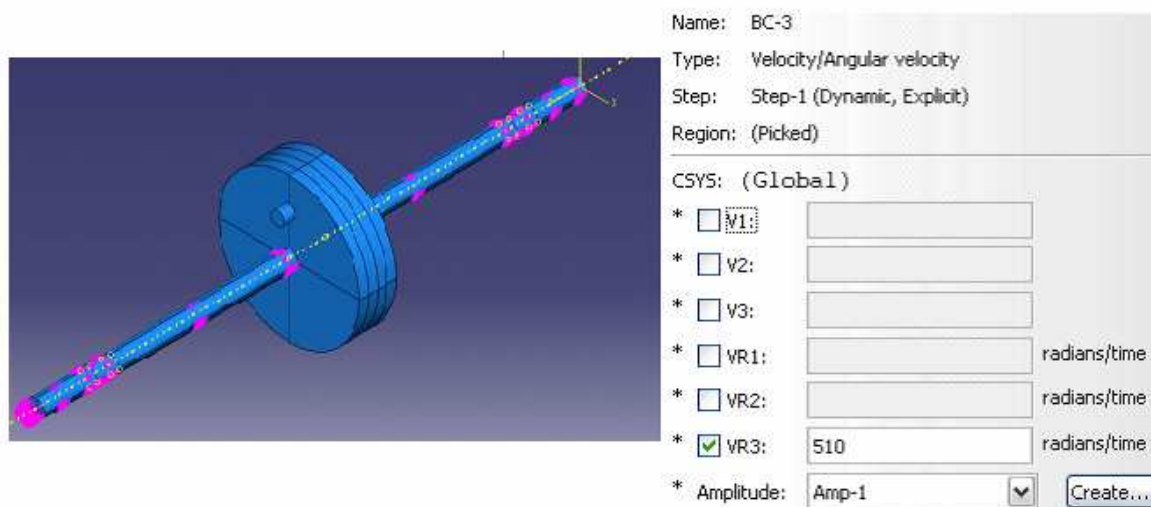
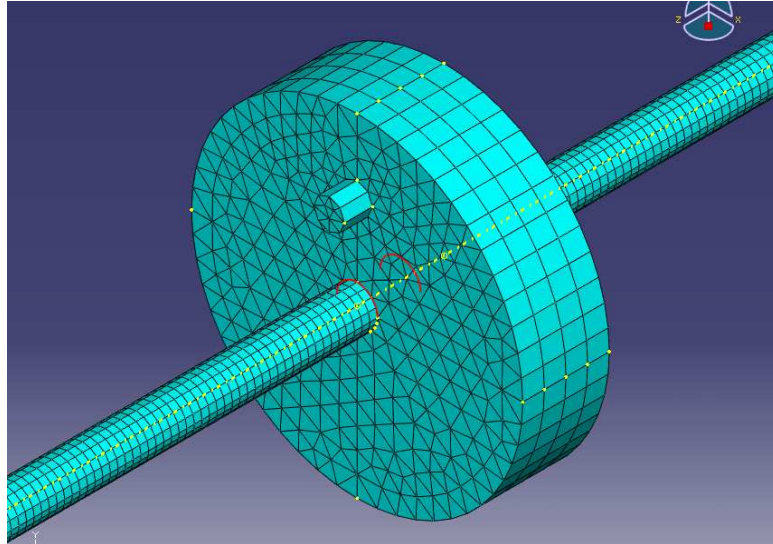


Figura 47. Condición de velocidad en el eje.

Antes de mallar el conjunto, se selecciona un conjunto de nodos (figura 48) para simplificar el tiempo de solución del problema ya que se toman los nodos de mayor interés, los puntos más relevantes son aquellos que se encuentran entorno a la zona de la fisura y los próximos a esta zona crítica.

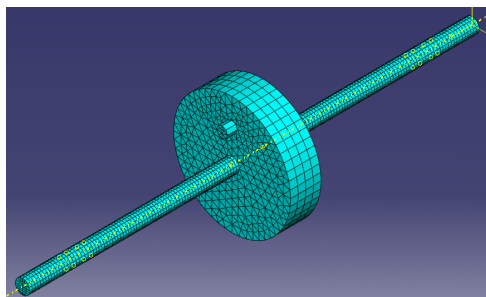


**Figura 48.** Set seleccionado,

Es recomendable configurar las salidas que se desea obtener, que serán los desplazamientos horizontales, verticales y las velocidades lineales del eje 'x' y del eje 'y'. Con esto se logra disminuir el tiempo de cálculo notablemente.

La adquisición de datos se establecerá con una frecuencia de muestreo de 2000 Hz. Esta frecuencia indica el número de muestras que toma en un segundo, en este caso 2000 muestras por segundo.

Por último, el mallado del eje será de tamaño 0.003 m y el del disco será algo menos denso de 0.005 m ya que la información que más interesa es donde se encuentra el conjunto de nodos seleccionados, y por ello ahí debe ser el mallado más denso.



**Figura 49.** Mallado del rotor.

De las figuras 41 a 49 que se han visto en esta fase de preproceso son las correspondientes a la *configuración 12*, las de la *configuración 13* son análogas.

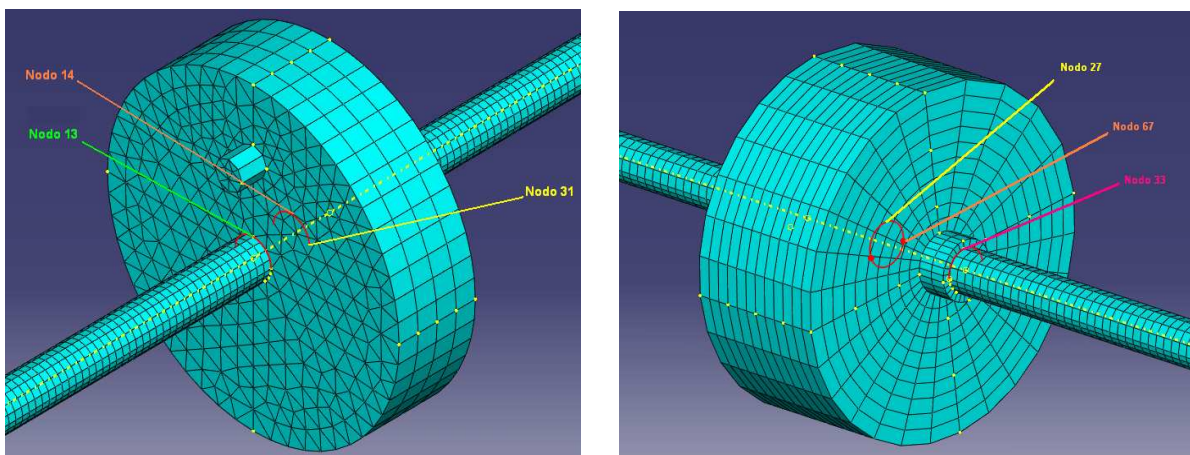
### **Fase de Solución.**

Durante esta fase, se procede a ejecutar el arranque del rotor, para obtener los resultados es necesario esperar un tiempo, que será proporcional al número de variables solicitadas en la salida, así como el número de nodos de los cuales se requiere la información pertinente.

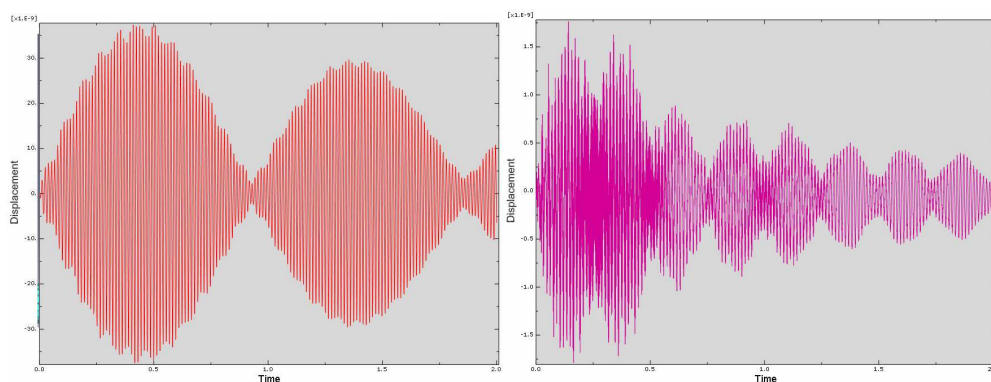
**Fase de Postproceso.**

Llegados a este punto, se visualizan los datos obtenidos. Para que el lector aprecie mejor la diferencia entre los dos casos (con fisura y sin fisura), se compararán paralelamente los resultados.

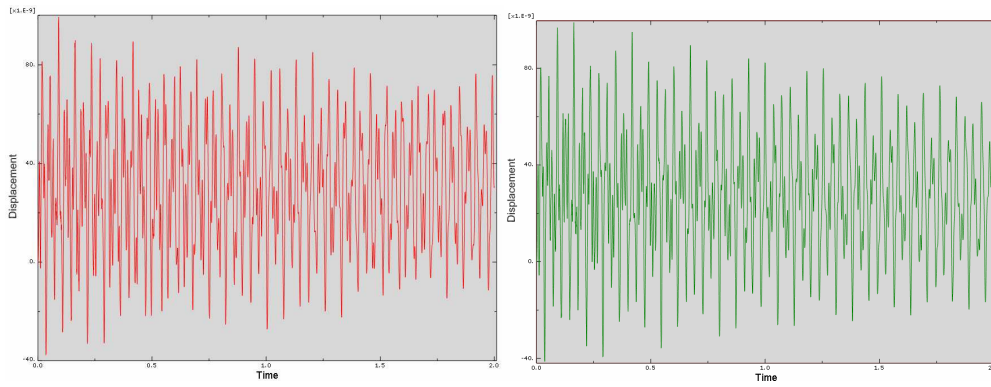
La figura 50 nos muestra los nodos seleccionados para cada configuración, de esos nodos obtendremos los desplazamientos y velocidades.



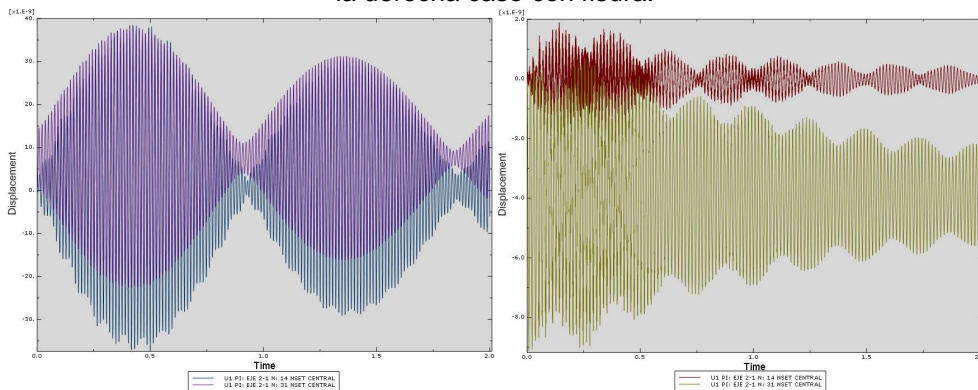
**Figura 50.** Nodos seleccionados.



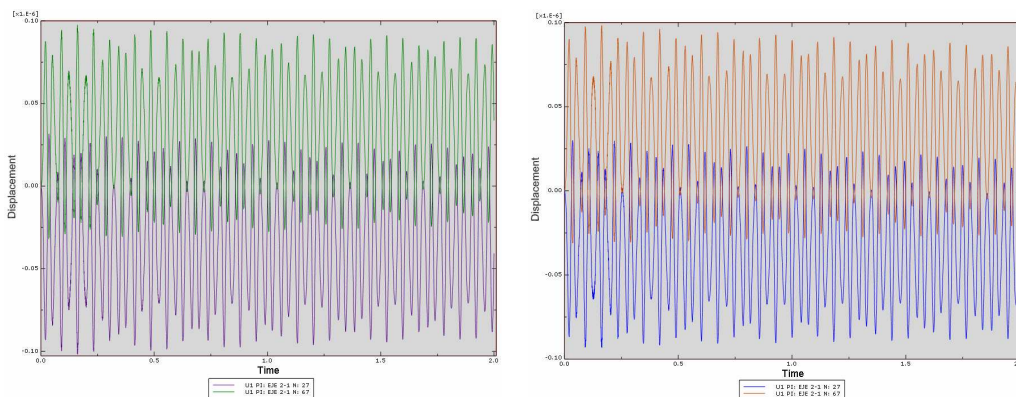
**Figura 51.** Configuración 12. Desplazamiento en x en el nodo 13. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.



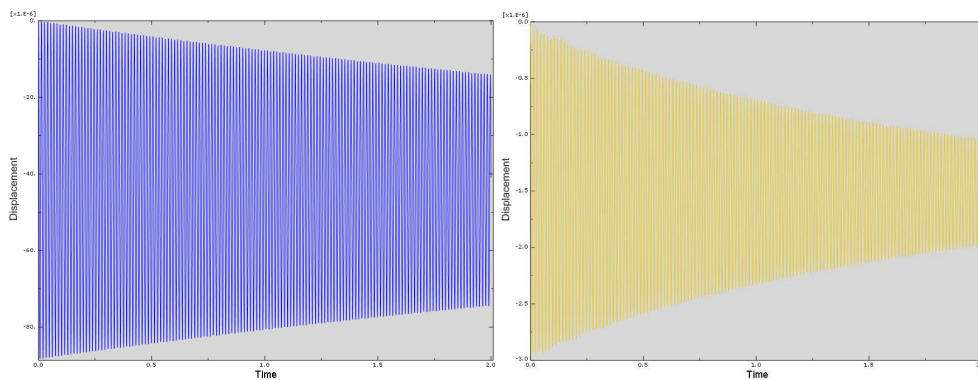
**Figura 52.** Configuración 13. Desplazamiento en x en los nodo 33. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.



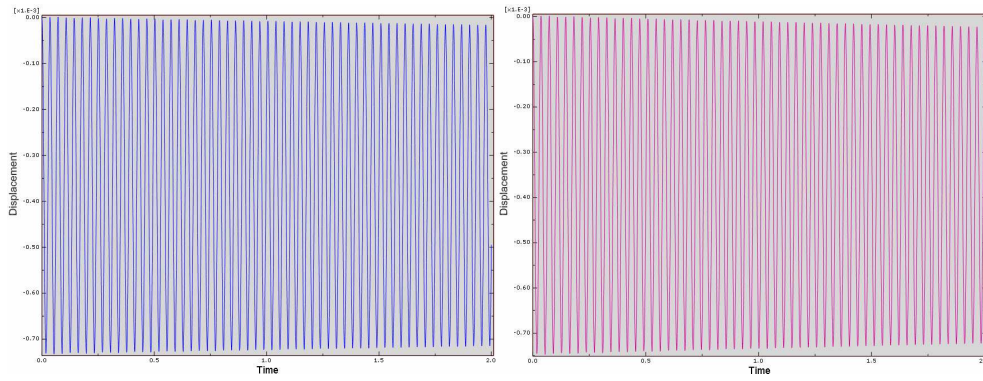
**Figura 53.** Configuración 12, Desplazamiento en x en los nodos 14 y 31. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.



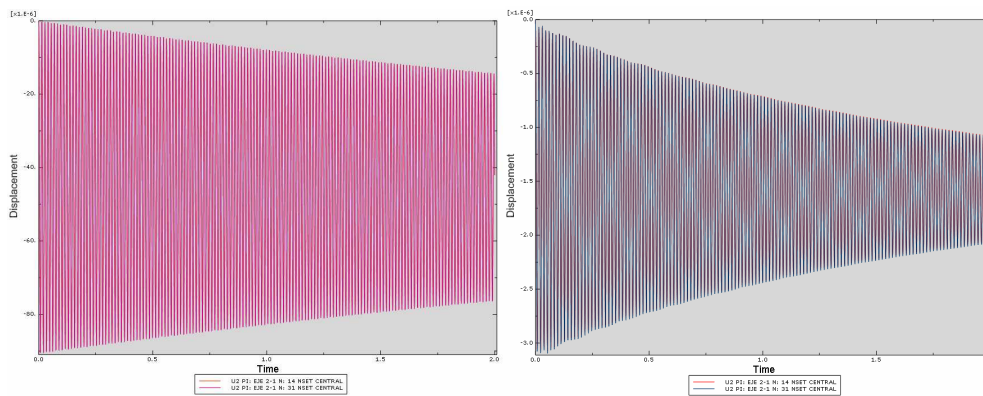
**Figura 54.** Configuración 13. Desplazamientos en x en los nodos 27 y 67. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.



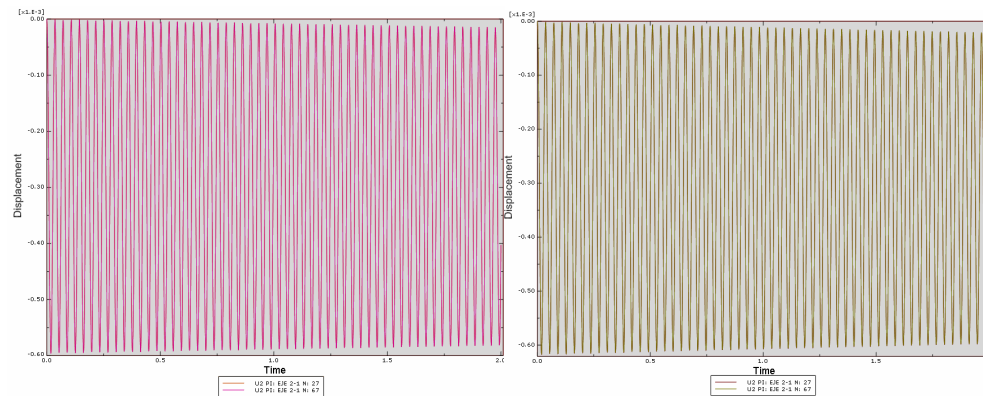
**Figura 55.** Configuración 12. Desplazamiento en y en el nodo 13. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura



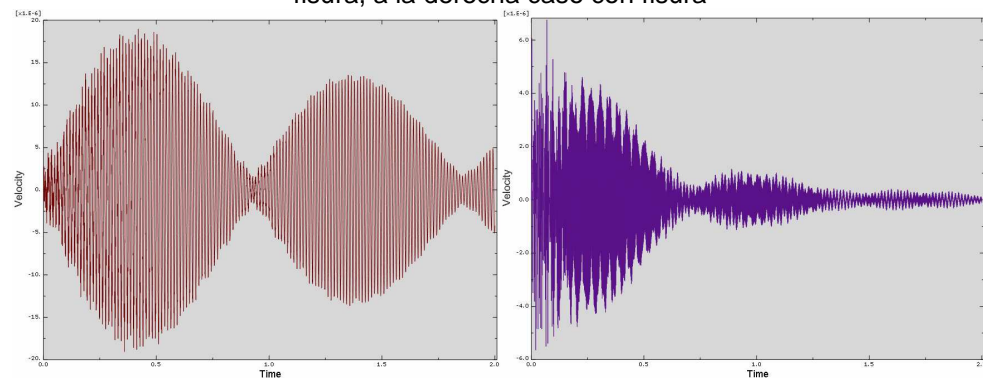
**Figura 56.** Configuración 13. Desplazamiento en y en el nodo 33. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.



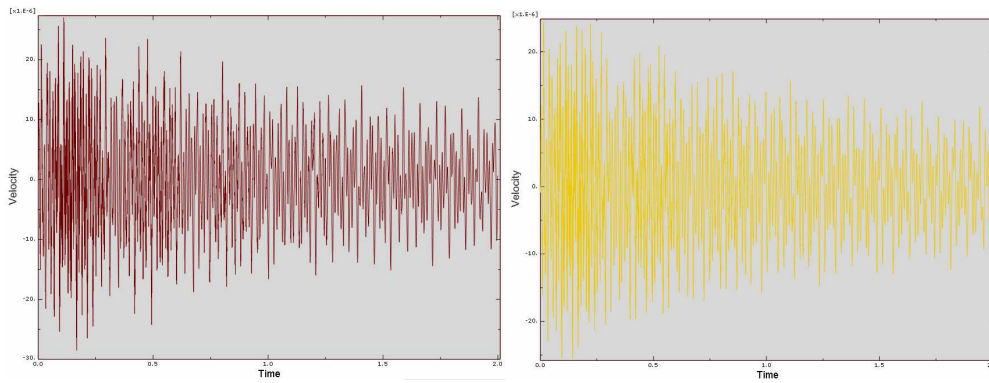
**Figura 57.** Configuración 12. Desplazamientos en y en los nodos 14 y 31. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura



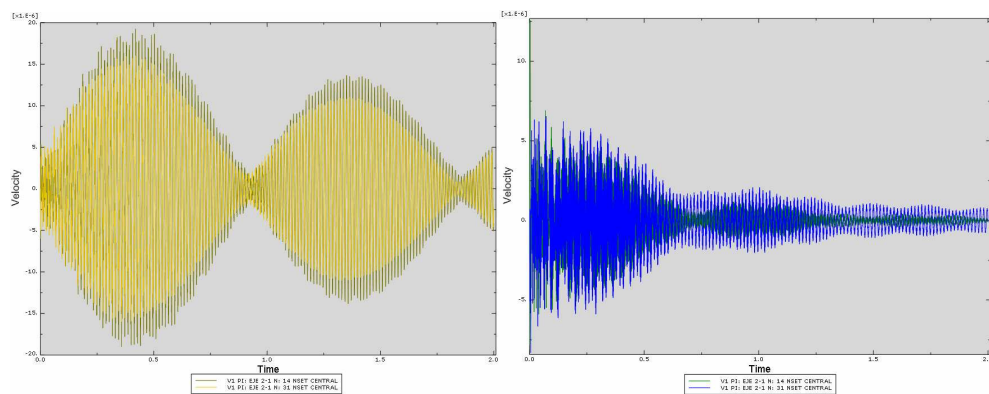
**Figura 58.** Configuración 13. Desplazamientos en y en los nodos 27 y 67. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura



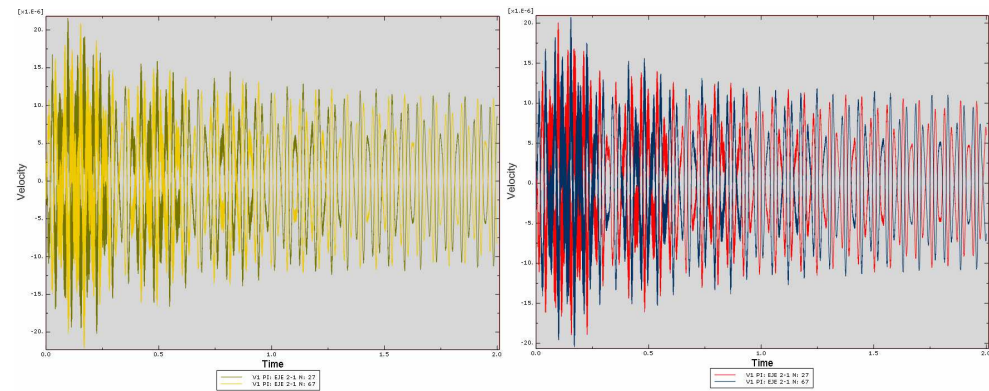
**Figura 59.** Configuración 12. Velocidad en x en el nodo 13. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.



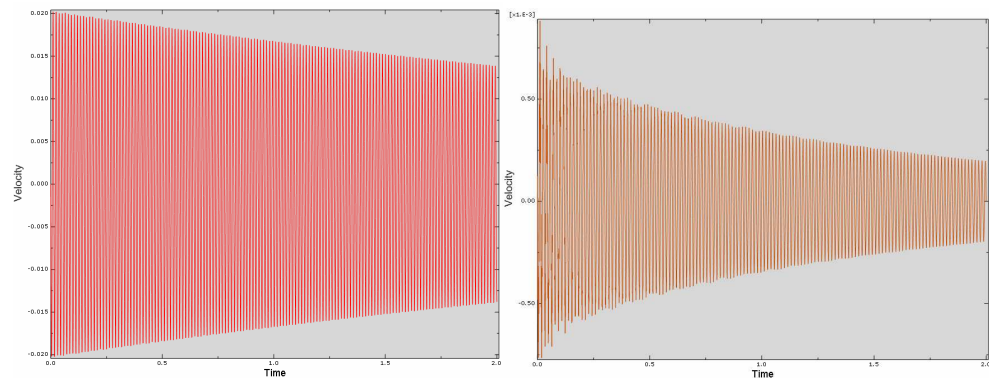
**Figura 60.** Configuración 13. Velocidad en x en el nodo 33. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.



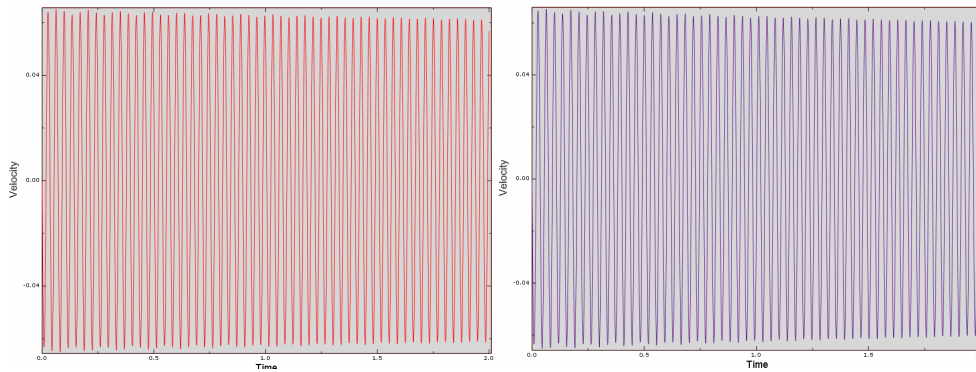
**Figura 61.** Configuración 12. Velocidades en x en los nodos 14 y 31. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.



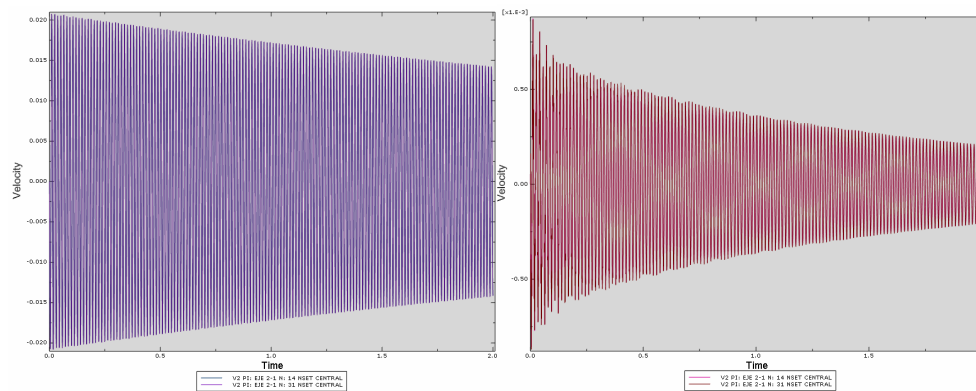
**Figura 62.** Configuración 13. Velocidades en x en los nodos 27 y 67. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.



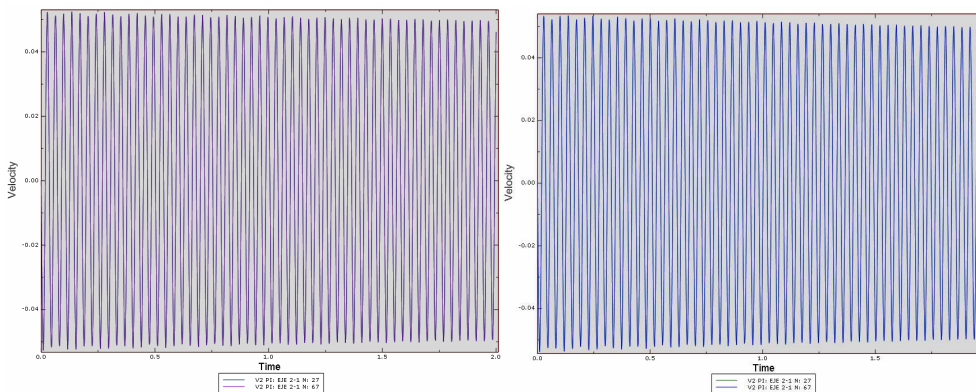
**Figura 63.** Configuración 12. Velocidad en y en el nodo 13. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.



**Figura 64.** Configuración 13. Velocidad en y en el nodo 33. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.



**Figura 65.** Configuración 12. Velocidades en y en los nodos 14 y 31. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.



**Figura 66.** Configuración 13. Velocidades en y en los nodo 27 y 67. A la izquierda caso sin fisura, a la derecha caso con fisura.

**Conclusiones**

Para visualizar los resultados del análisis dinámico se han representado dos de los nodos pertenecientes a la zona media del eje y otro separado una pequeña distancia del eje, de esta forma se pueden interpretar mejor la existencia de la fisura.

En primer lugar, cabe destacar que en todos las respuestas de rotor con fisura las gráficas son mucho más quebradas, esto se debe a que el movimiento se hace más



inestable y por ello oscila de forma descontrolada, en cambio cuando no hay fisura el movimiento es mucho más suave y se ve más definido.

Respecto a los desplazamientos horizontales, en los nodos separados del punto medio (nodo 13 para la *configuración 12* y nodo 33 para la *configuración 13*) se observa que con el disco más pesado son más inestables. Por ejemplo, fijándose en la figura 51, se observan unas señales que mantienen una forma claramente definida, sin embargo en la figura 52 ya no se percibe esa forma y se convierte en una señal más abrupta. En relación a los nodos centrales, en ambos casos se ve que la forma de onda es similar a la obtenida en los nodos ligeramente alejados del centro, con la clara diferencia de que la amplitud de los casos con fisura es más mayor, en especial en el caso del disco de 5 kg.

En cuanto a los desplazamientos verticales, se percibe que la amplitud de todos los casos aumenta en un orden de tres, esto se explica por la gravedad que afecta al eje. Además, se aprecia como va disminuyendo la amplitud de la señal de la *configuración 12* (figuras 55 y 57) y en cambio esta disminución no es tan perceptible en la *configuración 13* (figuras 56 y 58), esto es debido a la distinta masa del disco.

En referencia a las velocidades, se observa que las gráficas son muy similares a sus correspondientes desplazamientos, tal como se esperaba ya que esto mismo sucede teóricamente. Es importante destacar que las amplitudes son superiores aproximadamente del orden de tres a los desplazamientos respectivos. Un ejemplo serían las figuras 51 y 59 que muestran perfectamente la similitud de la forma de la señal.

En este capítulo se pretendía alcanzar la primera velocidad crítica de las configuraciones elegidas, por ello se empleó una rampa de arranque que pasará por su primera frecuencia natural, sobrepasándola. A pesar de ello, no se ha conseguido alcanzar dicha velocidad esto puede ser debido a que Abaqus<sup>®</sup> no consigue simular el arranque en tan poco tiempo. El tiempo de arranque que se ha impuesto es de dos segundos, el motivo de emplear un tiempo tan pequeño es que Abaqus<sup>®</sup> necesita mucho tiempo para simular este arranque y tras realizar varios intentos no se logró imponer más tiempo ya que el tiempo de solución sería excesivo y se generarían archivos de salida ilegibles.

Otra razón que explica los resultados obtenidos es que Abaqus<sup>®</sup> requiere memoria excesiva en el procesador para un funcionamiento correcto.

## Capítulo 4

---

# VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

## 4.1 INTRODUCCIÓN.

En esta parte del proyecto se procederá a validar experimentalmente el modelo del rotor Jeffcott correspondiente a la *configuración 13* del capítulo anterior, que es el mismo que el estudiado en el capítulo 2 de este proyecto. Este rotor, como se ha mencionado anteriormente, está formado por un eje de aluminio y un disco de acero de 5 kg localizado en la zona central del eje. Se ha tomado la decisión de emplear una fisura de menor tamaño, en concreto al 12.5%, por motivos de seguridad a la hora de realizar los ensayos. Se realizarán tres ensayos con cada eje, sin fisura y con fisura del 12.5%.

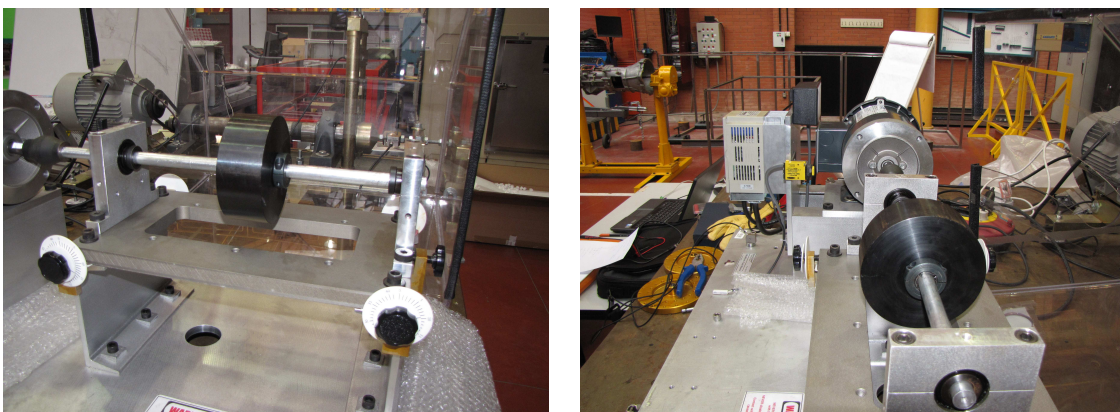
Las señales que se registren se analizarán mediante la realización de diagramas cascada o 'waterfall' y espectrogramas, utilizando la aplicación Matlab<sup>®</sup>.

## 4.2 PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL.

### 4.2.1 Descripción del ensayo.

En primer lugar, se describen los aparatos utilizados para la realización de los ensayos.

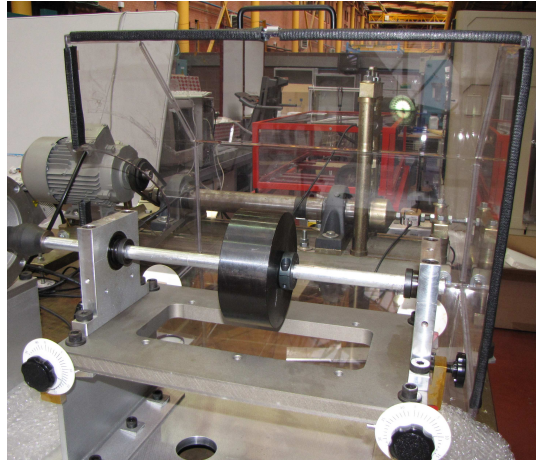
- Máquina de ensayo. La máquina ha sido diseñada por la empresa Spectra Quest, Inc. para el ensayo de rodamientos y elementos rotativos y puede ser utilizada a altas velocidades. En la figura 67 se muestra dicha máquina.



**Figura 67.** Banco de ensayos MFS de Spectra Quest.

- Pantalla de protección. Es la componente que protege a las personas y a equipos de laboratorio, en caso de que ocurra un accidente en el banco de ensayo, como por

ejemplo la fractura de un eje rotativo en operación. Siempre que la máquina de ensayo se encuentre funcionando estará bajada (ver figura 68).



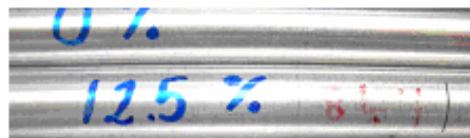
**Figura 68.** Banco de ensayos MFS de Spectra Quest con pantalla protectora.

- Rodamientos. El modelo de rodamiento es el ER10K de la empresa MB Manufacturing de 5/8 pulgadas de diámetro interno. El rodamiento tendrá su anillo exterior fijo y el anillo interior se mueve solidario al eje de la máquina de ensayo (ver figura 69).



**Figura 69.** Rodamientos.

- Ejes de aluminio de diámetro 5/8 pulgadas. Un eje con fisura al 12.5% situada a 150 mm del rodamiento izquierdo y un eje sin fisura, como se observa en la figura 70.



**Figura 70.** Ejes de aluminio, arriba sin fisura abajo con fisura.

- Disco de acero, cuyo peso es de 5 kg, de diámetro interior 5/8 pulgadas.



**Figura 71.** Eje de aluminio con disco de acero montado en el banco de ensayos.

- Tacómetro (figura 72). Elemento encargado mostrar la velocidad de giro en rpm.



**Figura 72.** Tacómetro.

- Acoplamiento flexible, que conecta el motor y el eje. La finalidad de utilizar este tipo de acoplamiento es para que el funcionamiento del motor no transfiera perturbaciones o ruidos al eje rotativo.
- Acelerómetro y amplificador. El acelerómetro piezoeléctrico MMF KS943B.10, con un ancho de banda de 0.3 a 19.000 Hz y un equivalente de salida de  $10 \text{ mV/g} \pm 5\%$ ; es colocado sobre el soporte que aloja al rodamiento izquierdo. El amplificador MMF M32, de un canal, con un ancho de banda de 30 KHz., y cuyos factores de amplificación pueden variar entre 1, 10 y  $100 \text{ mV/ms}^{-2}$ . Durante el ensayo se fijará en posición x10 la aceleración vertical y x1 la velocidad de giro (ver figura 73).



**Figura 73.** Acelerómetro y amplificador.

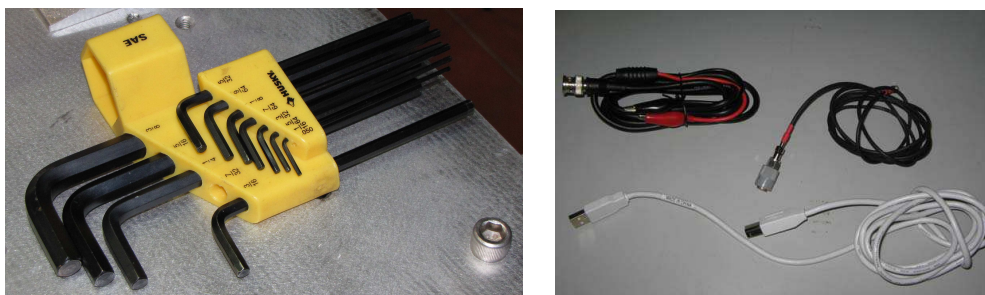
- Tarjeta de adquisición de datos Keithley KUSB-3100 de ocho canales, con una frecuencia de muestreo máxima de 1 MHz por canal. Presenta entradas tanto analógicas como digitales, aunque en este proyecto solamente se utilizarán entradas analógicas.



**Figura 74.** Tarjeta de adquisición de datos.

- Programa de adquisición de datos. Se trata de un módulo programado con el Software Test Point<sup>®</sup>, basado en programación gráfica en lugar de órdenes escritas, es decir que la forma de programar consiste en ir seleccionando iconos, cada uno con una función equivalente a las órdenes de los lenguajes tradicionales.
- Ordenador personal equipado con el programa de adquisición de datos Test Point<sup>®</sup>. Debe tener incluido además dos puertos USB. Uno de ellos para la entrada de señales y otro disponible para el hardware de protección del programa de adquisición de datos.

Además, cabe mencionar que para la realización de los experimentos se utilizaron distintos tipos de herramientas (llaves hexagonales), instrumentos de medición (pie de Rey) y cables de conexión (acelerómetro-amplificador, amplificador-tarjeta de datos, tarjeta-PC) que facilitaron el montaje de todos los componentes. Algunos de estos elementos se muestran en la figura 75.



**Figura 75.** Llaves hexagonales y cables de conexión.

#### 4.2.2. Metodología experimental.

Se llevaron a cabo dos experimentos. El primero con el eje sin grieta y el segundo con el eje fisurado al 12.5%, a 37 mm del centro del eje.

Estos dos casos serán analizados mediante un arranque según la rampa que se encuentra en la gráfica 8, como se puede apreciar se alcanzan 80 Hz que es aproximadamente  $1.4\omega$ , donde  $\omega$  es la primera frecuencia natural. El ensayo dura 12 segundos, en los 10 primeros se alcanza la velocidad y los otros dos últimos son constantes.

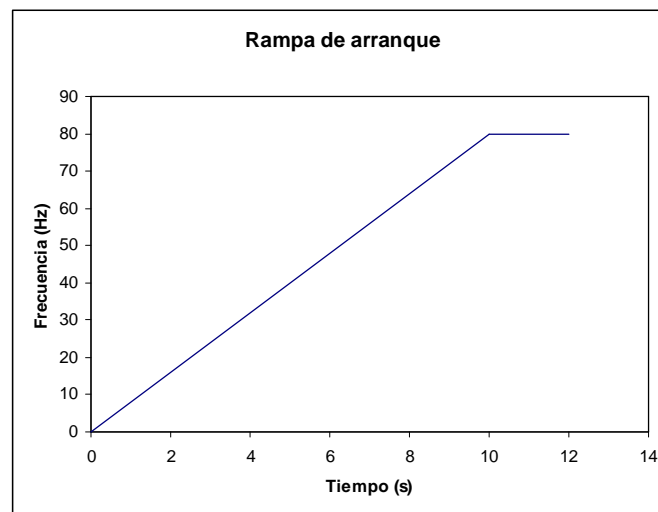


Figura 76. Rampa de arranque del rotor.

Para imponer la velocidad de giro se emplea el variador de frecuencias, que se programará para que alcance 80 Hz en 10 segundos y posteriormente los mantenga.



Figura 77. Variador de frecuencias.

Para el programa de adquisición de datos se establecerá una frecuencia de muestreo de 5000 Hz. Esta frecuencia indica el número de muestras que toma en un segundo, en este caso serán 5000 muestras por segundo.

Previamente, antes de realizarse los ensayos hay que asegurarse de que el centro de línea del eje está perfectamente alineado con el eje de rotación del motor eléctrico para eliminar la respuesta al desalineamiento. Así como también es recomendable dejar durante unos minutos el motor en funcionamiento a una velocidad baja para que se caliente.

### **4.3 HERRAMIENTAS PARA ANALIZAR SEÑALES.**

Para interpretar las señales obtenidas en los ensayos se requiere de un análisis espectral. El análisis espectral surge de la necesidad de separar las distintas frecuencias que aparecen en una misma señal. La herramienta matemática que permite la descomposición de una señal en sus componentes fundamentales es la transformada de Fourier. A continuación, se introducen los conceptos de espectrograma y diagrama en cascada, gracias a los cuales se explicarán los resultados arrojados por los experimentos.

#### **4.3.1 Espectrograma.**

El espectrograma es una representación visual de las variaciones de la frecuencia en el eje vertical, y de la intensidad mediante los niveles de colores o grises del sonido que se está representando a lo largo del tiempo que se representa en el eje horizontal [25].

Matemáticamente el análisis espectral está relacionado con la transformada de Fourier. Ésta puede llevarse a cabo para pequeños intervalos de tiempo, o menos frecuentemente para intervalos largos, o incluso puede realizarse el análisis espectral de una función determinista. Además la transformada de Fourier de una función no sólo permite hacer una descomposición espectral de la amplitud de onda que se da en una determinada frecuencia (formantes de una onda), sino que con el espectro generado por el análisis de Fourier incluso se puede reconstruir la función original mediante la transformada inversa.



El espectro es la representación de las frecuencias que componen una señal de audio. El espectro se obtiene calculando la energía que aporta cada frecuencia al sonido total. Normalmente la representación no se hace en términos de energía directamente, sino que se calcula el nivel (10Log) respecto a la energía de referencia.

Con esto se obtiene el nivel espectral expresado en dB. Aunque el proceso de cálculo es bastante tedioso la electrónica actual, con procesadores TFT y FFT, simplifica enormemente el proceso.

#### **4.3.2 Diagrama en cascada.**

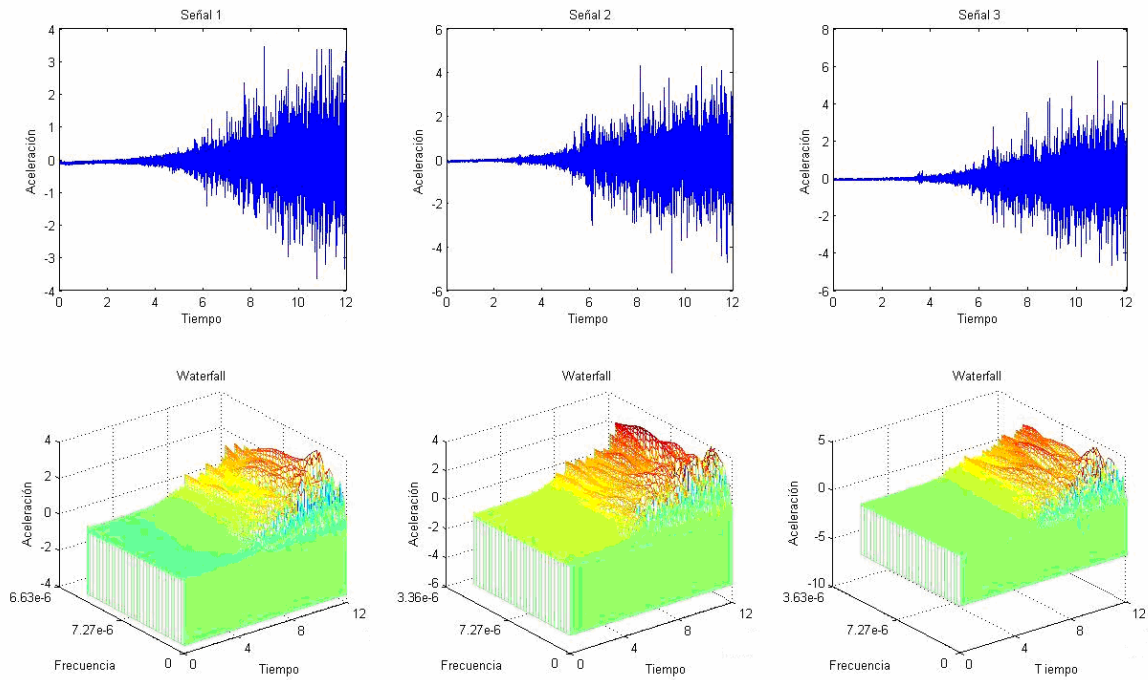
Un diagrama en cascada permite analizar datos transitorios, mediante un formato en cascada, es útil para analizar variables que varían con el tiempo y/o la velocidad de giro. Este tipo de gráficos en cascada son especialmente potentes para arranques y paradas de máquinas. Los datos en forma de cascada permiten diferenciar inmediatamente los datos fijos de los datos que varían con la velocidad.

Un diagrama en cascada consiste en una serie de espectros adquiridos en tiempo consecutivo. La abcisa muestra la frecuencia, la ordenada muestra el tiempo y el tercer eje, perpendicular a los anteriores es la amplitud. Este tipo de gráficos muestra como las vibraciones cambian con el tiempo e indica que componentes están relacionadas con la velocidad de giro. Las componentes que varían a lo largo del tiempo van variando a lo largo del diagrama, mientras que las fijas se mueven hacia arriba del diagrama.

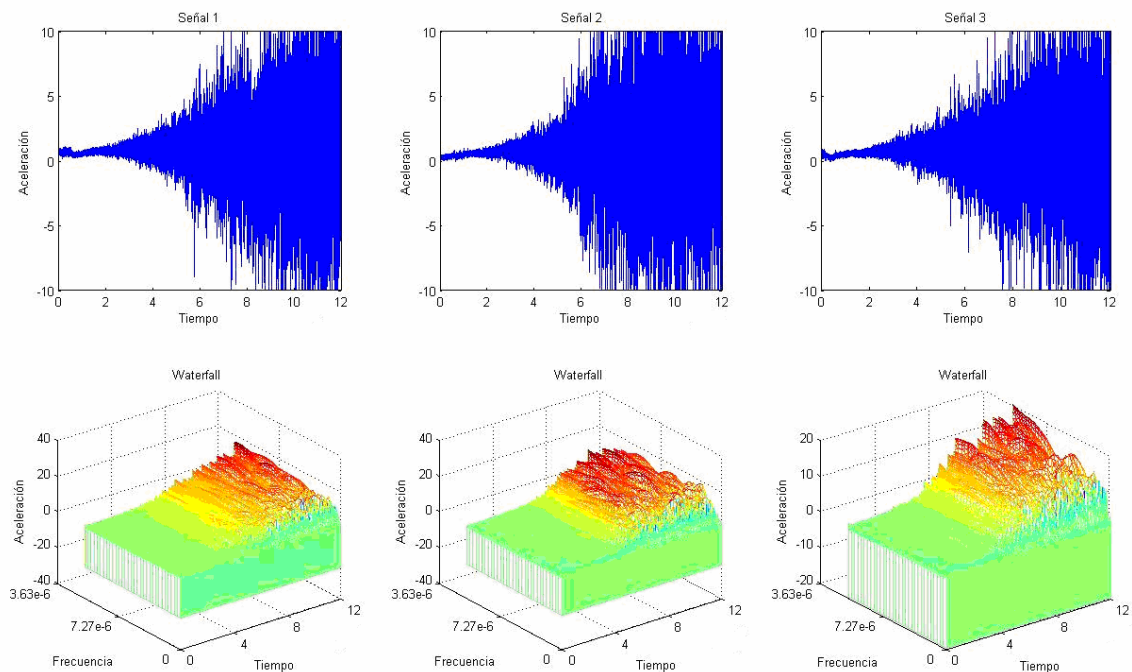
Mediante el empleo de este diagrama, se buscarán las velocidades críticas de los casos estudiados en la validación experimental, ya que se prestará especial atención a aquellos picos máximos de la aceleración.

#### **4.4 PROCESAMIENTO DE SEÑALES.**

Las señales experimentales registradas y grabadas se han procesado mediante el programa Matlab<sup>®</sup>. Se han obtenido tres señales para cada caso, cada señal tiene dos componentes: la aceleración en 'y' y la velocidad de rotación del eje. Mediante Matlab<sup>®</sup> se han realizado para la aceleración obtenida los diagramas en cascada (figuras 78 y 79) y para la velocidad de giro, espectrogramas (figuras 82 y 83). Para cada caso se han tomado las señales de aceleración y velocidad de rotación simultáneamente.

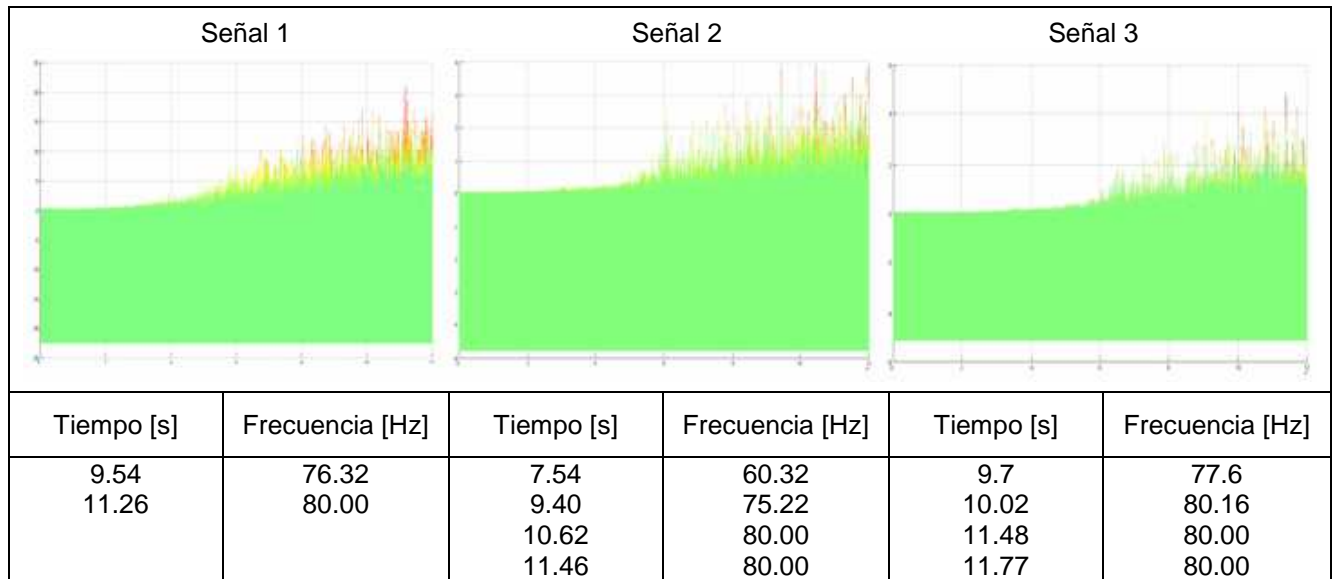


**Figura 78.** Señales caso sin fisura. Arriba aceleraciones en 'y', y abajo diagramas en cascada, escala 1:32, de la aceleraciones.

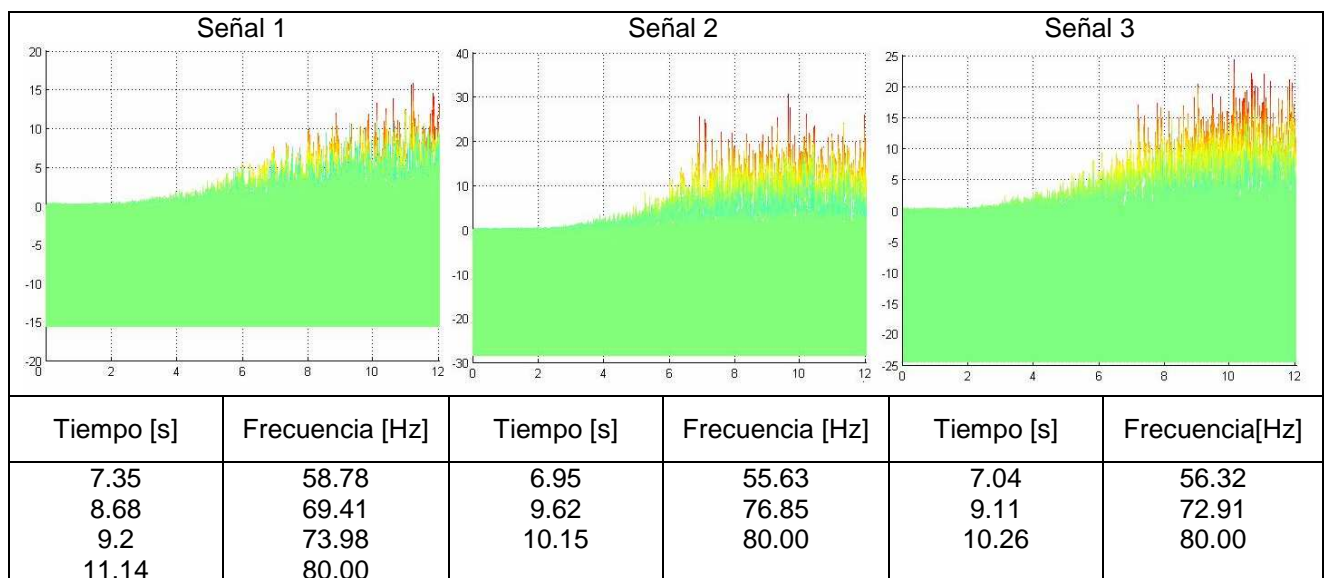


**Figura 79.** Señales caso con fisura al 12.5%. Arriba aceleraciones en 'y', y abajo los correspondientes diagramas en cascada, escala 1:32.

Las figuras 80 y 81 muestran las vistas 'yz' de los diagramas en cascada de las figuras 78 y 79, de esta forma se podrán identificar los picos máximos en las tablas.



**Figura 80.** Vista de los diagramas en cascada de las señales sin eje fisurado.

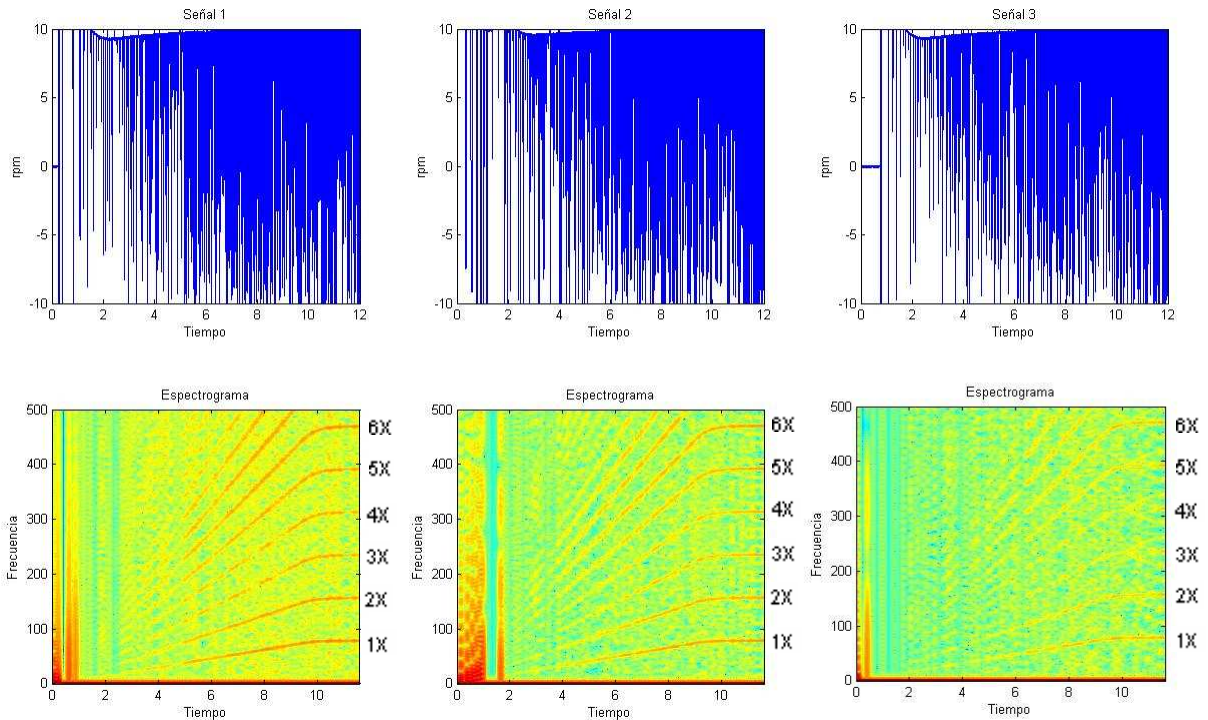


**Figura 81.** Vista de los diagramas en cascada de las señales con eje fisurado al 12.5%.

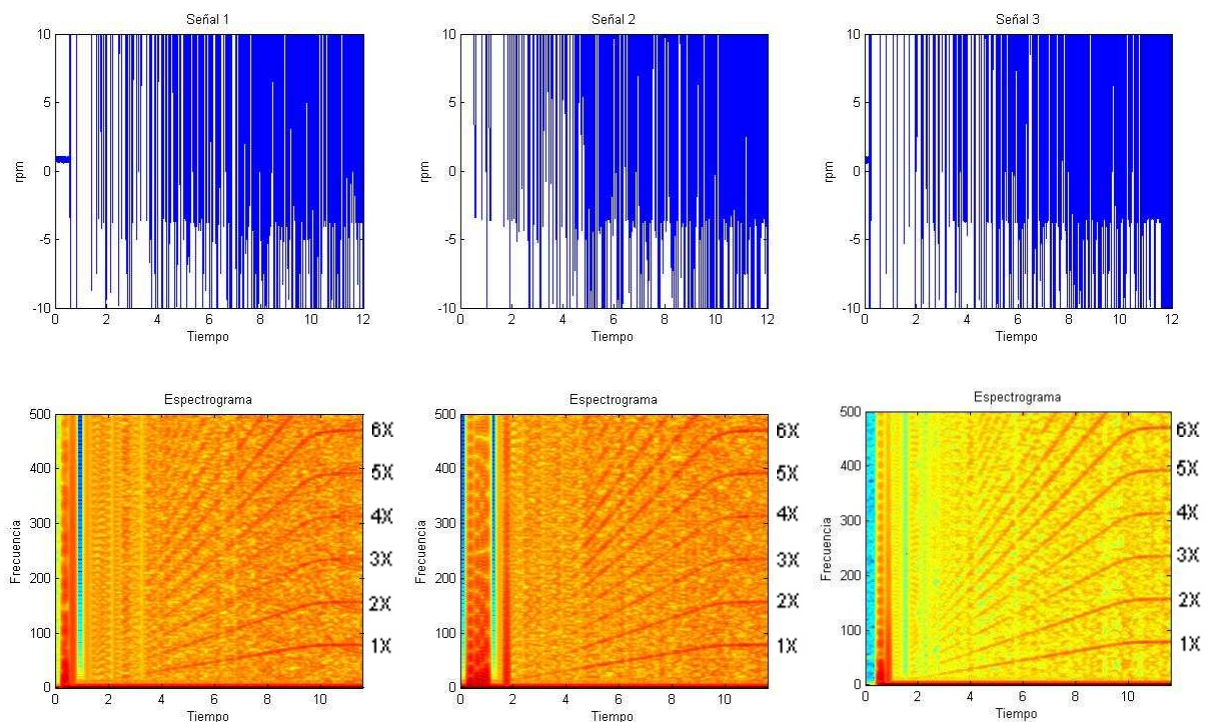
Teóricamente, la primera frecuencia propia se alcanza entorno a 56.5 Hz, experimentalmente el primer pico más destacado para el caso sin fisura se alcanza en aproximadamente 76 Hz y para el caso con fisura en 57 Hz. El caso con fisura se ajusta más al resultado obtenido mediante Abaqus<sup>®</sup>. La diferencia de valores podría explicarse con la falta de simultaneidad al arrancar el rotor y comenzar a grabar la señal. Se puede ver que la amplitud de la aceleración en el caso sin fisura es mayor que en el caso con fisura. A la hora de realizar los ensayos, se observó que en cierto instante el rotor se desplazaba verticalmente, lo que correspondería al modo 2 (figura 23). En el caso con fisura el modo 2 se lograría al llegar a unos 74 Hz, lo que explicaría los picos

significativos de las señales de esos casos. Lógicamente, se ve que en el caso con fisura hay muchos más picos que en el otro caso, tal y como sucedía en el análisis mediante elementos finitos.

Las figuras 82 y 83 muestran las señales de la velocidad de giro del rotor, así como sus espectrogramas correspondientes para cada caso particular.



**Figura 82.** Señales sin fisura. Arriba velocidad de giro del rotor, abajo espectrograma.



**Figura 83.** Señales con fisura. Arriba velocidad de giro del rotor, abajo espectrograma.

Hay que señalar que la velocidad de rotación no es especialmente constante en el arranque. Aunque la máquina esté en funcionamiento en un estado constante, la velocidad de rotación varía de hecho en torno a un valor de estado estacionario media, mientras que tal variación depende de la carga y de otros factores. Ya que el sonido y las señales de vibraciones obtenidas en una máquina rotativa están estrechamente relacionadas con su velocidad de rotación, son señales de tiempo variantes en la naturaleza. En consecuencia, la manera de extraer las características e interpretar las señales será muy importante en la investigación [21].

En las figuras 82 y 83 se muestran las señales de las velocidades de giro y sus espectrogramas. Los espectrogramas han sido ampliados en la frecuencia que se muestra para poder apreciar la curva sincrónica del motor (1X) que cuando llega a 12 segundos es de 80 Hz en todos los casos. La vibración sincrónica 1X es igual que la rampa de arranque, por lo que se deduce que el arranque ha sido realizado con las condiciones que se impusieron y se asegura que se alcanzaron 80 Hz. Se observan los armónicos 2X que tiene una frecuencia igual a dos veces la velocidad de rotación, así como los consecutivos 3X, 4X...

El arranque efectuado en los ensayos es demasiado rápido y como consecuencia esto queda reflejado en los espectrogramas mediante las líneas verticales que se ven al principio del arranque.

## Capítulo 5

---

# CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

## 5.1 CONCLUSIONES.

El principal objetivo de este proyecto era el de analizar analítica y experimentalmente las velocidades críticas en el rotor KIT MFS2004. Para ello se han establecido las configuraciones más adecuadas, para validarlas experimentalmente con los medios que se dispone. Se han estudiado dos casos particulares: uno en el que el eje presenta una fisura al 50% y otro en el que no la presenta.

Para alcanzar el objetivo marcado se han realizado tres partes: análisis analítico, un modelo en elementos finitos y validación experimental.

La primera parte, se ha conseguido con éxito, se ha demostrado las respuestas del rotor Jeffcott con distintas fisuras (sin fisura, al 12.5% y al 50%). En los supuestos, se ha visto como se alcanza la velocidad crítica del rotor y los efectos que conlleva la presencia de una fisura. Para lograrlo se ha empleado el programa Matlab<sup>®</sup>. Además esta sección constituye el marco teórico del proyecto, en ella se describen las ecuaciones del movimiento de un rotor Jeffcott, y se encuentran particularizadas para el presente proyecto.

En la segunda parte, se han realizado un modelo en elementos finitos, mediante el programa Abaqus<sup>®</sup>, se han llevado a cabo dos tipos de análisis: estático y dinámico. Gracias al primero de ellos, se han creado diversas configuraciones que se han ido desechando debido a que presentaban unos resultados que no podrían ser validados en el banco de ensayos, aunque si son útiles para el estudio del banco en sí. La principal limitación a la que se ha enfrentado es la velocidad de giro que se alcanza con la máquina de ensayo (100 Hz). Una vez estudiadas los modos propios de vibración, se escogieron dos casos para el análisis dinámico que se podrían desarrollar en el laboratorio. La respuesta obtenida en este último análisis no fue totalmente satisfactoria, porque no se ha podido ver lo que sucede cuando el rotor se acerca a su primera frecuencia propia. Esto es debido a que a pesar de simular el arranque, el programa no ha llegado a alcanzar la velocidad impuesta. También afecta que Abaqus<sup>®</sup> requiere demasiada memoria para guardar los resultados y puede haber influido negativamente para este proyecto, ya que al no disponer de memoria suficiente no ha alcanzado la velocidad solicitada.

La última parte, la validación experimental se ha llevado a cabo con el modelo desarrollado en el capítulo 2, *configuración 13*. Para mantenerse en los márgenes de la

seguridad la fisura del eje ha sido menor que en la simulación en Abaqus<sup>®</sup> (al 12.5%). En el banco de ensayos se procedió a efectuar el arranque del rotor y se registraron las señales de la aceleración vertical y de la velocidad de giro. Para cada caso particular se hicieron tres ensayos. Posteriormente se procesaron y se analizaron espectralmente mediante diagramas en cascada y espectrogramas, de nuevo mediante el programa Matlab<sup>®</sup>.

En todas las partes explicadas se han obtenido conclusiones muy similares. La presencia de una fisura en el eje reduce la velocidad crítica del sistema rotor e incrementa las amplitudes de vibración. También, la carga ejerce un efecto dominante en las magnitudes de la misma dirección que dicha carga.

## 5.2 TRABAJOS FUTUROS.

Una vía de desarrollo en futuros estudios será el intento de conseguir obtener una simulación en elementos finitos que consiga durar más tiempo, para poder alcanzar la primera frecuencia natural. Para ello, habría que crear un nuevo modelo en elementos finitos cuyas características y condiciones se ajusten más a la realidad y de este modo se pueda alcanzar la primera velocidad crítica. Se podría emplear otro programa de elementos finitos distinto de Abaqus<sup>®</sup>. Esto abre una nueva vía de investigación bastante interesante que sería estudiar distintas configuraciones y simularlas en elementos finitos buscando los modos propios de los sistemas, así como también estudiar arranques y paradas de rotores.

En la parte experimental se ha visto que por razones de seguridad no se ha empleado un eje tan fisurado como se proponía en el modelo de elementos finitos. Por lo que se podría intentar usar un eje de un material más resistente que el aluminio e intentar llevarlo a cabo con una fisura mayor, siempre manteniéndose en el margen de la seguridad.

Otra línea de investigación sería analizar como varían las frecuencias naturales de un rotor a medida que se genera una fisura y esta varía en el tiempo. Además, en este proyecto se han estudiado fisuras constantes y de dirección perpendicular al eje, pero la realidad muestra que las fisuras presentan direcciones no perpendiculares al eje, por lo que podría ampliarse los estudios a otras formas de fisura.



## Capítulo 6

---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] Stodola, A. "Steam and Gas Turbines". New York: McGraw-Hill, 1927.
- [2] Dunkerley, S. "On the whirling and vibration of shaft" . *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1894, vol 185, p. 279-360.
- [3] Jeffcott, H. H. "The lateral vibration loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed: the effect of want of balance". *Philosophical Magazine*. 1919, vol 37, p. 304-315.
- [4] Kimball, A.L. "Internal friction theory of shaft whirling". *General Electrical Review*. 1924, vol 27, núm. 4, p. 244-251.
- [5] Newkirk, B.L. "Shaft whipping". *General Electrical Review*. 1924, vol 27, núm. 3, p. 169-178
- [6] Newkirk, B.L. and Taylor, H.D. "Shaft whirling due to oil action in journal bearings". *General Electric Review*. 1925, vol. 28, núm. 7, p. 559-568.
- [7] Smith, D.M. "The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings". *Royal Society of London. Series A*. 1933, vol.142, p. 92-118.
- [8] Lewis, F.M. "Vibrations during acceleration though a critical speed". *Transactions of the ASME*. 1932, vol. 54, p. 253-261.
- [9] Bishop, R.E.D. And Gladwell, G.M.L. "The vibration and balancing of an unbalanced flexible rotor". *Journal of Mechanical Engineering Science* 1959, vol. 1, núm. 1, p. 66-77.
- [10] Yamamoto, T. "On the vibrations of a rotating shaft". *Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University*. 1957. vol. 9, núm. 1.
- [11] Ehrich F.F. "Handbook of Rotordynamics". New York: McGraw-Hill, 1992. ISBN: 978-0-070-19330-7
- [12] Saavedra P., Baquedano D., San Juan L." Modelo numérico para el estudio dinámico de un rotor con eje agrietado". *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. 1996, vol. 12, núm. 2, p. 125-146.
- [13] Iman I., Azzaro S., Bankert R. y Scheibel I. "Development of a on-line rotor crack detection and monitoring system". *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of ASME*. 1989, vol. 111, núm. 3, p. 241-250.
- [14] Courant R. "Variational Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibrations". *Bulletin of American Mathematical Society*. 1943, vol.49, núm. 49, p. 1-23.
- [15] Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas.  
<[http://www.cedex.es/ceta/cetaweb/ins\\_ic3\\_abaqus.htm](http://www.cedex.es/ceta/cetaweb/ins_ic3_abaqus.htm)> [Consulta: 12 de febrero 2010].
- [16] Wikipedia. Enciclopedia Libre.  
<[http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_de\\_los\\_elementos\\_finitos](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_los_elementos_finitos)> [Consulta: 18 de noviembre de 2009].

- [17] Uzcátegui Y. M. "Abaqus: programa de elementos finitos". Centro nacional de Cálculo Científico Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela. 2005.
- [18] Cadenas M., Marañón E., Sierra J., Tucho R. "Guía de prácticas: cinemática y dinámica de máquinas". Universidad de Oviedo: Servicio de Publicaciones, 1999. ISBN: 84-8317-141-4.
- [19] Adewusi S.A., Al-Bedoor B.O. "Experimental study on the vibration of an overhung rotor with a propagating transverse crack". *Journal of Sound and Vibration*. 2001, vol. 246, núm. 5, p. 777-793.
- [20] Turner M., Clough R. W., Martin H. C. y Topp L. J. "Stiffness and deflection analysis of complex structures". *J. Aeronautical Science*. 1956, vol. 23, núm. 9, p. 805-823.
- [21] ZhuangLi, Lin Liu, Ganeriwala S. "Applications of time-frequency analysis techniques on machinery fault diagnosis". Spectra Quest Inc. 2006.
- [22] John M. Vance. "Rotordynamics of turbomachinery". New York: Wiley, 1988. ISBN: 978-0-471-80258-7.
- [23] Litak G., Sawicki J.T. "Intermittent behaviour of a cracked rotor in the resonance region". *Journal of Sound and Vibration*. 2008, vol. 311, núm. 3-5, p. 953-972.
- [24] Machorro J.M. "Experimentación y validación de modelos dinámicos para detectar fisuras en ejes rotatorios de maquinaria en operación". Director: Julio C. Gomez. Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, 2005.
- [25] Wikipedia. *Enciclopedia Libre* [en línea].  
< [http://es.wikipedia.org/wiki/Espectro\\_de\\_frecuencias](http://es.wikipedia.org/wiki/Espectro_de_frecuencias) > [Consulta: 28 de enero de 2010].
- [26] Rankine W.J.M. "Manual of machinery and millwork". London: Griffin, 1887, vol. 1.
- [27] Gash R. "Dynamic behavior of a simple rotor with a cross-sectional crack". *International Conference on Vibrations on Vibrations in Rotating Machinery, Institute of Mechanical Engineers*. 1976.
- [28] Mayes I.W. and Davies W.G.R. "Analysis of the response of a multi-rotor bearing system containing a transverse crack in a rotor". *Journal of Vibration Acoustics, Stress and Reliability in Design Transactions of ASME*. 1984.
- [29] Prohl, M.A. "A general method for calculating critical speeds of flexible rotors". *Journal of Applied Mechanical*. 1945, vol. 12, núm. 3, p. 142-148.
- [30] Ruhl, R.L. and Broker, J.F. "A finite element model for distributed parameter turborotor system". *Journal of Mechanical Engineering Science, Transactions of ASME*. 1972, vol. 94, núm. 1, p. 126-132.
- [31] Nelson, H.D. and McVaugh, J.M. "The dynamics of rotor bearing systems, using finite elements". *Journal of Mechanical Engineering Science, Transactions of ASME*. 1976, vol. 98, núm. 2, p. 593-600.

[32] Henry, T.A. and Okah-Avae, B.E. "Vibrations in cracked shaft". *International Conference on Vibrations on Vibrations in Rotating Machinery, Institute of Mechanical Engineers*. 1976, p.123-128.