

Ingeniería en Tecnologías Industriales
2017-2018

Trabajo Fin de Grado

“Estudio del comportamiento dúctil de
materiales con distinto límite elástico a
tracción y compresión”

Francisco López Bocero

Tutor:

Guadalupe Vadillo Martín

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de
Estructuras

Leganés



Esta obra se encuentra sujeta a la licencia Creative- Commons **Reconocimiento – No Comercial – Sin Obra Derivada**

Índice general

Introducción y objetivos	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Marco regulador.....	3
1.4. Entorno socio-económico	3
1.5. Contenido.....	4
Fractura dúctil y Modelos Constitutivos	6
2.1. Introducción y Fractura dúctil.....	6
2.1.1. Nucleación de microcavidades	7
2.1.2. Crecimiento de microcavidades.....	8
2.1.3. Coalescencia de microcavidades	10
2.2. Modelos constitutivos	11
2.2.1. Modelo de Gurson	12
2.2.2. Modelo de Gurson modificado.....	12
2.2.3. Otros modelos.....	13
Teoría de la plasticidad de Burzyński	14
3.1. Introducción	14
3.2. Teoría de la plasticidad de Burzyński.....	15
Formulación del modelo constitutivo	17
4.1. Introducción	17
4.2. Formulación	19
4.2.1. Condiciones de contorno	19
4.2.2. Ecuaciones de gobierno	20
4.3. Límite elástico.....	25
4.4. Resolución de las integrales.....	28
4.4.1. Simplificación de ecuaciones	28
4.4.2. Cambio de variable y resolución	29
4.5. Función de plastificación	30
Casos analizados	33
5.1. Introducción	33

5.2. Caso 1	34
5.3. Caso 2	35
5.4. Caso 3	36
5.5. Caso 4	38
Análisis de resultados	40
6.1. Introducción	40
6.2. Análisis de los casos	41
Conclusiones y trabajos futuros	45
7.1. Conclusiones	45
7.2. Trabajos futuros	47
Bibliografía	48

Capítulo 1

Introducción y objetivos

En este trabajo se va a realizar un estudio del comportamiento dúctil para materiales con distinto límite elástico a tracción y a compresión. Para ello se empleará un modelo de material que permita tener en cuenta este fenómeno y posteriormente se representarán las superficies de plastificación asociadas a este tipo de materiales.

1.1. Motivación

La fractura dúctil es aquella que se produce después de una cierta deformación plástica, ocurre después de que las tensiones a las que está sometido un material superen el límite elástico. La velocidad de propagación de la grieta es lenta y estable si se compara con la fractura frágil, y la energía que se requiere para que suceda es mayor.

Un clásico ejemplo de fractura dúctil aparece en los ensayos de tracción, donde una probeta es sometida a este esfuerzo desde sus extremos. Este fenómeno produce la rotura de copa y cono, la cual puede ser completa o con alguna reducción de área. La fractura dúctil completa, presenta una reducción de área del 100%, aparece en materiales muy dúctiles (con grandes deformaciones plásticas) que no presentan fases secundarias, como el oro o el plomo. En la mayoría de los casos no se produce la fractura dúctil completa ya que los metales empleados en ingeniería suelen tener partículas secundarias, impurezas o inclusiones que aumentan el endurecimiento y disminuyen la ductilidad.

El mecanismo de rotura se puede resumir de la siguiente manera. La fractura comienza con una deformación uniforme de la probeta, posteriormente, se forma una estricción, se trata de una disminución de la sección de la probeta. Microscópicamente se produce la decohesión de las partículas más grandes con la matriz, lo que genera pequeñas microcavidades en el interior. A continuación se produce el crecimiento de estas microcavidades y su coalescencia, formando una grieta principal que es perpendicular a la dirección de la fuerza. Llegado a este punto, la grieta se propaga de forma rápida y se produce la rotura final de la probeta con superficie de copa y cono. La superficie plana de la fractura está relacionada con la grieta interna, mientras que la parte cónica se

corresponde con las tensiones de cortadura. El mecanismo de fractura se puede observar en la figura 1.1.

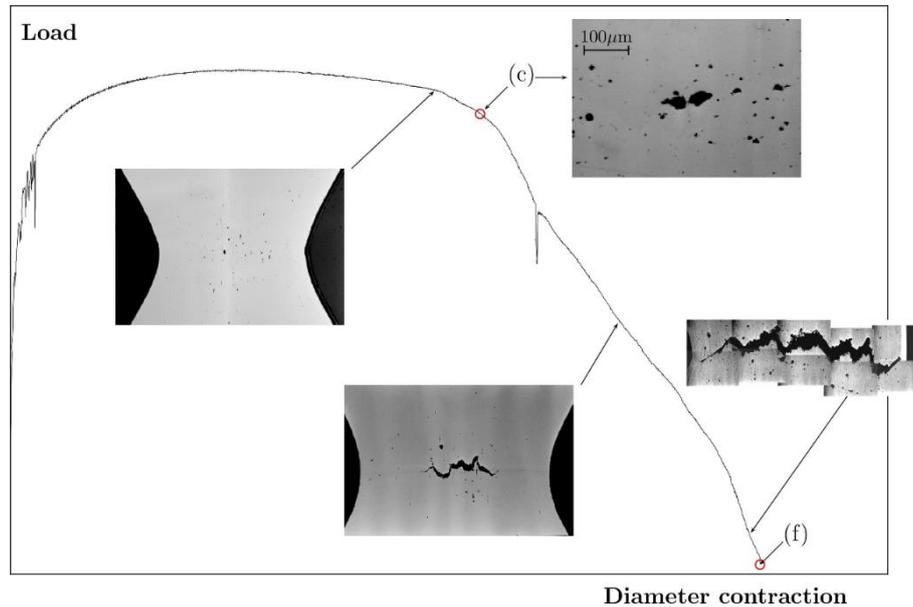


Figura 1.1: Transición en un ensayo de tracción uniaxial de la deformación de la probeta, desde el inicio de la carga hasta la rotura final [10]

1.2. Objetivos

Se ha comprobado que la presencia de microvacíos está fuertemente relacionada con la deformación plástica y por consiguiente con la rotura dúctil.

El principal objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento dúctil de materiales que tienen distinto límite elástico a tracción y compresión mediante el desarrollo de un modelo constitutivo que permita definir una superficie de plastificación considerando la presencia de microcavidades.

Teniendo en cuenta el modelo de F.A. McClintock (1968) [9] en el cual se investiga la dependencia del estado tensional con la velocidad de crecimiento de los microvacíos. Se va a considerar una celda cilíndrica con un hueco en su interior, formada por un material homogéneo sometido a un estado tensional.

El estudio, se va a realizar aplicando la teoría del cono circular de Burzyński-Drucker-Prager [4] [6] [20] para obtener las superficies de plastificación de un material poroso con las siguientes relaciones entre límites elásticos a tracción y a compresión:

- Caso 1: El límite elástico a tracción es la mitad que el límite elástico a compresión ($\sigma_y^T = \frac{1}{2} \sigma_y^C$).
- Caso 2: El límite elástico a tracción es dos tercios el valor del límite elástico a compresión ($\sigma_y^T = \frac{2}{3} \sigma_y^C$).
- Caso 3: El mismo valor para ambos límites ($\sigma_y^T = \sigma_y^C$).
- Caso 4: El límite elástico a tracción es tres medios el valor del límite elástico a compresión ($\sigma_y^T = \frac{3}{2} \sigma_y^C$).

1.3. Marco regulador

Debido a que se trata de un trabajo teórico, el cual investiga el desarrollo de un método de análisis para comportamiento dúctil de los materiales, no existe ninguna normativa técnica o restricción legal aplicable a su desarrollo.

En lo referente a la propiedad intelectual, este trabajo ha sido incluido en el repositorio institucional de la Universidad Carlos III de Madrid, poseyendo las condiciones de uso de la licencia Creative Commons BY NC ND, de modo que el trabajo se pueda compartir sin ánimo de lucro manteniendo su integridad y reconociendo la autoría original.

1.4. Entorno socio-económico

Para la elaboración del presupuesto de este trabajo, se van a considerar los medios necesarios para su realización.

- Ha sido imprescindible el uso de un ordenador, se ha empleado un Acer Aspire E1-572G. Se ha utilizado para la búsqueda de información, para el desarrollo del trabajo y para la comunicación con la Tutora.
- El trabajo ha sido escrito con Microsoft Word 2013, las superficies de plastificación se han obtenido a través de Matlab y las imágenes que no han sido obtenidas en las referencias, han sido dibujadas con SolidWorks.
- Las principales referencias empleadas para el desarrollo teórico del trabajo, han sido proporcionadas por la Tutora.

El impacto que puede generar este trabajo se fundamenta en continuar con el desarrollo de modelos constitutivos para materiales con diferente límite elástico a tracción y a compresión. Tanto para completar y verificar el modelo que se describe en este trabajo, como para crear nuevos modelos. Esto puede suponer un avance significativo en el conocimiento de fractura dúctil, conocer de manera más precisa el comportamiento de los materiales y emplearlos con un mayor conocimiento de sus propiedades en las aplicaciones que sean requeridos.

1.5. Contenido

El trabajo está compuesto por un total de siete capítulos. En el primero, se ha realizado una breve introducción al proceso de rotura dúctil, se han explicado los objetivos perseguidos en el trabajo, el marco regulador y el entorno socio-económico.

En el segundo capítulo, se explica de forma más detallada el mecanismo de fractura dúctil profundizando en los procesos de nucleación, crecimiento y coalescencia de microcavidades, y se detallan algunos de los modelos constitutivos más importantes que determinan el comportamiento dúctil de los materiales. Las principales fuentes de información empleadas son el Trabajo de Fin de Máster de J. Reboul [12] y la Tesis Doctoral de G. Vadillo [19].

El tercer capítulo, corresponde con la teoría de plastificación de Burzyński, la cual se va a tener en cuenta en el modelo constitutivo del trabajo. La principal fuente de información es el artículo de G. Vadillo [20].

En el cuarto capítulo, se detalla el desarrollo del modelo constitutivo, partiendo de la definición de la celda empleada, las ecuaciones que gobiernan el proceso y la implementación del límite elástico definido en el modelo de Burzyński, hasta la obtención de la función de plastificación. Este proceso, está basado en la formulación empleada en el Trabajo de Fin de Máster de J. Reboul [12].

En el quinto capítulo, a partir de la función de plastificación obtenida, se definen cuatro casos y se representan las funciones de plastificación de cada uno de ellos para diferentes valores de la porosidad.

El sexto capítulo, se dedica a analizar las superficies de plastificación de los casos analizados.

Por último, en el séptimo capítulo se realiza la conclusión y se proponen tres trabajos futuros.

Capítulo 2

Fractura dúctil y Modelos constitutivos

2.1. Introducción y Fractura dúctil

Se han realizado muchos estudios sobre el comportamiento plástico de los materiales, los primeros se realizaron a mediados del siglo XX con los trabajos de C.F. Tipper (1949) [16] y K.E. Puttick (1959) [11] donde mediante ensayos de tracción, observaron las microcavidades con técnicas metalográficas y microscopía óptica, estos pequeños huecos aparecían cerca de las inclusiones no metálicas y partículas secundarias. Posteriormente, H.C. Rogers (1960) [14] determinó que las microcavidades crecen a medida que aumenta la deformación plástica hasta su coalescencia formando así una grieta.

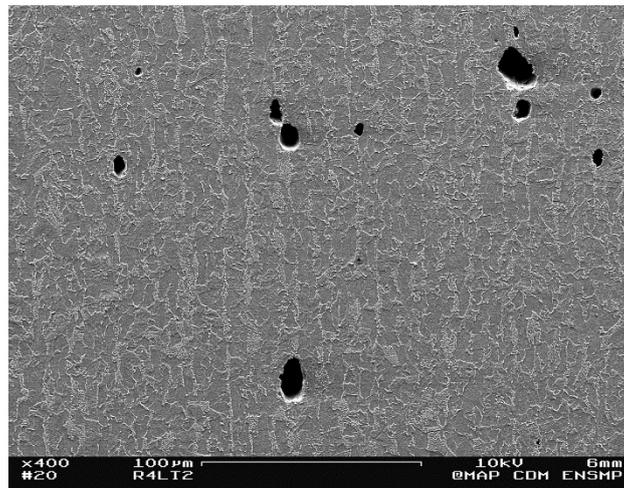


Figura 2.1: Nucleación y crecimiento de microcavidades en un acero de bajo contenido en carbono [10]

Por tanto, se determina que la fractura dúctil es producto de la nucleación, crecimiento y coalescencia de microcavidades, lo cual sucede de forma simultánea en el material. La simultaneidad de los procesos de nucleación y coalescencia se pueden observar en la figura 2.1.

El estado tensional y la deformación plástica desarrollada influyen fuertemente este proceso, lo cual fue establecido por P.W. Bridgman (1952) [3].

2.1.1. Nucleación de microcavidades

La nucleación es el primer proceso de la deformación plástica, consiste en la aparición de microvacíos. Este fenómeno ocurre aplicando una tensión suficiente en materiales que contienen inclusiones o partículas de fases secundarias produciéndose la decohesión entre la partícula y la matriz o la rotura de la partícula, que por lo general, es de mayor tamaño y más frágil que la matriz. No todas las partículas o inclusiones existentes en el material generan estas microcavidades. Dicho proceso se muestra en la figura 2.2.

Cuanto mayor es el tamaño de la partícula, menor es la tensión necesaria para producir la nucleación, por tanto, aplicando una tensión y considerando dos tamaños de partículas distintos, en la partícula de menor tamaño estará teniendo lugar el proceso de nucleación mientras que en la de mayor tamaño este proceso ya habrá ocurrido y se estará produciendo el crecimiento del hueco. De manera que los procesos de nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos se producen al mismo tiempo.

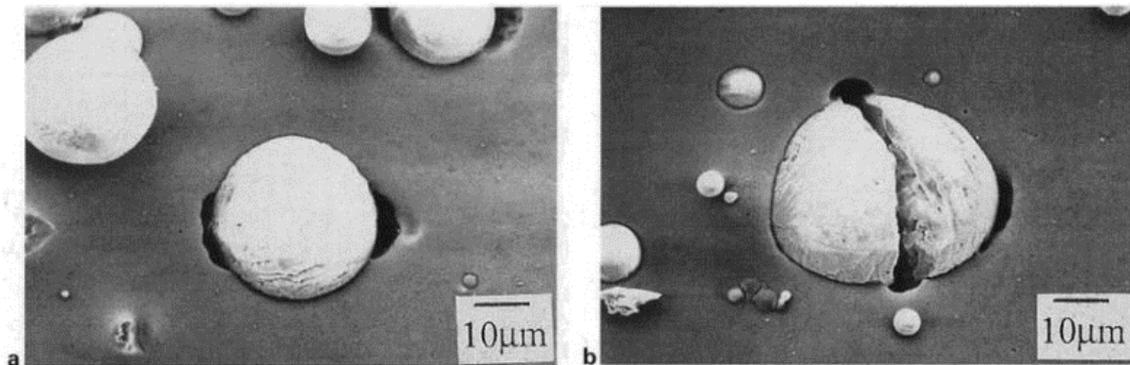


Figura 2.2: Nucleación de microcavidades producidas por la decohesión matriz-partícula (a) o por rotura de una partícula (b) [21]

Los modelos que estudian la aparición de microcavidades se pueden dividir en dos grupos dependiendo del tamaño de la partícula nucleadora:

- En los casos donde la partícula sea menor que $2\mu m$ se calcula la concentración de tensiones existente en la intercara matriz-partícula empleando modelos de dislocaciones. Es el caso del estudio de S.H. Goods y L.M. Brown (1979) [7], en el cual se explica que para partículas con forma esférica, la nucleación tendrá lugar (mediante la decohesión de la intercara) cuando la deformación principal

máxima (ε_1) supere un cierto valor crítico (ε_{1n}), el cual, se determina a través de la siguiente expresión (2.1).

$$\varepsilon_{1n} = Kr(\sigma_c - \sigma_h)^2 \quad (2.1)$$

donde: K es una constante que tiene en cuenta la fracción volumétrica de partículas existentes en el material, r es el radio de la partícula, σ_c es la tensión de cohesión de la intercara matriz-partícula y σ_h es la tensión hidrostática.

- En cambio, cuando el tamaño de la partícula es mayor que $2\mu m$, para calcular dicha concentración de tensiones se utiliza la Mecánica de Medios Continuos. En estos modelos, se predice el proceso de nucleación, producido a través de la decohesión de la intercara, cuando la tensión en dicha zona supera un valor de tensión crítica. En el modelo de A.S. Argon et al. (1975) [1] dicha tensión se define como (2.2):

$$\sigma_c = \bar{\sigma} + \sigma_h \quad (2.2)$$

donde: σ_c es la tensión crítica en la intercara, $\bar{\sigma}$ es la tensión equivalente de Von Mises y σ_h la tensión hidrostática.

2.1.2. Crecimiento de microcavidades

Durante este proceso, aumenta el tamaño de los huecos generados, siendo necesaria una gran cantidad de energía para que se lleve a cabo. Se produce como resultado una fuerte deformación plástica. Se puede observar en la figura 2.3.

A través de numerosos ensayos de tracción, se ha determinado que el estado tensional al que se somete la probeta influye de manera determinante en el crecimiento de los microvacíos. En el centro de la probeta, se tiene un estado tensional triaxial, la velocidad de crecimiento de los huecos aumenta y si inicialmente la forma de dichos huecos es esférica, durante el crecimiento, se mantiene aproximadamente igual. Sin embargo, en zonas donde la triaxialidad es menor, como en zonas cercanas a la superficie de la probeta, la forma de los huecos tiende a ser elipsoidal, teniendo el eje mayor orientado en la dirección en la que se aplica la tensión.

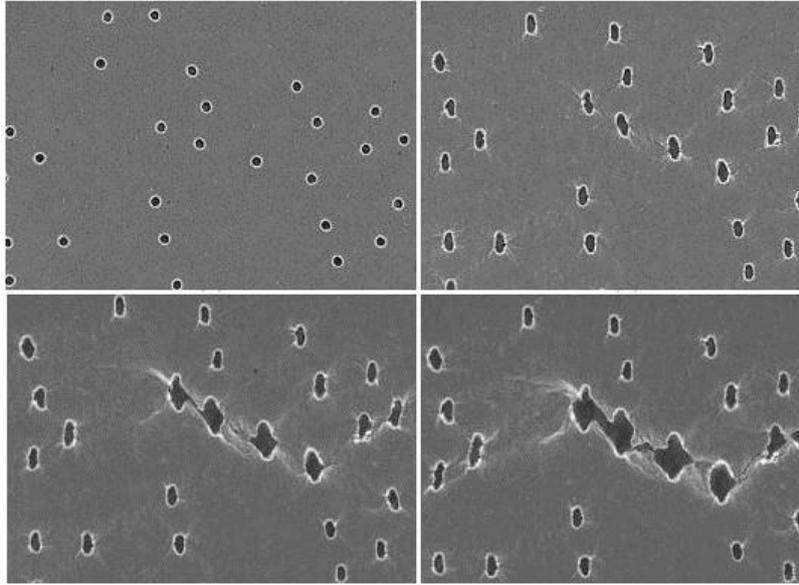


Figura 2.3: Proceso de crecimiento y coalescencia de microcavidades [21]

Se han realizado varios estudios acerca de las relaciones existentes entre el estado tensional y la velocidad de crecimiento de las microcavidades.

McClintock (1968) [9] formuló un modelo donde se tenía presente que la fractura se producía por el contacto de cavidades próximas entre sí. Consideró un cilindro largo con un hueco en su interior, compuesto por un material perfectamente plástico y sometido a tensiones bidimensionales, en el cual definió la velocidad de crecimiento del radio medio del hueco \dot{R} , expresándola como (2.3):

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^p \sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh\left(\frac{(1-n)\sigma_h \sqrt{3}}{\sigma_{eq}}\right) \quad (2.3)$$

donde R es el radio medio del hueco, $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$ la velocidad de deformación equivalente de Von Mises, σ_h la tensión hidrostática, σ_{eq} la tensión equivalente de Von Mises y n el coeficiente de endurecimiento por deformación plástica.

Otro modelo es el de J.R. Rice y D.M. Tracy (1969) [13], en él, se considera un único hueco esférico en una matriz infinita compuesta por un material elastoplástico expuesto a un campo de tensiones. Este estudio produce soluciones aproximadas para la velocidad de crecimiento del hueco (2.4) teniendo en cuenta la influencia de la triaxialidad en el campo de tensiones y la deformación plástica equivalente.

$$\frac{\dot{R}_0}{\dot{\epsilon}R_0} \approx 0.283e^{\frac{3\sigma_h}{2\sigma_{eq}}} \approx 0.566 \sinh \left[\frac{3\sigma_h}{2\sigma_{eq}} \right] \quad (2.4)$$

siendo R_0 , el radio inicial del hueco esférico, $\dot{\epsilon}$ la velocidad de deformación, σ_h la tensión hidrostática y σ_{eq} la tensión equivalente de Von Mises.

2.1.3. Coalescencia de microcavidades

El proceso final de la fractura dúctil aparece con la coalescencia de las microcavidades existentes en la matriz. El análisis de este fenómeno es importante para obtener un material con una tenacidad a fractura elevada, para ello, es necesario conseguir una microestructura que sea capaz de permitir el crecimiento de los huecos retrasando lo máximo posible su coalescencia. En la figura 2.4 se muestran dos micrografías, en una de ellas se observa la coalescencia después de un crecimiento prolongado de los huecos y en la otra después de un crecimiento limitado.

La coalescencia puede ser producida por los siguientes mecanismos:

- Unión de las microcavidades que crecen debidas a un estado de tensión-deformación muy intenso.
- Fallo catastrófico de los ligamentos de los huecos cuando estos alcanzan un determinado tamaño crítico.
- Estricción de parte de la matriz, produciendo la pérdida de la sección transversal del ligamento.
- Formación de microcavidades secundarias en los bordes de los huecos principales. Se sitúan en bandas de cortadura localizadas que forman ángulos de entre 30° y 40° con la dirección en la cual se aplica la tensión.

La coalescencia es un proceso muy variable, su mecanismo depende de la distribución del tamaño de las partículas, de las tensiones en la intercara matriz-partícula y de las características deformacionales de la matriz.

Uno de los principales modelos que analizan el fenómeno de coalescencia es el desarrollado por P.F Thomason (1990) [15]. En él, sostiene que la coalescencia depende de dos modos de deformación; deformación homogénea, la cual se produce en la primera etapa y requiere menos tensión para desarrollarse, y la deformación localizada, que en un

inicio requiere una mayor tensión, pero posteriormente, al aumentar el tamaño de los huecos se produce con mayor facilidad. Determina que la coalescencia se produce cuando la tensión necesaria para que se produzca la localización, iguala a la tensión correspondiente que provoca la deformación homogénea. Según este modelo, la coalescencia no ocurrirá mientras (2.5):

$$\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} < \left(\gamma \left(\frac{1}{r} - 1 \right)^2 + \frac{\beta}{\sqrt{r}} \right) (1 - \pi r^2) \quad (2.5)$$

donde, σ_1 es la tensión principal máxima, $\bar{\sigma}$ es el límite elástico, r es una media de la fracción de ligamento ocupada por los poros, γ y β son constantes con un valor de 0.1 y 1.2 respectivamente.

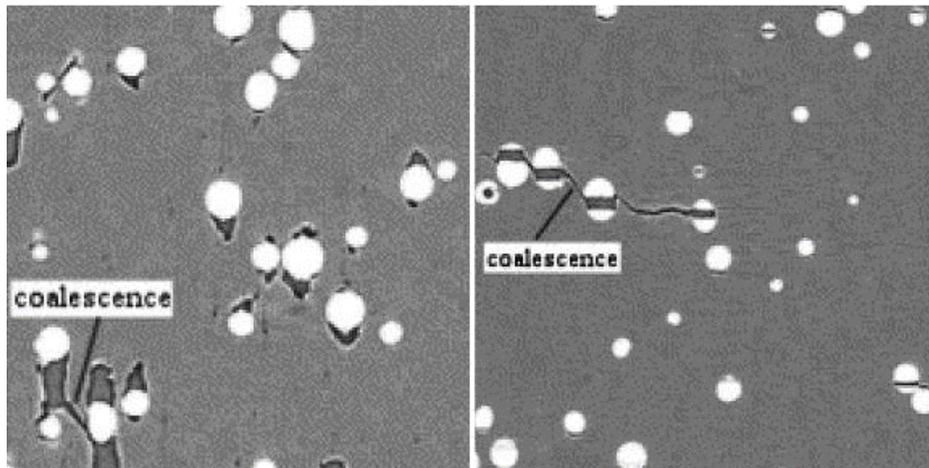


Figura 2.4: Mecanismo de coalescencia: después de un crecimiento de microcavidades prolongado (izquierda) y después de un crecimiento de microcavidades limitado (derecha) [10]

2.2. Modelos constitutivos

La Mecánica de Medios Continuos, estudia el comportamiento de fractura dúctil mediante modelos matemáticos, conocidos como modelos constitutivos. Para ello, se ha de modelizar un material homogéneo con un comportamiento elastoplástico, teniendo en cuenta su porosidad y el desarrollo de microcavidades descritas a través de una variable interna sujeta a ciertas leyes de evolución.

Es necesario establecer una ley constitutiva del material en la que se incluya los siguientes elementos:

- Función de plastificación.

- Relación entre la evolución de la deformación plástica con el estado tensional y las propiedades del material.
- Criterios de nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos.

2.2.1. Modelo de Gurson

Uno de los modelos más empleados es el modelo de A.L. Gurson [8]. Lo estableció en 1977, a partir de la suposición de un material homogéneo rígido perfectamente plástico con una microcavidad en su interior, desarrolló la siguiente superficie de fluencia (2.6):

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_h, \bar{\sigma}, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2f \cosh\left(\frac{-3\Sigma_h}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (2.6)$$

- Este modelo tiene en cuenta la tensión macroscópica equivalente de Von Mises $\left(\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}S:S}\right)$, donde S , es el tensor de tensiones desviador de Cauchy.
- A diferencia de otras teorías de plasticidad como la de Von Mises, también influye la tensión hidrostática macroscópica $\left(\Sigma_h = -\frac{1}{3}\Sigma\right)$, donde, Σ es la suma de las tensiones macroscópicas en los ejes principales.
- La porosidad, definida como una fracción de microvacíos, viene indicada con la letra (f).
- Se considera el límite elástico en condiciones estáticas, el cual es dependiente de la deformación plástica $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\dot{\epsilon}^p)$.

2.2.2. Modelo de Gurson modificado

Posteriormente, el modelo de Gurson fue mejorado con el objetivo de prever distribuciones periódicas de microcavidades. Para ello se introdujeron tres parámetros que suelen tomarse como constantes aunque dependen del material, el daño inicial y la triaxialidad del estado tensional, estos son: $q_1 = 1.5$, $q_2 = 1.0$ y $q_3 = q_1^2 = 2.25$. También se introdujo una nueva fracción de microvacíos f^* . Estos cambios fueron realizados por V. Tvergaard (1981) [17] y por V. Tvergaard and A. Needleman (1984) [18] resultando la siguiente superficie de plastificación (2.7):

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_h, \bar{\sigma}, f^*) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{-3q_2 \Sigma_h}{2 \bar{\sigma}}\right) - 1 - q_3 f^{*2} = 0 \quad (2.7)$$

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \frac{f_u - f_c}{f_F - f_c} (f - f_c) & \text{si } f_c < f < f_F \\ f_u & \text{si } f \geq f_F \end{cases}$$

el valor de f_c representa la porosidad crítica en la cual comienza la coalescencia de microvacíos, f_F indica el valor en el cual el material experimenta una pérdida total de resistencia.

En ambos modelos, se puede comprobar que cuando la fracción de microvacíos es igual a cero, se cumple la ley de plastificación de Von Mises para materiales metálicos (2.8).

$$\Phi(f = 0) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} - 1 = 0 \quad (2.8)$$

2.2.3. Otros modelos

Posteriormente, se siguió investigando sobre el modelo de Gurson y el modelo de Gurson modificado. En los estudios realizados por Z.L. Zhang et al. (2000) [22] y Z.L. Zhang (2001) [23], se propuso, a partir del modelo de Gurson modificado y de la teoría de coalescencia de Thomson, el denominado, Modelo de Gurson Completo. En dicho análisis, el valor de la porosidad crítica (f_c), no se toma como constante, sino que para cada material tiene un valor determinado.

Inicialmente, el modelo de Gurson fue desarrollado para problemas estáticos, sin embargo, en trabajos posteriores se ha elaborado un método para integrar de forma implícita estas ecuaciones en problemas dinámicos. Es el caso del modelo propuesto por C. Betegón et al. (2006) [2].

También se han desarrollado modelos para problemas termoviscoplasticos donde incluyen los efectos de la velocidad de deformación y la temperatura.

Capítulo 3

Teoría de la plasticidad de Burzyński

3.1. Introducción

Como se ha indicado anteriormente, el objetivo principal de este trabajo es emplear un modelo constitutivo para predecir el comportamiento plástico de materiales con distinto límite elástico a tracción y a compresión. Para su desarrollo, este trabajo se va a basar en el modelo de crecimiento de microcavidades de F.A. McClintock (1968) [9]. Sin embargo, como principal diferencia, se debe incluir una nueva definición del límite elástico para el tipo de materiales que se van a analizar.

La particularidad de este trabajo consiste en el uso de materiales isotrópicos que poseen la denominada “resistencia diferencial”, en ellos, el límite elástico de un elemento sometido a tracción no coincide con el límite elástico de ese elemento sometido a compresión.

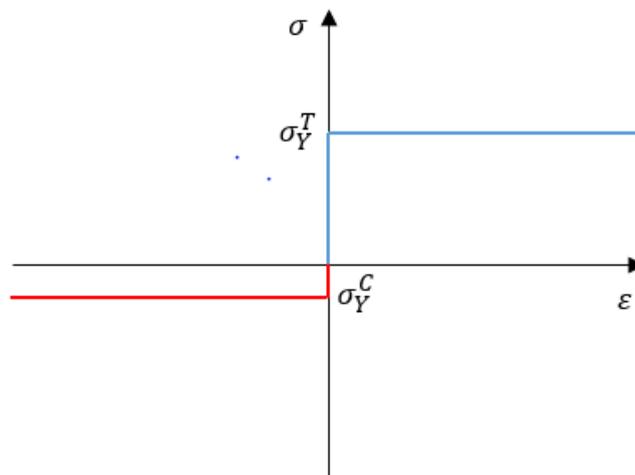


Figura 3.1

En la figura 3.1, se muestra la gráfica de tensión deformación de un material rígido perfectamente plástico con diferentes límites elásticos a tensión y a compresión como el que se va a suponer en este trabajo.

3.2. Teoría de la plasticidad de Burzyński

La teoría de plasticidad de Von Mises, se ha utilizado extensamente para describir el comportamiento dúctil de los materiales metálicos. Sin embargo, esta teoría no es válida en el caso de materiales con distinto límite elástico a tracción y compresión. La teoría de W. Burzyński [4], expuesta en 1928 puede ser usada para resolver este problema.

La teoría de Burzyński, determinó la existencia de una relación lineal entre el comportamiento plástico y la tensión hidrostática, este análisis es de gran relevancia y en él se han basado estudios recientes de modelos con materiales que poseen resistencia diferencial. En la figura 3.1, se muestra la relación entre el límite elástico y la tensión hidrostática según la teoría de Burzyński, sus casos especiales y la teoría de Von Mises.

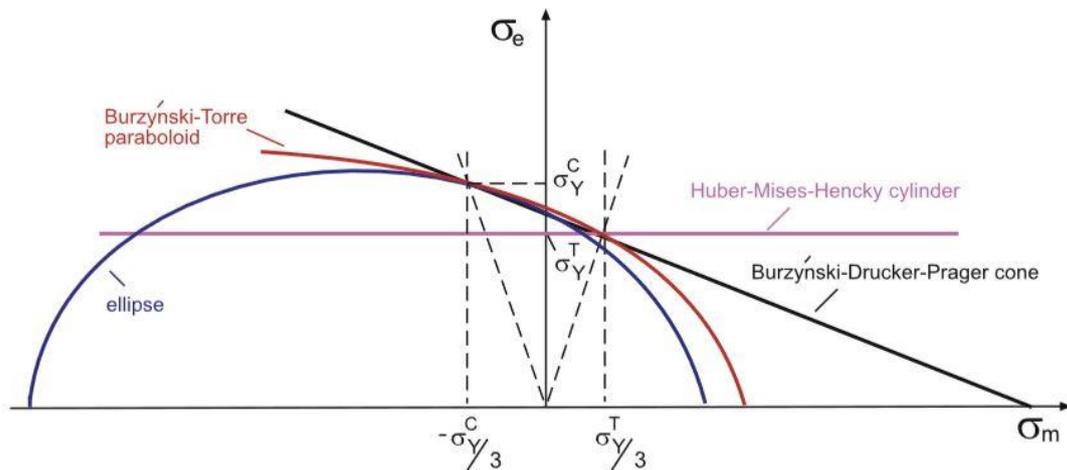


Figura 3.2: Relación entre el límite elástico ($\sigma_e = \bar{\sigma}$) y la tensión hidrostática ($\sigma_m = \sigma_h$) según la teoría de Burzyński, sus casos especiales y la teoría de Von Mises [20]

Las condiciones en las que el comportamiento plástico depende de la tensión hidrostática, se pueden describir mediante las ecuaciones de las tensiones principales en un volumen con simetría rotacional de tal forma que estas tensiones tengan el mismo valor en los tres ejes ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). La forma general del modelo de Burzyński (3.1) depende de la tensión hidrostática σ_h y del límite elástico $\bar{\sigma}$:

$$f(\sigma_h, \bar{\sigma}) = 0 \quad (3.1)$$

donde: $(\sigma_h = \frac{1}{3}\sigma:1)$, siendo σ el tensor de tensiones de Cauchy.

Esta formulación presenta una condición de tres parámetros (A, B y C) basados en criterios energéticos (3.2):

$$A\sigma_e^2 + B\sigma_h^2 + C\sigma_h - 1 = 0 \quad (3.2)$$

Burzyński los evalúa mediante: tensión uniaxial para obtener σ_y^T (límite elástico a tracción), compresión uniaxial para obtener σ_y^C (límite elástico a compresión) y ensayos de cortadura simple para obtener τ^S . Llegado a este punto, se tiene que la ecuación del modelo de Burzyński es la siguiente (3.3):

$$\frac{\sigma_y^C \sigma_y^T}{(3\tau^S)^2} \bar{\sigma}^2 + \left(9 - \frac{3\sigma_y^C \sigma_y^T}{(3\tau^S)^2}\right) \sigma_h^2 + 3(\sigma_y^C - \sigma_y^T) \sigma_h - \sigma_y^C \sigma_y^T = 0 \quad (3.3)$$

Para explicar el endurecimiento isotrópico, σ_y^C , σ_y^T y τ^S se asume que son dependientes de la deformación plástica equivalente $\dot{\epsilon}^p$. Con el objetivo de reducir el número de parámetros independientes a dos, se analizan varios casos particulares.

En este trabajo se va a emplear el caso del cono de Burzyński-Drucker-Prager [6], se puede observar en la figura 3.1. En dicho caso se emplea la siguiente relación (3.4):

$$\tau^S \sqrt{3} = \frac{2\sigma_y^C \sigma_y^T}{\sigma_y^C + \sigma_y^T} \quad (3.4)$$

Para, a partir de la fórmula (3.3), dar lugar a (3.5):

$$\bar{\sigma} + \frac{3\sigma_y^C - 3\sigma_y^T}{\sigma_y^C + \sigma_y^T} \sigma_h - \frac{2\sigma_y^C \sigma_y^T}{\sigma_y^C + \sigma_y^T} = 0 \quad (3.5)$$

A partir de esta ecuación se va a obtener el límite elástico para desarrollar el modelo constitutivo propuesto en este trabajo.

Capítulo 4

Formulación del modelo constitutivo

4.1. Introducción

El modelo matemático que determina la predicción del comportamiento dúctil de los casos que se van a analizar, se realiza mediante el desarrollo de funciones de plastificación que tengan en cuenta la porosidad.

En un material sólido poroso dichas funciones se definen de la siguiente manera (4.1):

$$\Phi(\sigma, H, F) = 0 \quad (4.1)$$

siendo: σ el tensor de tensiones de Cauchy, H las propiedades que caracterizan el comportamiento plástico y F las propiedades que caracterizan la porosidad.

Para realizar la función de plastificación de este trabajo, se ha considerado el modelo de F.A. McClintock [9] suponiendo un material rígido perfectamente plástico sometido a tensiones bidireccionales. Para ello se considera una celda con una matriz cilíndrica que a su vez tiene un hueco concéntrico en su interior, se muestra en la figura 4.1.

El volumen de la matriz es V_m y el del hueco V_h siendo la suma de ambos el volumen total $V_T = V_m + V_h$. El radio del hueco se denomina r_1 y el de la matriz r_2 , r será empleado para indicar la distancia al eje de un punto cualquiera entre r_1 y r_2 , dicha acotación se puede observar en la figura 4.2.

Como se ha indicado en el modelo de McClintock, el material empleado en la matriz es perfectamente plástico, incompresible y posee una porosidad f . En este caso, la porosidad se define como la división entre el volumen del hueco y el volumen total de la celda. Desarrollando la fórmula del volumen de un cilindro y sustituyéndola en la fórmula de la porosidad, se obtiene una relación de esta con los radios del hueco y la matriz (4.2).

$$f = \frac{V_h}{V_T} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \quad (4.2)$$

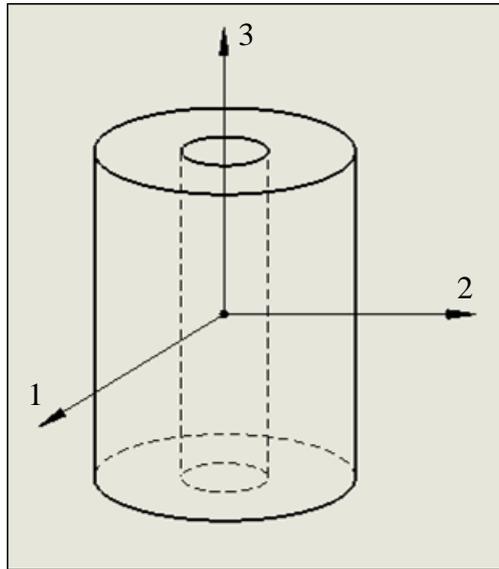


Figura 4.1: Celda cilíndrica con hueco concéntrico

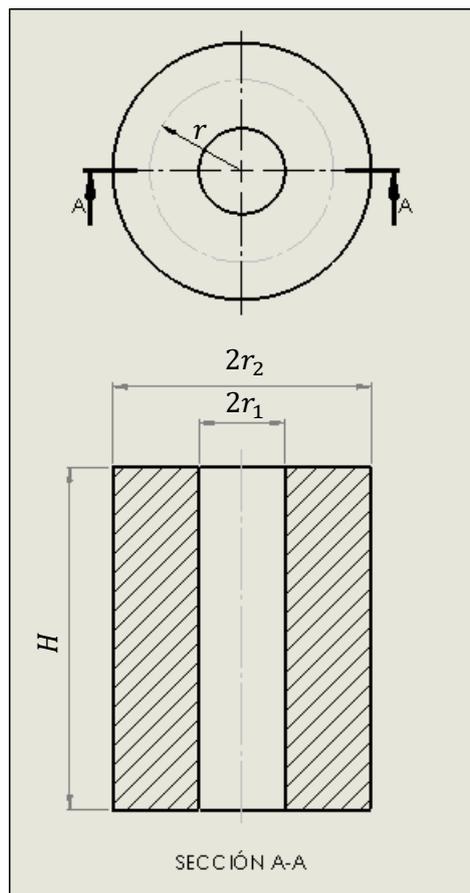


Figura 4.2: Acotación de la celda cilíndrica

4.2. Formulación

Una vez realizado el modelo de la celda homogénea, se han de obtener las ecuaciones que definan el comportamiento plástico del tipo de materiales considerados. Para ello se va a partir de las siguientes ecuaciones de gobierno con términos microscópicos (4.4), (4.5) y (4.6), hasta la obtención de la tensión macroscópica en el eje 1 (Σ_{11}) y de la tensión macroscópica equivalente (Σ_{eq}), a partir de las cuales, se podrá determinar la función de plastificación.

4.2.1. Condiciones de contorno

En primer lugar, se han de determinar las condiciones de contorno del problema. La celda definida está sometida a un estado de carga axisimétrico, donde, la tensión radial en la superficie interior que crea el hueco a la matriz ($\sigma_{rr}(r_1)$), es nula. Las tensiones microscópicas de la superficie exterior ($\sigma_{11}|_{\partial V}, \sigma_{22}|_{\partial V}, \sigma_{33}|_{\partial V}$) son iguales a las macroscópicas ($\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33}$) respectivamente. En la figura 4.3, se muestran las direcciones de las tensiones y de las velocidades de deformación macroscópicas. Se tiene que (4.3):

$$\sigma_{rr}|_{r_1} = 0; \quad \sigma_{11}|_{\partial V} = \Sigma_{11}; \quad \sigma_{22}|_{\partial V} = \Sigma_{22}; \quad \sigma_{33}|_{\partial V} = \Sigma_{33}; \quad (4.3)$$

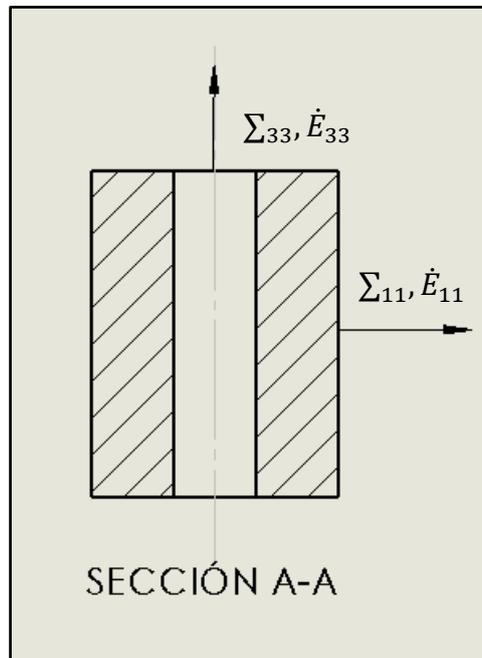


Figura 4.3: Sección longitudinal de la celda cilíndrica sometida a una carga axisimétrica

Las tensiones macroscópicas anteriormente citadas se pueden definir de la siguiente manera (4.4):

$$\Sigma_{11} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{rr}; \quad \Sigma_{22} = \Sigma_{11}; \quad \Sigma_{33} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{zz}; \quad (4.4)$$

donde, σ_{rr} y σ_{zz} , son las tensiones microscópicas en coordenadas cilíndricas de las componentes radial y longitudinal respectivamente.

Como se comprueba en las expresiones (4.4), la simetría del problema provoca que la tensión macroscópica en el eje 1 sea igual a la del eje 2 ($\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$).

4.2.2. Ecuaciones de gobierno

En la definición del proyecto, se van a emplear tres ecuaciones principales, estas son:

- La ecuación de equilibrio en coordenadas polares en ejes principales (4.5), en la cual, σ_{rr} se corresponde con la tensión radial y $\sigma_{\theta\theta}$ con la tensión circunferencial.

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (4.5)$$

- La ecuación (4.6), indica que la matriz es incompresible debido a que el material se supone rígido perfectamente plástico y no actúan deformaciones elásticas que varíen el volumen total (V_T).

$$\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} + \dot{\epsilon}_{zz} = 0 \quad (4.7)$$

- La tercera ecuación (4.7), hace referencia a la ley de flujo de material, asumiendo en primera aproximación la ley de flujo de Von Mises, donde (σ'_{ij}) representa las componentes desviadoras del tensor de tensiones, $(\bar{\sigma})$ el límite elástico, $(\dot{\epsilon}^p)$ la velocidad de deformación plástica equivalente y $(\dot{\epsilon}'_{ij})$ las velocidades de deformación.

$$\sigma'_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}^p} \dot{\epsilon}'_{ij} \quad (4.7)$$

Velocidades de deformación microscópicas

Partiendo de la condición de incompresibilidad (4.6) y de las componentes de la velocidad de deformación en coordenadas cilíndricas (4.8), se puede definir en cada punto, la velocidad de deformación microscópica de tal manera que sea dependiente de la velocidad de deformación longitudinal macroscópica (\dot{E}_{33}), la distancia radial (r) y de una constante A independiente del radio. A continuación se muestra este desarrollo:

Las componentes de la velocidad de deformación en coordenadas cilíndricas son las siguientes (4.8):

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{d\dot{u}}{dr}; \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{\dot{u}}{r}; \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \dot{E}_{33}; \quad (4.8)$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.6), multiplicando por rdr e integrando, se llega al siguiente resultado (4.9):

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{u}}{dr} + \frac{\dot{u}}{r} + \dot{E}_{33} &= 0 \Rightarrow r d\dot{u} + \dot{u} dr + r dr \dot{E}_{33} = 0 \Rightarrow \\ d(r\dot{u}) &= -\dot{E}_{33} r dr \Rightarrow r\dot{u} = -\int_{r_1}^{r_2} \dot{E}_{33} r dr = -\dot{E}_{33} \frac{r^2}{2} + A \end{aligned} \quad (4.9)$$

Una vez obtenida la relación anterior (4.9), aplicando las ecuaciones (4.8), se obtienen las velocidades de deformación microscópicas en función de los parámetros requeridos (\dot{E}_{33} , A y r). Ecuaciones (4.10), (4.11), y (4.12).

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{d\dot{u}}{dr} = \frac{d}{dr} \left(-\dot{E}_{33} \frac{r}{2} + \frac{A}{r} \right) = -\frac{\dot{E}_{33}}{2} - \frac{A}{r^2} \quad (4.10)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{\dot{u}}{r} = \frac{1}{r} \left(-\dot{E}_{33} \frac{r}{2} + \frac{A}{r} \right) = -\frac{\dot{E}_{33}}{2} + \frac{A}{r^2} \quad (4.11)$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \dot{E}_{33} \quad (4.12)$$

A continuación se ha de desarrollar el valor de la constante A , para ello, se considera el hueco cilíndrico que ha sido determinado anteriormente en la definición de la celda, cuyo radio es r_1 y su altura H . De este modo, su volumen es (4.13):

$$V_h = \pi r_1^2 H \quad (4.13)$$

La velocidad de crecimiento del hueco (4.14) es la suma de la componente radial y longitudinal. La velocidad relativa de crecimiento del hueco (4.15) es el cociente entre la velocidad de crecimiento y el volumen de dicha cavidad:

$$\dot{V}_h = 2\pi r_1 \dot{r}_1 H + \pi r_1^2 \dot{H} \quad (4.14)$$

$$\frac{\dot{V}_h}{V_h} = 2 \frac{\dot{r}_1}{r_1} + \frac{\dot{H}}{H} \quad (4.15)$$

Llegados a este punto, teniendo en cuenta las definiciones (4.16), (4.17) y relacionándolas con la expresión (4.15), se obtiene la definición del parámetro A (4.18). Se puede comprobar que este parámetro solo depende del cuadrado del radio del hueco y de su velocidad de crecimiento relativa:

$$\dot{\varepsilon}_{rr}|_{r_1} = \frac{\dot{r}_1}{r_1} \quad (4.16)$$

$$\dot{E}_{33} = \frac{\dot{H}}{H} \quad (4.17)$$

$$A = -\frac{r_1^2 \dot{V}_h}{2 V_h} \quad (4.18)$$

De esta manera quedan completamente definidas las velocidades de deformación microscópicas. A continuación se determina la velocidad de deformación plástica equivalente ($\dot{\varepsilon}^p$), la cual se define como (4.19):

$$\dot{\varepsilon}^p = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}'_{ij} \dot{\varepsilon}'_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

Teniendo en cuenta las velocidades microscópicas de deformación (4.10), (4.11) y (4.12); la velocidad de deformación plástica equivalente se puede expresar en función de los parámetros \dot{E}_{33} , A y r . Se observa en la expresión (4.20):

$$\dot{\varepsilon}^p = \left[\frac{2}{3} (\dot{\varepsilon}_{rr}^2 + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^2 + \dot{\varepsilon}_{zz}^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\dot{E}_{33}^2 + \frac{4}{3} \frac{A^2}{r^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.20)$$

Para simplificar las operaciones posteriores, se define un parámetro α (4.21), el cual es dependiente de la velocidad de crecimiento del hueco y de la velocidad macroscópica de deformación en el eje 3. Operando, resulta la ecuación simplificada de la velocidad de deformación plástica equivalente (4.22):

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{|A|}{r_1^2 \dot{E}_{33}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\dot{E}_{33}} \frac{\dot{V}_h}{V_h} \quad (4.21)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{E}_{33} \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.22)$$

Tensiones desviadoras microscópicas

Llegados a este punto, a través de la ley de flujo de material (4.7), las ecuaciones de las velocidades de deformación microscópicas (4.10), (4.11), (4.12), y la velocidad de deformación plástica equivalente (4.22), se tienen definidas las componentes desviadoras del tensor de tensiones microscópico en función de la velocidad de deformación macroscópica en el eje longitudinal (\dot{E}_{33}), la distancia radial (r) y el parámetro (A). Se muestra en las expresiones (4.23), (4.24) y (4.25).

$$\sigma'_{rr} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{E}_{33} \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} \left(-\frac{\dot{E}_{33}}{2} - \frac{A}{r^2} \right) \quad (4.23)$$

$$\sigma'_{\theta\theta} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{E}_{33} \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} \left(-\frac{\dot{E}_{33}}{2} + \frac{A}{r^2} \right) \quad (4.24)$$

$$\sigma'_{zz} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{E}_{33} \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} \dot{E}_{33} \quad (4.25)$$

Tensiones macroscópicas

A continuación, para determinar el comportamiento plástico de la matriz, se pueden definir las ecuaciones que relacionan las tensiones macroscópicas con la velocidad de deformación macroscópica en el eje longitudinal (\dot{E}_{33}), la distancia radial (r) y el parámetro (A).

En primer lugar, se va a definir la tensión macroscópica en el eje 1 (Σ_{11}) como la diferencia entre la tensión radial en la superficie exterior del cilindro ($\sigma_{rr}(r_2)$) y la tensión radial en la superficie interior ($\sigma_{rr}(r_1)$).

Para su desarrollo, se debe considerar:

- $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma'_{\theta\theta} - \sigma'_{rr}$
- Las condiciones de contorno (4.3).
- La ecuación de equilibrio en coordenadas polares (4.5).
- Las expresiones de las tensiones desviadoras microscópicas en las direcciones radial (4.23) y circunferencial (4.24).

De esta manera se obtiene la expresión para la tensión macroscópica en el eje 1 (4.26):

$$\begin{aligned}\Sigma_{11} = \sigma_{rr}(r_2) - \sigma_{rr}(r_1) &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma'_{\theta\theta} - \sigma'_{rr}}{r} dr \\ \Sigma_{11} &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{E}_{33} \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{2A}{r^3} dr \\ \Sigma_{11} &= \frac{4}{3} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{E}_{33} \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{A}{r^3} dr\end{aligned}\quad (4.26)$$

Para completar la definición del comportamiento plástico de la matriz, queda definir la tensión macroscópica equivalente ($\Sigma_{eq} = \Sigma_{33} - \Sigma_{11}$). Se debe tener en cuenta lo siguiente:

- La tensión en un punto no varía según el tipo de coordenadas empleadas:
 $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$
- Las condiciones de contorno (4.3).
- Las tensiones microscópicas en las direcciones, radial, circunferencial y longitudinal, son iguales a las componentes desviadoras del tensor de tensiones microscópicas en dichas zonas: ($\sigma_{rr} = \sigma'_{rr}$; $\sigma_{\theta\theta} = \sigma'_{\theta\theta}$; $\sigma_{zz} = \sigma'_{zz}$).

Por consiguiente, se obtiene la expresión para la tensión macroscópica equivalente (4.27):

$$\begin{aligned}
\Sigma_{33} - \Sigma_{11} &= \Sigma_{33} - \frac{1}{2}(\Sigma_{11} + \Sigma_{22}) = \\
\frac{1}{V} \int_V \left[\sigma_{zz} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] dV &= \frac{1}{V} \int_V \left[\sigma_{zz} - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \right] dV = \\
\frac{1}{V} \int_V \left[\sigma'_{zz} - \frac{1}{2}(\sigma'_{rr} + \sigma'_{\theta\theta}) \right] dV &= \frac{1}{V} \int_V \frac{\bar{\sigma}}{\left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} r dr d\theta d\phi \\
\Sigma_{33} - \Sigma_{11} &= \frac{2}{r_2^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\bar{\sigma}}{\left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} r dr \tag{4.27}
\end{aligned}$$

De esta manera se han obtenido las expresiones (4.26) y (4.27) que van a permitir obtener las superficies de plastificación del problema. Para poder resolver las integrales, primero se debe definir el límite elástico ($\bar{\sigma}$), lo cual se detalla en el siguiente apartado.

4.3. Límite elástico

Como se ha indicado anteriormente, se ha de determinar el límite elástico para formar las superficies de plastificación del problema. Para ello, se parte del caso del cono de Burzyński-Drucker-Prager [4] [6] [20], en el cual, el límite elástico se define en la ecuación (4.28).

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma} + \frac{3\sigma_y^C - 3\sigma_y^T}{\sigma_y^C + \sigma_y^T} \sigma_h - \frac{2\sigma_y^C \sigma_y^T}{\sigma_y^C + \sigma_y^T} &= 0 \\
\bar{\sigma} &= \frac{2\sigma_y^C \sigma_y^T}{\sigma_y^C + \sigma_y^T} - \frac{3\sigma_y^C - 3\sigma_y^T}{\sigma_y^C + \sigma_y^T} \sigma_h \tag{4.28}
\end{aligned}$$

donde: $\bar{\sigma}$ es la variable que representa el límite elástico en los casos de resistencia diferencial, σ_y^T es el valor del límite elástico a tracción, σ_y^C es el valor del límite elástico a compresión y σ_h es la tensión hidrostática, la cual, se define de la siguiente manera (4.29):

$$\sigma_h = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}}{3} \tag{4.29}$$

siendo: $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ y σ_{zz} , las tensiones microscópicas en coordenadas cilíndricas de las componentes radial, circunferencial y longitudinal respectivamente.

Considerando una rebanada de la matriz cilíndrica definida para el problema, como una sección de un tubo de pared gruesa (figura 4.4), se pueden relacionar las componentes de la tensión microscópica en coordenadas cilíndricas, con las tensiones macroscópicas de los ejes principales y con la fracción volumétrica.

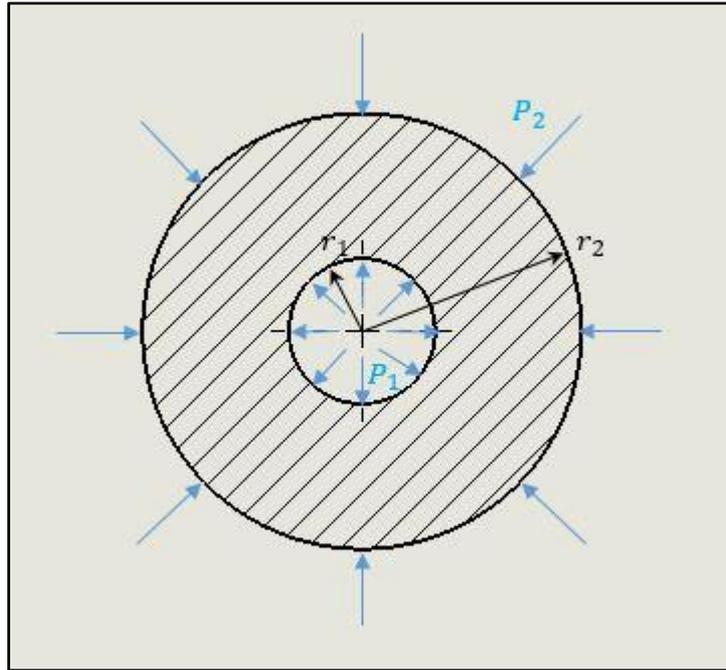


Figura 4.4: Sección de un cilindro de pared gruesa sometido a tensión plana.

Las componentes de la tensión microscópica en coordenadas cilíndricas para el problema general de un tubo de pared gruesa, en el que se considera una sección perpendicular al eje longitudinal, se definen como (4.30), (4.31):

- Tensión en la dirección radial:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[r_1^2 P_1 - r_2^2 P_2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} (P_2 - P_1) \right] \quad (4.30)$$

- Tensión en la dirección circunferencial:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[r_1^2 P_1 - r_2^2 P_2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} (P_2 - P_1) \right] \quad (4.31)$$

donde: r_1 y r_2 son los radios interior y exterior de tubo respectivamente, P_1 y P_2 son las tensiones a las que está sometido el tubo interiormente y exteriormente, y, r es cualquier radio comprendido entre r_1 y r_2 , se puede observar en la figura 4.4.

Aplicando las condiciones que definen el problema de este trabajo (4.3), se determina que:

- $P_1 = 0$, debido a que la tensión en la superficie interior de la matriz es nula.
- $P_2 = \Sigma_{11} = \Sigma_{22}$, debido al estado de tensión axisimétrico al que está sometida la matriz.
- Se ha de añadir la tensión de la componente longitudinal, la cual se define como: $\sigma_{zz} = \Sigma_{33}$

Teniendo en cuenta estas consideraciones, quedan determinadas las componentes de la tensión microscópica en coordenadas cilíndricas, en función de las tensiones macroscópicas de los ejes principales. Aplicándolo a la ecuación que define la tensión hidrostática (4.29), el resultado es el siguiente (4.32):

$$\sigma_h = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} [-2r_2^2 \Sigma_{11}] + \Sigma_{33} \quad (4.32)$$

Para simplificar este resultado, se puede aplicar la definición de la porosidad (4.2), lo que da lugar a la expresión (4.33).

$$\sigma_h = \frac{1}{1-f} (-2\Sigma_{11}) + \Sigma_{33} \quad (4.33)$$

Relacionando las ecuaciones (4.33) y (4.28), queda definido el límite elástico, el cual, depende de las tensiones macroscópicas de los ejes principales (Σ_{11} y Σ_{33}), de la fracción volumétrica (f) y del valor de los límites elásticos a tracción (σ_y^T) y a compresión (σ_y^C). Se puede observar en la siguiente igualdad (4.34):

$$\bar{\sigma} = \frac{2\sigma_y^C \sigma_y^T}{\sigma_y^C + \sigma_y^T} - \frac{3\sigma_y^C - 3\sigma_y^T}{\sigma_y^C + \sigma_y^T} \left(\frac{1}{1-f} (-2\Sigma_{11}) + \Sigma_{33} \right)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{2\sigma_y^c \sigma_y^T}{\sigma_y^c + \sigma_y^T} + \frac{\sigma_y^c - \sigma_y^T}{\sigma_y^c + \sigma_y^T} \left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33} \right) \quad (4.34)$$

4.4. Resolución de las integrales

Una vez determinada la expresión del límite elástico (4.34), resultan totalmente definidos todos los términos de las expresiones de la tensión macroscópica en el eje 1 (4.26) y la tensión macroscópica equivalente (4.27). El siguiente paso, con el objetivo de crear las superficies de plastificación, es resolver dichas ecuaciones realizando sus respectivas integrales.

4.4.1. Simplificación de ecuaciones

En primer lugar, se va a comenzar con la ecuación de la tensión macroscópica en el eje 1. La expresión a integrar es la siguiente (4.35):

$$\Sigma_{11} = \frac{4}{3} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\frac{2\sigma_y^c \sigma_y^T}{\sigma_y^c + \sigma_y^T} + \frac{\sigma_y^c - \sigma_y^T}{\sigma_y^c + \sigma_y^T} \left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33} \right) A}{\dot{E}_{33} \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{r^3} dr \quad (4.35)$$

La simplificación se realiza extrayendo fuera de la integral todos los parámetros no dependientes de la distancia radial r y aplicando la ecuación del límite elástico (4.34). El resultado es el siguiente (4.36):

$$\Sigma_{11} = \frac{4A\bar{\sigma}}{3\dot{E}_{33}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} r^3} dr \quad (4.36)$$

Para realizar la simplificación de la ecuación de la tensión macroscópica equivalente (4.27), se realiza el mismo método, se obtiene la expresión (4.37).

$$\Sigma_{33} - \Sigma_{11} = \frac{2}{r_2^2} \int_a^b \frac{\frac{2\sigma_y^c \sigma_y^T}{\sigma_y^c + \sigma_y^T} + \frac{\sigma_y^c - \sigma_y^T}{\sigma_y^c + \sigma_y^T} \left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33} \right)}{\left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} r dr$$

$$\Sigma_{33} - \Sigma_{11} = \frac{2\bar{\sigma}}{r_2^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{\left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.37)$$

4.4.2. Cambio de variable y resolución

A continuación, se ha de emplear un cambio de variable para poder resolver ambas integrales. Dicho cambio de variable es el mismo para las dos ecuaciones. Consiste en:

$$x = \alpha \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{\alpha r_1^2}{x}$$

$$dx = -2\alpha \frac{r_1^2}{r^3} dr \Rightarrow r dr = -\frac{r_1^2 \alpha}{2} \frac{dx}{x^2}$$

donde los límites de las integrales son:

$$r \rightarrow [r_1, r_2]$$

$$x \rightarrow [\alpha, f\alpha]$$

Resolución de Σ_{11}

Ya se puede proceder a la resolución de las integrales, como se ha realizado hasta el momento, la primera integral en resolverse va a ser la de la ecuación de la tensión macroscópica en el eje 1 (4.26). El proceso es el siguiente:

$$\Sigma_{11} = \frac{4A\bar{\sigma}}{3\dot{E}_{33}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}} r^3} dr = \frac{4A\bar{\sigma}}{3\dot{E}_{33}} \int_{\alpha}^{f\alpha} \frac{r_1^2 \alpha x^2}{-2r_1^4 \alpha^2 (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$\Sigma_{11} = \frac{4A\bar{\sigma}}{6\dot{E}_{33}\alpha r_1^2} \int_{\alpha}^{f\alpha} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{4A\bar{\sigma}}{6\dot{E}_{33}\alpha r_1^2} \left[\ln \left(\left| \sqrt{1 + x^2} + x \right| \right) \right]_{\alpha}^{f\alpha}$$

$$\Sigma_{11} = \frac{4A\bar{\sigma}}{6\dot{E}_{33}\alpha r_1^2} \left[\ln \left(\left| \frac{\sqrt{f^2 \alpha^2 + 1} + f\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha} \right| \right) \right]$$

Teniendo en cuenta la definición de porosidad (4.2); y la del parámetro α (4.21), de donde se puede despejar A , se consigue llegar a la resolución simplificada de la integral que define la tensión macroscópica en el eje 1, ecuación (4.38):

$$\Sigma_{11} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \bar{\sigma} \left[\ln \left(\left| \frac{\sqrt{f^2 \alpha^2 + 1} + f \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha} \right| \right) \right] \quad (4.38)$$

Resolución de Σ_{eq}

Como se ha indicado anteriormente, para resolver la integral de la ecuación de la tensión macroscópica equivalente, se emplea el cambio de variable. Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \Sigma_{33} - \Sigma_{11} &= \frac{2\bar{\sigma}}{r_2^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{\left[1 + \alpha^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\bar{\sigma}}{r_2^2} \int_{\alpha}^{f\alpha} \frac{\alpha r_1^2 dx}{-2x^2 \sqrt{1+x^2}} \\ \Sigma_{33} - \Sigma_{11} &= \frac{-\alpha r_1^2 \bar{\sigma}}{r_2^2} \int_{\alpha}^{f\alpha} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = \frac{-\alpha r_1^2 \bar{\sigma}}{r_2^2} \left[\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right]_{\alpha}^{f\alpha} \\ \Sigma_{33} - \Sigma_{11} &= \frac{\alpha r_1^2 \bar{\sigma}}{r_2^2} \left[\frac{\sqrt{\alpha^2 f^2 + 1} - f \sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha f} \right] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de la porosidad (4.2) y simplificando, se obtiene el resultado de la integral que define la tensión macroscópica equivalente (4.39).

$$\Sigma_{33} - \Sigma_{11} = \bar{\sigma} \left[\sqrt{\alpha^2 f^2 + 1} - f \sqrt{\alpha^2 + 1} \right] \quad (4.39)$$

Por tanto, quedan resueltas las integrales de las ecuaciones que definen el comportamiento plástico de la matriz. Ecuaciones (4.38) y (4.39).

4.5. Función de plastificación

Una vez resueltas las integrales de las ecuaciones de la tensión macroscópica en el eje 1 (4.38) y la tensión macroscópica equivalente (4.39), se puede determinar la ley de plastificación que defina el comportamiento de la celda.

Como se ha indicado en el apartado 4.1, la ley de plastificación de un material no depende de la velocidad de deformación. Por consiguiente, con el fin de obtener la ley para este problema, se deben combinar las ecuaciones (4.38) y (4.39) y eliminar el parámetro α , el cual es dependiente de este factor.

Para realizar este proceso, se emplea la siguiente parametrización:

$$B_1 = \frac{-3 \Sigma_{11}}{\sqrt{3} \bar{\sigma}} \quad (4.40)$$

$$B_2 = \frac{\Sigma_{33} - \Sigma_{11}}{\bar{\sigma}} \quad (4.41)$$

$$B_3 = \sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha \rightarrow B_3^2 = 2\alpha B_3 + 1 \quad (4.42)$$

$$B_4 = \sqrt{f^2 \alpha^2 + 1} + f\alpha \rightarrow B_4^2 = 2f\alpha B_4 + 1 \quad (4.43)$$

Si se sustituyen en las ecuaciones (4.38) y (4.39), da lugar a:

$$B_1 = \ln \frac{B_4}{B_3} \quad (4.44)$$

$$B_2 = B_4 - fB_3 \quad (4.45)$$

donde los parámetros dependientes de α son B_3 y B_4 . De este modo, se debe establecer una relación entre B_1 y B_2 con el objetivo de que los otros dos parámetros queden eliminados.

$$e^{B_1} = \frac{B_4}{B_3} \rightarrow e^{B_1} = \frac{B_2 + fB_3}{B_3}$$

$$B_3 = \frac{B_2}{e^{B_1} - f}$$

$$B_4 = B_2 + \frac{fB_2}{e^{B_1} - f} = \frac{B_2 e^{B_1}}{e^{B_1} - f}$$

Igualando las α de las ecuaciones (4.42) y (4.43) y sustituyendo las expresiones de B_3 y B_4 se llega a la relación buscada, en la cual no aparecen los parámetros dependientes de α (4.46):

$$2\alpha = \frac{B_3^2 - 1}{B_3} = \frac{B_4^2 - 1}{fB_4}$$

$$\frac{\left(\frac{B_2}{e^{B_1} - f}\right)^2 - 1}{\frac{B_2}{e^{B_1} - f}} = \frac{\left(\frac{B_2 e^{B_1}}{e^{B_1} - f}\right)^2 - 1}{f \frac{B_2 e^{B_1}}{e^{B_1} - f}}$$

$$B_2^2 (f e^{B_1} - e^{2B_1}) = (e^{B_1} - f)^2 (f e^{B_1} - 1)$$

$$B_2^2 = f^2 + 1 - 2f \cosh(B_1) \quad (4.46)$$

Si se sustituyen los valores de los parámetros B_1 y B_2 en la ecuación (4.46), resulta la función de plastificación perseguida como objetivo en este trabajo, dando lugar a (4.47):

$$\Phi(\Sigma_{11}, \Sigma_{33}, \bar{\sigma}, f) = \frac{(\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2}{(\bar{\sigma})^2} + 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_{11}}{(\bar{\sigma})}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (4.47)$$

en la cual, la expresión del límite elástico ($\bar{\sigma}$) es:

$$\bar{\sigma} = \frac{2\sigma_y^c \sigma_y^T}{\sigma_y^c + \sigma_y^T} + \frac{\sigma_y^c - \sigma_y^T}{\sigma_y^c + \sigma_y^T} \left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33} \right) \quad (4.34)$$

Sustituyendo la expresión del límite elástico en la de la función de plastificación, se obtiene la siguiente expresión (4.48):

$$\begin{aligned} \Phi(\Sigma_{11}, \Sigma_{33}, \sigma_y^c, \sigma_y^T, f) &= \frac{(\sigma_y^c + \sigma_y^T)^2 (\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2}{\left[2\sigma_y^c \sigma_y^T + (\sigma_y^c - \sigma_y^T) \left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33} \right) \right]^2} + \\ &+ 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}(\sigma_y^c + \sigma_y^T)\Sigma_{11}}{\left[2\sigma_y^c \sigma_y^T + (\sigma_y^c - \sigma_y^T) \left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33} \right) \right]} \right) - 1 - f^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Se comprueba visualmente que la función de plastificación que se ha desarrollado depende de las tensiones macroscópicas (Σ_{11} y Σ_{33}), de la fracción volumétrica de la celda definida (f) y de los valores de los límites elásticos a tracción (σ_y^T) y a compresión (σ_y^c), que a su vez dependen de las características del material empleado en la matriz.

Capítulo 5

Casos analizados

5.1. Introducción

Obtenida la función de plastificación que determina el comportamiento dúctil del problema que se está considerando, en este capítulo se van a representar las superficies de plastificación para cuatro casos diferentes, en los cuales, se varía la relación entre el límite elástico a tracción (σ_y^T) y a compresión (σ_y^C).

Uno de los objetivos, es analizar cómo afecta la porosidad en cada uno de los casos, por lo cual, en cada caso, se van a representar seis superficies de plastificación correspondientes a diferentes valores de la fracción volumétrica (f).

Los casos que se van a estudiar corresponden a las siguientes relaciones entre los límites elásticos a tracción y compresión:

- Caso 1: $\sigma_y^T = \frac{1}{2} \sigma_y^C$
- Caso 2: $\sigma_y^T = \frac{2}{3} \sigma_y^C$
- Caso 3: $\sigma_y^T = \sigma_y^C$
- Caso 4: $\sigma_y^T = \frac{3}{2} \sigma_y^C$

Los valores de las seis fracciones volumétricas que se van a emplear, son los siguientes: $f = 0.00, f = 0.01, f = 0.04, f = 0.10, f = 0.25$ y $f = 0.50$.

Para realizar las superficies de plastificación, se ha representado la función de plastificación (4.48) de dos maneras diferentes para cada caso. Una de ellas, enfrenta los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica en el eje 3 y la tensión macroscópica en el eje 1; mientras que la otra, enfrenta los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica equivalente y la tensión macroscópica en el eje 1.

5.2. Caso 1

Como se ha indicado anteriormente, para este caso, el límite elástico a tracción es la mitad que el límite elástico a compresión. Para realizar las superficies de plastificación, se han dado los siguientes valores a dichos límites: $\sigma_y^T = 50 \text{ MPa}$ y $\sigma_y^C = 100 \text{ MPa}$. Resulta la siguiente función de plastificación (5.1):

$$\Phi(\Sigma_{11}, \Sigma_{33}, f) = \frac{(\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2}{\left[\frac{200}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33}\right)\right]^2} + 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_{11}}{\left[\frac{200}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33}\right)\right]}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (5.1)$$

Para adimensionalizar las tensiones macroscópicas se ha empleado el valor de σ_y^C . Representando la función de plastificación, se obtienen las gráficas que describen el comportamiento dúctil para el modelo del Caso 1. Figuras 5.1 y 5.2.

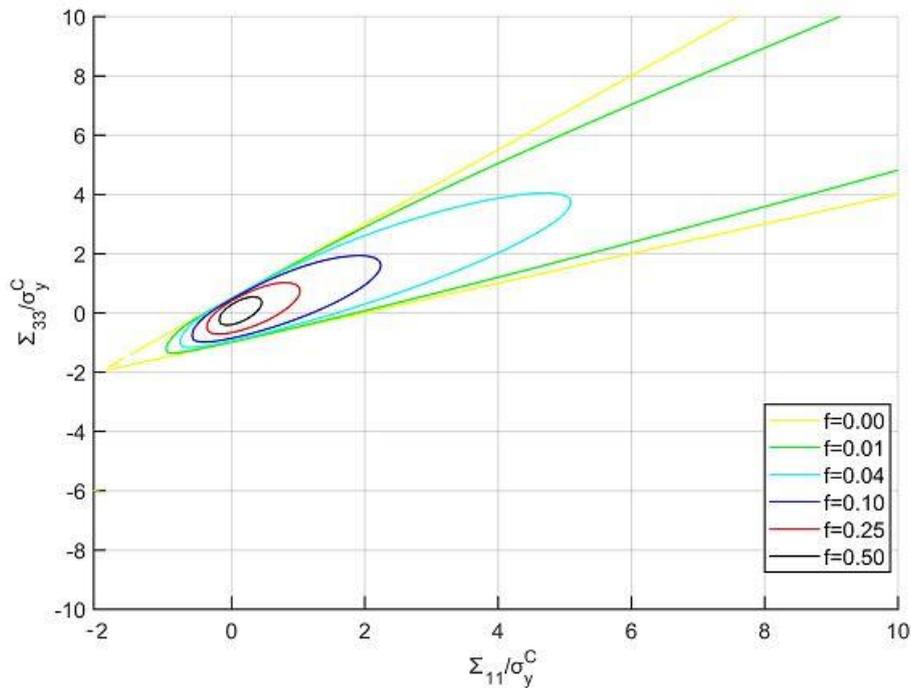


Figura 5.1: Superficies de plastificación del Caso 1, obtenidas enfrentando los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica en el eje 3 y la tensión macroscópica en el eje 1

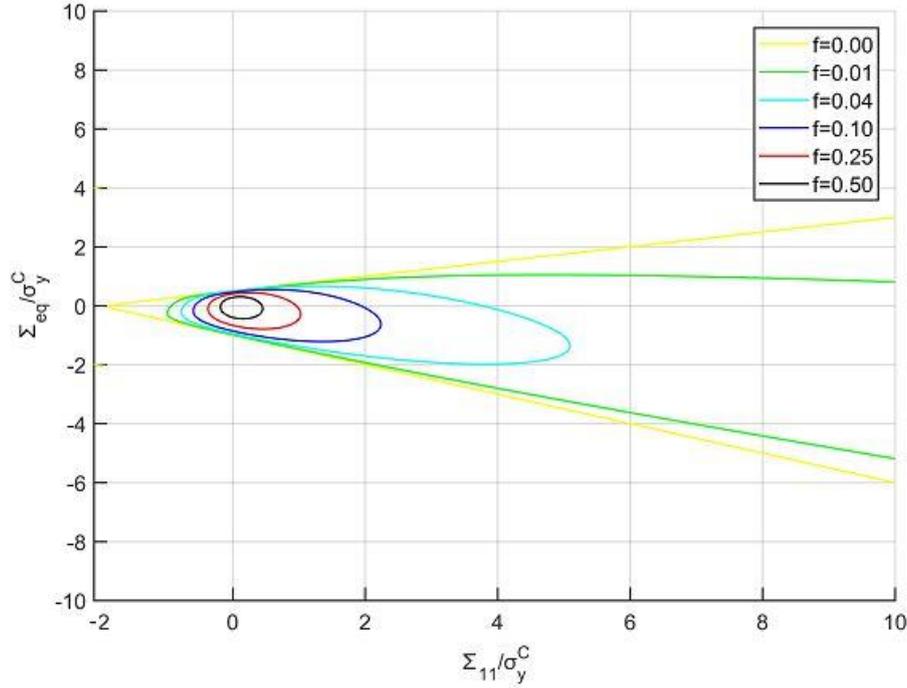


Figura 5.2: Superficies de plastificación del Caso 1, obtenidas enfrentando los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica equivalente y la tensión macroscópica en el eje 1

5.3. Caso 2

En este caso, se tiene que el valor del límite elástico a tracción es dos tercios el valor del límite elástico a compresión. Se realiza el mismo proceso que en el caso anterior, y se dan los siguientes valores para dichos límites: $\sigma_y^T = \frac{200}{3} MPa$ y $\sigma_y^C = 100 MPa$. La función de plastificación que se obtiene es la siguiente (5.2):

$$\Phi(\Sigma_{11}, \Sigma_{33}, f) = \frac{(\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2}{\left[\frac{400}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33}\right)\right]^2} + 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_{11}}{\left[\frac{400}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33}\right)\right]}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (5.2)$$

Para obtener las superficies de plastificación, se adimensionalizan las tensiones macroscópicas con el valor de σ_y^C . Las gráficas se muestran en las figuras 5.3 y 5.4.

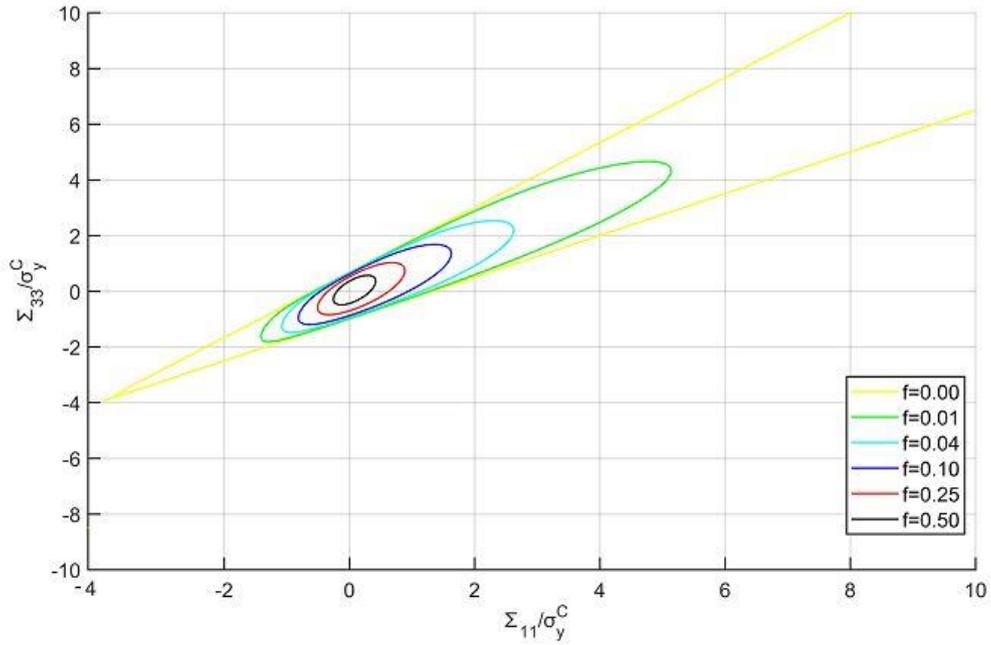


Figura 5.3: Superficies de plastificación del Caso 2, obtenidas enfrentando los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica en el eje 3 y la tensión macroscópica en el eje 1

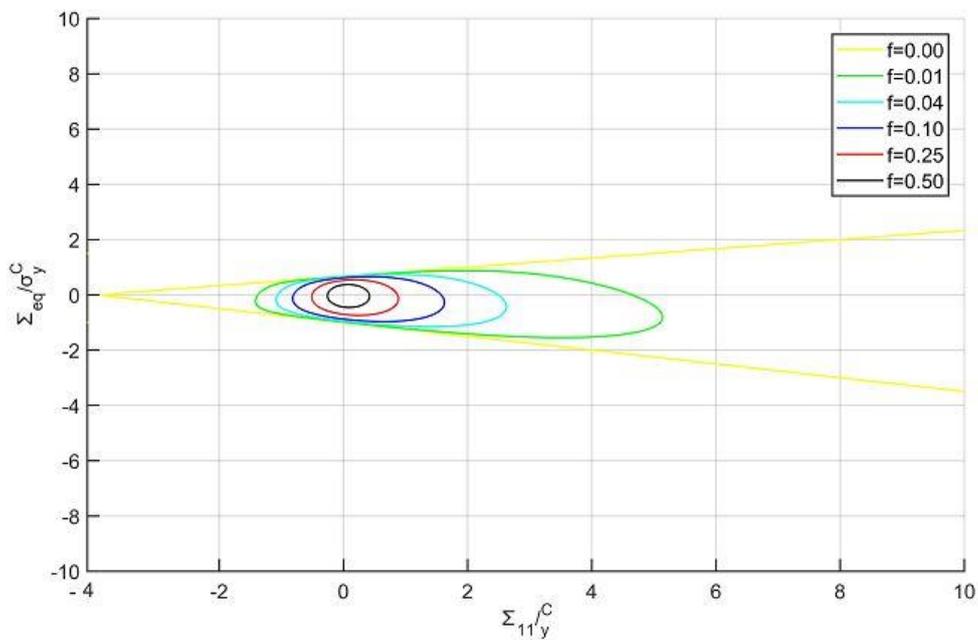


Figura 5.4: Superficies de plastificación del Caso 2, obtenidas enfrentando los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica equivalente y la tensión macroscópica en el eje 1

5.4. Caso 3

En este apartado, se considera que el valor de los límites elásticos tanto a tracción como a compresión, es el mismo ($\sigma_y^T = \sigma_y^C = \sigma_y$). Esta relación, implica que el límite elástico, según la definición requerida por este problema (4.34), no depende de la tensión

hidrostática y por consiguiente, de las tensiones macroscópicas. Para este caso, el límite elástico será una constante que depende del valor de σ_y^T y σ_y^C (5.3).

$$\bar{\sigma} = \frac{2\sigma_y^C \sigma_y^T}{\sigma_y^C + \sigma_y^T} \quad (5.3)$$

Dando un valor de 100 MPa a σ_y^T y σ_y^C , y aplicando esta singularidad en la ecuación (4.48), se obtiene la siguiente función de plastificación (5.4).

$$\Phi(\Sigma_{11}, \Sigma_{33}, f) = \frac{(\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2}{(100)^2} + 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_{11}}{100}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (5.4)$$

Realizando la adimensionalización de las tensiones macroscópicas con σ_y^C , se representan las superficies de plastificación para los diferentes valores de la fracción volumétrica en el Caso 3. Figuras 5.5 y 5.6.

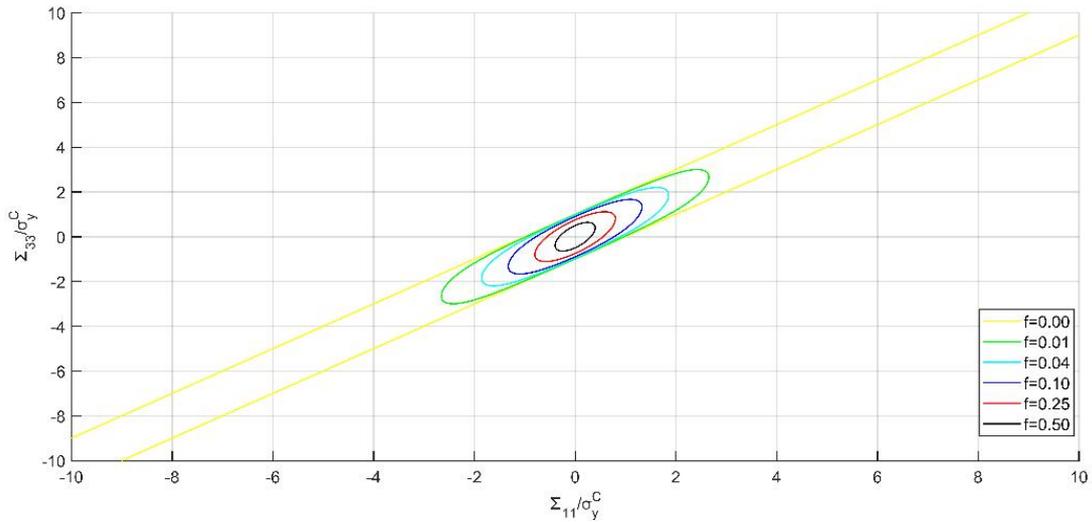


Figura 5.5: Superficies de plastificación del Caso 3, obtenidas enfrentando los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica en el eje 3 y la tensión macroscópica en el eje 1

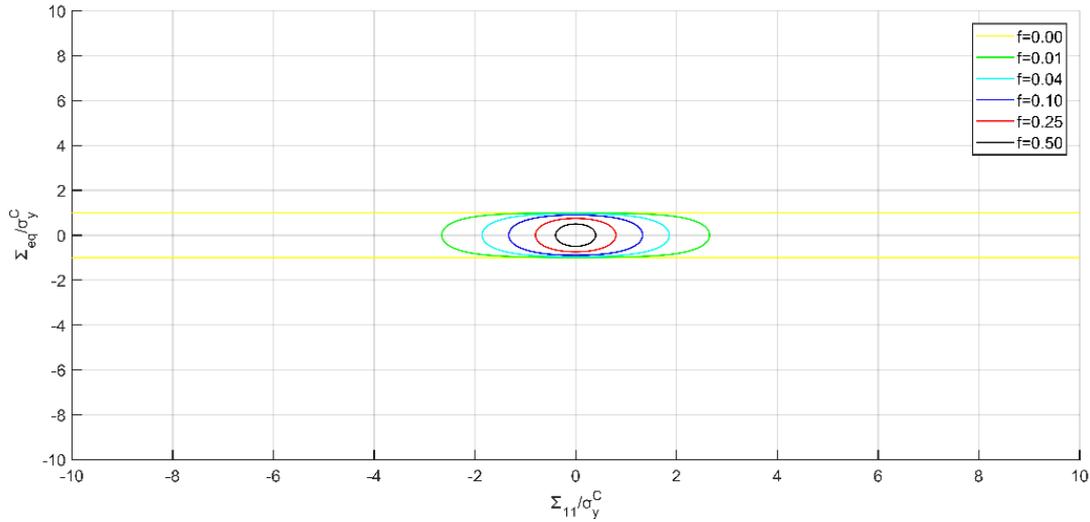


Figura 5.6: Superficies de plastificación del Caso 3, obtenidas enfrentando los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica equivalente y la tensión macroscópica en el eje 1

5.5. Caso 4

En este apartado, se han realizado las superficies de plastificación para el caso en el que el valor del límite elástico a tracción es tres medios el valor del límite elástico a compresión. Dando unos valores de $\sigma_y^T = \frac{300}{2} MPa$ y $\sigma_y^C = 100 MPa$, la función de plastificación que se obtiene es la siguiente (5.5):

$$\begin{aligned} \Phi(\Sigma_{11}, \Sigma_{33}, f) = & \frac{(\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2}{\left[\frac{600}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33}\right)\right]^2} + \\ & + 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_{11}}{\left[\frac{600}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33}\right)\right]}\right) - 1 - f^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para representar dichas superficies de plastificación, se adimensionalizan las tensiones macroscópicas con el valor de σ_y^C . Las gráficas se muestran en las figuras 5.7 y 5.8.

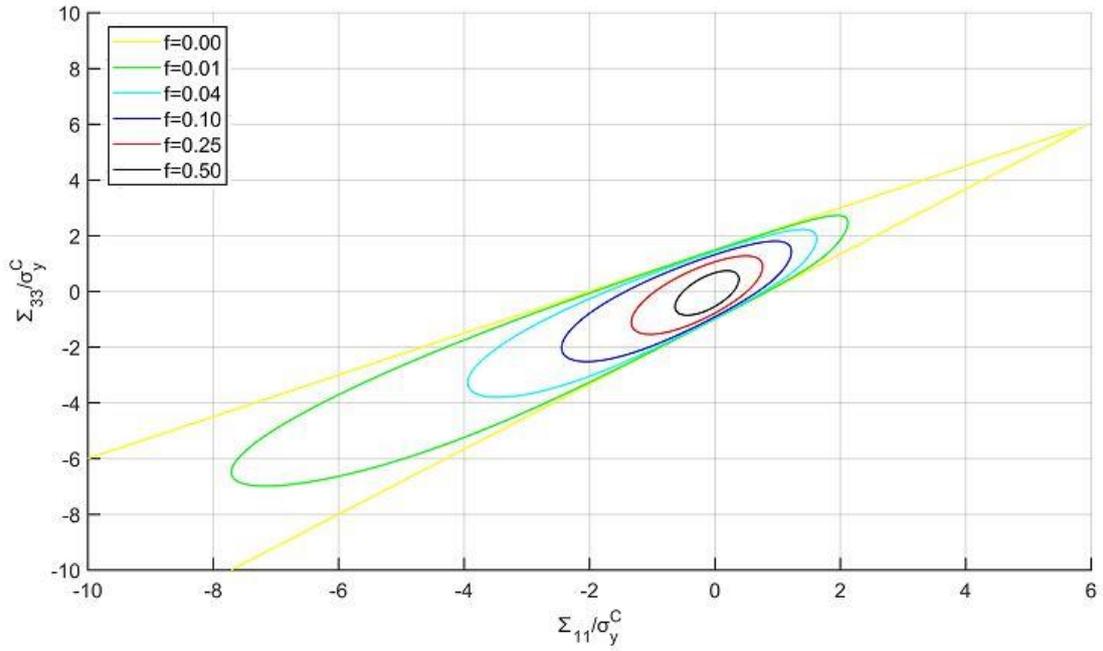


Figura 5.7: Superficies de plastificación del Caso 4, obtenidas enfrentando los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica en el eje 3 y la tensión macroscópica en el eje 1

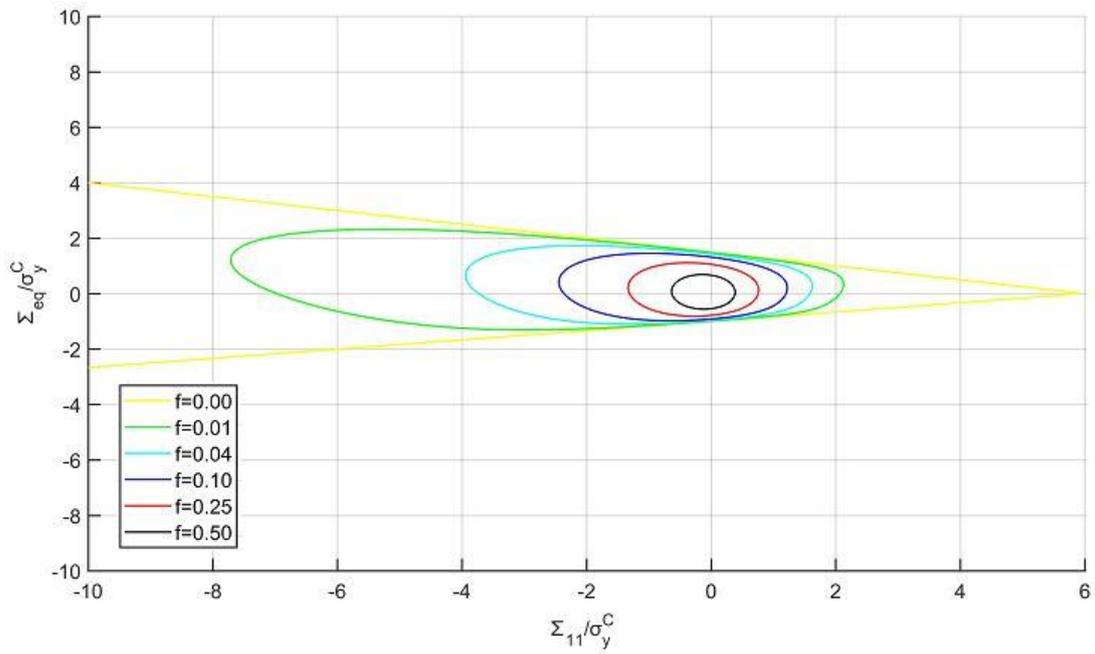


Figura 5.8: Superficies de plastificación del Caso 4, obtenidas enfrentando los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica equivalente y la tensión macroscópica en el eje 1

Capítulo 6

Análisis de resultados

6.1. Introducción

Como se ha mencionado en capítulos anteriores, el objetivo de este trabajo es el desarrollo de un modelo constitutivo, mediante el cual, a partir, de la representación de superficies de plastificación, se pueda describir el comportamiento dúctil de materiales con distinto límite elástico a tracción y compresión, y a su vez, para distintos valores de la porosidad, la cual, se ha definido, para la celda estudiada, como una fracción volumétrica (4.2).

La función de plastificación que se ha obtenido (4.47), depende de las tensiones macroscópicas en los ejes principales 1 y 3 (Σ_{11} y Σ_{33}), de la porosidad (f), y de la expresión del límite elástico ($\bar{\sigma}$).

$$\Phi(\Sigma_{11}, \Sigma_{33}, \bar{\sigma}, f) = \frac{(\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2}{(\bar{\sigma})^2} + 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_{11}}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (4.47)$$

Se ha comprobado en el apartado 4.3, que la expresión del límite elástico (4.34), a su vez, depende de: las tensiones macroscópicas en los ejes 1 y 3 (Σ_{11} y Σ_{33}), debido a la tensión hidrostática; y de la porosidad del material (f). En esta expresión también se incluyen los límites elásticos a tracción (σ_y^T) y a compresión (σ_y^C), los cuales, son constantes y su valor viene determinado por el material empleado.

$$\bar{\sigma} = \frac{2\sigma_y^C \sigma_y^T}{\sigma_y^C + \sigma_y^T} + \frac{\sigma_y^C - \sigma_y^T}{\sigma_y^C + \sigma_y^T} \left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33} \right) \quad (4.34)$$

De esta manera, la ley de plastificación es función de las tensiones macroscópicas en los ejes principales 1 y 3, de la porosidad y variará según la relación entre los límites elásticos a tracción y compresión. Resulta la siguiente ecuación general (4.48):

$$\Phi(\Sigma_{11}, \Sigma_{33}, \sigma_y^C, \sigma_y^T, f) = \frac{(\sigma_y^C + \sigma_y^T)^2 (\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2}{\left[2\sigma_y^C \sigma_y^T + \frac{3\sigma_y^C - 3\sigma_y^T}{3} \left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33} \right) \right]^2} +$$

$$+ 2f \cosh \left(\frac{\sqrt{3}(\sigma_y^C + \sigma_y^T)\Sigma_{11}}{\left[2\sigma_y^C \sigma_y^T + \frac{3\sigma_y^C - 3\sigma_y^T}{3} \left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33} \right) \right]} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (4.48)$$

La realización de las superficies de plastificación, se ha llevado a cabo, enfrentando las tensiones macroscópicas adimensionalizadas y dando valores iniciales a las constantes que dependen del material empleado (σ_y^C, σ_y^T y f). De esta manera se han obtenido veinticuatro superficies de plastificación, correspondientes a seis valores de porosidad para cada una de las cuatro relaciones entre límite elástico a tracción y a compresión.

Por tanto, se ha de analizar, la influencia de los tres parámetros anteriormente citados (σ_y^C, σ_y^T y f) en el comportamiento dúctil que describe cada superficie de plastificación.

6.2. Análisis de los casos

Se va a comenzar por la influencia de la porosidad f . Si se observan las gráficas, se puede ver que en cada una de ellas (Figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8), la superficie de plastificación disminuye al aumentar el valor de la porosidad. Esto significa, que cuanto más poroso sea el material, con cargas de menor valor se producirá la fluencia del mismo.

Comparando las superficies de plastificación del Caso 3 con las del resto de casos, se puede evidenciar el efecto de la tensión hidrostática de la definición del límite elástico en el comportamiento dúctil de los materiales.

En el Caso 3, como se ha indicado anteriormente, el límite elástico de material, no depende de la tensión hidrostática, es una constante que depende de los valores de σ_y^C y σ_y^T (5.3), de modo que, las superficies de plastificación obtenidas, coinciden con las del

modelo de Gurson para el caso de un cilindro con hueco concéntrico y una dependencia lineal del límite elástico con la deformación plástica. Se puede demostrar analizando ambas funciones de plastificación:

- Función de plastificación para un cilindro con hueco concéntrico según el modelo de Gurson:

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_h, \bar{\sigma}, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_h}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - f^2 = 0$$

donde: Σ_{eq} , debido a la simetría del problema, es la diferencia entre la tensión macroscópica del eje 3 y del eje 1 ($\Sigma_{33} - \Sigma_{11}$); Σ_h , es la tensión macroscópica hidrostática en el plano transversal ($\Sigma_{11} + \Sigma_{22} = 2\Sigma_{11}$); y $\bar{\sigma}$, el límite elástico dependiente de la deformación plástica de forma lineal.

Aplicando estas consideraciones, se tiene que dicha función de plastificación, coincide con la que se ha desarrollado para analizar el Caso 3 (5.4).

- Función de plastificación del Caso 3:

$$\Phi(\Sigma_{11}, \Sigma_{33}, \bar{\sigma}, f) = \frac{(\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2}{(\bar{\sigma})^2} + 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_{11}}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (5.4)$$

donde: $\bar{\sigma}$ para este caso, coincide con el valor de σ_y^C y σ_y^T . Esto se puede comprobar sustituyendo, en la ecuación (5.3), la condición de igualdad de los valores en los límites elásticos a tracción y compresión.

En lo que a superficies de plastificación se refiere, se determina, que la dependencia de la tensión hidrostática en la definición del límite elástico, produce una distorsión en la simetría de las superficies de plastificación. Se puede observar comparando las gráficas del Caso 3 (donde esta dependencia no se produce), figuras 5.5 y 5.6, con las gráficas del resto de casos, figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.7 y 5.8.

Observando dichas gráficas, se comprueba que la distorsión en las superficies de plastificación varía según el caso analizado. Para explicar este fenómeno, se va a analizar cómo afecta la relación entre los límites elásticos a tracción y compresión, a la contribución de la tensión hidrostática en la definición del límite elástico (4.34).

Simplificando la expresión del límite elástico aplicando la relación entre σ_y^T y σ_y^C para los casos 1, 2 y 4, se obtiene:

- Ecuación simplificada del límite elástico para el Caso 1 (6.1), ($\sigma_y^T = \frac{1}{2}\sigma_y^C$):

$$\bar{\sigma} = \frac{2}{3}\sigma_y^C + \frac{1}{3}\left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33}\right) \quad (6.1)$$

- Ecuación simplificada del límite elástico para el Caso 2 (6.2), ($\sigma_y^T = \frac{2}{3}\sigma_y^C$):

$$\bar{\sigma} = \frac{4}{5}\sigma_y^C + \frac{1}{5}\left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33}\right) \quad (6.2)$$

- Ecuación simplificada del límite elástico para el Caso 4 (6.3), ($\sigma_y^T = \frac{3}{2}\sigma_y^C$):

$$\bar{\sigma} = \frac{6}{5}\sigma_y^C - \frac{1}{5}\left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33}\right) \quad (6.3)$$

De las tres ecuaciones resultantes (6.1), (6.2) y (6.3), se puede obtener una ecuación general (6.4) con dos parámetros constantes a los que se van a denominar A y B .

$$\bar{\sigma} = A\sigma_y^C + B\left(\frac{2\Sigma_{11}}{1-f} - \Sigma_{33}\right) \quad (6.4)$$

donde: A , indica la importancia del valor constante del límite elástico y B la importancia de la tensión hidrostática en el límite elástico.

Teniendo en cuenta A , se observa que a medida que aumenta el valor de σ_y^T sobre σ_y^C , también lo hace el valor de esta constante, siendo igual a dos tercios en el Caso 1 ($\sigma_y^T = \frac{1}{2}\sigma_y^C$), y llegando hasta seis quintos en el Caso 4 ($\sigma_y^T = \frac{3}{2}\sigma_y^C$). Por tanto, al aumentar la diferencia entre σ_y^T y σ_y^C , aumenta la contribución del valor constante del límite elástico en la ley de plastificación.

Si se considera la constante B , sucede lo contrario. En el Caso 1 ($\sigma_y^T = \frac{1}{2}\sigma_y^C$) se experimenta el mayor valor de esta constante, siendo igual a un tercio, mientras en el Caso 4 ($\sigma_y^T = \frac{3}{2}\sigma_y^C$), resulta el mínimo valor, siendo negativo e igual a un quinto. Teniendo en cuenta el Caso 3 ($\sigma_y^T = \sigma_y^C$), donde el parámetro B es nulo, y observando

este parámetro en los casos 2 ($\sigma_y^T = \frac{2}{3}\sigma_y^C$) y 4 ($\sigma_y^T = \frac{3}{2}\sigma_y^C$), donde B es igual a un quinto y menos un quinto respectivamente, se comprueba que para valores donde $\sigma_y^T < \sigma_y^C$, la componente de la tensión hidrostática en la definición de límite elástico afecta positivamente y para valores donde $\sigma_y^T > \sigma_y^C$, afecta negativamente.

Comparando los resultados del Caso 1 ($\sigma_y^T = \frac{1}{2}\sigma_y^C$); $B = \frac{1}{3}$, con los del Caso 2 ($\sigma_y^T = \frac{2}{3}\sigma_y^C$); $B = \frac{1}{5}$, se determina que, la contribución de la tensión hidrostática en el límite elástico y por consiguiente en la ley de plastificación es mayor cuanto mayor sea la diferencia entre ambos límites. La contribución será positiva si $\sigma_y^T < \sigma_y^C$ y será negativa si $\sigma_y^T > \sigma_y^C$.

Por tanto, teniendo en cuenta este análisis y observando las superficies de plastificación, se demuestra que cuanto más aumenta la contribución de la tensión hidrostática más se distorsionan dichas superficies de plastificación respecto a la simetría de Caso 3. Si la contribución aumenta positivamente, la distorsión provocará un aumento de la superficie de plastificación para valores positivos de las tensiones macroscópicas; y si aumenta negativamente, la distorsión provocará el aumento de dicha superficie para valores negativos de las tensiones macroscópicas.

Por otro lado, cuanto mayor es la contribución del valor constante en el límite elástico, de mayor tamaño se obtienen las superficies de plastificación asociadas. Esta característica está directamente relacionada con las propiedades del material, como es lógico, cuanto mayor sea el valor del límite elástico, mayores serán las cargas necesarias para producir la fluencia del material.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros

7.1. Conclusiones

Durante el desarrollo de este trabajo, se ha realizado un modelo constitutivo capaz de predecir el comportamiento dúctil de materiales rígidos perfectamente plásticos, para diferentes valores de la porosidad, y con la característica principal de poseer la denominada “resistencia diferencial” o “strength differential effect”, la cual implica que los valores del límite elástico a tracción (σ_y^T) y compresión (σ_y^C), son diferentes.

Para ello, siguiendo el modelo de McClintock, se ha considerado una celda cilíndrica con un hueco concéntrico en su interior, sometida a un esfuerzo biaxial. En la definición de límite elástico para estos materiales, se ha considerado la teoría de Burzyński, en la cual el límite elástico depende de la componente hidrostática de la tensión, concretamente se ha empleado el modelo de Burzyński-Drucker-Prager.

El modelo constitutivo creado, con el fin de determinar la fractura dúctil, permite la representación de dos tipos de superficies de plastificación para estos materiales. Estas superficies se han conseguido enfrentando los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica en el eje 3 (Σ_{33}) y en el eje 1 (Σ_{11}), y en el segundo tipo de superficies de plastificación, se han enfrentado los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica equivalente (Σ_{eq}) y los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica en el eje 1 (Σ_{11}).

Para determinar cómo afecta la relación entre los límites elásticos a tracción y compresión en el comportamiento dúctil de este tipo de materiales, se han realizado cuatro casos con una relación distinta entre estos límites. Y para demostrar cómo afecta la porosidad, en cada caso, se han realizado seis superficies de plastificación, cada una, con un valor de porosidad distinto.

Realizando un análisis de los resultados obtenidos en dichas superficies de plastificación, se observa el vínculo entre las superficies de plastificación y la relación existente entre el límite elástico a tracción (σ_y^T) y a compresión (σ_y^C).

- Para materiales en los que $\sigma_y^T < \sigma_y^C$, las superficies de plastificación, aumentarán su tamaño de forma asimétrica en la zona positiva de las tensiones macroscópicas de los ejes 1 y 3. Este aumento será más amplio, cuanto mayor sea la diferencia entre ambos límites.
- Para materiales en los que $\sigma_y^T > \sigma_y^C$, las superficies de plastificación, aumentarán su tamaño de forma asimétrica en la zona negativa de dichas tensiones macroscópicas. Este aumento, de nuevo, será mayor cuanto más diferencia exista entre ambos límites.
- En los materiales donde $\sigma_y^T = \sigma_y^C$, se ha comprobado que la tensión hidrostática no afecta al límite elástico y por consiguiente, las superficies de plastificación poseen una forma simétrica.

Realizando este mismo análisis, se ha comprobado que cuanto mayor sea la diferencia de σ_y^T sobre σ_y^C , más aumenta la componente constante del límite elástico, y por tanto, las superficies de plastificación resultan de mayor tamaño. Lo cual significa que la fractura dúctil se producirá con cargas de mayor valor, cuanto más grande sea esta diferencia.

En lo referente a la porosidad, visualizando los casos, se comprueba que para todos ellos, las superficies de plastificación disminuyen cuanto mayor es el valor de la porosidad. De este modo, la fluencia del material se producirá más fácilmente, cuanto mayor sea la porosidad existente.

Las superficies de plastificación con valores de la porosidad iguales a cero, representan un caso ideal que no se podría producir en la realidad; acotan las superficies de plastificación para valores de porosidad que si se pueden encontrar en materiales empleados en aplicaciones ingenieriles.

7.2. Trabajos futuros

Con el objetivo de verificar y comprobar las superficies de plastificación obtenidas en este TFG, un trabajo futuro podría implementar en un programa de elementos finitos el modelo constitutivo que se ha desarrollado. De modo que realizando simulaciones, se comparen los resultados obtenidos a través del programa con las superficies de plastificación desarrolladas en este trabajo.

Para ampliar el estudio del comportamiento plástico de materiales con resistencia diferencial, se propone realizar un modelo constitutivo que permita describir el proceso de fractura dúctil para una relación entre límite elástico y tensión hidrostática definida por el paraboloides Burzyński-Torre.

Con el fin de realizar un modelo constitutivo más preciso que el que se ha desarrollado en este trabajo, se propone eliminar la aproximación realizada en la ecuación del flujo plástico (4.7) donde se aplica la ley de Von Mises. En el trabajo futuro se deberá tener en cuenta la teoría de plastificación de Burzyński.

Bibliografía

- [1] Argon, A.S., Im, J., Needleman, A., “Distribution of plastic strain and negative pressure in necked steel and copper bars”, *Metallurgical Transaction* 6A 815-824, 1975.
- [2] Betegón, C., del Coz, J.J., Peñuelas, I., 2006. “Implicit integration procedure for viscoplastic gurson materials”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 6146-6157, 2006.
- [3] Bridgman, P.W., *Studies in large plastic flow and fracture*, McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
- [4] Burzynski, W., “Ueber die Anstrengungshypothesen”, *Schweiz Bauzeitung* 94 259-62, 1929.
- [5] Callister, W.D., *Introducción a la Ciencia e Ingeniería de Materiales.*, Ed. Reverte., 2007.
- [6] Drucker, D.C., Prager W., “Soil mechanics and plastic analysis of limit design”, *Quart J Appl Math* 10 157-65, 1952.
- [7] Goods, S.H., Brown, L.M., “The nucleation of cavities by plastic deformation”, *Acta Metallurgica* 27 1-15, 1979.
- [8] Gurson, A.L., “Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth. Part I- Yield criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media”, *Journal of Engineering Materials and Technology* 99 2-15, 1977.
- [9] McClintock, F.A.,” A criterion of ductile fracture by the growth of holes”, *Journal of Applied Mechanics* 35 363-371, 1968.
- [10] Pineau, A., Benzerga, A.A., & Pardoën, T., “Failure of metals I: Brittle and ductile fracture”. *Acta Materialia* 107, 424-483, 2016.
- [11] Puttick, K.E., “Ductile fracture in metals”, *Philosophical Magazine* 4 964-969, 1959.

- [12] Reboul, J., “Superficies de plastificación para materiales dúctiles dependientes de la velocidad de deformación”, Trabajo de fin de máster, Dpto. de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, España (año).
- [13] Rice, J.R., Tracey, D.M., “On the ductile enlargements of voids in triaxial stress fields”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 17 201-217, 1969.
- [14] Rogers, H.C., “The tensile fracture of ductile metals”, *Transactions of the ASME* 498-506, 1960.
- [15] Thomason, P.F., *Ductile fracture of metals*, Pergamon Press, Oxford, 1990.
- [16] Tipper, C.F., “The fracture of metals”, *Metallurgia* 39 133-137, 1949.
- [17] Tvergaard, V., “Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions”, *International Journal of Fracture* 17 389-407, 1981.
- [18] Tvergaard, V., Needleman, A., “Analysis of cup-cone fracture in a round tensile bar”, *Acta Metallurgica* 32 157-169, 1984.
- [19] Vadillo, G., “Modelos de fractura dúctil en condiciones estáticas y dinámicas”, Tesis doctoral, Dpto. de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, España, 2007.
- [20] Vadillo, G., Fernández, J., & Pecherski, R.B. “Some applications of Burzynski yield condition in metal plasticity”, 2012.
- [21] Weck, A., “The role of coalescence on ductile fracture”, McMaster University, Ontario, Canadá, 2005.
- [22] Zhang, Z.L., “A complete Gurson Model in: M.H. Aliabadi. *Nonlinear Fracture and Damage Mechanics*”, WIT, Southampton, 2001, M.H. Aliabadi, pp. 223–248, 2001.
- [23] Zhang, Z.L., Thaulow, C., Ødegård, J., “A complete Gurson model approach for ductile fracture”, *Engineering Fracture Mechanics* 67 155–168, 2000.