

TU/83

(2º Sót.)

**MODELIZACIONES ALTERNATIVAS EN TIEMPO
CONTINUO DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS
TIPOS DE INTERÉS**

TESIS DOCTORAL

Autor: Manuel Moreno Fuentes

Director: Juan Ignacio Peña Sánchez de Rivera

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Departamento de Economía de la Empresa

Getafe, 1997



Fanni

Fanni

MU

Gordob 2013

Handwritten signature

A mis padres, por todo

Índice

Resumen	5
1 Introducción a la modelización en tiempo continuo de la estructura temporal de los tipos de interés	11
1.1 Introducción	11
1.2 Modelos en Tiempo Continuo	13
1.2.1 Modelos Endógenos Unifactoriales	15
1.2.2 Modelos Endógenos Multifactoriales	21
1.2.3 Modelos Endógenos con Saltos	24
1.2.4 Modelos Exógenos	27
1.3 Valoración de Activos Derivados	33
1.4 Evidencia Empírica de los Modelos en Tiempo Continuo	37
1.4.1 Evidencia Empírica de los Modelos Endógenos	39
1.4.2 Evidencia Empírica de los Modelos Exógenos	51
1.5 Conclusiones	55

2	Procesos de difusión con saltos y valoración de opciones	59
2.1	Introducción	59
2.2	Marco Teórico	61
2.3	Método Econométrico de Estimación	66
2.4	Características de los Datos	69
2.5	Análisis Empírico	70
2.5.1	Modelización del Proceso de Difusión Pura	70
2.5.2	Modelización de los Saltos	73
2.6	Intervenciones de las Autoridades Monetarias	75
2.7	Valoración de Activos Derivados	77
2.8	Conclusiones	78
	Apéndice de Tablas y Representaciones Gráficas	80
3	Un modelo de dos factores con reversión a la media para la estructura temporal de los tipos de interés	92
3.1	Introducción	92
3.2	La Ecuación de Valoración de Bonos	96
3.3	Valoración de Bonos al Descuento	102
3.4	Implicaciones sobre la Estructura Temporal de los Tipos de Interés	109
3.5	Expresión Analítica del Precio de Activos Derivados	115
3.6	Aplicación Empírica	131

3.7 Conclusiones	143
Apéndice de Tablas y Representaciones Gráficas	146
4 Gestión del riesgo de tipos de interés bajo un modelo bifactorial de la estructura temporal de los tipos de interés	169
4.1 Introducción	169
4.2 Duración y Convexidad Generalizadas	175
4.3 Ratios de Cobertura	181
4.4 El Problema de la Cobertura	184
4.5 Cobertura Frente al Riesgo de Tipos de Interés	186
4.6 Una Propuesta de Solución de las Limitaciones de la Duración Convencional	189
4.7 Conclusiones	197
Apéndice: Limitaciones de la Duración Convencional	200
Referencias	217

Resumen

Los modelos en tiempo continuo de la estructura temporal de los tipos de interés suponen que los tipos de interés evolucionan de modo continuo a lo largo del tiempo. Este tipo de modelos se divide en dos categorías: modelos endógenos, que suponen la existencia de unas variables de estado que mueven la estructura temporal y modelos exógenos que toman la estructura temporal como dada. El objetivo principal del presente trabajo es desarrollar nuevos modelos (endógenos) en tiempo continuo, estudiar sus propiedades teóricas en relación con la modelización de los tipos de interés, proceder a la valoración de activos derivados y estudiar su comportamiento empírico.

En primer lugar, se propone un proceso de difusión con saltos. Se desarrolla un método basado en diferencias finitas que permite la valoración de activos derivados (tanto de tipo europeo como americano) y se propone una técnica econométrica para identificar los instantes en que se producen los saltos. Ambos métodos son aplicados a datos del mercado interbancario español y se analiza la relación entre los saltos y las intervenciones de la autoridad monetaria. A continuación se propone un nuevo modelo de dos factores: el tipo de interés a largo plazo y el diferencial de tipos de interés (*spread*). Se obtienen expresiones cerradas para el precio de bonos y de diversos tipos de opciones. Tras comprobar el buen comportamiento empírico de este modelo, se analizan sus propiedades en relación con la gestión del riesgo de tipos de interés mediante la presentación y aplicación de unas nuevas medidas de "duración generalizada".

El capítulo uno contiene una revisión de los modelos en tiempo continuo más utilizados para el análisis de la estructura temporal de los tipos de interés. Se describen los principales supuestos e implicaciones de dichos modelos así como las ventajas e inconvenientes que presentan su aplicación a la valoración de activos derivados y su comportamiento empírico. Las aportaciones originales que se desarrollan en esta tesis doctoral se exponen en los capítulos dos, tres y cuatro.

En el capítulo dos se presenta un modelo de un único factor para la estructura temporal. El principal supuesto de este modelo es que el tipo de interés instantáneo sigue un proceso de difusión con saltos. El análisis empírico se realiza con tipos de interés del mercado interbancario español y sugiere que el modelo de difusión con saltos explica mejor la evolución de los tipos de interés que el modelo de difusión pura. Se exploran algunas implicaciones económicas de la actividad de saltos mediante un análisis de los cambios en el tipo de intervención del Banco de España. Como resultado, se concluye que algunos, aunque no todos, de los saltos se relacionan con las intervenciones de la autoridad monetaria.

Además, se valoran activos que dependen de los tipos de interés (bonos y opciones) tanto de tipo europeo como americano mediante un método que se basa en diferencias finitas, el cual nos permite trabajar con las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que se derivan al partir de un modelo de difusión con saltos. La existencia de saltos afecta en gran medida a la valoración de bonos y de opciones de compra y se comprueba que se produce una infravaloración si no se tienen en cuenta los saltos. Sin embargo, la valoración de opciones de venta presenta ciertas indeterminaciones.

En el capítulo tres se propone un nuevo modelo de dos factores que extiende la literatura previa basada en este tipo de modelos. El principal supuesto que realiza este modelo es que el precio de los bonos al descuento libres de riesgo es función de dos

variables de estado y del tiempo al vencimiento. Las variables de estado empleadas son el tipo de interés a largo plazo y el diferencial de tipos de interés (*spread*), que es igual a la diferencia entre el tipo de interés (instantáneo) a corto plazo sin riesgo y el tipo de interés a largo plazo.

Suponiendo que ambos factores siguen un proceso Ornstein-Uhlenbeck, se obtiene una ecuación general de valoración de bonos cuya solución analítica nos proporciona el precio de bonos cupón-cero con cualquier vencimiento. También se obtiene una expresión cerrada para el precio de diversos activos derivados: opciones europeas sobre bonos al descuento y sobre bonos, *caps*, *floors*, *collars*, *swaps*, *swaptions*, opciones binarias y opciones compuestas.

Para el período muestral considerado, 1991-1995, se comprueba que los precios de mercado del riesgo asociados a las variables de estado son positivos y significativamente diferentes de cero. Finalmente, se analiza el comportamiento empírico de este modelo en comparación con un modelo unifactorial que supone que la única variable de estado relevante es el tipo de interés a corto plazo. La principal conclusión es que, independientemente de los estadísticos empleados, de los subperíodos analizados o de los vencimientos considerados, la evidencia empírica sugiere que el modelo de dos factores es más adecuado (tanto para estimar como para predecir) que el modelo unifactorial.

Finalmente, en el capítulo cuatro se analiza una aplicación del modelo desarrollado en el capítulo anterior, en concreto, la gestión del riesgo derivado de los tipos de interés. El riesgo de tipos de interés se relaciona con los cambios que puede presentar la curva de rentabilidades. Así, tenemos el riesgo de mercado (*market risk*) que se deriva de cambios paralelos en dicha curva mientras que el riesgo de curva de rentabilidades (*yield curve risk*) se debe a cambios en la pendiente y/o en la curvatura de esta curva.

Con el propósito de gestionar este tipo de riesgo, este capítulo presenta y aplica

unas nuevas medidas de “duración generalizada”. Dichas medidas se basan en el modelo bifactorial presentado en el anterior capítulo y permiten paliar las limitaciones asociadas a las medidas convencionalmente empleadas. Estas medidas de “duración generalizada” son utilizadas para el cálculo de los ratios de cobertura. Dichos ratios nos permiten inmunizar una cartera de bonos mediante el empleo de opciones sobre bonos. Así mismo, se describe cómo se puede utilizar esta medida para gestionar el riesgo derivado de los tipos de interés ante cambios (paralelos y/o en la pendiente) en la curva de rentabilidades.

Finalmente, se presenta un ejemplo numérico que ilustra cómo las medidas definidas en este capítulo pueden, efectivamente, paliar las limitaciones asociadas a técnicas convencionales previamente empleadas en la literatura. Analizando tres posibles cambios en la curva de rentabilidades (un cambio paralelo y dos tipos de cambios de pendiente), se comprueba que las nuevas medidas de “duración generalizada” sí informan de modo adecuado sobre el comportamiento futuro de una cartera ante estos tipos de cambios en la curva de rentabilidades. Como consecuencia estas nuevas medidas de “duración generalizada” pueden ser un instrumento útil para la gestión de carteras de renta fija: independientemente de la variación (y del cambio) que experimentan los tipos de interés, las características relevantes para determinar el comportamiento futuro de una cartera de renta fija son las medidas de “duración generalizada” y las expectativas sobre la dirección de los movimientos futuros (subida o bajada) de los tipos de interés. Así, entre dos carteras alternativas en las que coinciden las medidas de “duración generalizada” respecto al *spread* y al tipo de interés a largo plazo, la cartera con menor (mayor) “duración generalizada” respecto al tipo de interés a corto plazo siempre será preferible cuando los tipos de interés suban (bajen). Por tanto, en función de las expectativas sobre el cambio futuro (subida o bajada) de los tipos de interés, se debe elegir la cartera correspondiente (con menor o mayor “duración generalizada” respecto

al tipo de interés a corto plazo). Más aún, la rentabilidad adicional que se obtiene en cada caso es monótona respecto a la magnitud del cambio que se ha producido en la curva de rentabilidades.

Las principales contribuciones que aporta este trabajo se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Proponer un proceso de difusión con saltos para el tipo de interés instantáneo y una técnica econométrica para identificar los instantes en que se producen los saltos.
- Analizar la relación existente entre la evolución temporal de los tipos de interés del mercado interbancario español y las intervenciones de la autoridad monetaria.
- Valorar activos derivados (de tipo europeo y americano) mediante una técnica de diferencias finitas y analizar la influencia de la existencia de los saltos identificados en la evolución temporal de los tipos de interés sobre dicha valoración.
- Proponer un nuevo modelo de dos factores de la estructura temporal de los tipos de interés.
- Obtener expresiones analíticas, partiendo de los supuestos realizados por este nuevo modelo, para el precio de una serie de activos derivados.
- Comprobar el buen comportamiento empírico del nuevo modelo bifactorial que se ha presentado en relación con un modelo alternativo.
- Presentar y aplicar unas nuevas medidas de “duración generalizada” que ayudan a paliar las limitaciones de la duración convencional.
- Utilizar estas nuevas medidas para el cálculo de los ratios de cobertura, los cuales permiten la inmunización de una cartera de bonos mediante opciones sobre bonos.
- Obtener condiciones bajo las cuales es posible conocer el comportamiento futuro de una cartera de renta fija ante cambios paralelos y/o en la pendiente de la curva de rentabilidades.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer, en primer lugar, al profesor Juan Ignacio Peña por su inestimable ayuda y apoyo constante durante la realización de este trabajo. También quiero expresar mi agradecimiento a los miembros del Departamento de Economía de la Empresa de la Universidad Carlos III de Madrid que han puesto a mi disposición todos los medios necesarios para realizar este trabajo. Mención especial merecen José Ramón Berrendero, Ignacio Fraile, Santiago Mira, Marta Moreno y Gregorio Serna por las horas de conversaciones y trabajo que hemos compartido.

Los comentarios recibidos de los participantes en el 1994 European Financial Association Doctoral Tutorial, 2nd y 3rd Chemical Bank-Imperial College Conference, XXI Simposio de Análisis Económico, 4th Banque Nationale de Paris-Imperial College Conference, 6th European Financial Management Association Meeting y en las workshops celebradas en la Universidad Carlos III de Madrid y Universitat Pompeu Fabra de Barcelona así como las conversaciones mantenidas con Michele Boldrin, Christian Dunis, Javier Estrada, Soledad Nuñez, Stefan Pichler, Esther Ruiz y Marliese Uhrig han servido para mejorar versiones preliminares de los resultados que se recogen en esta tesis.

Agradezco especialmente a Pedro Delicado y Xavier Freixas su hospitalidad cuando visité la Universitat Pompeu Fabra de Barcelona. En último lugar, aunque no en importancia, agradezco a mis hermanos M^a Elisa, M^a Teresa, Jesús Antonio y M^a Dolores su paciencia, su comprensión y su entusiasmo.

Getafe, Agosto de 1997.

Capítulo 1

Introducción a la modelización en tiempo continuo de la estructura temporal de los tipos de interés

1.1 Introducción

La modelización de la curva “tipo de interés-plazo” y su evolución temporal es un aspecto fundamental para entender el funcionamiento de una economía dado el importante papel que tienen los tipos de interés en la transmisión de los movimientos del sector monetario al sector real. Esta modelización se puede hacer desde una perspectiva macroeconómica (considerando, por ejemplo, las implicaciones de diversas políticas económicas o monetarias sobre los diferentes agentes económicos) o desde una teoría basada en los mercados financieros.

Desde el punto de vista de los mercados financieros, que es el empleado en esta tesis, el valor de los activos financieros debe reflejar el nivel de los tipos de interés así como las previsiones del mercado sobre la evolución futura de dichas variables.

El marco de trabajo en el que se encuadra la presente tesis es la estructura temporal de los tipos de interés, la cual establece la relación entre los tipos de interés

proporcionados por activos libres de riesgo y sus diferentes plazos¹. La explicación de esta estructura temporal nos ayuda a establecer la relación entre el tipo de interés y el plazo, a extraer información sobre la economía y a predecir cambios en las variables que afectan a la curva de rentabilidades.

Dentro de este marco, vamos a emplear los modelos en tiempo continuo. El principal supuesto que realizan estos modelos es que los tipos de interés evolucionan de modo continuo a lo largo del tiempo. Dentro de estos modelos, siguiendo el enfoque de Moraleta (1997), podemos distinguir dos categorías:

- Modelos *endógenos* de la estructura temporal. Este tipo de modelos realiza una serie de supuestos sobre las variables de estado que mueven la estructura temporal de tipos de interés y sobre el proceso estocástico que siguen dichas variables. A partir de los supuestos realizados, se intenta explicar la estructura temporal de los tipos de interés. Dicha estructura temporal está totalmente determinada por el valor de los parámetros del modelo y es, por tanto, una variable endógena de dicho modelo. Ejemplos de estos modelos son Vasicek (1977), Brennan and Schwartz (1980) y Cox, Ingersoll and Ross (1985a, b) (CIR, de ahora en adelante).
- Modelos *exógenos* de la estructura temporal. En estos modelos se toma como dada la estructura temporal observada y, a partir de ella, se derivan los movimientos futuros de los tipos de interés de modo que no existan oportunidades intertemporales de arbitraje. Trabajos representativos de este enfoque son Ho and Lee (1986), Hull and White (1990) (HW, de ahora en adelante) y Heath, Jarrow and Morton (1992) (HJM, de ahora en adelante).

Aunque se han propuesto muchos modelos en tiempo continuo para explicar la dinámica temporal de los tipos de interés, ninguno de ellos parece reunir todas las

¹El plazo de un instrumento financiero con una fecha de madurez fija se define como el tiempo hasta el día del vencimiento de dicho activo.

propiedades deseables en relación con aspectos como la valoración de derivados y el comportamiento empírico de dichos modelos. El objetivo de este capítulo es comentar las distintas alternativas de modelización que se han presentado hasta la actualidad así como las ventajas e inconvenientes que presentan dichos modelos. Este capítulo se organiza del siguiente modo. En la Sección 1.2 se presenta una perspectiva general de los distintos modelos en tiempo continuo que se han utilizado para el análisis de la estructura temporal de los tipos de interés. La Sección 1.3 presenta una panorámica de una de las principales aplicaciones de estos modelos, la valoración de activos derivados. A continuación, en la Sección 1.4, se describe el comportamiento empírico que se obtiene con los diferentes tipos de modelos en tiempo continuo presentados anteriormente. Finalmente, en la Sección 1.5 se presentan las conclusiones más relevantes de todo lo expuesto.

1.2 Modelos en Tiempo Continuo

En esta sección se presenta una perspectiva general de los distintos modelos en tiempo continuo que se han utilizado para el análisis de la estructura temporal de los tipos de interés. Tal como se ha indicado anteriormente, dentro de ellos podemos distinguir entre modelos endógenos y exógenos de la estructura temporal. El primer tipo de modelos realiza una serie de supuestos sobre la economía, sobre las variables de estado que mueven la estructura temporal de tipos de interés y sobre el proceso estocástico que siguen dichas variables. Según el número de variables de estado que se utiliza, podemos distinguir entre modelos unifactoriales y modelos multifactoriales. Aunque, estos modelos suponen que la(s) variable(s) de estado evoluciona(n) de modo continuo a lo largo del tiempo, se pueden introducir cambios discretos en los tipos de interés mediante la existencia de saltos. A partir de los supuestos realizados, se intenta explicar

la estructura temporal de los tipos de interés y se procede a la valoración de activos derivados. Las principales desventajas de este tipo de modelos es que se incluyen parámetros no observables (que, por tanto, deben ser estimados) y que no se logra un ajuste perfecto a los tipos de interés observados en cada instante del tiempo.

Por otro lado, los modelos exógenos toman como dada la estructura temporal observada y, a partir de ella, se derivan los movimientos futuros de los tipos de interés de modo que no existan oportunidades intertemporales de arbitraje. En estos modelos no es necesario estimar o realizar supuestos sobre el precio de mercado del riesgo² asociado a las variables de estado del modelo. El inconveniente que presentan estos modelos es que, siendo necesaria la estimación (calibración) diaria de la estructura temporal de los tipos de interés, no está garantizada la consistencia entre las diferentes estimaciones obtenidas.

Ambos tipos de modelos difieren en sus objetivos. Los modelos endógenos determinan el proceso estocástico a seguir por las variables de estado con el propósito de determinar la estructura temporal de equilibrio, la cual sirve de base para realizar la valoración de activos derivados. Por otro lado, los modelos exógenos intentan conseguir un ajuste perfecto a los tipos de interés observados y valoran activos derivados con relación a la estructura temporal observada. Por tanto, existen dos metodologías diferentes a la hora de analizar la estructura temporal de tipos de interés y, como consecuencia, tenemos dos tipos de fórmulas de valoración de derivados y dos alternativas para establecer una determinada estrategia de cobertura.

²El precio de mercado del riesgo indica el incremento en la rentabilidad esperada de un bono por cada unidad adicional de riesgo. En contraste con los modelos exógenos, en los modelos endógenos siempre es necesaria la estimación del precio de mercado del riesgo. Ello es debido a que la alta correlación existente entre los tipos de interés correspondientes a diferentes vencimientos imposibilita la construcción de una cartera de cobertura similar a la presentada en Black and Scholes (1973).

A continuación, se describen las principales modelizaciones que se han utilizado en la literatura previa. Comenzamos con los modelos endógenos de la estructura temporal tanto en su versión unifactorial como multifactorial. Tras comentar los modelos endógenos que - además de suponer una evolución continua en los tipos de interés - permiten cambios discretos en los tipos de interés, presentamos los modelos exógenos con los cuales finaliza esta sección.

1.2.1 Modelos Endógenos Unifactoriales

La mayoría de los modelos endógenos unifactoriales en tiempo continuo suponen que la única variable de estado relevante es el tipo de interés instantáneo, r . Estos modelos parten de la ecuación diferencial estocástica

$$dr = \mu(r)dt + \sigma(r)dw$$

donde dr indica el cambio en el tipo de interés instantáneo, las funciones $\mu(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ son, respectivamente, la deriva y la difusión del proceso estocástico y dw es un movimiento browniano. Según esta modelización, tanto la media condicional como la varianza condicional de los cambios en el tipo de interés instantáneo dependen del nivel de los tipos de interés. Como ambas funciones dependen de una serie de parámetros θ , la anterior ecuación puede reescribirse como

$$dr = \mu(r, \theta)dt + \sigma(r, \theta)dw$$

Esta ecuación diferencial estocástica incluye una gran variedad de modelos según las distintas especificaciones que se supongan para la deriva y la difusión del proceso. Así, tenemos los siguientes casos:

Modelo	Deriva $\mu(r, \theta)$	Difusión $\sigma(r, \theta)$
Merton (1973)	α_0	β_0
Black and Scholes (1973)	$\alpha_1 r$	$\beta_1 r$
Cox (1975)	$\alpha_1 r$	$\beta_2 r^\tau$
Vasicek (1977)	$\alpha_0 + \alpha_1 r$	β_0
Dothan (1978)	0	$\beta_1 r$
Brennan and Schwartz (1980)	$\alpha_0 + \alpha_1 r$	$\beta_1 r$
CIR (1980)	0	$\beta_2 r^{\frac{3}{2}}$
CIR (1985a, b)	$\alpha_0 + \alpha_1 r$	$\beta_2 \sqrt{r}$
Constantinides (1992)	$\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 \sqrt{r - \alpha_3}$	$\beta_0(r - \beta_1)$
Chan <i>et al</i> (1992)	$\alpha_0 + \alpha_1 r$	$\beta_2 r^\tau$
Duffie and Kan (1996)	$\alpha_0 + \alpha_1 r$	$\sqrt{\beta_0 + \beta_1 r}$
Ait-Sahalia (1996)	$\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \frac{\alpha_3}{r}$	$\beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^\tau$

Merton (1973) establece un modelo basado en un movimiento browniano aritmético, suponiendo que la volatilidad condicional de los cambios en los tipos de interés es constante. Dicho modelo es utilizado para modelizar el precio de bonos al descuento. La desventaja de este modelo es que los tipos de interés no presentan reversión a la media³

Black and Scholes (1973) es el trabajo pionero en valoración de opciones sobre acciones. Estos autores modelizan el cambio en el tipo de interés mediante un movimiento browniano geométrico. Bajo este supuesto, un argumento basado en una cobertura dinámica permite obtener el precio de una opción europea cuyo activo subyacente es

³Tal como indica Hull (1997), este rasgo de los tipos de interés tiene poderosos argumentos económicos a favor: cuando los tipos de interés son altos, hay menos demanda por parte de los prestatarios lo cual induce un descenso en el valor de dichos tipos de interés ocurriendo el caso contrario cuando los tipos de interés son bajos.

una acción. Este modelo es un caso particular de Brennan and Schwartz (1980) y engloba a Dothan (1978).

Cox (1975) postula un modelo de elasticidad de varianza constante, el cual engloba como casos particulares a los modelos de Black and Scholes (1973), Dothan (1978) y CIR (1980).

Vasicek (1977) modeliza los tipos de interés según un proceso con reversión a la media. Este autor demuestra que la ausencia de oportunidades de arbitraje implica que el precio de mercado del riesgo es independiente del vencimiento del activo a valorar. El modelo propuesto implica una distribución normal para los tipos de interés que, por tanto, pueden alcanzar valores negativos. Este hecho podría originar una oportunidad de arbitraje pero la posibilidad de rentabilidad negativa en la potencial inversión a realizar anula dicha oportunidad de arbitraje. Este modelo es empleado para valorar bonos, opciones sobre bonos, futuros y opciones sobre futuros y, al igual que Merton (1973), implica volatilidad condicional constante. Las principales ventajas de este modelo son su simplicidad y su tratabilidad analítica pues permite la obtención de expresiones cerradas para el precio de diversos activos derivados.

Se han propuesto diferentes modelos que aseguran que los tipos de interés nunca alcanzan valores negativos. Entre estos modelos tenemos trabajos como Dothan (1978), Brennan and Schwartz (1980) y CIR (1980, 1985a, b).

Dothan (1978) presenta un modelo lognormal en el que los tipos de interés no presentan reversión a la media. Este modelo es utilizado para valorar bonos al descuento.

Brennan and Schwartz (1980) utilizan un modelo que refleja reversión a la media para valorar bonos convertibles y opciones sobre bonos al descuento. Este modelo, al igual que Black and Scholes (1973) y Dothan (1978), establece que la desviación típica de los cambios en los tipos de interés es proporcional al nivel de dichos tipos de interés.

El modelo de CIR (1980) establece una varianza muy sensible al nivel de los tipos de interés y se aplica al estudio de activos de interés variable. Este modelo también es empleado por Constantinides and Ingersoll (1984) para valorar bonos en el marco de una economía con impuestos.

CIR (1985a) es el primer modelo de equilibrio general que surge en la literatura. Los principales factores de este modelo son procesos productivos y las decisiones de inversión y consumo de los agentes económicos. Trabajando con estos factores, se determinan endógenamente los precios de los activos y sus propiedades estocásticas. Tras establecer una ecuación diferencial que deben verificar los precios de los activos en estudio, la solución de dicha ecuación permite obtener el precio de equilibrio de un determinado activo en función de las variables reales presentes en la economía.

CIR (1985b) suponen que las preferencias de los inversores son logarítmicas y que la evolución de los tipos de interés viene determinada por un proceso en el que la volatilidad condicional de los cambios del tipo de interés es proporcional al nivel de dichos tipos de interés. Se extiende el modelo a un mundo con inflación en el que el nivel exógeno de precios no tiene, en términos reales, influencia sobre el equilibrio y, por tanto, se da el supuesto de neutralidad monetaria. Este modelo es completamente consistente, determina de modo exógeno el precio de mercado del riesgo, es tratable analíticamente y, al igual que Vasicek (1977) y Brennan and Schwartz (1980), presenta reversión a la media. La principal desventaja de este modelo se deriva del supuesto de agentes económicos con una función de utilidad logarítmica. Como consecuencia de este supuesto, se deduce que las decisiones sobre las inversiones futuras son independientes de la riqueza actual de los agentes. Por tanto, esta miopía en los agentes puede implicar restricciones sobre los movimientos futuros de los tipos de interés.

Constantinides (1992) establece un proceso para los tipos de interés nominales en el

que la deriva es una función no lineal del tipo de interés y en el que la volatilidad tiene reversión a la media. Las ventajas de este modelo son que (1) se permite que el signo de la prima de riesgo varíe en función de los estados de la naturaleza y/o en función del bono considerado, (2) refleja las distintas formas que la curva de rentabilidades puede presentar (3) permite obtener de forma cerrada el precio de bonos al descuento y de opciones europeas sobre bonos y (4) puede estimarse y contrastarse sin necesidad de hacer supuestos sobre la relación entre las variables reales y el nivel de precios.

Chan *et al* (1992) trabajan con un proceso cuya deriva es lineal y cuya difusión depende del nivel de los tipos de interés. Este proceso tiene como casos particulares algunos de los modelos más utilizados en la literatura (Black and Scholes (1973), Vasicek (1977), Brennan and Schwartz (1980), CIR (1985a, b)). Los resultados de la estimación realizada por estos autores sugieren que la volatilidad del proceso es muy sensible al nivel de los tipos de interés.

Duffie and Kan (1996) proponen un modelo multifactorial en el que las rentabilidades asociadas a unos bonos cupón cero con determinados vencimientos siguen un proceso multivariante markoviano con volatilidad estocástica. Dicho modelo, conocido como exponencial-afín, establece que estas rentabilidades son funciones afines de las variables de estado. La versión unifactorial de este modelo refleja que los tipos de interés presentan reversión a la media al tiempo que la volatilidad también tiende, a largo plazo, a un nivel constante.

Aït-Sahalia (1996) propone un proceso con deriva y volatilidad no lineales que engloba a la mayoría de los modelos anteriormente comentados. Este autor propone una metodología para contrastar este tipo de modelos (paramétricos) basada en la comparación de la densidad paramétrica y de la densidad estimada mediante técnicas no paramétricas. Sus resultados muestran la fuerte no-linealidad de la deriva del proceso

y el incremento de la volatilidad que se produce cuando los tipos de interés toman valores extremos.

En resumen, las ideas principales en relación con los modelos endógenos unifactoriales son:

1. Los modelos endógenos unifactoriales suponen que una variable de estado es suficiente para explicar los movimientos de la estructura temporal de los tipos de interés.
2. Esta variable de estado suele ser el tipo de interés instantáneo.
3. El tipo de interés instantáneo es modelizado según un proceso de difusión.
4. El objetivo de los modelos endógenos (uni- y multifactoriales) es, tras estimar los parámetros del proceso de difusión, determinar la estructura temporal de equilibrio y, a partir de ella, realizar la valoración de activos derivados.
5. Restricciones sobre los parámetros de este proceso de difusión dan lugar a distintos casos particulares que, en su mayoría, reflejan que los tipos de interés tienden, a largo plazo, a un valor constante.
6. Considerando estos casos particulares, los modelos más empleados son los de Black and Scholes (1973), Vasicek (1977), Brennan and Schwartz (1980) y CIR (1985a, b).
7. Las principales desventajas de este tipo de modelos (y de su versión multifactorial) es que se incluyen parámetros no observables y que no se logra un ajuste perfecto a los tipos de interés observados.



1.2.2 Modelos Endógenos Multifactoriales

Este tipo de modelos supone la existencia de más de una variable de estado en la estructura temporal de los tipos de interés y surge con el objetivo de (a) evitar las características poco realistas relacionadas con los modelos unifactoriales y (b) explicar una mayor variedad de movimientos en la evolución temporal de los tipos de interés.

Así, Richard (1978) y CIR (1985b) emplean el tipo de interés (instantáneo) real que se espera a corto plazo, R , y la tasa de inflación (anticipada) instantánea a corto plazo, π , como factores. Brennan and Schwartz (1979) utilizan como variables de estado el tipo de interés instantáneo y el tipo de interés a largo plazo. Análogamente, Schaefer and Schwartz (1984) consideran un modelo en el que las dos variables de estado vienen dadas por el tipo de interés a largo plazo (asociado a un bono perpetuo) y en el diferencial de tipos de interés ("spread").

Longstaff and Schwartz (1992) desarrollan un modelo de equilibrio general en el que las dos variables de estado que se consideran son el tipo de interés a corto plazo y su volatilidad condicional. Este modelo permite reflejar el nivel y la volatilidad de los tipos de interés observados. Análogamente, Chen and Scott (1992) proponen un modelo bifactorial en el que ambos factores siguen el proceso de CIR (1985b). La suma de estos dos factores determina el tipo de interés instantáneo aunque el primer factor explica la mayor parte de la variación de los tipos de interés a corto plazo. Por otro lado, el segundo factor se comporta como un paseo aleatorio y se relaciona con el tipo de interés a largo plazo. En la versión bifactorial de Duffie and Kan (1996), ambos factores corresponden a las rentabilidades de cualquier pareja de bonos al descuento.

Finalmente, Chen (1996) ha propuesto un modelo con tres factores: (1) el tipo de interés a corto plazo actual, (2) la media a corto plazo de la anterior variable y (3) la volatilidad actual del tipo de interés a corto plazo. Mediante este modelo, es posible

explicar los movimientos presentes en el nivel, pendiente y curvatura de la estructura temporal de los tipos de interés. Las variables de estado presentadas en este trabajo se modelizan como procesos CIR y, bajo este supuesto, se deriva una fórmula analítica para el precio de diferentes activos derivados.

Las diferentes especificaciones de estos modelos aparecen resumidas en la siguiente tabla:

Autor(es)	Especificación de las variables de estado
Richard (1978)	$dR = \alpha_R dt + \sigma_R dw_1$ $d\pi = \alpha_\pi dt + \sigma_\pi dw_2$
Brennan and Schwartz (1979)	$dr = \theta_1 dt + \sigma_1 dw_1 + \sigma_2 dw_2$ $dl = \theta_2 dt + \sigma_3 dw_1 + \sigma_4 dw_2$
Schaefer and Schwartz (1984)	$ds = m(\mu - s)dt + \eta dw_1$ $dl = (\sigma^2 - ls)dt + \sigma\sqrt{l}dw_2$
CIR (1985b)	$dR = k_1(\theta_1 - R)dt + \sigma_1\sqrt{R}dw_1$ $d\pi = k_2(\theta_2 - \pi)dt + \sigma_2\sqrt{\pi}dw_2$
Longstaff and Schwartz (1992)	$dx = (a - bx)dt + c\sqrt{x}dw_1$ $dy = (d - ey)dt + f\sqrt{y}dw_2$
Chen and Scott (1992)	$dy_1 = k_1(\theta_1 - y_1)dt + \sigma_1\sqrt{y_1}dw_1$ $dy_2 = k_2(\theta_2 - y_2)dt + \sigma_2\sqrt{y_2}dw_2$
Duffie and Kan (1996)	$dX_1 = (b_1 + a_{11}X_1 + a_{12}X_2)dt + \sigma_{11}\sqrt{\alpha_1 + \beta_{11}X_1 + \beta_{12}X_2}dw_1$ $dX_2 = (b_2 + a_{21}X_1 + a_{22}X_2)dt + \sigma_{22}\sqrt{\alpha_2 + \beta_{21}X_1 + \beta_{22}X_2}dw_2$
Chen (1996)	$dr = k(\theta - r)dt + \sqrt{\sigma}\sqrt{r}dw_1$ $d\theta = \nu(\bar{\theta} - \theta)dt + \zeta\sqrt{\theta}dw_2$ $d\sigma = \mu(\bar{\sigma} - \sigma)dt + \eta\sqrt{\sigma}dw_3$

La siguiente tabla refleja la notación empleada para las variables de estado utilizadas en estos modelos:

Notación	VARIABLES DE ESTADO
R	Tipo de interés (instantáneo) real esperado
π	Tasa de inflación (anticipada) instantánea
r	Tipo de interés instantáneo
l	Tipo de interés a largo plazo
s	Diferencial de tipos de interés
x, y	Factores económicos cuya suma es igual a la rentabilidad esperada
$y_i, i = 1, 2$	Factores genéricos cuya suma es igual al tipo de interés instantáneo
$X_i, i = 1, 2$	Rentabilidades de una pareja de bonos cupón-cero
θ	Valor medio a corto plazo del tipo de interés instantáneo
σ	Volatilidad del tipo de interés instantáneo

Resumiendo, las características más relevantes de los modelos endógenos multifactoriales son:

1. Este tipo de modelos supone que es necesario más de una variable de estado para explicar los movimientos de la estructura temporal de los tipos de interés. En general, se restringe a dos el número de factores utilizados.
2. El objetivo de este tipo de modelos es evitar ciertos inconvenientes de los modelos unifactoriales e intentar explicar una mayor diversidad de movimientos de la estructura temporal de los tipos de interés.
3. Las variables de estado empleadas suelen ser el tipo de interés instantáneo y una segunda variable como la tasa de inflación, el tipo de interés a largo plazo o la volatilidad.

4. La mayoría de estos modelos son una extensión multifactorial del modelo presentado en CIR (1985a, b).

1.2.3 Modelos Endógenos con Saltos

Hasta ahora hemos comentado una serie de modelos que suponen que los tipos de interés evolucionan a lo largo del tiempo de modo continuo. Sin embargo, pueden darse diversas circunstancias que nos hacen dudar que éste sea un supuesto razonable. Así, shocks sobre la oferta y/o demanda de dinero o noticias políticas y económicas pueden provocar saltos en la evolución temporal de los tipos de interés. Esta posibilidad es presentada, en el caso de acciones, en Merton (1976), el cual sugiere que el análisis de estos saltos puede ayudar a estudiar la influencia de la nueva información que va llegando a los mercados sobre la conducta de los precios.

Dentro de los trabajos que utilizan modelos unifactoriales con saltos podemos destacar Ahn and Thompson (1988), Naik and Lee (1990), Das (1994a, b) y Das and Foresi (1996).

Ahn and Tomphson (1988) extienden el modelo CIR permitiendo efectos discretos en los movimientos diarios de los tipos de interés aunque dichos efectos no influyen sobre el valor a largo plazo (el cual permanece constante) de los tipos de interés.

Naik and Lee (1990) analizan, mediante un modelo de equilibrio general y restricciones sobre las preferencias de los agentes, la valoración de opciones cuyo activo subyacente es la cartera de mercado con rentabilidades discontinuas. La fórmula obtenida contiene como casos particulares las expuestas en Black and Scholes (1973) y Cox and Ross (1976). Bajo los supuestos realizados, se comprueba que la presencia de saltos imposibilita el uso de una cartera de cobertura dinámica autofinanciada tal como se rea-

liza en Black and Scholes (1973) y se necesitan inversiones adicionales en los instantes en que se producen dichos saltos.

Das (1994a) es el primer estudio empírico de un modelo de difusión con saltos para los tipos de interés. Analizando datos semanales, el procedimiento de estimación presentado en este trabajo permite identificar los instantes en los que ocurren dichos saltos. Además, este autor estima la frecuencia de llegada, tamaño y signo de estos saltos así como los parámetros del proceso de difusión.

Das (1994b) analiza el papel del modelo de Vasicek (1977) extendido mediante la inclusión de saltos en el mercado de bonos permitiendo que estos saltos sean estocásticos y variables en el tiempo. Una de las ventajas de este modelo es que refleja la asimetría y el exceso de curtosis presentes en los cambios en los tipos de interés más adecuadamente que los procesos de difusión. Este autor analiza las actividades de la Reserva Federal estadounidense como posible causa de los saltos presentes en los tipos de interés. Tras presentar un método para localizar los saltos, se comprueba que dichos saltos suelen ocurrir como reacción a estas actividades.

Das and Foresi (1996) presentan dos modelos que combinan cambios discretos en el nivel de los tipos de interés con shocks que presentan reversión a la media. Ambos modelos difieren en el modo en que los saltos afectan a la distribución condicional de los tipos de interés. En el primer modelo, los saltos afectan a los tipos de interés pero no cambian el valor al que tiende dicha variable. Por otro lado, en el segundo modelo, los saltos sí cambian el valor a largo plazo al que tienden los tipos de interés. Mientras el primer modelo se basa en un único factor, en este segundo modelo los tipos de interés dependen de dos factores: el primero representa las desviaciones de la tendencia presente en esta variable y el segundo se debe a los saltos que cambian esta tendencia.

Otro ejemplo de modelo con dos factores y saltos se puede encontrar en Naik and Lee (1995). Estos autores consideran un modelo donde tanto la media como la volatilidad de los tipos de interés saltan entre dos niveles fijos y, por tanto, se supone que el tamaño de los saltos es fijo. Las dos variables de estado son (1) un indicador de régimen, con cambios discretos, que puede tomar dos valores y que determina la media y la volatilidad del tipo de interés a corto plazo y (2) la desviación del tipo de interés a corto con respecto al tipo de interés medio del régimen que se considera. La estimación se realiza mediante técnicas de máxima verosimilitud aplicadas a datos mensuales de Letras del Tesoro. Los resultados obtenidos indican la superioridad del modelo presentado frente al modelo de Vasicek (1977) y frente a la versión uni- y bifactorial de CIR (1985b). En concreto, se muestra que este modelo es más adecuado a la hora de modelizar el exceso de curtosis y la persistente volatilidad presentes en los cambios de los tipos de interés.

Terminamos esta sección dedicada a los modelos endógenos con saltos indicando que:

1. Este tipo de modelos surge con el objetivo de reflejar la posibilidad de cambios discretos en los tipos de interés.
2. El tamaño de los saltos puede ser fijo o estocástico.
3. La presencia de saltos puede afectar al valor a largo plazo al que tienden los tipos de interés.
4. La existencia de saltos anula la posibilidad de una cobertura dinámica similar a la realizada en Black and Scholes (1973).
5. Una de las ventajas de este tipo de modelos es que permite reflejar adecuadamente la asimetría y el exceso de curtosis presentes en los cambios en los tipos de interés.

1.2.4 Modelos Exógenos

Este tipo de modelos toma como dada la estructura temporal de los tipos de interés, la cual puede ser caracterizada mediante tres alternativas: bonos cupón-cero, tipos de interés al contado y/o tipos de interés a plazo (*forward*).

Dentro de esta clase de modelos, Ho and Lee (1986) modeliza el precio de bonos cupón-cero y Black, Derman, and Toy (1990), Black and Karasinski (1991) y Hull and White (1990, 1993) trabajan con los tipos de interés al contado. Finalmente, Heath, Jarrow, and Morton (1990, 1992) proponen un modelo basado en los tipos de interés *forward*. La siguiente tabla incluye las diferentes especificaciones en las que se basan estos modelos:

Autor(es)	Especificación del modelo
Ho and Lee (1986)	$dr = \theta(t)dt + \sigma dw_1$
Black, Derman, and Toy (1990)	$d \ln r = \left[\theta(t) - \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln r \right] dt + \sigma(t)dw_1$
Black and Karasinski (1991)	$d \ln r = \phi(t)[\ln \mu(t) - \ln r]dt + \sigma(t)dw_1$
Hull and White (1990)	$dr = k(t)(\theta(t) - r)dt + \sigma(t)r^\tau dw_1, \tau = 0, 0.5$
Heath, Jarrow, and Morton (1992)	$df = \alpha(t)dt + \sigma(t)dw_1, f \equiv$ tipo <i>forward</i>

Ho and Lee (1986) es el primer modelo que toma como dada la estructura temporal de los tipos de interés. El modelo propuesto se enmarca en una economía en tiempo discreto y tiene las siguientes características: (1) se formula en base al proceso binomial que siguen los precios de los bonos cupón-cero, (2) se basa en supuestos estándar de los mercados de capitales perfectos y (3) se caracteriza por dos parámetros, que indican probabilidad neutral al riesgo y diferencial entre dos funciones de perturbación (que reflejan la variabilidad de los tipos de interés), respectivamente. Bajo este modelo, la curva de tipos de interés *forward* se mueve paralelamente en cada período. Este modelo puede interpretarse como una extensión del proceso binomial analizado en Cox, Ross,

and Rubinstein (1979) y es utilizado para calcular el precio de una clase general de derivados (la cual incluye futuros sobre tipos de interés y opciones sobre bonos) en un cierto vértice del árbol binomial. Mediante recursión hacia atrás, se obtiene el precio inicial de estos activos derivados.

Las ventajas de este modelo se derivan de su enfoque práctico pues enfatiza todos los aspectos relacionados con su implementación computacional. Además, se utiliza toda la información de la estructura temporal para realizar la valoración de activos derivados. Por otro lado, sus desventajas son: (1) toda la estructura de volatilidad se modeliza mediante un único parámetro⁴, (2) no se incorpora reversión a la media en los tipos de interés y (3) los tipos de interés pueden alcanzar valores negativos.

Black, Derman, and Toy (1990) desarrollan un modelo que elimina alguno de los inconvenientes de Ho and Lee (1986). Estos autores proponen un modelo unifactorial (basado en el tipo de interés a corto plazo) que posibilita, mediante un árbol binomial, el ajuste a los tipos de interés observados y a las volatilidades observadas de todas las rentabilidades de bonos al descuento. En este modelo, el tipo de interés a corto plazo sigue una distribución lognormal lo cual implica que (1) este modelo no acepta tipos de interés negativos y (2) es difícil obtener una solución cerrada.

En la misma línea, Black and Karasinski (1991) también suponen que los tipos de interés a corto plazo siguen una distribución lognormal con reversión a la media. Este modelo depende de tres "inputs": el tipo de interés a largo plazo, el parámetro de reversión a la media y la volatilidad de los cambios locales del logaritmo de los tipos de interés. Mediante estos valores y un árbol trinomial, se logra el ajuste a la curva de rentabilidades observadas, a la volatilidad de dichas rentabilidades y a la curva de *caps*.

⁴En relación con esta cuestión, estos autores sugieren estimar la estructura temporal de volatilidades mediante las volatilidades implícitas de los precios de derivados como *caps* y *floors*.

Otro de los inconvenientes de Ho and Lee (1986) se deriva de la posibilidad de tipos de interés negativos. Intentando solucionar este problema, Pedersen, Shiu, and Thorlacius (1990) generalizan dicho modelo mediante un número mayor de parámetros. De este modo, se consigue una evolución más flexible de la función de descuento a lo largo del árbol binomial. Este problema también es abordado en Ritchken and Boenawan (1990). Estos autores prueban que se puede resolver este problema mediante una modificación del modelo original. En concreto, una restricción sobre uno de los parámetros, (el que refleja el diferencial de los tipos de interés), es suficiente para evitar que los tipos de interés alcancen valores negativos.

HW (1990) combina el enfoque de exogeneidad de la estructura temporal con la especificación de reversión a la media. Estos autores extienden los modelos de Vasicek (1977) y CIR (1985a) mediante parámetros variables en el tiempo y demuestran que ambas extensiones son consistentes con los tipos de interés observados y con las volatilidades observadas en dichos tipos de interés.

HW (1993) explican la relación existente entre los tres tipos de modelos exógenos empleados habitualmente. Suponiendo que el tipo de interés sigue un proceso cuya deriva es función del tiempo, se presenta un procedimiento numérico que utiliza un árbol trinomial para estimar los parámetros de este proceso de modo que el modelo presentado sea consistente con los datos observados. La extensión de los modelos endógenos que se obtiene permitiendo que los parámetros varíen a lo largo del tiempo permite mejorar el ajuste a la curva de rentabilidades observada y a la estructura temporal de la volatilidad de los tipos de interés. La desventaja de este modelo es que, excepto en el caso del modelo Vasicek extendido, no existe una expresión cerrada para el precio de los activos derivados el cual debe obtenerse a partir de métodos numéricos.

HJM (1990) estudian la aproximación binomial al modelo en tiempo continuo que

estos autores proponen en HJM (1992) para los tipos de interés forward. Esta aproximación facilita un método computacional que permite el análisis del comportamiento empírico de dicho modelo y constituye una generalización del modelo de Ho and Lee (1986). Considerando múltiples shocks aleatorios en el proceso que siguen los tipos de interés forward, se establecen restricciones (necesarias y suficientes) sobre estos shocks de modo que el proceso resultante no permita oportunidades de arbitraje.

Así mismo, se estudia el límite en tiempo continuo del modelo en tiempo discreto considerando un cierto proceso para los tipos de interés forward. En dicho límite se realiza una reparametrización del modelo que facilita la estimación de la volatilidad pues sólo se necesitan datos históricos. Esta situación contrasta con el modelo original de Ho and Lee (1986) en el que este parámetro debe ser estimado implícitamente.

HJM (1992) desarrollan un modelo multifactorial en tiempo continuo para los tipos de interés forward que es consistente con la curva de tipos de interés observados y con cualquier estructura de volatilidad especificada. Este trabajo analiza el límite en tiempo continuo del modelo en tiempo discreto de Ho and Lee (1986) y generaliza este modelo mediante la inclusión de múltiples shocks (en forma de movimientos brownianos independientes) que determinan las fluctuaciones de la curva de tipos de interés forward a partir de los datos inicialmente observados.

A partir del proceso supuesto para los tipos de interés forward, se establecen los procesos que deben seguir los tipos de interés al contado y los precios de los bonos. Se restringe el proceso seguido por los tipos de interés forward de modo que se garantice la existencia (y unicidad) de una medida de probabilidad equivalente de martingala. Bajo dicha medida y utilizando argumentos de no-arbitraje, se demuestra que la deriva del proceso depende exclusivamente de la función de volatilidad. Como consecuencia, la evolución estocástica de los tipos forward está totalmente determinada por la

especificación que se haya supuesto para la volatilidad.

Esta medida de probabilidad puede utilizarse para realizar la valoración de los activos derivados. Dicha valoración utiliza resultados de Harrison and Kreps (1979) y Harrison and Pliska (1981) y se basa en (1) obtener el cálculo del pago a recibir del activo derivado, (2) evaluar la esperanza de dicho pago bajo la distribución neutral al riesgo y (3) descontar este pago esperado mediante los tipos forward instantáneos factibles durante la vida de este activo. Sin embargo, salvo en algunos casos particulares, la obtención de una expresión cerrada para el precio de activos derivados es extremadamente difícil.

El principal problema de este modelo es que, en general, no es markoviano (la distribución futura de los tipos de interés no sólo depende de los tipos de interés observados). Como consecuencia, la aproximación binomial que permite la valoración de activos derivados depende del camino seguido (*path dependence*) por los tipos de interés desde el día inicial y, puesto que se debe emplear toda la estructura temporal en cada uno de estos caminos, la implementación computacional es muy costosa. Sin embargo, este modelo sí es markoviano para algunos casos particulares de la función de volatilidad como los modelos de volatilidad constante y volatilidad exponencial decreciente, analizados en Ho and Lee (1986) y HW (1993), respectivamente.

En relación con este punto, Ritchken and Sankarasubramanian (1995) han identificado un tipo de volatilidad dentro del modelo HJM que hace posible que dicho modelo sea markoviano respecto a dos variables de estado. Esta estructura de volatilidades de los tipos de interés forward no impone restricciones explícitas sobre la volatilidad del tipo de interés al contado. Ambas volatilidades se relacionan mediante un conjunto de parámetros que se especifica exógenamente y que puede ser tan parsimonioso como se desee. Esta estructura de volatilidad permite expresar el precio de un bono, en el

instante t , independientemente del precio de mercado del riesgo y en función de las dos variables de estado empleadas: el tipo de interés al contado y un estadístico suficiente que representa la varianza del tipo de interés a plazo acumulada hasta ese instante y que es la variable que captura la *path dependence* de la estructura temporal.

Esta sección finaliza con un resumen de las principales características que presentan los modelos exógenos:

1. Este tipo de modelos toma como dada la estructura temporal de los tipos de interés.
2. Existen tres alternativas de modelización según la variable que se tome como punto de partida: precio de bonos cupón-cero, tipos de interés al contado y/o tipos de interés forward.
3. El objetivo de estos modelos es intentar conseguir un ajuste perfecto a los tipos de interés observados y, usando toda la información contenida en la estructura temporal, valorar activos derivados con relación a la estructura temporal observada.
4. En estos modelos no es necesario estimar o realizar supuestos sobre el precio de mercado del riesgo asociado a las variables de estado del modelo.
5. El principal inconveniente de estos modelos es que, siendo necesaria la estimación (calibración) diaria de la estructura temporal de los tipos de interés, no está garantizada la consistencia entre las diferentes estimaciones obtenidas.
6. En general, la obtención de expresiones cerradas para el precio de los activos derivados es compleja y es necesario recurrir al empleo de técnicas numéricas. Estas técnicas son complejas pues, en la mayoría de los casos, estos modelos no son markovianos.

1.3 Valoración de Activos Derivados

En esta sección, se ofrece una panorámica de la literatura existente sobre una de las aplicaciones más frecuentes de los modelos en tiempo continuo. En concreto, se comentan diversos trabajos que se han centrado en la valoración de activos derivados en renta fija⁵.

Existe una serie de trabajos que se centran en la valoración de opciones sobre tipos de interés. Entre estos estudios, tenemos Jamshidian (1989), Turnbull and Milne (1991) y Stapleton and Subrahmanyam (1993).

Jamshidian (1989) aplica el modelo de Vasicek (1977) para obtener una expresión cerrada para el precio de opciones europeas sobre bonos al descuento y sobre bonos cupón.

Turnbull and Milne (1991) desarrollan, dentro de un marco de equilibrio general, un método de valoración de opciones europeas tomando la estructura temporal como dada. Suponiendo una única fuente de incertidumbre y una distribución lognormal para el precio de los bonos, la existencia de una medida equivalente de martingala permite la obtención de expresiones cerradas para el precio de opciones europeas sobre diversos activos subyacentes: bonos, contratos a plazo y futuros sobre tipos de interés, *caps*, eurodólares y tipos de cambio.

⁵Por tanto, no se presenta ningún resultado relacionado con la valoración de opciones sobre acciones. Los primeros trabajos que valoran opciones (europeas) sobre acciones son Black and Scholes (1973), Cox, Ross, and Rubinstein (1979), Cox and Ross (1976). Whaley (1981, 1982), Geske and Johnson (1984) y Barone-Adesi and Whaley (1987) valoran opciones americanas sobre acciones. Relajando uno de los principales supuestos de Black and Scholes (1973), diversos trabajos como Hull and White (1987), Wiggins (1987), Stein and Stein (1991), Heston (1993) y Ball and Roma (1994) se centran en la valoración de opciones suponiendo que la volatilidad del activo subyacente no es constante sino que sigue un cierto proceso estocástico.

Stapleton and Subrahmanyam (1993) valoran opciones sobre tipos de interés relacionando estas opciones con opciones sobre bonos. Suponiendo que el descuento del bono se distribuye según un proceso binomial multiplicativo se obtiene una valoración (neutral al riesgo) para estas opciones. En el límite, el descuento del bono se distribuye lognormalmente y las opciones sobre bonos se valoran mediante una transformación de la fórmula presentada en Black and Scholes (1973). La fórmula obtenida permite valorar *caps*, *floors* y *swaptions* (opciones sobre *swaps*).

Algunos de los trabajos que valoran derivados en relación con el modelo de CIR (1985b) son HW (1990), Longstaff and Schwartz (1992) y Chen and Scott (1992).

HW (1990) muestran que la versión extendida del modelo Vasicek permite obtener expresiones cerradas (similares a las obtenidas en Jamshidian (1989)) para el precio de bonos y de opciones europeas sobre dichos bonos. En el modelo CIR extendido que estos autores presentan, los precios de estos activos pueden determinarse de modo numérico. La comparación del modelo Vasicek extendido frente al modelo CIR original y frente a dos modelos bifactoriales (extensiones de Vasicek y CIR, respectivamente) muestra que los precios de opciones europeas y de *caps* obtenidos por estos modelos son similares entre sí.

Longstaff and Schwartz (1992) generalizan el enfoque de CIR (1985b) y desarrollan un modelo con dos factores: el tipo de interés a corto plazo y la varianza condicional de los cambios en dicho tipo de interés. En este trabajo se valoran bonos al descuento y se obtiene una expresión cerrada para el precio de opciones sobre bonos al descuento. Esta expresión depende explícitamente del nivel de la volatilidad de los tipos de interés y su cálculo requiere el empleo de integración numérica bivariante.

Chen and Scott (1992) parten de la versión bifactorial de CIR (1985b) y obtienen el precio de *caps* y opciones europeas sobre bonos, sobre futuros sobre bonos y so-

futuros sobre eurodólares. Aunque la valoración de estos activos requiere el cálculo de integrales multivariantes, este trabajo muestra que dicho cálculo se puede reducir a una integración numérica univariante.

Finalmente, Ahn and Thompson (1988), Naik (1993), Naik and Lee (1990, 1995), Das (1994b) y Das and Foresi (1996) son algunos de los trabajos que utilizan procesos de difusión con saltos para valorar activos derivados. En general, estos estudios proporcionan expresiones cerradas para el precio de bonos y opciones europeas pero no permiten la obtención de fórmulas analíticas para el precio de opciones americanas.

Ahn and Tomphson (1988) parten del modelo de CIR (1985b) al cual añaden saltos de tamaño constante en los movimientos de los tipos de interés y, bajo este supuesto, obtienen expresiones cerradas para el precio de bonos.

Naik and Lee (1990) establecen un modelo de equilibrio general en el que los agentes tienen aversión al riesgo relativa constante y en el que las rentabilidades de la cartera de mercado son discontinuas. Bajo estos supuestos se obtienen expresiones cerradas para el precio de opciones europeas sobre la cartera de mercado. En contraste a Merton (1976), dicho precio incluye el precio del riesgo de saltos en el valor del activo subyacente y el precio del riesgo de difusión⁶. Análogamente a Cox, Ross, and Rubinstein (1979), la expresión obtenida contiene, en el límite, como casos particulares las presentadas en Black and Scholes (1973) y Cox and Ross (1976).

Naik (1993) suponen la existencia de saltos en la volatilidad de la rentabilidad del activo subyacente de una opción. Análogamente a Naik and Lee (1990) y en contraste a Black and Scholes (1973), una cartera formada por este activo subyacente y por bonos

⁶La razón es que Merton (1976) supone que los saltos en los precios del activo subyacente están incorrelacionados con los cambios en el precio de la cartera de mercado y, por tanto, no se valora el precio del riesgo de los saltos

sin riesgo no es válida como cartera de cobertura. Suponiendo que el proceso que sigue la volatilidad puede tomar dos valores y que el precio de la acción cambia discontinuamente (y simultáneamente con la volatilidad), se determina el precio de activos derivados de modo que no existan oportunidades de arbitraje. Más aún, suponiendo que el riesgo de cambios en la volatilidad es diversificable, se obtiene una expresión cerrada para el precio de una opción europea sobre acciones. La generalización a una volatilidad con múltiples valores es examinada numéricamente.

Naik and Lee (1995) obtienen expresiones analíticas de bonos y opciones sobre bonos suponiendo un modelo bifactorial. El principal supuesto de dicho modelo es la existencia de cambios discretos en la media y en la volatilidad del tipo de interés instantáneo libre de riesgo. Los dos factores utilizados son un indicador de régimen y la diferencia entre los tipos de interés y el tipo de interés medio del régimen considerado.

Das (1994b) analiza el papel del modelo de difusión con saltos, presentado en Das (1994a), en la valoración de bonos suponiendo que estos saltos son estocásticos y con reversión a la media.

Das and Foresi (1996) presentan dos modelos en los que los tipos de interés pueden presentar saltos. Mientras en el primer modelo, los saltos producen cambios puntuales en los tipos de interés, los saltos presentes en el segundo modelo afectan al valor a largo plazo al que tienden los tipos de interés. Bajo los supuestos de ambos modelos, estos autores derivan expresiones cerradas para el precio de bonos al descuento. Mediante dichas expresiones y el conocimiento de la distribución de los tipos de interés se obtienen expresiones implementables de modo numérico para obtener el precio de opciones sobre bonos al descuento.

Resumimos a continuación los principales rasgos relacionados con los diversos trabajos que han utilizado los modelos en tiempo continuo para valorar activos derivados:

1. Las opciones sobre tipos de interés son más difíciles de valorar que las opciones sobre acciones. Esta mayor complejidad se debe a
 - (a) El activo subyacente de estas opciones es la estructura temporal de los tipos de interés que, a diferencia de las acciones, es función del vencimiento.
 - (b) El tipo de interés no es un activo negociable en los mercados financieros. Por tanto, como en el caso de volatilidad estocástica, no se puede construir una cartera de cobertura de modo similar a Black and Scholes (1973).
2. A pesar de esta complejidad, bajo ciertos supuestos, se pueden obtener expresiones cerradas para el precio de *caps*, *floors* y opciones europeas sobre diversos activos subyacentes: bonos, contratos a plazo y futuros sobre tipos de interés, *caps* y *swaps*.
3. La valoración de opciones americanas requiere técnicas numéricas.
4. Los procesos de difusión con saltos proporcionan fórmulas analíticas para el precio de bonos y opciones europeas pero no permiten la obtención de expresiones cerradas para el precio de opciones americanas.

1.4 Evidencia Empírica de los Modelos en Tiempo Continuo

Una vez modelizada(s) la(s) variable(s) de estado que influyen sobre la estructura temporal de los tipos de interés, una gran cantidad de artículos se han dedicado a analizar el comportamiento empírico de los modelos en tiempo continuo. Dicho comportamiento puede estudiarse directamente a partir del modelo propuesto o en función de las implicaciones de este modelo sobre la valoración de activos derivados. La importancia de

este análisis radica en las diferentes consecuencias que cada modelo tiene sobre aspectos tan importantes como la valoración de activos derivados o las estrategias de cobertura.

En general, estos contrastes empíricos se realizan mediante un análisis de series temporales o con técnicas de sección cruzada. Los contrastes basados en series temporales requieren una especificación en tiempo discreto del proceso seguido por los tipos de interés. Como el tipo de interés instantáneo no es observable, se suele utilizar una “proxy” para implementar esta técnica. Este método permite la comparación de modelos anidados y, por tanto, indica la bondad del ajuste de los datos a los diferentes procesos estocásticos que se hayan supuesto para los tipos de interés. Sin embargo, este método presenta problemas a la hora de identificar el precio de mercado del riesgo y su implementación práctica requiere una gran cantidad de datos.

Por otro lado, los contrastes de sección cruzada toman, para cada día, los precios de mercado de una serie de bonos con diferentes vencimientos y estiman los parámetros del modelo que producen el mejor ajuste de los precios teóricos a los observados. Estos contrastes posibilitan la identificación del precio de mercado del riesgo, necesitan menos datos que el análisis basado en series temporales y sirven para comparar diversos modelos de valoración de activos y, por construcción, los diferentes procesos estocásticos sugeridos para los tipos de interés. Una de las desventajas de este método se relaciona con la variabilidad en el tiempo de los parámetros estimados. Aunque posteriormente se analice la estabilidad de los parámetros, la dinámica de los factores obtenidos puede no concordar con el proceso estocástico supuesto para dichos factores.

Las técnicas más empleadas son las de máxima verosimilitud y el método generalizado de momentos de Hansen (1982) (GMM de aquí en adelante). La primera supone una cierta distribución de la variable en estudio y, a partir de la función de densidad de la variable de estado, se obtienen los parámetros más “verosímiles” de acuerdo con

la distribución supuesta de antemano. El segundo método no presupone ninguna distribución a priori y los parámetros son estimados mediante una serie de momentos que se deducen a partir del modelo. Este método presenta dos ventajas: (1) no se requiere normalidad en la distribución de las variaciones en el tipo de interés siendo suficiente, a nivel asintótico, que dicha distribución sea estacionaria y ergódica⁷ y (2) los estimadores obtenidos y sus errores estándar son consistentes incluso cuando las perturbaciones del modelo son condicionalmente heteroscedásticas o serialmente correladas.

Recientemente, diversos artículos proponen un enfoque alternativo a los métodos anteriormente señalados. Dicho enfoque se basa en la utilización de la representación del espacio de los estados del modelo de la estructura temporal donde la variable (o variables) de estado se considera inobservable. Los parámetros del modelo se estiman mediante quasi-máxima verosimilitud empleando el filtro de Kalman para estimar las variables inobservables y para calcular la función de verosimilitud. Tal como se indica en Geyer and Pichler (1996), las principales ventajas de este método son: (1) se evitan los problemas derivados de trabajar con “proxies” de los factores, (2) se puede obtener la serie temporal de la variable de estado inobservable, (3) se pueden estimar directamente los parámetros del modelo económico, (4) no es necesario realizar supuestos sobre los errores de valoración y (5) los errores de medida son considerados explícitamente.

1.4.1 Evidencia Empírica de los Modelos Endógenos

Existen diversos trabajos que se centran en el análisis comparativo del comportamiento empírico de diferentes modelos endógenos. Así, tenemos estudios como Chan *et al* (1992), Koedjik *et al* (1994) y Aït-Sahalia (1996) que realizan una comparación entre

⁷Este rasgo permite tratar modelos como el de CIR (1985b) en el que se supone una distribución condicional proporcional a una χ^2 no centrada.

diversos modelos con el objetivo de determinar cuál se aproxima más a los tipos de interés observados.

Chan *et al* (1992) estiman y comparan una serie de modelos unifactoriales en tiempo continuo que analizan la evolución de los tipos de interés a corto plazo. Aunque se han establecido muchos modelos teóricos para el proceso estocástico que sigue esta variable de estado, éste es uno de los primeros trabajos que realiza, dentro de un marco común, una comparación entre diferentes modelizaciones.

El problema abordado por estos autores consiste en la estimación de los parámetros de la ecuación diferencial estocástica que refleja la evolución temporal del tipo de interés a corto plazo

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^\tau dw$$

Para estimar los parámetros de esta ecuación se emplea una especificación en tiempo discreto cuya ventaja es permitir que la varianza de los cambios de los tipos de interés dependan directamente del nivel de dicho tipo de interés de un modo consistente con la especificación en tiempo continuo.

A continuación, se estiman los parámetros mediante el Método Generalizado de Momentos. Utilizando datos correspondientes a Letras del Tesoro a un mes en U.S.A. para el período Junio 1964 - Diciembre 1989, los resultados obtenidos por estos autores indican que:

1. Los tipos de interés presentan reversión a la media.
2. A la hora de modelizar correctamente la volatilidad, el parámetro clave es τ . Así, modelos que requieren que $\tau < 1$ modelizan peor la dinámica de los tipos de interés a corto plazo que aquéllos que permiten $\tau \geq 1$. Estos autores encuentran que el parámetro τ es igual a 1.5 y altamente significativo.

3. Los modelos que mejor describen la dinámica temporal de los tipos de interés son aquéllos en los que la varianza condicional del tipo de interés a corto plazo depende del nivel de dicho tipo de interés. Así, los modelos más usuales (Vasicek (1977), CIR (1985b)) proporcionan peores resultados que modelos menos utilizados como el de Dothan (1978) o el de CIR (1980).

Koedjik *et al* (1994) presentan un modelo que engloba como casos particulares los modelos estudiados por Chan *et al* (1992) y Longstaff and Schwartz (1992) al tiempo que incorpora el efecto heteroscedástico reflejado por los modelos GARCH. El modelo presentado y diversos casos particulares son estimados mediante técnicas de quasi-máxima verosimilitud aplicadas a rentabilidades mensuales y semanales de Letras del Tesoro de U.S.A. Los resultados obtenidos reflejan la superioridad del modelo presentado por estos autores frente a los distintos casos particulares. Para los datos mensuales, el parámetro que mide la sensibilidad de la volatilidad con respecto al nivel de los tipos de interés, τ , es similar al obtenido en Chan *et al* (1992). Analizando los datos semanales se comprueba la mayor importancia de los efectos GARCH. Con estos datos, el valor obtenido para el parámetro τ no resulta significativamente diferente de 0.5 y se corrobora, por tanto, el modelo de CIR (1985b).

Aït-Sahalia (1996) desarrolla una metodología para contrastar empíricamente diversos modelos paramétricos unifactoriales para el tipo de interés al contado. En concreto, este autor se centra en modelos markovianos y estrictamente estacionarios. El proceso propuesto por este autor supone deriva y volatilidad no lineales. La idea básica de este artículo es que, puesto que la densidad verdadera es desconocida, un estimador no paramétrico convergerá a la densidad verdadera. Así, el método propuesto se basa en la comparación de la densidad paramétrica frente a la densidad estimada mediante técnicas no paramétricas. Los datos utilizados para la estimación son diarios y se relacionan con eurodólares a 7 días. Sus resultados indican la superioridad del modelo

propuesto frente a diversos casos particulares. Dicha superioridad se debe a que estos casos particulares suponen un proceso con deriva lineal y volatilidad similar a la analizada en Chan *et al* (1992). Además, se comprueba que (1) la deriva es nula cuando los tipos de interés toman valores intermedios (es decir, el tipo de interés se comporta de modo similar a un paseo aleatorio y, por tanto, es difícil rechazar la existencia de una raíz unitaria en esta variable), (2) la deriva no lineal hace que el tipo de interés tienda rápidamente hacia valores intermedios cuando alcanza valores más extremos (y, por tanto, el proceso es globalmente estacionario) y (3) la función de difusión es menor para valores intermedios de los tipos de interés y mayor para valores extremos.

Además de los trabajos que se centran en una comparación entre diferentes modelos, existe una gran cantidad de estudios que se centran en el análisis empírico de un modelo en particular. La mayoría de estos estudios se centran en el modelo de CIR (1985a, b). Así, distinguiendo según la técnica empleada, tenemos los siguientes:

Regresiones de Sección Cruzada	Método Generalizado de Momentos
Brown and Dybvig (1986)	Longstaff and Schwartz (1992)
Brown and Schaefer (1994)	Heston (1992)
De Munnik and Schotman (1994)	Gibbons and Ramaswamy (1993)
Máxima Verosimilitud	Filtro de Kalman
Marsh and Rosenfeld (1983)	Chen and Scott (1993b)
Sun (1992)	Lund (1994)
Chen and Scott (1993a)	Duan and Simonato (1995)
Pearson and Sun (1994)	Geyer and Pichler (1996)

Brown and Dybvig (1986) es el primer análisis empírico del modelo propuesto en CIR (1985a). Estos autores analizan las implicaciones de sección cruzada de dicho modelo y estiman ciertas combinaciones de los parámetros de este modelo pues no

todos pueden ser identificados en la fórmula de valoración de bonos⁸. Para identificar cualquiera de ellos, es necesario el uso de la densidad condicional de los tipos de interés, la cual no depende del precio de mercado del riesgo. Suponiendo que los precios observados se desvían de los precios teóricos (indicados por el modelo) en un término de error con media cero, el método de estimación emplea técnicas de sección cruzada basadas en regresiones no lineales y utiliza rentabilidades nominales mensuales del Tesoro norteamericano para el período 1952-1983. Las principales conclusiones son que el ajuste es muy débil y que el parámetro de volatilidad y el valor a largo plazo al que tienden los tipos de interés son muy inestables a lo largo del tiempo. Además, se deduce que el modelo (1) sobreestima sistemáticamente los tipos de interés a corto plazo, (2) infravalora los títulos emitidos al descuento (quizá debido a efectos fiscales, no considerados en este modelo) y (3) se ajusta mejor a las Letras del Tesoro que a otro tipo de activos.

Brown and Schaefer (1994) abordan dos objetivos: (1) estimar la estructura temporal de los tipos de interés *reales* en Gran Bretaña y describir sus propiedades empíricas y (2) estudiar el comportamiento empírico del modelo CIR en relación con estos datos. Los datos empleados son precios diarios de bonos indexados para el período 1984-1989. Aplicando técnicas de sección cruzada, sus estimaciones muestran que (1) este modelo se ajusta bien a la forma de la curva de rentabilidades, (2) el tipo de interés a largo plazo es relativamente estable y (3) las estimaciones de la volatilidad de los tipos de interés obtenidas mediante sección cruzada se corresponden bien con las obtenidas mediante series temporales. Sin embargo, estos resultados también indican que los parámetros del modelo en estudio están altamente correlados y son altamente inestables a lo largo del período considerado.

⁸Por ejemplo, la velocidad de ajuste y el precio de mercado del riesgo siempre aparecen sumados.



De Munnik and Schotman (1994) se centran en la estimación de los modelos de Vasicek (1977) y CIR (1985b) mediante análisis de sección cruzada aunque también presenta un análisis de series temporales para facilitar la comparación con otros estudios. Estos autores, al igual que Brown and Dybvig (1986), emplean técnicas de regresión no lineal. Se emplean datos (con frecuencia semanal y mensual) correspondientes a precios de bonos holandeses en el período 1989-1990. Con datos semanales, sus resultados indican que ambos modelos se comportan de modo similar mientras el modelo Vasicek es ligeramente superior al modelo CIR cuando se analizan los datos mensuales. En ambos casos, los parámetros de volatilidad y de reversión a la media (indistinguible de cero) son muy variables a lo largo del tiempo.

Marsh and Rosenfeld (1983) emplean un modelo general (que engloba el modelo CIR) para analizar los cambios en los tipos de interés nominales. Estos autores trabajan con dos conjuntos de datos correspondientes a Letras del Tesoro a una semana y un mes para los períodos Enero 1978 - Mayo 1982 y Marzo 1953 - Junio 1981, respectivamente. Los resultados son obtenidos mediante máxima verosimilitud e indican que el modelo lognormal es superior empíricamente al modelo CIR.

Sun (1992) desarrolla un modelo de equilibrio general para los tipos de interés reales dentro de una economía en tiempo discreto. Este autor realiza la valoración de bonos (en términos reales y nominales) y demuestra que la fórmula obtenida para el precio de bonos (en términos reales) converge, para una cierta especificación de los parámetros, a las obtenidas en CIR (1985b). Los parámetros de este modelo son estimados mediante técnicas de máxima verosimilitud aplicadas a una muestra de precios mensuales de bonos para el período Noviembre, 1971 - Diciembre, 1986. Sus resultados indican que existe una correlación significativa entre el nivel de precios y la tasa de crecimiento del consumo, en contraste con el supuesto de neutralidad monetaria que subyace en el modelo CIR.

Chen and Scott (1993a) emplea la densidad condicional de las variables de estado y dos conjuntos de rentabilidades de bonos para estimar las versiones uni-, bi- y trifactorial del modelo de CIR (1985b) para el tipo de interés nominal. Estos autores derivan un sistema de ecuaciones que, combinando información de series temporales y de sección cruzada, les permite identificar todos los parámetros del modelo. Aunque se incluyen errores de medida, se supone que al menos uno de los precios de los bonos (generalmente el de vencimiento igual a tres meses) es observado sin error. Las estimaciones de estos modelos indican que es necesario más de un factor para explicar los cambios en la pendiente y en la curvatura de la curva de rentabilidades. El primer factor refleja la mayor parte de la variación en los tipos de interés a corto plazo y presenta una fuerte reversión a la media. El resto de factores se relaciona con los tipos de interés a largo plazo y muestra una reversión muy lenta a la media. Estos resultados también sugieren que el modelo bifactorial es el que mejor se ajusta a las rentabilidades observadas. Estudiando el ajuste de estos modelos a la estructura temporal observada en una serie de días seleccionados, se comprueba que el modelo trifactorial se comporta ligeramente mejor que el bifactorial y que ambos modelos son muy superiores al modelo unifactorial. El buen ajuste del modelo de tres factores a la curvatura de la curva de rentabilidades se basa en un alto valor de la volatilidad que, sin embargo, no es consistente con la variabilidad observada en la rentabilidad de los bonos.

Pearson and Sun (1994) formulan una función de verosimilitud que, utilizando la densidad condicional de las variables de estado, permite estimar y contrastar un modelo en el que se conozcan expresiones cerradas para el precio de los bonos. Estos autores extienden el modelo CIR añadiendo una constante a la tasa de inflación y a los tipos de interés reales. De este modo se relaja la restricción de no-negatividad impuesta por el modelo original y, por tanto, los tipos de interés reales pueden alcanzar valores negativos. El modelo es estimado sustituyendo los dos factores por dos precios

observados. Por tanto, este método no utiliza toda la información de sección cruzada pues sólo se emplean dos puntos de la estructura temporal. Empleando métodos de máxima verosimilitud y tres grupos de precios mensuales de bonos a corto plazo, se rechaza el modelo CIR en su especificación original y en la versión extendida que se sugiere en este estudio.

Longstaff and Schwartz (1992) estiman una versión bifactorial del modelo de CIR (1985b) e interpretan ambos factores como el tipo de interés a corto plazo y la volatilidad de los tipos de interés puesto que son función lineal de estas variables. Estos autores estiman la volatilidad del tipo de interés a corto plazo mediante la metodología GARCH aplicada a rentabilidades nominales de Letras del Tesoro a un mes. Posteriormente, se utilizan rentabilidades de Letras del Tesoro de tres meses a cinco años para contrastar las restricciones de sección cruzada impuestas por el modelo sobre la estructura temporal de los tipos de interés mediante el método GMM. Los resultados indican que este modelo bifactorial captura el nivel y la volatilidad de la estructura temporal y, al no rechazarse estas restricciones, refleja la estructura de sección cruzada de los cambios de las rentabilidades. Analizando el comportamiento de la versión unifactorial de este modelo, se comprueba su mal comportamiento debido, principalmente, a su incapacidad para reflejar los cambios en la volatilidad de los tipos de interés.

Empleando la versión multifactorial de CIR (1985b), Heston (1992) estudia el número de factores a utilizar para modelizar correctamente los tipos de interés, reflejar adecuadamente su evolución temporal y analizar las interrelaciones existentes entre los tipos de interés correspondientes a diferentes vencimientos. La técnica de estimación propuesta consta de tres etapas: análisis de variables latentes para rentabilidades de bonos, restricciones lineales y restricciones no lineales asociadas a un cierto modelo de la estructura temporal. Empleando rentabilidades mensuales (obtenidas mediante interpolación) para el período 1970-1988, este autor no rechaza, en un primer

momento, que los excesos de rentabilidades sigan un modelo unifactorial y se deduce, por tanto, que las rentabilidades pueden seguir un modelo bifactorial. Sin embargo, el contraste de las restricciones no lineales lleva a rechazar este modelo.

Gibbons and Ramaswamy (1993) incorporan el efecto de la inflación esperada en el modelo CIR con el objetivo de modelizar los tipos de interés reales. Estos autores emplean la distribución estacionaria del tipo de interés real para calcular las medias y varianzas incondicionales de las rentabilidades reales de los bonos al descuento nominales. Al imponer el supuesto de neutralidad monetaria, se puede analizar el comportamiento de este modelo sin necesidad de hacer supuestos sobre el proceso seguido por el nivel de precios. Las desventajas de este enfoque son (1) no se utiliza la distribución condicional que es la que determina la evolución temporal de los tipos de interés y (2) este modelo sólo es aplicable a bonos al descuento. Se imponen diversas restricciones sobre los momentos de las rentabilidades reales de bonos nominales y se utiliza el método GMM para contrastar la distribución estacionaria del proceso seguido por los tipos de interés. Los datos utilizados son mensuales, corresponden a bonos a corto plazo y cubren el período 1964 - 1989. La principal conclusión alcanzada por estos autores es que el modelo CIR caracteriza razonablemente las rentabilidades reales de bonos nominales cuando se consideran vencimientos iguales o inferiores a un año.

Entre los trabajos que emplean la metodología basada en la formulación del espacio de los estados del modelo de la estructura temporal, tenemos Chen and Scott (1993b), Lund (1994), Duan and Simonato (1995) y Geyer and Pichler (1996).

Chen and Scott (1993b) contrastan la versión uni-, bi- y trifactorial del modelo de CIR (1985b). Los parámetros del modelo se estiman mediante el método de máxima verosimilitud usando el filtro de Kalman para estimar las variables de estado inobservables. Se utilizan los mismos datos que en Chen and Scott (1993a): rentabilidades

mensuales de bonos al descuento para el período 1960 - 1987 y precios semanales de bonos desde Enero de 1980 a Diciembre de 1988. Los resultados son similares para ambos conjuntos de datos e indican que el modelo unifactorial no se ajusta bien a las rentabilidades correspondientes a los mayores vencimientos y que los modelos multifactoriales son necesarios para caracterizar la forma (variable en el tiempo) de la curva de rentabilidades. En los modelos multifactoriales, al menos una de las variables de estado presenta una lenta reversión a la media. Esta característica permite explicar la variación de los tipos de interés a largo plazo. Con el objetivo de estudiar el ajuste de estos modelos a los precios de bonos observados, se seleccionan una serie de días del período 1980 - 1992. Los resultados son análogos a los obtenidos en Chen and Scott (1993a): el modelo de tres factores se comporta ligeramente mejor que el bifactorial y ambos son muy superiores al modelo unifactorial. Con el uso de tres factores, el modelo consigue un buen ajuste al tipo de interés a corto plazo, al tipo de interés a largo plazo y a la volatilidad de los tipos de interés.

Lund (1994) considera un modelo bifactorial gaussiano, extensión de Vasicek (1977), en el que el valor a largo plazo de los tipos de interés sigue un proceso de difusión. Debido al carácter gaussiano de este modelo, se puede aplicar el filtro de Kalman para calcular *exactamente* la función de verosimilitud y estimar las variables de estado inobservables. Se propone un algoritmo para maximizar la función de verosimilitud y se aplica dicho algoritmo a una serie de rentabilidades estimadas a partir de precios de bonos daneses. Estas rentabilidades son semanales y corresponden al período Enero, 1985 - Abril, 1993. La principal conclusión es que se rechaza dicho modelo debido a la no normalidad, sesgo y autocorrelación presentes en los residuos.

Duan and Simonato (1995) proponen un marco común, basado en la representación en el espacio de los estados, para estimar los modelos exponencial-afines de la estructura

temporal. Aplicando un resultado de Duffie and Kan (1996)⁹, se establece que la media y varianza condicionales del proceso, sobre cualquier intervalo en tiempo discreto, deben ser afines en las variables de estado y , entonces, se utiliza el filtro de Kalman para obtener la estimación mediante quasi-máxima verosimilitud. Se permiten errores de medida en las rentabilidades observadas. El análisis empírico utiliza rentabilidades mensuales del Tesoro norteamericano correspondientes a cuatro vencimientos a corto plazo durante el período Julio, 1964 - Febrero, 1992. Dicho análisis rechaza los tres casos particulares del modelo afín que se analizan: Vasicek (1977), CIR (1985b) y el modelo bifactorial de Chen and Scott (1992).

Geyer and Pichler (1996) formulan una representación en el espacio de los estados de la versión multifactorial de CIR (1985b) y estiman desde la versión unifactorial hasta la que utiliza cinco factores de dicho modelo. El método de estimación empleado supone que la densidad de transición corresponde a una variable normal y, de modo similar a Chen and Scott (1993b), se utiliza una versión modificada del filtro de Kalman para reflejar la restricción de no-negatividad que se impone sobre las variables de estado. Los datos empleados corresponden a tipos de interés mensuales del Tesoro norteamericano desde Enero de 1964 a Diciembre de 1993. Estimadas las diferentes versiones del modelo CIR, el análisis de los residuos detecta sesgos y autocorrelación, problemas que no desaparecen al incrementar el número de factores del modelo. Los resultados de estimación indican que el modelo multifactorial es suficientemente flexible para capturar la forma de la estructura temporal pero no recoge adecuadamente la dinámica de la estructura temporal observada. Una posible explicación de este hecho es que la mayor flexibilidad introducida por un modelo multifactorial es compensada

⁹Estos autores demuestran que los modelos afines de la estructura temporal de los tipos de interés se obtienen si y sólo si la deriva y varianza del proceso de difusión que se ha supuesto para la(s) variable de estado es afín en dicha(s) variable.

por las restricciones derivadas de suponer que todos los factores siguen un proceso CIR, lo cual implica que ningún factor puede tomar valores negativos. Dicho supuesto puede ser adecuado en un modelo uni- o bifactorial pero puede ser demasiado restrictivo cuando se considera un mayor número de factores.

Resumiendo, las principales características relacionadas con el comportamiento empírico de los modelos endógenos son:

1. Los tipos de interés presentan reversión a la media. En muchos casos esta reversión es muy lenta y, por tanto, es difícil rechazar la existencia de una raíz unitaria en esta variable.
2. Las principales conclusiones de los estudios que realizan un análisis comparativo de diferentes alternativas de modelización son:
 - (a) Dentro de los modelos que suponen deriva y difusión lineales, los modelos que mejor describen la dinámica temporal de los tipos de interés son aquéllos en los que la varianza condicional del tipo de interés a corto plazo depende del nivel de dicho tipo de interés. Una de las principales conclusiones es que la volatilidad condicional de los tipos de interés es muy sensible al nivel de dichos tipos de interés. Por tanto, los modelos que suponen una distribución lognormal para los tipos de interés presentan un mejor ajuste que los modelos que suponen que dicha distribución es normal.
 - (b) En general, los modelos que trabajan con deriva y volatilidad no lineales muestran un comportamiento empírico superior frente a diversos casos particulares que suponen un proceso con deriva lineal y volatilidad con elasticidad constante, similar a la analizada en Chan *et al* (1992).

3. La mayoría de los trabajos que se centran en el comportamiento empírico de un modelo en particular analizan el modelo de CIR (1985a, b). Las principales conclusiones de estos trabajos son:
- (a) El comportamiento empírico de este modelo, al menos en su versión unifactorial, es ciertamente débil.
 - (b) Muchos de estos estudios obtienen estimaciones de los parámetros que son inestables a lo largo del período muestral considerado.
 - (c) La versión bifactorial del modelo se ajusta mejor a los datos observados que el modelo unifactorial debido a su capacidad para explicar los cambios en la pendiente de la curva de rentabilidades, caracterizar la forma (variable en el tiempo) de esta curva y/o reflejar los cambios en la volatilidad de los tipos de interés
 - (d) Versiones con más de dos factores no aportan grandes mejoras con respecto a los resultados obtenidos con el modelo bifactorial. En general, este tipo de modelos refleja adecuadamente la forma de la estructura temporal pero no modeliza bien la dinámica de la estructura temporal observada.

1.4.2 Evidencia Empírica de los Modelos Exógenos

La literatura relacionada con el análisis empírico de los modelos exógenos es mucho menor que la correspondiente a los modelos endógenos. Este hecho puede ser debido a que, en la mayoría de estos modelos, suele ser difícil la obtención de expresiones cerradas para el precio de los activos derivados y, por tanto, la implementación eficiente de un estudio empírico puede presentar mayores dificultades. Dentro de los análisis realizados

tenemos trabajos como Flesaker (1993), Amin and Morton (1994), Backus, Foresi, and Zin (1994), Moraleda and Vorst (1996) y Bühler *et al* (1997).

Flesaker (1993) estudia el comportamiento empírico de un caso particular del modelo HJM, en concreto, la versión en tiempo continuo de Ho and Lee (1986). Dicho modelo supone que la volatilidad es constante y permite la obtención de expresiones cerradas para el precio de futuros sobre tipos de interés y de opciones sobre estos futuros. Este autor aplica el método GMM a una muestra de precios de cierre diarios de estos derivados desde Marzo de 1985 a Julio de 1988. Sus resultados muestran que dicho modelo (1) presenta ciertos sesgos de modo sistemático y (2) es incompatible con la muestra en la mayoría de los subperíodos analizados.

Amin and Morton (1994) contrastan seis casos particulares de la versión unifactorial del modelo HJM que se obtienen mediante especificaciones concretas (uni o biparamétricas) de la volatilidad. Estos modelos emplean precios de opciones y futuros sobre eurodólares desde 1987 a 1992. La estructura temporal se determina mediante el precio de los futuros y el precio de las opciones se utiliza para estimar los parámetros de la función de volatilidad de cada modelo. En todos los modelos, la volatilidad implícita es estacionaria y presenta reversión a la media. Para comparar estos modelos, se utilizan tres criterios: (1) la estabilidad de los parámetros estimados, (2) el ajuste del modelo a los precios observados y (3) la capacidad del modelo para generar beneficios a partir de activos infravalorados. Los resultados obtenidos indican que los modelos biparamétricos se ajustan mejor a los precios observados aunque los parámetros estimados son muy inestables a lo largo del tiempo. Considerando estrategias de negociación basadas en la compra (venta) de opciones infravaloradas (sobrevaloradas), las ganancias obtenidas por estos modelos son inferiores a las correspondientes a los modelos uniparamétricos cuyas estimaciones son mucho más estables. La mayoría de los modelos analizados indican una sobrevaloración en las opciones de venta.

Backus, Foresi, and Zin (1994) muestran que, mediante este tipo de modelos, la valoración de activos derivados puede conducir a oportunidades de arbitraje. Analizando el modelo de Black, Derman and Toy (1990), se prueba que dicho modelo puede sobrevalorar las opciones de compra sobre bonos a largo vencimiento cuando los tipos de interés muestran reversión a la media.

Análogamente a Amin and Morton (1994), Moraleda and Vorst (1996) analizan varios casos particulares del modelo de HJM (1992): dos modelos unifactoriales (suponiendo volatilidad constante y exponencial decreciente, respectivamente) y un modelo bifactorial. La estructura temporal de los tipos de interés es estimada mediante la técnica de splines cúbicos de McCulloch (1971, 1975). La estimación de los parámetros de la función de volatilidad se realiza a partir de datos diarios correspondientes a tipos de interés forward desde Agosto de 1994 hasta Febrero de 1995. Esta estimación se lleva a cabo mediante un análisis de componentes principales y mediante una técnica de minimización (Newton-Raphson).

Los tres modelos son comparados en función de (1) el porcentaje de variación (explicada) de los movimientos de la estructura temporal de los tipos de interés y (2) el ajuste a los precios observados de activos derivados. Ambos criterios indican que el comportamiento del modelo bifactorial es mejor que el de los dos modelos unifactoriales. Analizando diversos subperíodos, se comprueba que los parámetros de los tres modelos son, en general, muy estables aunque sensibles a los valores de la probabilidad neutral al riesgo. Los parámetros estimados se utilizan para valorar opciones americanas cuyo activo subyacente es el futuro sobre el bono nocional a diez años. Los resultados muestran que los modelos unifactoriales sobrevaloran las opciones mientras el modelo bifactorial se ajusta mejor a los precios de estas opciones. Sin embargo, dicho modelo infravalora de modo sistemático el precio de las opciones de venta de más largo vencimiento.

Bühler *et al* (1997) comparan empíricamente tres versiones del modelo de HW (1987) (un modelo unifactorial similar al de Chan *et al* (1992) y dos modelos bifactoriales análogos a los presentados en Schaefer and Schwartz (1984) y Longstaff and Schwartz (1992), respectivamente) y cuatro casos particulares de HJM (1992): dos modelos unifactoriales (con volatilidad constante y lineal en el tiempo al vencimiento, respectivamente) y dos modelos bifactoriales (suponiendo volatilidades constantes y proporcionales a los tipos de interés forward, respectivamente). El criterio de comparación se basa en la valoración realizada por cada uno de los modelos. Los datos empleados son semanales y corresponden a *warrants* sobre bonos para el mercado alemán y el período 1990-1993. El precio de estas opciones se calcula tras estimar la estructura temporal de tipos de interés y los parámetros correspondientes a los procesos seguidos por los factores y por las volatilidades.

Los resultados obtenidos indican que (1) las versiones unifactoriales de HJM (1992) son superiores a los modelos bifactoriales del mismo tipo, (2) el modelo unifactorial de HW (1987) presenta problemas en su calibración y es claramente inferior a las versiones bifactoriales de este modelo y (3) es posible identificar un conjunto formado por tres modelos¹⁰ que es sistemáticamente superior al resto de modelos analizados. Analizando estos tres modelos, la versión unifactorial de HJM (1992) es la que mejor se ajusta a la estructura temporal de tipos de interés y volatilidades.

En relación con el comportamiento empírico de los modelos exógenos, las principales conclusiones son:

1. En ciertos casos, la valoración de activos derivados mediante este tipo de modelos puede conducir a oportunidades de arbitraje.

¹⁰Estos tres modelos son las dos versiones bifactoriales de HW (1987) y el modelo unifactorial de HJM (1992) que supone volatilidad lineal.

2. El modelo de Ho and Lee (1986) suele ser rechazado.
3. Analizando la versión unifactorial del modelo HJM, la comparación entre los modelos uni- y biparamétricos para la volatilidad permite concluir que
 - (a) Los modelos biparamétricos se ajustan mejor a los datos observados.
 - (b) Los modelos uniparamétricos proporcionan unas estimaciones de los parámetros más estables a lo largo del tiempo y ganancias superiores mediante estrategias de negociación.
4. La comparación entre el modelo unifactorial HJM y su versión bifactorial no proporciona resultados concluyentes sobre cuál es el método con mejor comportamiento empírico.

1.5 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado una panorámica general de los diferentes estudios que se han dedicado a analizar, mediante modelos en tiempo continuo, la estructura temporal de los tipos de interés. Estos modelos se pueden clasificar en dos categorías: modelos endógenos, que suponen la existencia de una(s) variable(s) de estado que influyen sobre la estructura temporal de los tipos de interés y modelos exógenos que toman como dada dicha estructura temporal. El objetivo de los modelos endógenos es, partiendo del proceso estocástico que siguen las variables de estado, determinar la estructura temporal de equilibrio mientras los modelos exógenos intentan conseguir un ajuste perfecto a los tipos de interés observados.

Las ventajas de los modelos endógenos se relacionan con su tratabilidad analítica, su implementación práctica y que, en general, permiten valorar activos derivados como bonos y opciones europeas. Sus principales desventajas son que no tiene en cuenta

la información contenida en los tipos de interés observados y que no consiguen un buen ajuste a toda la estructura temporal observada. Más aún, en algunos casos se determina exógenamente el precio de mercado del riesgo por lo que se pueden producir oportunidades de arbitraje.

Los modelos endógenos unifactoriales suelen emplear el tipo de interés instantáneo que, en general, es modelizado mediante un proceso con reversión a la media. Estos modelos son muy tratables analíticamente y/o su implementación numérica es relativamente fácil. Sin embargo, estos modelos pueden no ser suficientes para explicar los diferentes movimientos de la estructura temporal y, además, implican que las rentabilidades de los bonos correspondientes a distintos vencimientos están perfectamente correladas.

Los modelos endógenos multifactoriales pueden solucionar los inconvenientes relacionados con los modelos unifactoriales pero, sin embargo, ofrecen menos tratabilidad analítica y/o mayores problemas computacionales. Estos modelos suelen utilizar el tipo de interés instantáneo como una de sus variables de estado.

Relajando el supuesto de evolución continua en el tiempo de los tipos de interés, la existencia de saltos en el proceso ayuda a reflejar la posibilidad de cambios discretos en los tipos de interés. Otra de las ventajas de este tipo de modelos es que permite reflejar adecuadamente características empíricas como la asimetría y el exceso de curtosis presentes en los cambios en los tipos de interés. Sin embargo, la existencia de saltos imposibilita una cobertura dinámica en la línea de Black and Scholes (1973) y complica la valoración de activos derivados, especialmente en el caso de opciones americanas.

Respecto al comportamiento empírico de los modelos endógenos, podemos indicar que, dentro de los modelos con deriva y difusión lineales, el mejor comportamiento se da cuando la varianza condicional del tipo de interés a corto plazo es muy sensible

al nivel de dicho tipo de interés. Como consecuencia, los modelos que suponen una distribución lognormal en los tipos de interés presentan un mejor ajuste que los modelos que suponen que dicha distribución es normal. El problema de los modelos lognormales es que no presentan ninguna tratabilidad analítica y es necesario recurrir a técnicas numéricas para valorar activos derivados. Por el contrario, los modelos gaussianos son muy tratables analíticamente pero, en dichos modelos, los tipos de interés pueden alcanzar valores negativos.

Por otro lado, los modelos exógenos tienen en cuenta la información contenida en los tipos de interés observados, consiguen un buen ajuste a la estructura temporal observada y no necesitan realizar supuestos sobre el precio de mercado del riesgo. Por otro lado, suele ser difícil obtener expresiones cerradas para el precio de los activos derivados y, por tanto, la implementación práctica puede ser muy costosa. Además, el empleo de técnicas numéricas puede ser complejo pues la mayoría de estos modelos no son markovianos. Otro inconveniente de este tipo de modelos es que las diferentes calibraciones, período a período, de la estructura temporal pueden ser inconsistentes entre sí.

En relación con el comportamiento empírico de estos modelos, los resultados no son nada concluyentes. El modelo más analizado es el de HJM (1992). Analizando la versión unifactorial de este modelo, la comparación entre los modelos uni- y biparamétricos para la volatilidad indica que, aunque los modelos biparamétricos se ajustan mejor a los datos observados, los modelos uniparamétricos proporcionan unas estimaciones de los parámetros más estables y ganancias superiores mediante estrategias de negociación. Más aún, no existe acuerdo sobre el número de factores que, de modo más adecuado, sirve para ajustarse a los tipos de interés y precios de bonos observados.

Respecto a la valoración de activos derivados en renta fija, la mayoría de trabajos se centran en bonos y opciones. En ciertos casos se han obtenido expresiones cerradas para el precio de opciones europeas pero, en general, la valoración de opciones americanas requiere técnicas numéricas. Otro resultado importante es que la valoración de opciones sobre tipos de interés es más difícil que la de las opciones sobre acciones aunque, bajo ciertos supuestos, se pueden obtener expresiones cerradas. Sin embargo, hasta la fecha, ningún modelo de valoración para este tipo de opciones ha obtenido un acuerdo similar al existente en relación con el modelo de Black and Scholes (1973).

La conclusión final de todo lo expuesto en este capítulo es que, aunque se han propuesto muchos modelos en tiempo continuo de la estructura temporal de los tipos de interés, ninguno de ellos reúne todas las propiedades "óptimas" en relación con la valoración de derivados y con el ajuste a los datos observados en la realidad. Modelos endógenos que son muy tratables analíticamente presentan un comportamiento empírico inferior frente a otros modelos que, sin embargo, no proporcionan expresiones cerradas para el precio de activos derivados. El principal problema relacionado con los modelos exógenos es que pueden presentar problemas de consistencia temporal. Aunque se han presentado diversas versiones que incorporan características como la reversión a la media o parámetros variables en el tiempo, se debería intentar simplificar su estructura de modo que estos modelos sean markovianos y, por tanto, se facilite su implementación práctica.

A la vista de lo expuesto, el modelo "ideal" sería aquél que, siendo sensible a las variaciones en el nivel de los tipos de interés, anule cualquier oportunidad de arbitraje y tenga la suficiente tratabilidad analítica. De este modo, dicho modelo tendría consistencia interna, conseguiría un buen ajuste a la estructura temporal observada y proporcionaría expresiones cerradas para el precio de los activos derivados.

Capítulo 2

Procesos de difusión con saltos y valoración de opciones

2.1 Introducción

Este capítulo estudia, teniendo como marco de trabajo el mercado interbancario, la modelización de la estructura temporal de los tipos de interés y la valoración de opciones sobre activos que dependen de dicho tipo de interés. Tradicionalmente, este análisis se basa en el empleo de modelos (con uno o más factores) que suponen que los tipos de interés evolucionan a lo largo del tiempo de modo continuo, (véase Duffie (1992), p. 129-139). Sin embargo, pueden darse diversas circunstancias que nos hacen dudar de que éste sea un supuesto razonable.

Así, un caso interesante se presenta en relación con los mercados nacionales interbancarios los cuales están sujetos a intervenciones exógenas de la correspondiente autoridad monetaria cuando ésta intenta controlar la oferta monetaria. En esta situación, estas intervenciones pueden inducir unos saltos en la evolución temporal de los tipos de interés observados. Esta idea es similar a la expuesta en Merton (1976), trabajo

que analiza la valoración de opciones cuyo activo subyacente son acciones. Este autor sugiere que el tener en cuenta estos saltos puede ser útil para describir la influencia de la nueva información que se va produciendo sobre la conducta de los precios. Por tanto, partiendo de esta sugerencia, se puede deducir de qué modo el mercado percibe y asimila la información sobre la oferta monetaria que encierra una intervención inesperada de las autoridades monetarias.

Obviamente, pueden existir otras razones que provoquen saltos en la evolución temporal de los tipos de interés como, por ejemplo, shocks sobre la oferta y/o demanda o noticias políticas y económicas. Uno de nuestros objetivos es establecer un marco de trabajo lo suficientemente general de modo que nos permita poder trabajar con todas estas posibles influencias bajo un mismo enfoque. Así, vamos a establecer un modelo que pueda cubrir los diferentes efectos con que nos podemos encontrar en la práctica. Nótese también que otra ventaja práctica del uso de procesos de difusión en los que superponemos saltos discretos es que permite reflejar una característica empírica, las “colas pesadas”, que suele presentar la distribución del precio de los activos.

Este capítulo se organiza del siguiente modo. En la Sección 2.2 se presenta y desarrolla el marco teórico que posibilitará la valoración de diferentes activos que dependen de los tipos de interés. La Sección 2.3 explica el método econométrico empleado para realizar la estimación del proceso de difusión con saltos. La Sección 2.4 describe los rasgos básicos de los datos que se han empleado. El análisis empírico se presenta en la Sección 2.5. La Sección 2.6 analiza la relación existente entre las intervenciones de las autoridades monetarias y los saltos existentes en la evolución temporal de los tipos de interés. La Sección 2.7 aborda el problema de la valoración de bonos y opciones. Finalmente, la Sección 2.8 resume las conclusiones más importantes. Tras esta sección, se incluye un apéndice que contiene todas las tablas y representaciones gráficas relacionadas con este capítulo.

2.2 Marco Teórico

El marco de trabajo básico de este capítulo es un modelo con un único factor con el que se intenta explicar la evolución temporal de los tipos de interés, en la línea de trabajos como Vasicek (1977) y CIR (1985a, b) entre otros. Nosotros generalizamos este tipo de modelos, siguiendo las sugerencias de Das (1994a), autor que postula la inclusión de un componente de saltos en el proceso que sigue la variable de estado. Dicha variable de estado es el tipo de interés instantáneo sin riesgo y su evolución a lo largo del tiempo viene dada por el siguiente proceso de difusión con saltos:

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^\tau dz + J(\mu, \gamma^2)d\pi(\mathbf{h}) \quad (2.1)$$

donde, para el tipo de interés instantáneo sin riesgo r , k es el coeficiente de reversión a la media, θ es el valor a largo plazo de r , σ es la desviación típica de r , τ es el coeficiente de elasticidad, dz es un proceso estándar Gauss-Wiener, \mathbf{J} es la magnitud del salto en r que sigue una distribución Normal con media μ y varianza γ^2 y $d\pi(\mathbf{h})$ es un proceso de Poisson con parámetro de intensidad constante \mathbf{h} . Se supone que los componentes de difusión y de salto del proceso que sigue el tipo de interés son independientes. La reversión a la media ($k > 0$) garantiza que r tiene una distribución estacionaria.

Dado el tipo de interés instantáneo r en el instante t , representamos por $\mathbf{P}[r, t, \mathbf{T}]$ el precio de un bono puro de descuento sin riesgo que vence en el instante \mathbf{T} . Utilizando el lema de Itô, la tasa de rentabilidad instantánea del bono es:

$$dP = (P_r dr + 0.5P_{rr}(dr)^2 + P_t dt) \quad (2.2)$$

donde los subíndices denotan derivadas parciales. En mercados perfectos, la tasa de rentabilidad instantánea esperada de cualquier activo se puede escribir como el tipo de interés instantáneo sin riesgo, r , más una prima al riesgo. Por tanto, todos los bonos cupón-cero deben tener la misma rentabilidad ajustada por riesgo.

Suponiendo que el precio de mercado por unidad de riesgo, $(\lambda(\cdot))$, para el bono es una función genérica que puede depender de σ , r y τ , pero no de $T - t$, y recordando que los componentes de difusión y de salto en la ecuación (2.1) son independientes, la varianza de los cambios en r es simplemente la suma de las varianzas de ambos componentes. Utilizando condiciones de no-arbitraje, se comprueba que la ecuación (diferencial en derivadas parciales) de valoración viene dada por la expresión

$$0 = [k(\theta - r) - \lambda(\sigma, r, \tau)] P_r + P_t + 0.5\sigma^2 r^{2\tau} P_{rr} - rP + hE[P(r + J) - P(r)] \quad (2.3)$$

Esta es la ecuación fundamental para valorar cualquier bono cupón-cero suponiendo que el precio de dicho bono depende únicamente del tipo de interés instantáneo, r , y del tiempo hasta el vencimiento, $\mathbf{T}-t$. Con la condición terminal,

$$P(r, T, T) = 1 \quad (2.4)$$

se obtiene (si existe) la solución analítica de (2.3). Una técnica habitual es suponer que el precio del bono viene dado por una función del tipo

$$P(r, t, T) = A[t, T] \exp\{-B[t, T]r\} \quad (2.5)$$

donde

$$A[t, T] = f_A(\Phi), \quad B[t, T] = f_B(\Phi) \\ \Phi = (T - t, k, \theta, \sigma, \tau, h, \mu, \gamma^2, \lambda) \quad (2.6)$$

Si no es posible encontrar una solución analítica se puede recurrir a procedimientos numéricos para hallar una solución aproximada de (2.3).

Solamente se han obtenido expresiones explícitas para $\mathbf{A}[t, \mathbf{T}]$ y $\mathbf{B}[t, \mathbf{T}]$ en algunos casos particulares. Así, Ahn and Thompson (1988) estudian el caso $\tau = 0.5$ suponiendo

un componente de salto igual a δdy donde δ es una constante negativa y la intensidad de y es πr , es decir, la tasa de llegada de los saltos es proporcional al nivel de los tipos de interés. Das (1994a), estudiando los casos $\tau = 0.5$ y $\tau = 0.0$, parametriza tanto el tamaño como el signo del salto. No conocemos publicaciones que hayan obtenido expresiones para $\mathbf{A}[t, \mathbf{T}]$ y $\mathbf{B}[t, \mathbf{T}]$ para otros valores de τ .

El marco de valoración presentado anteriormente puede aplicarse también a otros activos cuyos pagos dependan de los tipos de interés como, por ejemplo, opciones y futuros sobre bonos. Así, podemos citar Ahn and Thompson (1988), Naik and Lee (1990), Das (1994a) y Naik and Lee (1995) como trabajos teóricos que utilizan procesos de difusión con saltos para estudiar la valoración de activos indexados sobre tipos de interés. En estos estudios se obtienen modelos analíticos para los precios de bonos y opciones pero ninguno de ellos permite la valoración de opciones americanas, lo cual es un grave inconveniente dado que la mayoría de los activos que dependen de los tipos de interés son de este tipo.

Aún más, la valoración de activos derivados de tipo americano suele requerir el empleo de métodos numéricos, bien mediante árboles binomiales o bien mediante métodos de diferencias finitas (véase Duffie (1992), Cap. 10). Recientemente, Amin (1993) proporciona una aplicación (mediante árboles binomiales) de estos métodos numéricos para procesos de difusión con saltos mientras Das (1994b) utiliza el método de diferencias finitas. En este capítulo seguimos este último enfoque empleando el Método de Diferencias Finitas Totalmente Implícito (FIFD, de aquí en adelante) para realizar la valoración de opciones y bonos.

A continuación, desarrollamos el procedimiento que nos permite resolver la ecuación (2.3) mediante dicho método. A la hora de aplicar este método, debemos especificar cuidadosamente las condiciones terminales. Puesto que la variable de estado, \mathbf{r} , toma

valores en el intervalo $[0, \infty)$, y el proceso requiere retroceder en el tiempo sobre una rejilla temporal discreta de la variable de estado, es difícil establecer dicha rejilla sobre este soporte. Para paliar este problema, utilizamos el cambio de variable:

$$y = \frac{1}{1 + \beta r}, \quad \beta > 0 \quad (2.7)$$

La nueva variable de estado, y , toma valores en el intervalo $(0, 1]$ lo cual facilita el establecimiento de la cota superior. Mediante este cambio de r a y se obtiene la versión transformada de la ecuación diferencial en derivadas parciales (2.3):

$$\begin{aligned} 0 = & P_y \left[\sigma^2 \beta^{2-2\tau} y^{3-2\tau} (1-y)^{2\tau} - \beta y^2 \left(k \left(\theta - \frac{1-y}{\beta y} \right) - \lambda(\cdot) \right) \right] \\ & + P_{yy} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \beta^{2-2\tau} y^{4-2\tau} (1-y)^{2\beta} \right] + P_t - \left(\frac{1-y}{\beta y} \right) P \\ & + \left[EP \left(\frac{1-y}{\beta y} + J \right) - P \left(\frac{1-y}{\beta y} \right) \right] h \end{aligned} \quad (2.8)$$

que se puede escribir como

$$0 = P_y A + P_{yy} B + P_t - \left(\frac{1-y}{\beta y} \right) P + \left[EP \left(\frac{1-y}{\beta y} + J \right) - P \left(\frac{1-y}{\beta y} \right) \right] h \quad (2.9)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \left[\sigma^2 \beta^{2-2\tau} y^{3-2\tau} (1-y)^{2\tau} - \beta y^2 \left(k \left(\theta - \frac{1-y}{\beta y} \right) - \lambda(\cdot) \right) \right] \\ B &= \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \beta^{2-2\tau} y^{4-2\tau} (1-y)^{2\beta} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

El procedimiento para resolver la ecuación (2.8) mediante el método FIFD se basa en la utilización de una rejilla bidimensional donde tenemos la (nueva) variable de estado (y) y el tiempo (t) en los dos ejes de dicha rejilla. La variable $i = 1, 2, \dots, N$ hace referencia al eje donde tenemos la variable de estado mientras la variable $j = 1, 2, \dots, T$ indica el eje temporal en la rejilla siendo N y T el número de puntos que tenemos en cada eje.

Denotamos el precio de un bono en la rejilla como $P_{i,j}$ y el valor de la variable de estado como $y_{i,j}$. La distancia entre nodos adyacentes en los ejes i y j se denotan por m y q , respectivamente. Utilizando esta notación, podemos escribir la ecuación diferencial (2.8) como una ecuación en diferencias del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 0 &= A_i \left[\frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2m} \right] + \left[\frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{q} \right] + B_i \left[\frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{m^2} \right] + \\
 &+ h \sum_{n=1}^N \left[P_{n,j} \times \text{Prob} \left[\frac{1 - y_{n,j}}{\beta y_{n,j}} \mid \frac{1 - y_{i,j}}{\beta y_{i,j}} \right] \right] - h P_{i,j} - \frac{1 - y}{\beta y} P_{i,j} \\
 i &= 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Las condiciones terminales para obtener el precio de los bonos al vencimiento son

$$P \left(\frac{1 - y}{\beta y}, T, T \right) = 1 \tag{2.12}$$

Reordenando la ecuación (2.11), se obtiene

$$-\frac{P_{i,j+1}}{q} = P_{i+1,j} a_i + P_{i,j} b_i P_{i-1,j} c_i + h \sum_{n=1}^N \left[P_{n,j} \times \text{Prob} \left[\frac{1 - y_{n,j}}{\beta y_{n,j}} \mid \frac{1 - y_{i,j}}{\beta y_{i,j}} \right] \right] \tag{2.13}$$

donde

$$\begin{aligned}
 a_i &= \left[\frac{A_i}{2m} + \frac{B_i}{m^2} \right] \\
 b_i &= \left[-\frac{1}{q} - \frac{2B_i}{m^2} - \frac{1 - y}{\beta y} - h \right] \\
 c_i &= \left[\frac{-A_i}{2m} + \frac{B_i}{m^2} \right]
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Este sistema de N ecuaciones se resuelve recursivamente hacia atrás, partiendo de las condiciones terminales para el precio del bono. El sistema de $N \times T$ ecuaciones dado por la fórmula (2.13) puede escribirse en forma matricial del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 P_{j+1} &= X P_j \\
 X &= -q(Q + Y)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde Q es una matriz $N \times N$ que incluye las probabilidades de transición entre los nodos $P_{i,j}$ y $P_{n,j}$. P_{j+1} es un vector $N \times 1$. Y es una matriz tridiagonal donde cada fila contiene los coeficientes a_i , b_i y c_i . La recursión hacia atrás se realiza calculando la ecuación (2.15) desde $j = T - 1$ hasta $j = 1$.

En el caso de otros activos derivados (dependientes de los tipos de interés) que dependan del precio de los bonos, se pueden imponer las correspondientes condiciones terminales y se obtienen los precios de estos derivados a lo largo de la rejilla. Este método permite obtener la mayoría de las valoraciones que no dependan del camino considerado.

2.3 Método Econométrico de Estimación

El modelo utilizado para analizar la evolución temporal de los tipos de interés es el siguiente proceso de difusión con saltos:

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^\tau dz + J(\mu, \gamma^2)d\pi(h) \quad (2.16)$$

Vamos a seguir varios pasos en el proceso de estimación de este modelo. En una primera etapa, se estima la parte de difusión pura del modelo, la cual se obtiene haciendo $h = 0$ en la expresión (2.16). A continuación, se estima tanto la localización como el tamaño de los saltos mediante un estadístico del tipo Razón de Verosimilitudes. Finalmente, se procede a la estimación conjunta del proceso de difusión con saltos.

El componente de difusión pura es estimado mediante la aproximación en tiempo discreto utilizada por Chan *et al* (1992), la cual se basa en una versión iterativa del Método Generalizado de Momentos (GMM, de aquí en adelante) de Hansen. La es-

pecificación econométrica es la siguiente:

$$\begin{aligned} r_t - r_{t-1} &= a + br_{t-1} + \varepsilon_t \\ E(\varepsilon_t) &= 0 \\ E(\varepsilon_t^2) &= \sigma^2 r_{t-1}^{2\tau} \end{aligned} \quad (2.17)$$

por lo que,

$$k = -b, \quad \theta = -\frac{a}{b} \quad (2.18)$$

Dado el vector de parámetros $\Omega = (\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ y los residuos ε_t en (2.17), sea el vector de momentos $f_t(\Omega)$ cuya expresión es

$$f_t(\Omega) = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_t r_{t-1} \\ \varepsilon_t^2 - \sigma^2 r_{t-1}^{2\tau} \\ (\varepsilon_t^2 - \sigma^2 r_{t-1}^{2\tau}) r_{t-1} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Bajo la hipótesis nula, si las restricciones dadas por la ecuación (2.17) se cumplen, entonces $E[f_t(\Omega)] = 0$. Reemplazamos $E[f_t(\Omega)]$ por su análogo muestral $g_T(\Omega)$, empleando T observaciones,

$$g_T(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t(\Omega) \quad (2.20)$$

Entonces, el estimador GMM es:

$$\Omega_0 = \operatorname{argmin} J_T(\Omega) \quad (2.21)$$

donde

$$J_T(\Omega) = g_T(\Omega)' V g_T(\Omega) \quad (2.22)$$

y V es una matriz de ponderaciones. Para evitar la (posible) presencia de autocorrelación y heterocedasticidad en los residuos, empleamos la matriz de varianzas-covarianzas de Newey-West para el modelo GMM e iteramos hasta conseguir la convergencia.

Para contrastar las restricciones de sobreidentificación del modelo utilizamos un contraste chi-cuadrado. La cantidad $TJ_T(\Omega)$ sigue una distribución χ^2 con un número de grados de libertad igual a la diferencia entre el número de condiciones de momentos y el número de parámetros estimados.

Empleando los valores estimados para los parámetros de difusión, se puede estimar la localización de los saltos utilizando un enfoque que se basa en las ideas de Aase and Guttorp (1987). Esencialmente, el procedimiento consiste en calcular y comparar dos funciones objetivo para cada observación: la primera se obtiene suponiendo que no hay saltos en el instante considerado (modelo restringido) mientras la segunda se obtiene suponiendo que sí existe salto en dicho instante (modelo sin restringir).

En nuestro caso, la función objetivo es la forma cuadrática $J_T(\Omega)$. Por tanto, para cada observación se calcula el estadístico

$$R = T[J_T(\Omega_0) - J_T(\Omega_1)] \quad (2.23)$$

Este contraste se distribuye asintóticamente como una variable χ^2 con un grado de libertad, y puede interpretarse como la diferencia (normalizada) entre las funciones objetivo restringida $J_T(\Omega_0)$ y sin restringir, $J_T(\Omega_1)$. Así, mediante este procedimiento, se obtiene la localización, el tamaño y el signo de los saltos.

Por tanto, en cada instante, sabemos si ha ocurrido o no un salto, y, en caso de que haya un salto, conocemos el tamaño y el signo de dicho salto. De este modo, para cada t , podemos escribir la esperanza y varianza condicionales del cambio en los tipos de interés en función de lo que ha ocurrido en dicho instante. Mediante una variable dicotómica, D_i , $i = 1, 2, \dots, T$, que toma el valor $D_i = 1$ si existe salto en el instante considerado y $D_i = 0$ si no lo hay, obtenemos los momentos para la estimación:

$$\varepsilon_t = r_t - r_{t-1} - (a + br_{t-1}) - dD_t$$

$$\begin{aligned}
 E(\varepsilon_t) &= 0 \\
 E(\varepsilon_t^2) &= \sigma^2 r_{t-1}^{2\tau} - (dD_t)^2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

donde empleamos como valor inicial los parámetros estimados para el proceso de difusión pura.

2.4 Características de los Datos

En esta sección describimos las características básicas de los datos de nuestra muestra. Como variable indicativa del tipo de interés instantáneo sin riesgo se utiliza el tipo de interés a un día (oferta) del mercado Interbancario de España¹. Los datos han sido obtenidos gracias al Departamento de Investigación del Banco de España y corresponden a valores anualizados. Los datos corresponden al período comprendido entre el 1 de Enero de 1988 y el 10 de Marzo de 1994. Tenemos un total de 1534 observaciones. La Figura 2.1 muestra la representación gráfica del tipo a un día. Notéanse los periódicos “descensos” que presenta el tipo a un día así como el significativo crecimiento en la volatilidad asociado con las turbulencias del Sistema Monetario Europeo. Es importante destacar que la peseta fue devaluada tres veces entre Septiembre de 1992 y Mayo de 1993.

La Tabla I incluye los estadísticos descriptivos de los tipo de interés (r) y de los cambios en dicho tipo de interés (dr). El tipo de interés medio incondicional es el 13% y su desviación típica es de alrededor de 180 puntos básicos. El exceso de curtosis en la distribución de los cambios de los tipos de interés indica la presencia de colas pesadas en la distribución de los tipos de interés.

¹Los tipos de interés se calculan a partir de la media aritmética de todas las transacciones a un plazo especificado en un cierto día.

El coeficiente de autocorrelación de los tipos de interés (véase la Tabla II) es cercano a la unidad y decae lentamente. Los coeficientes de autocorrelación de los cambios en los tipos de interés son pequeños y negativos. Por tanto, nuestra muestra sugiere evidencia de que el tipo de interés presenta reversión a la media.

2.5 Análisis Empírico

Esta sección presenta los resultados obtenidos al realizar la estimación del modelo (2.16). En primer lugar, se estima el modelo de difusión pura, el cual incluye - como casos particulares - ocho modelos (véase la Tabla III) que se derivan a partir de las restricciones realizadas sobre los parámetros a , b y τ en la ecuación (2.17). Posteriormente, se obtiene la localización, el tamaño y el signo de los saltos mediante los valores estimados para los parámetros de difusión pura.

2.5.1 Modelización del Proceso de Difusión Pura

La Tabla IV presenta los resultados de la estimación que se obtienen para los procesos de difusión pura. Se estima tanto el proceso de difusión sin restringir que se deriva a partir de la ecuación (2.16) como los ocho modelos restringidos (casos particulares del anterior) que se obtienen a partir de las restricciones realizadas sobre los parámetros de este modelo.

Los contrastes χ^2 de bondad de ajuste indican que los modelos de Brennan and Schwartz (1980), CIR (1985a) y Vasicek (1977) presentan los valores más pequeños de la función objetivo que se pretendía minimizar. El menor valor corresponde al modelo de Brennan and Schwartz (1980) (en el que se supone el valor más alto para el

parámetro τ). Estos tres modelos tienen un valor χ^2 inferior a 0.8 y en ellos se restringe solamente un parámetro, τ . Como no se restringe el valor de los parámetros a and b , todos estos modelos presentan reversión a la media.

Los modelos de Dothan (1978) y CIR (1980), (en los que los parámetros a and b son nulos), se ajustan peor a los datos pero ninguno puede rechazarse a un 90% de nivel de confianza. Los modelos de Black and Scholes (1973) y de Merton (1973) tienen valores χ^2 superiores a 5 y pueden rechazarse al 90% de nivel de confianza. El modelo de Cox (1975), en el que se anula el parámetro a , puede rechazarse al 95% de nivel de confianza.

Notése que los modelos que implican reversión a la media tienen los valores χ^2 más pequeños. Por otro lado, los modelos que suponen que los parámetros a y/o b son nulos - es decir, aquellos modelos que implican que los tipos de interés no revierten a la media - tienen altos valores de χ^2 y, por tanto, no son aceptables.

A partir de los parámetros estimados en el modelo sin restringir, que son muy similares a los obtenidos en el modelo de Brennan and Schwartz (1980), se deduce que los parámetros a y b son diferentes de cero y, por tanto, existe evidencia de reversión a la media en los tipos de interés. Otra característica del modelo no restringido es que el valor estimado para el parámetro τ es 0.96. Por tanto, la volatilidad condicional del proceso es muy sensible al nivel de los tipos de interés. Dicha volatilidad es superior a la que se supone en los modelos más empleados como el de Vasicek (1977) o el de CIR (1985a).

Para obtener más información sobre el comportamiento de los distintos modelos de difusión pura, comparamos su poder predictivo (dentro de la muestra) con respecto al nivel y a la volatilidad de los tipos de interés.

Primero, utilizamos el valor ajustado de la ecuación (2.17) para hallar la serie

temporal de los cambios condicionales esperados en los tipos de interés y de las varianzas condicionales para el modelo sin restringir y para los ocho modelos restringidos.

A continuación, calculamos los estadísticos R_j^2 , $j = 1, 2$. Estos valores aparecen en las dos últimas columnas de la Tabla IV y muestran (para cada modelo) la proporción de la variación total en los cambios de los tipos de interés ex-post y en el cuadrado de los cambios de los tipos de interés que puede explicarse mediante los cambios condicionales esperados en los tipos de interés y las medidas de volatilidad condicional, respectivamente.

El valor R_1^2 es la medida que se relaciona con los cambios en los tipos de interés observados. El modelo sin restringir y el modelo de Brennan and Schwartz (1980) son los que tienen mayor poder explicativo y les siguen el modelo de CIR (1985a) y el de Vasicek (1977). El resto de modelos no tiene poder explicativo.

En el caso del estadístico R_2^2 , que mide el grado de poder explicativo del modelo con respecto a la volatilidad de los cambios en los tipos de interés, el valor más alto corresponde (otra vez) al modelo sin restringir y al modelo de Brennan and Schwartz (1980), seguidos por los modelos de CIR (1985a) y de Cox (1975).

Por tanto, estas dos medidas, que indican el poder predictivo de cada uno de los modelos, ordenan los diferentes modelos de modo similar a la clasificación que se obtenía cuando se estimaban los parámetros de los modelos de difusión pura. Dados estos resultados, seleccionamos el proceso de Brennan and Schwartz (1980) como el modelo más adecuado para reflejar la parte de difusión pura del tipo de interés del mercado interbancario.

2.5.2 Modelización de los Saltos

Una vez estimados los parámetros de los modelos de difusión pura, utilizamos estos resultados para averiguar la localización de los saltos. Tras la aplicación del procedimiento econométrico que se ha descrito en la Sección 2.3, encontramos 77 saltos en nuestra muestra. En la Figura 2.2 se representa gráficamente la serie temporal de los tipos de interés junto con la localización de estos saltos. Los estadísticos descriptivos de los saltos se incluyen en la Tabla V.

El tamaño medio del salto es de 7 puntos básicos mientras la volatilidad de dichos saltos (medida por su desviación típica) es de unos 140 puntos básicos. La frecuencia de llegada de los saltos es del 5.02% y, por tanto, hay aproximadamente un salto por mes.

La distribución del tamaño de los saltos se muestra en las Figuras 2.3 y 2.4. Si separamos los saltos según su signo, hay 37 saltos positivos mientras los restantes 40 son negativos. Los saltos negativos tienen un valor medio de 100 puntos básicos y la media de los saltos positivos es de 120 puntos básicos. La distribución de los saltos negativos tiene menos varianza que la distribución de los saltos positivos.

Una vez que se han localizado los saltos, se puede incluir esta información en nuestro modelo por medio de variables dicotómicas. Por tanto, pasamos a realizar la estimación de los modelos descritos en las ecuaciones (2.25)-(2.26) y (2.27)-(2.28).

El primero de estos modelos incluye una variable dicotómica que indica el instante en el que se produce un salto:

$$\begin{aligned} r_t - r_{t-1} &= a + br_{t-1} + dD_t + \varepsilon_t \\ E(\varepsilon_t) &= 0, \quad E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 r_{t-1}^{2\tau} \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde

$$D_t = \begin{cases} 1 & \text{si hay salto en el instante } t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.26)$$

El segundo modelo incluye dos variables dicotómicas que reflejan los instantes en los que se encuentran los saltos positivos y negativos:

$$\begin{aligned} r_t - r_{t-1} &= a + br_{t-1} + d^+ D_t^+ + d^- D_t^- + \varepsilon_t \\ E(\varepsilon_t) &= 0, \quad E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 r_{t-1}^{2\tau} \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde

$$\begin{aligned} D_t^+ &= \begin{cases} 1 & \text{si hay un salto positivo en el instante } t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ D_t^- &= \begin{cases} 1 & \text{si hay un salto negativo en el instante } t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Los parámetros estimados para los dos modelos Brennan-Schwartz con saltos se incluyen en la Tabla VI.

Los coeficientes a y b son significativamente distintos de cero lo cual indica la presencia de reversión a la media en nuestra muestra, incluso después de tener en cuenta los saltos. El coeficiente asociado a la variable dicotómica (que refleja los instantes donde se produce un salto) no es significativamente diferente de cero. Cuando distinguimos entre saltos positivos y negativos, los coeficientes asociados a las variables dicotómicas sí son estadísticamente significativos.

El ajuste del modelo con saltos es similar al del modelo sin saltos según refleja el valor del coeficiente R^2 . Sin embargo, cuando se incluyen las variables que distinguen entre saltos positivos y negativos, el grado de ajuste mejora substancialmente. Por tanto, se concluye que, al tener en cuenta la presencia de un proceso con saltos, diferenciando sus signos, el poder explicativo del modelo se incrementa.

2.6 Intervenciones de las Autoridades Monetarias

En esta sección se investiga en qué medida las intervenciones de la Autoridad Monetaria (Banco de España) son responsables de, al menos, parte de los saltos que se han localizado en la evolución de los tipos de interés. El Banco de España (BE) utiliza un tipo de interés “objetivo” (Tipo de Intervención, TI de aquí en adelante) en transacciones de mercado abierto. Periódicamente, el BE realiza intervenciones en el mercado interbancario, prestando o pidiendo prestado dinero al tipo de interés TI. Los datos correspondientes al TI fueron obtenidos gracias al Departamento de Investigación del Banco de España.

El tipo de interés a corto plazo tiende a seguir al TI de modo bastante aproximado tal como reflejan los resultados incluidos en la Tabla VII. En esta tabla se reflejan los resultados de la regresión del tipo de interés a corto plazo sobre el tipo de intervención. Esta regresión está corregida por autocorrelación de primer orden (coeficiente ϕ) y se realiza sobre el valor contemporáneo y el retardado un período del tipo de intervención. Los errores estándar robustos se calculan mediante el estimador de la matriz de varianzas-covarianzas de Newey-West.

La regresión del tipo de interés a corto plazo sobre el TI (sin retardar) da resultados altamente significativos. También el TI retardado un período es significativo. Con ello, se refleja el hecho de que el BE establece el TI después de que comience la sesión en el mercado interbancario. Los resultados de la Tabla VII sugieren que el TI explica alrededor del 50% de la variación total del tipo de interés a corto.

Comparamos los instantes en que cambia el tipo de interés TI que establece el BE con los momentos en que, según el proceso de difusión con saltos, ocurre un salto. Si ambos ocurren simultáneamente, suponemos que el salto es causado por la intervención del BE. Hay un total de 77 saltos en el tipo de interés mientras el tipo de intervención



del BE cambia en 160 días. Los saltos y los cambios en el tipo de intervención coinciden en 22 ocasiones.

Los estadísticos descriptivos de los saltos y de los cambios ocurridos en el tipo de intervención en estos 22 días se muestran en la Tabla VIII. El tamaño medio del salto es cercano a cero y la volatilidad de estos saltos, según refleja su desviación típica, es de unos 160 puntos básicos. Por tanto, este conjunto de 22 saltos es más volátil que el conjunto total, formado por los 77 saltos que hemos detectado. Al igual que lo ocurrido en el global de los saltos, los saltos de mayor tamaño corresponden a los últimos veinte meses del período muestral con el que se ha trabajado.

En estos 22 días en que coinciden el salto y la intervención del BE, hay 10 saltos positivos y 12 negativos. Por tanto, en este conjunto restringido de saltos, la proporción de saltos positivos y negativos es similar a la que se ha encontrado en el total de saltos. El tamaño medio, en este subconjunto de saltos, es superior al encontrado en la muestra completa y, similarmente a lo que ocurría en el conjunto total de saltos, el valor medio de los saltos positivos es mayor que el (valor absoluto de) valor medio de los saltos negativos, siendo ambos superiores a 110 puntos básicos.

Construimos una ventana de 5 días alrededor del instante en el que cambia el tipo de intervención para comprobar si el mercado precede (o sigue) los movimientos del BE. Es decir, si el cambio en el tipo de intervención es posterior a un salto en el mercado, esto se interpreta como anticipación. Los resultados se representan gráficamente en la Figura 2.5.

En esta figura, el eje x representa el número de días en que la intervención del BE precede al salto (un valor negativo indica el número de días en que un salto precede a un cambio en el tipo de intervención). Los mayores picos de esta figura corresponden al valor central (número de días en que coinciden una intervención del BE y un salto) y

a los valores extremos (días en que una intervención del BE y un salto están separados por cinco días). Otro rasgo interesante de esta figura es su simetría.

Como consecuencia, se puede señalar que algunos, aunque no todos, saltos están relacionados con las intervenciones de la autoridad monetaria aunque quizás existen otros factores (por ejemplo, shocks en los tipos de cambio) que deberían tenerse en cuenta si queremos explicar las causas que motivan la presencia de saltos en nuestra muestra. En conclusión, parece que nuestro análisis indica que alrededor de una tercera parte de los saltos coinciden con las intervenciones del BE. Sin embargo, no está muy claro si el mercado se anticipa o sigue de modo sistemático a los movimientos del BE.

2.7 Valoración de Activos Derivados

Con propósitos de ilustración, aplicamos el algoritmo que se ha descrito en la sección 2.2 para valorar bonos con vencimientos de 3 meses y 1 año así como opciones a 3 meses sobre un bono al descuento a un año. Los valores considerados para el tipo de interés son $r = 0.08, 0.09, 0.10, 0.11, 0.12^2$.

Se valoran los bonos y las opciones, de compra y de venta, bajo los supuestos de los modelos de difusión y de difusión con saltos. Valoramos opciones europeas y americanas. Los parámetros que se utilizan son los siguientes:

$$\begin{aligned} a &= 0.149, & b &= -0.008, & \sigma &= 0.0088, & \lambda(\cdot) &= 0 \\ \mu &= 0, & \gamma &= 1.392, & h &= 12.3, & \tau &= 1 \end{aligned} \quad (2.29)$$

²Se han realizado muchas otras simulaciones de valoración de bonos y opciones. Así, se han valorado bonos con vencimiento de 1 a 10 años y opciones a 3, 6 y 9 meses sobre bonos con distintos vencimientos. Los detalles sobre estos resultados se encuentran a disposición del lector.

El precio de ejercicio es 0.95. Los parámetros en (2.29) son los correspondientes al modelo Brennan-Schwartz con saltos que se ha estimado para el tipo de interés.

La Tabla IX contiene los resultados que se han obtenido. Puesto que la valoración de opciones de compra europeas coincide con la de opciones de compra americanas, reflejamos ambos precios conjuntamente.

Hay varios resultados interesantes. El precio del bono a un año es mayor bajo el modelo de difusión con saltos. Este es el bien conocido efecto “asimétrico”, originado por la asimetría de la función de valoración de bonos. Esta característica de precios altos se incrementa con la duración del bono. También, se incrementa el precio de las opciones debido a que los saltos inducen “colas pesadas” en la distribución de los precios de los bonos. Este es el efecto “valor tiempo”.

En el caso de las opciones de compra, ambos efectos, de asimetría y valor tiempo, hacen que se incremente el precio de la opción. Sin embargo, en el caso de las opciones de venta, el efecto asimétrico reduce el valor de la opción mientras el efecto “valor tiempo” hace que este precio descienda. Como consecuencia, estas dos fuerzas hacen que el valor de la opción, bajo el modelo de difusión con saltos, esté indeterminado con respecto al valor que se obtiene con el modelo de difusión pura.

2.8 Conclusiones

Este capítulo ha presentado un modelo de un único factor para la estructura temporal de los tipos de interés del mercado interbancario cuando el tipo de interés instantáneo sigue un proceso de difusión con saltos. El análisis empírico que se ha realizado sugiere que el modelo de difusión con saltos explica mejor la evolución de los tipos de interés que el modelo de difusión pura. Se han explorado algunas implicaciones económicas

de la actividad de saltos mediante un análisis de los cambios en el tipo de intervención del Banco de España. Como resultado, se concluye que algunos, aunque no todos, de los saltos se relacionan con las intervenciones de la autoridad monetaria.

Además, se han valorado activos que dependen de los tipos de interés (bonos y opciones) tanto de tipo europeo como americano mediante un método que se basa en diferencias finitas, el cual nos permite trabajar con las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que surgen al partir de un modelo de difusión con saltos. La existencia de saltos afecta en gran medida a la valoración de bonos y de opciones de compra y se comprueba que se produce una infravaloración si no se tienen en cuenta los saltos. Sin embargo, la valoración de opciones de venta presenta ciertas indeterminaciones.

Apéndice de Tablas y Representaciones Gráficas

Tabla I. Tipos de Interés: Estadísticos Descriptivos

Esta tabla incluye los estadísticos descriptivos del tipo de interés “overnight” del mercado interbancario español (r) y de la primera diferencia de dicho tipo de interés (dr). La media aritmética, desviación típica, los coeficientes de asimetría y el exceso de curtosis se calculan desde Enero de 1988 hasta Marzo de 1994. Los datos están en términos porcentuales.

Variables	Número de observaciones	Media	Desviación Típica	Coefficiente de Asimetría	Exceso de Curtosis
r_t	1534	13.003	1.8363	-0.424	-0.496
$r_t - r_{t-1}$	1533	-0.0035	0.3368	3.0023	98.507

Tabla II. Tipos de interés: estructura de Autocorrelación

En esta tabla se incluyen los coeficientes de autocorrelación de orden j , denotados por ρ_j , del tipo de interés “overnight” del mercado interbancario español (r) y de los cambios en dicho tipo de interés (dr). Estos coeficientes se calculan desde Enero de 1988 hasta Marzo de 1994. N denota el número de observaciones. Los datos están en términos porcentuales.

Variables	N	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6
r_t	1534	0.981	0.965	0.954	0.945	0.936	0.929
$r_t - r_{t-1}$	1533	-0.113	-0.114	-0.067	-0.009	-0.013	0.052

Tabla III. Procesos de Difusión Pura

En esta tabla se incluyen los diferentes modelos de difusión pura que reflejan la dinámica de los tipos de interés. Estos procesos se obtienen imponiendo restricciones sobre los parámetros a , b y τ en el sistema de ecuaciones

$$r_t - r_{t-1} = a + br_{t-1} + \varepsilon_t \quad E[\varepsilon_t] = 0 \quad E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2 r_{t-1}^{2\tau}$$

Modelo	a	b	τ
Merton (1973)	—	0	0
Vasicek (1977)	—	—	0
CIR (1985a)	—	—	0.5
Dothan (1978)	0	0	1
Black and Scholes (1973)	0	—	1
Brennan and Schwartz (1980)	—	—	1
CIR (1980)	0	0	1.5
Cox (1975)	0	—	—
Sin restricciones	—	—	—

Tabla IV. Parámetros Estimados para los Modelos de Difusión

Esta tabla incluye los parámetros estimados (con t -valores entre paréntesis) para los diferentes modelos en tiempo continuo que reflejan la dinámica de los tipos de interés. Los valores obtenidos, mediante el Método Generalizado de Momentos, para la función objetivo, con los p -valores en paréntesis y sus grados de libertad, también se incluyen en esta tabla. El período muestral comienza en Enero de 1988 y termina en Marzo de 1994. Los estadísticos R_j^2 representan la proporción de la variación total en los cambios de los tipos de interés ($j = 1$) y de su volatilidad ($j = 2$) que es explicada por los valores predichos por cada modelo. Los parámetros son estimados mediante el Método Generalizado de Momentos aplicado a la estimación de la ecuación (2.17)

Modelo	a	b	σ^2	τ
Merton (1973)	0.00119 (0.181)	0	0.06304 (2.98)	0
Vasicek (1977)	0.1721 (2.15)	-0.0132 (-2.15)	0.1113 (3.5)	0
CIR (1985a)	0.1834 (2.26)	-0.0145 (-2.28)	0.000001 (5.6)	0.5
Dothan (1978)	0	0	0.000452 (6.43)	1
Black and Scholes (1973)	0	-0.00008 (-0.18)	0.00044 (5.8)	1
Brennan and Schwartz (1980)	0.1874 (2.3)	-0.0146 (-2.3)	0.000657 (3.72)	1
CIR (1980)	0	0	0.00957 (5.04)	1.5
Cox (1975)	0	-0.0001 (-0.17)	0.0016 (0.09)	0.85 (0.73)
Sin restricciones	0.1874 (2.2)	-0.014 (-2.3)	0.000911 (3.4)	0.96 (2.9)

Tabla IV. Parámetros Estimados para los Modelos de Difusión (cont.)

Esta tabla incluye los parámetros estimados (con t -valores entre paréntesis) para los diferentes modelos en tiempo continuo que reflejan la dinámica de los tipos de interés. Los valores obtenidos, mediante el Método Generalizado de Momentos, para la función objetivo, con los p -valores en paréntesis y sus grados de libertad, también se incluyen en esta tabla. El período muestral comienza en Enero de 1988 y termina en Marzo de 1994. Los estadísticos R_j^2 representan la proporción de la variación total en los cambios de los tipos de interés ($j = 1$) y de su volatilidad ($j = 2$) que es explicada por los valores predichos por cada modelo. Los parámetros son estimados mediante el Método Generalizado de Momentos aplicado a la estimación de la ecuación (2.17)

Modelo	χ^2	g.l.	R_1^2	R_2^2
Merton (1973)	5.30 (0.0706)	2	-0.0002	0
Vasicek (1977)	0.7911 (0.3737)	1	0.0062	0
CIR (1985a)	0.3161 (0.5739)	1	0.0063	0.0009
Dothan (1978)	5.23 (0.1557)	3	-0.0001	0.0006
Black and Scholes (1973)	5.216 (0.0736)	2	0.0	0.0007
Brennan and Schwartz (1980)	0.0068 (0.9342)	1	0.0064	0.0014
CIR (1980)	5.308 (0.1506)	3	0.0	0.0006
Cox (1975)	5.213 (0.0224)	1	0.0	0.0009
Sin restricciones	—	—	0.0064	0.014

Tabla V. Tamaño de los Saltos: Estadísticos Descriptivos

Esta tabla incluye los estadísticos descriptivos de los saltos localizados en las series de tipos de interés desde Enero de 1988 hasta Marzo de 1994. Se incluyen los estadísticos de las siguientes variables: $JUMP_t$, que denota el tamaño de los saltos, $JUMPPOS_t$, que incluye el tamaño de los saltos positivos y $JUMPNEG_t$, que incluye el tamaño de los saltos negativos.

Variables	Número de saltos	Media	Desviación Típica	Coefficiente de Asimetría	Exceso de Curtosis
$JUMP_t$	77	0.0737	1.39255	0.7515	3.90682
$JUMPPOS_t$	37	1.2313	0.985046	3.4132	14.3367
$JUMPNEG_t$	40	-1.0034	0.659994	-3.5990	16.5665

Tabla VI. Parámetros Estimados para los Modelos de Difusión con Saltos

Esta tabla incluye los parámetros estimados (con t -valores entre paréntesis) para los dos modelos de difusión con saltos estimados para los tipos de interés del mercado interbancario español. El período muestral abarca desde Enero de 1988 hasta Marzo de 1994. Los parámetros son estimados mediante el Método Generalizado de Momentos aplicado a las ecuaciones (2.25)-(2.26) y (2.27)-(2.28).

Modelo	a	b	σ^2	d	d^+	d^-	R^2
(2.25)-(2.26)	0.1490 (2.46)	-0.0082 (-1.77)	0.0088 (-43.74)	0.0113 (0.28)	—	—	0.0064
(2.27)-(2.28)	0.1248 (3.17)	-0.0070 (-2.33)	0.0030 (-46.27)	—	1.1533 (31.19)	-1.08 (-29.84)	0.5441

Tabla VII. El Tipo de Interés a Corto Plazo y el Tipo de Intervención

Esta tabla incluye los resultados de la regresión que analiza la relación entre el tipo de interés a corto plazo y el tipo de intervención del Banco de España. El período muestral empieza en Enero de 1988 y termina en Marzo de 1994. Los resultados de la regresión son corregidos de autocorrelación de primer orden (coeficiente ϕ) y se utilizan el valor actual y el del día anterior del tipo de intervención. Los errores estándar robustos se calculan utilizando el procedimiento de Newey-West.

Variabes	Constante	TI(t)	TI(t-1)	ϕ	R^2 Ajustado	D-W[-4pt]
Coficiente	-0.122	0.882	0.146	0.827	0.472	2.10
t-estad.	-0.301	15.53	2.57	53.19		

Tabla VIII. Coincidencia entre los Saltos y las Intervenciones del Banco de España. Tamaño de los Saltos: Estadísticos Descriptivos

Esta tabla incluye los estadísticos descriptivos de los saltos que ocurren simultáneamente con los cambios en el tipo de intervención. El período muestral comienza en Enero de 1988 y termina en Marzo de 1994. Se incluyen los estadísticos de las siguientes variables: $JUMPBS_t$, que denota el tamaño de los saltos, $JUMPPSBS_t$, que incluye el tamaño de los saltos positivos y $JUMPNGBS_t$, que incluye el tamaño de los saltos negativos.

Variabes	Número de saltos	Media	Desviación Típica	Coficiente de Asimetría	Exceso de Curtosis
$JUMPBS_t$	22	0.0111	1.6008	-0.4879	1.6869
$JUMPPSBS_t$	10	1.3962	0.8150	1.4609	2.0053
$JUMPNGBS_t$	12	-1.1431	1.0729	-2.9163	9.0796

Tabla IX. Valoración de Bonos y Opciones mediante el método FIFD

Esta tabla contiene el precio de bonos cupón-cero con vencimientos de 3 meses y 1 año para diferentes valores del tipo de interés a corto plazo. El valor nominal de estos bonos es igual a 1.0 y los valores considerados para el tipo de interés son $r = 0.08, 0.09, 0.10, 0.11, 0.12$. Tenemos $h = 12.3$ saltos por año. Los saltos siguen una distribución $N(0, 1.392)$. El resto de los parámetros es $a = 0.149$, $b = -0.008$, $\sigma = 0.0088$, $\lambda(.) = 0$. Asimismo, se calcula el precio de una opción a 3 meses sobre un bono al descuento a un año. El precio de ejercicio es igual a 0.95. Los precios son idénticos para opciones de compra europeas y americanas.

Tipo de interés r	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12
Procesos de Difusión					
Bono (3 meses)	0.9791	0.9779	0.9756	0.9748	0.9722
Bono (1 año)	0.9295	0.9232	0.9176	0.9108	0.9042
Call (Europea)	0.0087	0.0051	0.0022	0.0011	0.0003
Put (Europea)	0.0021	0.0051	0.0087	0.0116	0.0131
Put (Americana)	0.0097	0.0176	0.0192	0.0271	0.0342
Procesos de Difusión con Saltos					
Bono (3 meses)	0.9794	0.9782	0.9758	0.9749	0.9725
Bono (1 año)	0.9297	0.9234	0.9177	0.9110	0.9046
Call (Europea)	0.0091	0.0054	0.0026	0.0015	0.0008
Put (Europea)	0.0021	0.0051	0.0087	0.0116	0.0131
Put (Americana)	0.0097	0.0176	0.0190	0.0271	0.0340

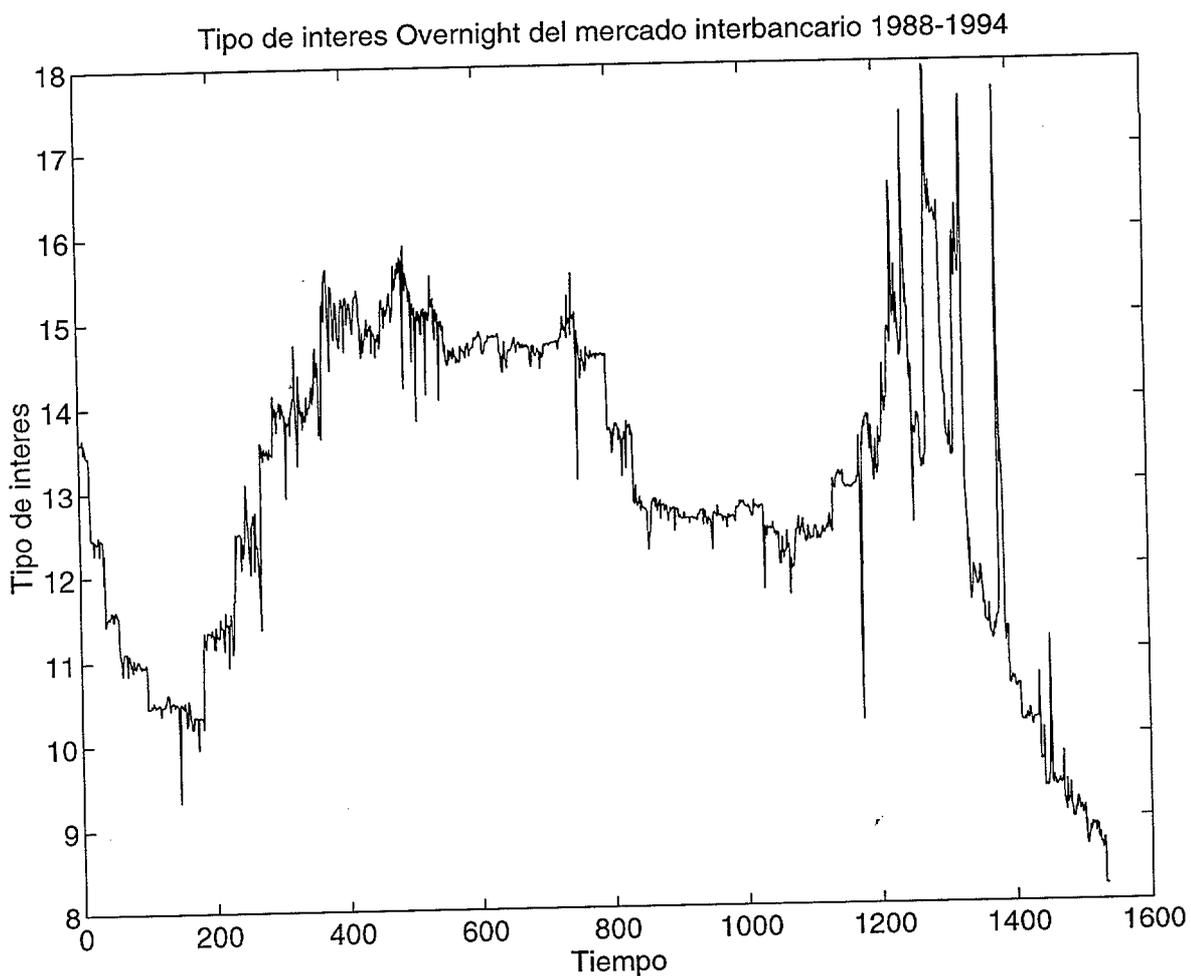


Figura 2.1: Representación gráfica del tipo de interés “overnight” del mercado interbancario español.

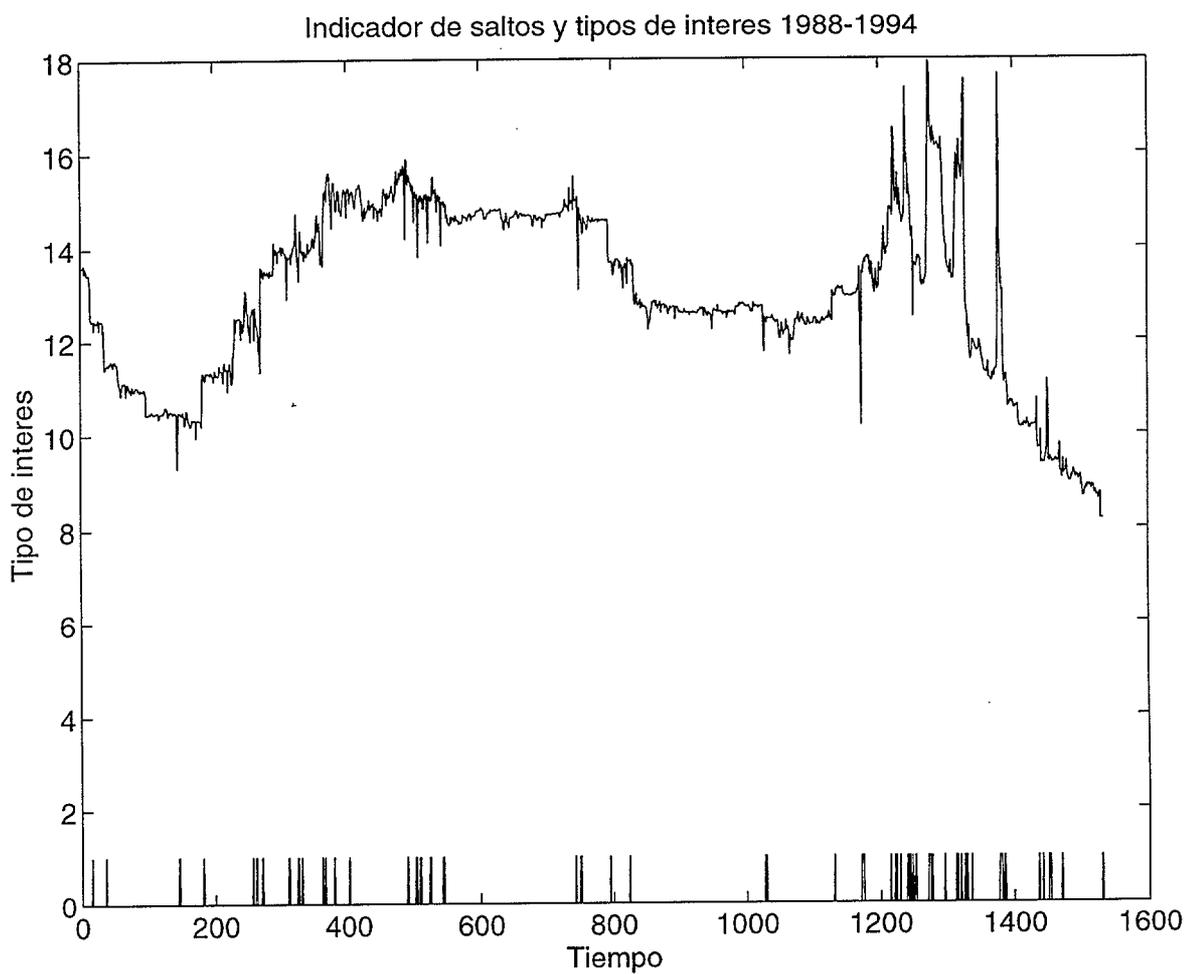


Figura 2.2: Representación gráfica del tipo de interés “overnight” del mercado interbancario español e indicador de saltos localizados en dicha variable.

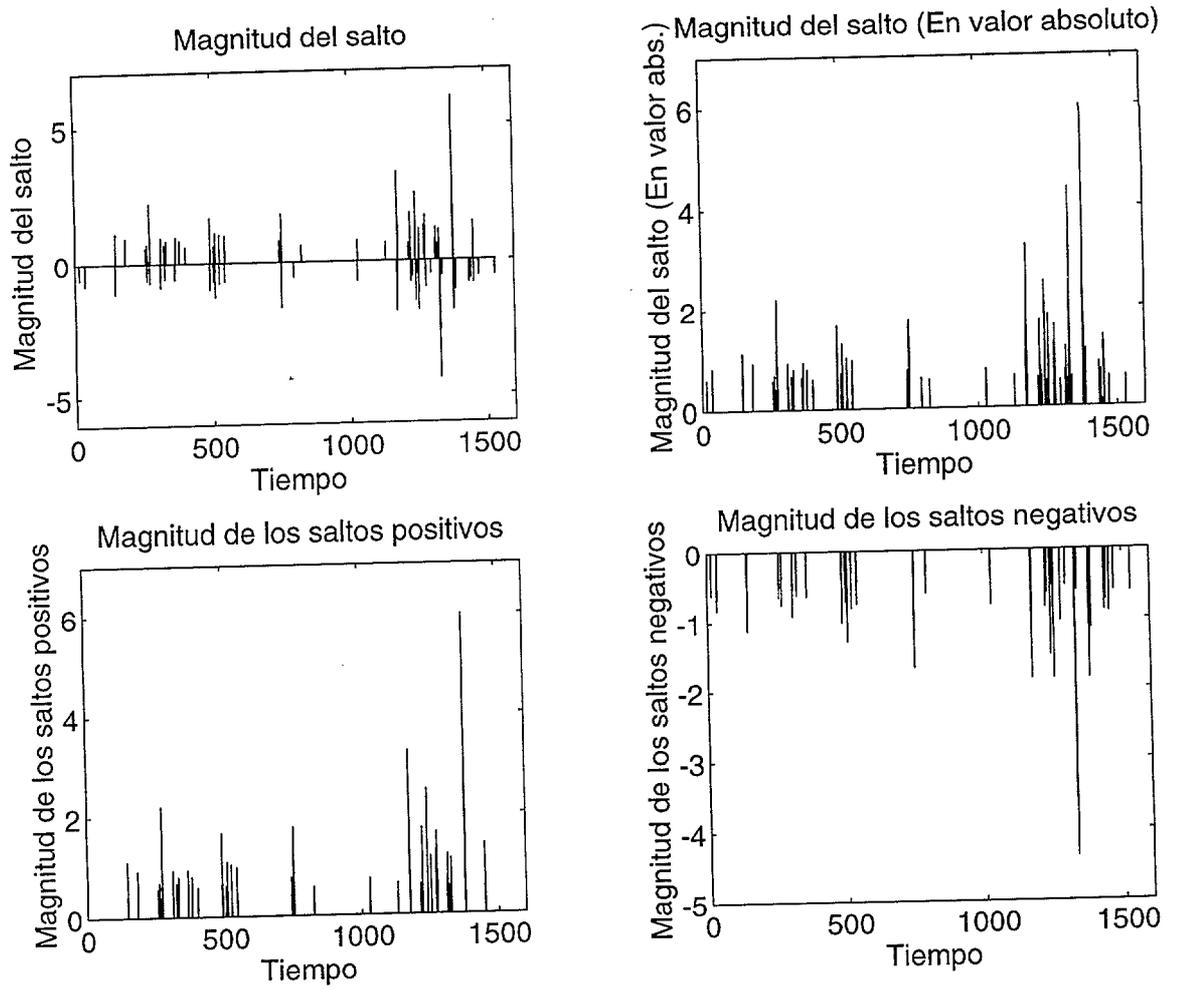


Figura 2.3: Representación gráfica del tamaño de los saltos localizados.

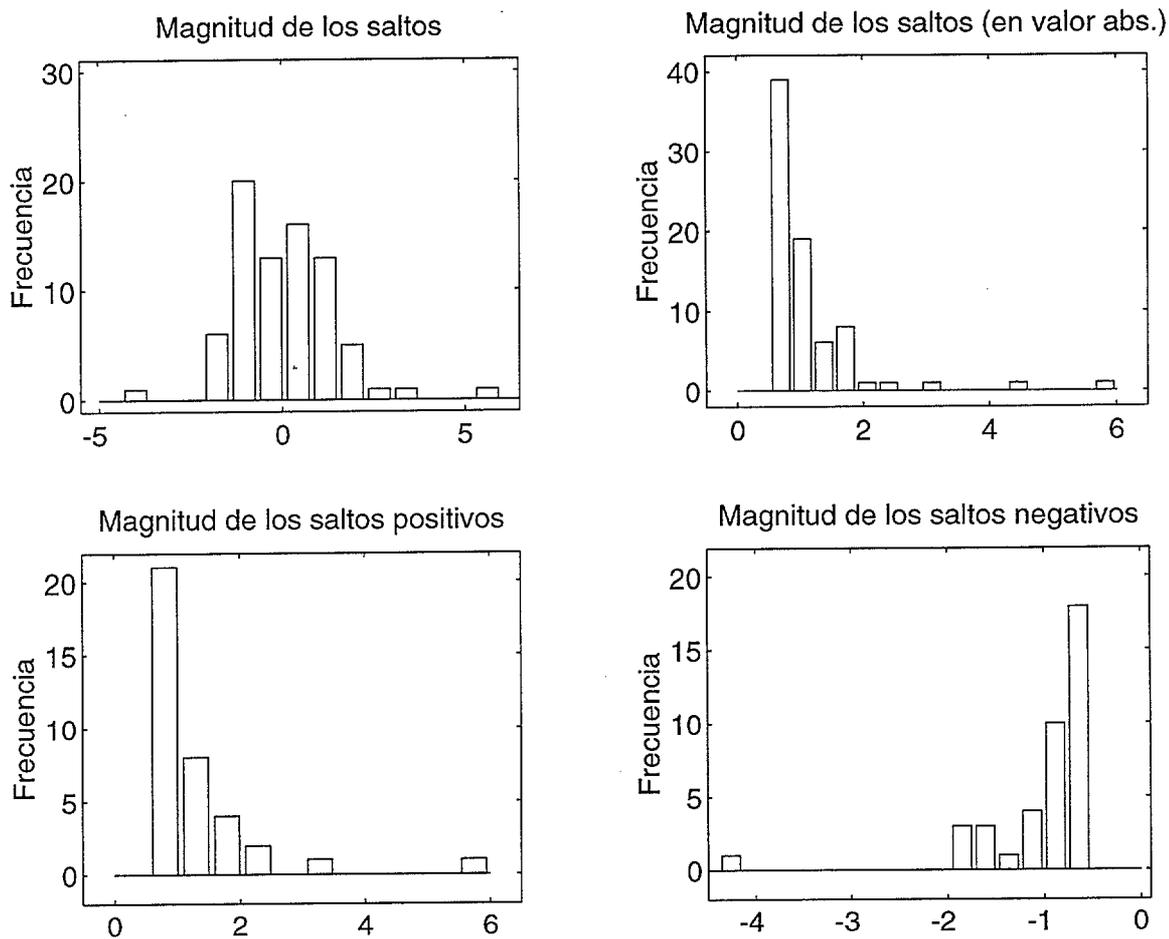


Figura 2.4: Distribución del tamaño de los saltos localizados.

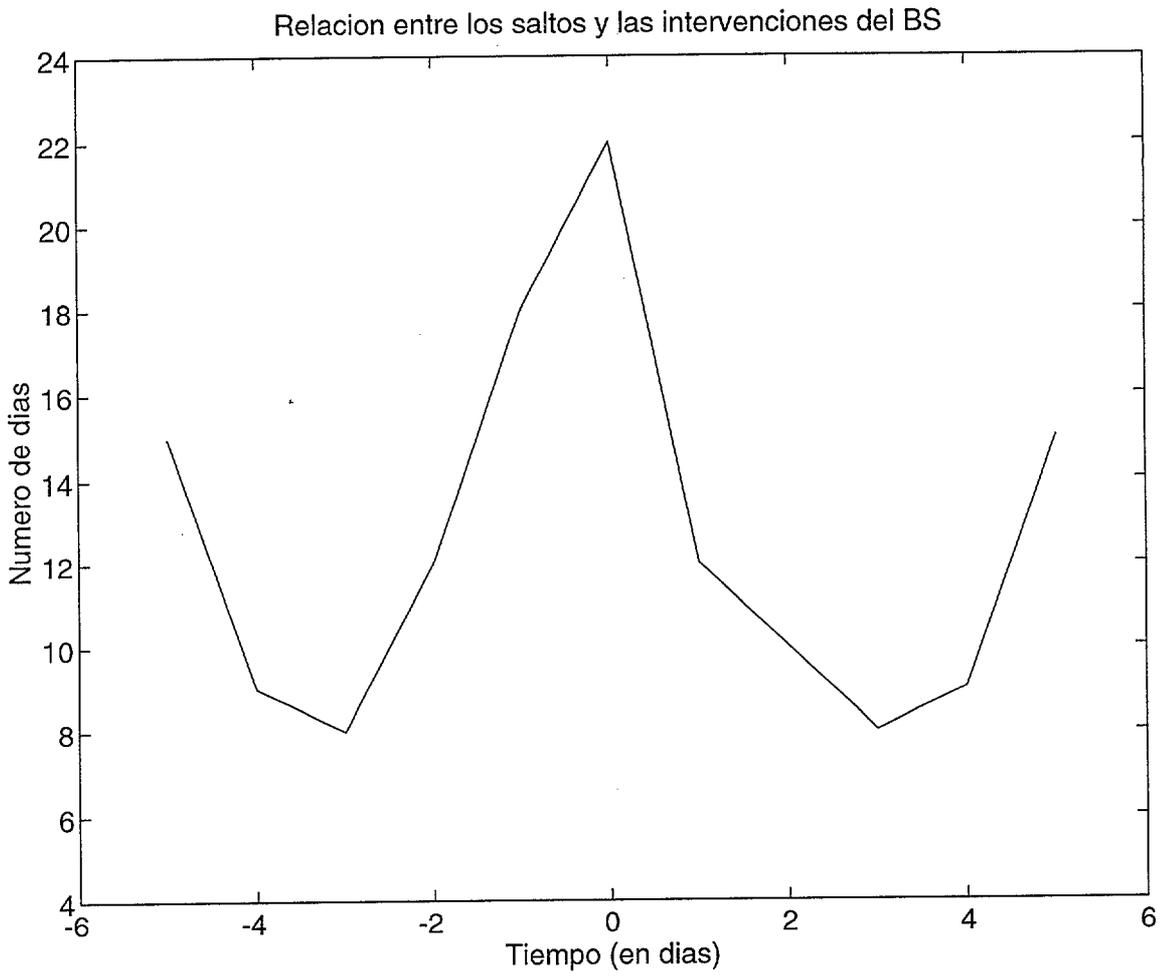


Figura 2.5: Representación gráfica de la relación entre los saltos localizados y las intervenciones del Banco de España.

Capítulo 3

Un modelo de dos factores con reversión a la media para la estructura temporal de los tipos de interés

3.1 Introducción

La estructura temporal de los tipos de interés para bonos al descuento libres de riesgo ha sido un tema analizado en multitud de artículos. Como primera aproximación a este problema se han desarrollado modelos basados en un factor. Este tipo de modelos supone que los movimientos de la curva de tipos de interés están determinados por una única variable de estado. Generalmente, esta variable de estado es el tipo de interés instantáneo libre de riesgo y suele modelizarse como un proceso de difusión. Como ejemplos de este tipo de modelo tenemos Vasicek (1977), Dothan (1978) y CIR (1985b). Una comparación empírica del comportamiento de estos modelos puede verse en Chan *et al* (1992).

Si trabajamos con este tipo de modelos, las rentabilidades instantáneas de una serie de bonos que solamente difieren en su vencimientos están perfectamente correlacionados. Más aún, puesto que la variable de estado sigue un proceso de Markov, la evolución futura de los tipos de interés puede deducirse a partir del valor actual del

tipo de interés instantáneo. Aunque este tipo de modelos suele ser muy tratable desde un punto de vista analítico, una variable de estado puede ser no ser suficiente para modelizar correctamente la dirección de los cambios que la curva de tipos de interés puede presentar en futuros períodos.

Otros trabajos estudian modelos basados en un único factor al cual añaden una componente discreta como indicativa de saltos en la evolución de los tipos de interés. Así, Ahn and Tomphson (1988) extienden el modelo CIR de modo que se permite la presencia de efectos discretos en los movimientos diarios de los tipos de interés. A continuación, estos autores desarrollan un modelo que permite la valoración de bonos. Das (1994a) es el primer estudio empírico de un modelo de difusión con saltos para los tipos de interés. El procedimiento de estimación, empleando datos semanales, le permite identificar los instantes en los que ocurren dichos saltos. Además, este autor estima la frecuencia de llegada de estos saltos, su tamaño y su signo así como los parámetros del proceso de difusión. En un artículo posterior, Das (1994b) analiza el papel de este modelo en el mercado de bonos permitiendo que la distribución de saltos estocásticos sea variable en el tiempo. Das and Foresi (1996) extienden el modelo de Vasicek (1977) mediante la introducción de saltos que afectan a los tipos de interés aunque no cambian la tendencia de estos tipos de interés. Finalmente, en el capítulo anterior, hemos establecido un modelo unifactorial con saltos que nos ha permitido estudiar la evolución temporal de los tipos de interés del mercado interbancario español así como la valoración de opciones sobre diversos activos derivados. Además, hemos examinado cualitativamente la posible relación entre las intervenciones de la Autoridad Monetaria y los saltos en tipos de interés diarios.

Los modelos multifactoriales, que surgen como un intento de a) evitar las características poco realistas relacionadas con los modelos de un único factor y b) explicar una mayor variedad de movimientos en la evolución temporal de los tipos de interés,

suponen la existencia de más de una variable de estado en la estructura temporal de los tipos de interés. Desde el punto de vista práctico, se suele restringir el número de factores a un máximo de dos. Así, por ejemplo, Richard (1978) y CIR (1985b) suponen que el precio de los bonos depende del tipo de interés (instantáneo) real que se espera a corto plazo, R , y de la tasa de inflación (anticipada) instantánea a corto plazo, π . Brennan and Schwartz (1979) emplean el tipo de interés instantáneo y el tipo de interés a largo plazo como variables de estado. Análogamente, Schaefer and Schwartz (1984) consideran un modelo que se basa en el tipo de interés a largo plazo (asociado a un bono perpetuo) y en el diferencial de tipos de interés (*spread*), diferencia entre el tipo de interés a largo plazo y el tipo de interés a corto plazo. HJM (1992) utilizan dos factores (que no especifican) que influyen sobre los tipos de interés a plazo. Estos dos factores pueden interpretarse como un factor de “largo plazo” (el cual afecta a todos los vencimientos de igual modo), y como un diferencial entre un factor de “corto plazo” y uno de “largo plazo” porque este segundo factor afecta más a los tipos de interés a corto plazo que a los tipos de interés a largo plazo. Finalmente, Longstaff and Schwartz (1992) desarrollan un modelo en el que las dos variables de estado que se consideran son el tipo de interés a corto plazo y su volatilidad. Ejemplos de modelos con dos factores y saltos se pueden encontrar en Naik and Lee (1995) y Das and Foresi (1996). Los primeros autores consideran cambios de régimen que influyen sobre la media de la rentabilidad de los bonos y sobre la volatilidad de los cambios de dichas rentabilidades. Las dos variables de estado son un indicador de régimen, con cambios discretos y la desviación del tipo de interés a corto con respecto al tipo de interés medio del régimen que se considera. Por otro lado, Das and Foresi (1996) desarrollan un modelo en el que los saltos cambian la tendencia central condicionada de los tipos de interés.

Recientemente, Chen (1996) ha propuesto un modelo con tres factores en el que los tipos de interés (a corto plazo) futuros dependen de: 1) el tipo de interés (a corto

plazo) actual, 2) la media a corto plazo de la anterior variable y 3) la volatilidad actual del tipo de interés a corto plazo. Estas tres variables de estado son modelizadas como procesos CIR y este autor deriva una fórmula analítica para el precio de diversos activos derivados. Aunque este tipo de modelos está aún en una fase preliminar, los primeros resultados parecen prometedores.

Este capítulo presenta un modelo de dos factores para el análisis y el estudio de la estructura temporal de los tipos de interés. Como hemos indicado anteriormente, la mayoría de los modelos unifactoriales utilizan el tipo de interés a corto plazo como la única variable de estado. Intentando una aproximación más realista, añadimos el tipo de interés a largo plazo como la segunda variable de estado que utilizaremos en nuestro modelo. Con ambos factores, podremos explicar no sólo los cambios en los tramos corto y largo de la curva de tipos sino también los movimientos intermedios que pueden darse en dicha curva utilizando la información que proporcionan los movimientos de sus valores extremos. Por tanto, éstas serán nuestras dos variables de estado. Brennan and Schwartz (1979) también han utilizado estos dos factores. Estos autores suponen que los tipos de interés a largo y corto plazo siguen un proceso Gauss-Markov. Con una base de datos canadiense, estiman los parámetros de los procesos estocásticos que siguen los tipos de interés y valoran una muestra de bonos.

En la línea de Schaefer and Schwartz (1984), redefinimos nuestras variables de estado y desarrollamos un modelo en el que suponemos que el precio de los bonos al descuento libres de riesgo viene determinado por el tiempo al vencimiento y por dos factores: el tipo de interés a largo plazo y el diferencial de tipos de interés (*spread*). Como la evidencia empírica sugiere que los tipos de interés presentan reversión a la media (los tipos de interés convergen a un valor a largo plazo), supondremos que cada factor sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck. Mediante condiciones de no arbitraje, derivamos una ecuación general para valorar bonos y obtenemos una expresión analítica

cerrada para el precio de bonos con diferentes vencimientos.

El desarrollo de este capítulo es como sigue. En la Sección 3.2 se obtiene la ecuación básica de valoración que debe verificar el precio de los bonos al descuento para cualquier vencimiento. En la Sección 3.3 se calcula la expresión analítica cerrada que indica el precio de un bono cualquiera que sea su vencimiento. Las implicaciones sobre las propiedades de la estructura temporal de los tipos de interés se analizan en la Sección 3.4. En la Sección 3.5 se deriva una expresión cerrada para el precio de activos derivados. Aplicamos esta fórmula para valorar opciones sobre bonos al descuento y opciones sobre carteras de bonos al descuento. Además, se calcula el precio de otras opciones más complejas. La Sección 3.6 describe las características básicas de la aplicación empírica en la que comparamos las propiedades de nuestro modelo con las de un modelo unifactorial. Finalmente, la Sección 3.7 resume las principales conclusiones de este capítulo. El apéndice final contiene todas las tablas y representaciones gráficas relacionadas con este capítulo.

3.2 La Ecuación de Valoración de Bonos

En esta sección, se deriva la ecuación diferencial en derivadas parciales que deben verificar los precios de los bonos con cualquier vencimiento. Esta ecuación expresa una relación de equilibrio entre las rentabilidades esperadas de una serie de bonos que difieren solamente en su vencimiento.

El principal supuesto que realizamos es que el precio, en el instante t , de un bono al descuento libre de riesgo que paga \$1 en el momento en que vence, T , depende exclusivamente de los valores actuales de un conjunto de variables de estado (X_i) y del tiempo que resta hasta el vencimiento, $\tau = T - t$. A partir de este supuesto, nuestro primer problema se relaciona con la selección de las variables de estado que

son relevantes para la determinación del precio de los diferentes bonos.

Una posible alternativa sería utilizar el tipo de interés (instantáneo) a corto plazo y el tipo de interés a largo plazo como variables de estado. De este modo, podemos explicar los movimientos intermedios de la curva de tipos mediante sus valores extremos, los correspondientes al mayor y al menor vencimiento. Aunque la mayoría de los estudios emplean como variable de estado el tipo de interés a corto plazo, realizamos una redefinición de variables similar a la que realizan Schaefer and Schwartz (1984) y elegimos como variables de estado el tipo de interés a largo plazo, que denotaremos por L , y el diferencial de tipos de interés (*spread*), denotado por s , que es igual a la diferencia entre el tipo de interés a corto plazo, r , y el tipo de interés a largo plazo.

Esta selección de variables de estado nos permite utilizar el supuesto de que ambas variables son ortogonales. La evidencia empírica que apoya este supuesto se puede consultar en Ayres and Barry (1980), Schaefer (1980) y Nelson and Schaefer (1983). Ayres and Barry (1980) proponen que la correlación entre los cambios de los tipos a largo plazo y los cambios en el diferencial de tipos de interés es cercana a cero y verifican empíricamente este supuesto utilizando datos de Salomon Brothers para el período comprendido entre Enero de 1956 y Agosto de 1978. Schaefer (1980) muestra que esta idea es consistente con los valores estimados por Brennan and Schwartz (1980). Finalmente, Nelson and Schaefer (1983) también han contrastado este supuesto utilizando datos del CRSP Government Bond Tape durante el período 1930-1979. El uso de variables ortogonales nos ayuda a simplificar el cálculo de la solución analítica de la ecuación fundamental que emplearemos para realizar la valoración de bonos.

Una vez que hemos elegido las variables de estado, suponemos que su dinámica a lo largo del tiempo viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

estocásticas:

$$\begin{cases} ds &= \beta_1(s, L)dt + \sigma_1(s, L)dw_1 \\ dL &= \beta_2(s, L)dt + \sigma_2(s, L)dw_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

donde t denota tiempo y donde dw_1 y dw_2 son procesos de Wiener con $E[dw_1] = E[dw_2] = 0$, $dw_1^2 = dw_2^2 = dt$, y (gracias a la ortogonalidad existente entre estas variables) $E[dw_1dw_2] = 0$. $\beta_1(\cdot)$ y $\beta_2(\cdot)$ son las tasas de cambio instantáneas esperadas en las variables de estado y $\sigma_1^2(\cdot)$ y $\sigma_2^2(\cdot)$ son las varianzas instantáneas de los cambios en estas dos variables.

Por tanto, estas dos variables siguen un proceso conjuntamente markoviano. Este supuesto implica que los valores esperados en el futuro de estas variables dependen exclusivamente de los valores que tengan en la actualidad.

Sea $P(s, L, t, T) \equiv P(s, L, \tau)$ el precio, en el instante t , de un bono al descuento libre de riesgo que paga \$1 en el momento de su vencimiento, $T = t + \tau$. El cambio porcentual instantáneo en el precio de este bono viene dado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dP(s, L, t, T)}{P(s, L, t, T)} = \mu(s, L, t, T)dt + s_1(s, L, t, T)dw_1 + s_2(s, L, t, T)dw_2 \quad (3.2)$$

donde $\mu(s, L, t, T)$ es la rentabilidad esperada del bono y donde $s_1(s, L, t, T)$ y $s_2(s, L, t, T)$ son las variaciones no esperadas en las rentabilidades de los bonos y que son debidas a los cambios aleatorios de las variables de estado.

Aplicando el Lema de Itô y la ecuación (3.1), se obtiene que

$$\begin{aligned} dP(\cdot) &= P_s ds + P_L dL + P_t dt + \frac{1}{2}P_{ss}(ds)^2 + \frac{1}{2}P_{LL}(dL)^2 \\ &= \left[P_s \beta_1(\cdot) + P_L \beta_2(\cdot) + P_t + \frac{1}{2}\sigma_1^2(\cdot)P_{ss} + \frac{1}{2}\sigma_2^2(\cdot)P_{LL} \right] dt \\ &\quad + \sigma_1(\cdot)P_s dw_1 + \sigma_2(\cdot)P_L dw_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde

$$P_s = \frac{\partial P(\cdot)}{\partial s}, \quad P_L = \frac{\partial P(\cdot)}{\partial L}, \quad P_{ss} = \frac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial s^2}, \quad P_{LL} = \frac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial L^2}$$

Igualando (3.2) y (3.3), se obtiene

$$\mu(s, L, t, T) = \frac{1}{P} \left[P_s \beta_1(\cdot) + P_L \beta_2(\cdot) + P_t + \frac{1}{2} \sigma_1^2(\cdot) P_{ss} + \frac{1}{2} \sigma_2^2(\cdot) P_{LL} \right] \quad (3.4)$$

$$s_1(s, L, t, T) = \sigma_1(\cdot) \frac{P_s}{P}, \quad s_2(s, L, t, T) = \sigma_2(\cdot) \frac{P_L}{P} \quad (3.5)$$

Puesto que hay dos variables estocásticas que dirigen el precio de todos los bonos, podemos construir una cartera de cobertura, formada por tres bonos con distintos vencimientos, que carezca (instantáneamente) de riesgo. Por tanto, consideramos la estrategia de inversión que consiste en una cartera V formada por tres bonos al descuento con vencimientos (arbitrarios) T_1, T_2 y T_3 . Las proporciones que invertimos en cada bono son z_1, z_2 y z_3 , respectivamente. Así, la tasa de rentabilidad de esta cartera viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{dV(s, L, t, T)}{V(s, L, t, T)} &= \sum_{i=1}^3 z_i \frac{dP(s, L, t, T_i)}{P(s, L, t, T_i)} \\ &= \sum_{i=1}^3 z_i \mu(s, L, t, T_i) dt + \sum_{i=1}^3 z_i s_1(s, L, T_i) dw_1 + \sum_{i=1}^3 z_i s_2(s, L, t, T_i) dw_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ahora, elegimos las proporciones invertidas en cada bono, z_i , ($\sum_{i=1}^3 z_i = 1$) de modo que la incertidumbre de la rentabilidad de esta cartera desaparezca, es decir, elegimos estas proporciones de modo que los coeficientes de dw_i en la ecuación anterior sean iguales a cero:

$$\sum_{i=1}^3 z_i s_1(s, L, t, T_i) = \sum_{i=1}^3 z_i s_2(s, L, t, T_i) = 0 \quad (3.7)$$

Suponiendo que no existen oportunidades de arbitraje, la rentabilidad esperada de esta cartera debe coincidir con el tipo de interés instantáneo sin riesgo, es decir

$$\sum_{i=1}^3 z_i \mu(s, L, t, T_i) = r$$

o, equivalentemente

$$\sum_{i=1}^3 (z_i \mu(s, L, t, T_i) - r) = 0 \quad (3.8)$$

Las ecuaciones (3.7) y (3.8) forman un sistema lineal homogéneo de tres ecuaciones y tres incógnitas (las proporciones invertidas en cada bono). Este sistema tendrá una solución no nula si y sólo si la matriz

$$C = \begin{pmatrix} s_1(s, L, t, T_1) & s_1(s, L, t, T_2) & s_1(s, L, t, T_3) \\ s_2(s, L, t, T_1) & s_2(s, L, t, T_2) & s_2(s, L, t, T_3) \\ \mu(s, L, t, T_1) - r & \mu(s, L, t, T_2) - r & \mu(s, L, t, T_3) - r \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

es singular. Por tanto, se debe cumplir que las filas de esta matriz sean linealmente dependientes. Los coeficientes de la relación lineal que cumplen estas filas no dependen del vencimiento porque hemos elegido arbitrariamente los vencimientos de los tres bonos de esta cartera.

Como consecuencia, existe un vector $\lambda(s, L, t) = (\lambda_1(s, L, t), \lambda_2(s, L, t))$ independiente de τ tal que

$$\mu(s, L, t, T) - r = \lambda_1(s, L, t) s_1(s, L, t, T) + \lambda_2(s, L, t) s_2(s, L, t, T) \quad (3.10)$$

Hemos sustituido T_i por T debido a que habíamos elegido arbitrariamente los vencimientos de los bonos que componen esta cartera. Por tanto, esta relación de equilibrio para la rentabilidad esperada del bono es válida para todos los vencimientos. La ecuación (3.10) expresa la prima al riesgo instantánea (diferencia entre la rentabilidad esperada del bono y el tipo de interés sin riesgo) como suma de dos componentes que se derivan de las dos fuentes de incertidumbre, esto es, de las dos variables de estado.

Los coeficientes de esta combinación lineal, $\lambda_1(\cdot)$ y $\lambda_2(\cdot)$, pueden interpretarse como los precios de mercado del riesgo del diferencial de tipos de interés y del tipo de interés a

largo plazo porque $s_1(s, L, t, T)$ y $s_2(s, L, t, T)$ son las desviaciones típicas instantáneas de las rentabilidades de los bonos derivadas de cambios no esperados en las variables de estado.

Sustituyendo las expresiones de $\mu(\cdot)$, $s_1(\cdot)$ y $s_2(\cdot)$ dadas por (3.4) y (3.5) en (3.10), se verifica que

$$\begin{aligned} & \left[P_s \beta_1(\cdot) + P_L \beta_2(\cdot) + \frac{1}{2} \sigma_1^2(\cdot) P_{ss} + \frac{1}{2} \sigma_2^2(\cdot) P_{LL} \right] + P_t \\ & = rP + \lambda_1(s, L, t) \sigma_1(\cdot) P_s + \lambda_2(s, L, t) \sigma_2(\cdot) P_L \end{aligned} \quad (3.11)$$

Reordenando términos en esta ecuación se obtiene la ecuación diferencial en derivadas parciales que deben cumplir, para cualquier vencimiento, los precios de un bono al descuento libre de riesgo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\sigma_1^2(\cdot) P_{ss} + \sigma_2^2(\cdot) P_{LL}] + [\beta_1(\cdot) - \lambda_1(\cdot) \sigma_1(\cdot)] P_s \\ & + [\beta_2(\cdot) - \lambda_2(\cdot) \sigma_2(\cdot)] P_L + P_t - rP = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dado el proceso estocástico (3.1) que hemos supuesto para las variables de estado, (3.12) es la ecuación fundamental para la valoración de bonos al descuento libres de riesgo que dependen solamente del diferencial de tipos de interés, s , el tipo de interés a largo plazo, L , y del tiempo al vencimiento, τ . En esta ecuación tenemos los precios de mercado del riesgo, λ_i , porque nuestro modelo es válido para el precio de todos los bonos (independientemente de su vencimiento) y la única manera de relacionar estos precios es mediante estos parámetros exógenos.

La solución de la ecuación (3.12), sujeta a la condición terminal dada por el pago que se recibe en el vencimiento, es decir, $P(s, L, 0) = 1 \quad \forall s, L$, nos permite valorar bonos al descuento y, a partir de estos precios, podemos obtener la estructura temporal de los tipos de interés. Hallaremos esta solución en la próxima sección.

3.3 Valoración de Bonos al Descuento

En esta sección, se calcula la expresión analítica del precio de bonos al descuento libres de riesgo a partir de la ecuación fundamental de valoración que hemos obtenido en la sección anterior. Una vez que hayamos obtenido dicha expresión, analizaremos sus implicaciones sobre las propiedades de la estructura temporal de los tipos de interés.

Los coeficientes de la ecuación de valoración (3.12) son los precios de mercado del riesgo de las variables de estado, $\lambda_i(\cdot)$ y los parámetros del proceso estocástico markoviano (3.1) que hemos supuesto para el diferencial de tipos de interés y el tipo de interés a largo plazo. Para hallar la solución de esta ecuación de valoración, necesitamos hacer algunos supuestos sobre los precios de mercado del riesgo y sobre la dinámica de las variables de estado. Puesto que un precio del mercado del riesgo constante es demasiado restrictivo en relación con las preferencias de los inversores, establecemos el siguiente supuesto:

Supuesto 1 *El precio de mercado del riesgo de cada variable de estado es lineal en dicha variable, es decir*

$$\lambda_1(\cdot) = a + bs, \quad \lambda_2(\cdot) = c + dL \quad (3.13)$$

En relación con la dinámica de las variables de estado, realizamos el siguiente supuesto:

Supuesto 2 *Cada una de las variables de estado sigue un proceso de difusión*

$$\begin{cases} ds &= k_1(\mu_1 - s)dt + \sigma_1 dw_1 \\ dL &= k_2(\mu_2 - L)dt + \sigma_2 dw_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

Este proceso, conocido como proceso Ornstein-Uhlenbeck, ha sido utilizado anteriormente por Vasicek (1977). Este modelo presenta reversión a la media - una importante característica que suelen presentar los tipos de interés - y varianza constante. Para cada variable de estado, el valor $k_i > 0$ es el coeficiente de reversión a la media que refleja la velocidad de ajuste de la variable hacia su valor a largo plazo (μ_i), σ_i es la (constante) desviación típica de cada variable y dw_i son procesos Gauss-Wiener.

La distribución estacionaria de un proceso estocástico, si existe, se obtiene a partir de una solución independiente del tiempo de la ecuación diferencial estocástica dada por (3.14), es decir, $s(t, w) = s(w)$, $L(t, w) = L(w)$. Siguiendo Malliaris and Brock (1988) (Sección 2.9, p. 106-108), se demuestra la existencia (y se calcula la expresión) de las distribuciones estacionarias de las variables de estado:

$$\alpha(s) = \frac{f(s)}{1 - F(0)} \quad (3.15)$$

$$\alpha(L) = \frac{g(L)}{1 - G(0)} \quad (3.16)$$

donde $F(\cdot)$ y $f(\cdot)$ son, respectivamente, las funciones de distribución y de densidad de una variable normal con media μ_1 y desviación típica $\sigma_1/\sqrt{2k_1}$. Análogamente, $G(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son, respectivamente, las funciones de distribución y de densidad de una variable normal con media μ_2 y desviación típica $\sigma_2/\sqrt{2k_2}$.

Además, se puede probar (véase Vasicek (1977)) que la esperanza y varianza condicional de los procesos $\{s(u), u \geq t\}$ y $\{L(u), u \geq t\}$, dado el valor actual de cada variable, son

$$\begin{aligned} E_t[s(u)] &= \mu_1 + (s(t) - \mu_1)e^{-k_1(u-t)}, \quad u \geq t \\ V_t[s(u)] &= \frac{\sigma_1^2}{2k_1}(1 - e^{-2k_1(u-t)}), \quad u \geq t \end{aligned} \quad (3.17)$$

y

$$E_t[L(u)] = \mu_2 + (L(t) - \mu_2)e^{-k_2(u-t)}, \quad u \geq t$$

$$V_t[L(u)] = \frac{\sigma_2^2}{2k_2}(1 - e^{-2k_2(u-t)}), \quad u \geq t \quad (3.18)$$

respectivamente.

Puede comprobarse que, cuando k_i tiende a infinito, la media condicional de la variable de estado tiende a μ_i y su varianza se anula. Si k_i tiende a cero, la media condicional tiende al actual valor del factor mientras la varianza tiende a $\sigma_1^2(u-t)$.

Bajo los Supuestos 1 and 2, se puede reescribir la ecuación (3.12) como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[\sigma_1^2 P_{ss} + \sigma_2^2 P_{LL}] + [(k_1\mu_1 - a\sigma_1) - (k_1 + b\sigma_1)s]P_s \\ & + [(k_2\mu_2 - c\sigma_2) - (k_2 + d\sigma_2)L]P_L + P_t - (L + s)P = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

o, equivalentemente

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 P_{ss} + q_1(\hat{\mu}_1 - s)P_s + \frac{1}{2}\sigma_2^2 P_{LL} + q_2(\hat{\mu}_2 - L)P_L + P_t - (L + s)P = 0 \quad (3.20)$$

sujeta a la condición terminal

$$P(s, L, T, T) = 1, \forall s, L \quad (3.21)$$

donde

$$\begin{cases} q_1 = k_1 + b\sigma_1, & \hat{\mu}_1 = (k_1\mu_1 - a\sigma_1)/q_1 \\ q_2 = k_2 + d\sigma_2, & \hat{\mu}_2 = (k_2\mu_2 - c\sigma_2)/q_2 \end{cases} \quad (3.22)$$

Solucionando la ecuación diferencial en derivadas parciales (3.20) se obtiene la siguiente proposición:

Proposición 1 *El precio en el instante t de un bono al descuento que paga \$1 en el instante T , $P(s, L, t, T) \equiv P(s, L, \tau)$, viene dado por*

$$P(s, L, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)s - C(\tau)L} \quad (3.23)$$

donde $\tau = T - t$ y

$$\begin{aligned}
 A(\tau) &= A_1(\tau)A_2(\tau) \\
 A_1(\tau) &= \exp\left\{-\frac{\sigma_1^2}{4q_1}B^2(\tau) + s^*(B(\tau) - \tau)\right\} \\
 A_2(\tau) &= \exp\left\{-\frac{\sigma_2^2}{4q_2}C^2(\tau) + L^*(C(\tau) - \tau)\right\} \\
 B(\tau) &= (1 - e^{-q_1\tau})/q_1 \\
 C(\tau) &= (1 - e^{-q_2\tau})/q_2
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

con

$$\begin{aligned}
 q_1 &= k_1 + b\sigma_1, & s^* &= \hat{\mu}_1 - \sigma_1^2/(2q_1^2), & \hat{\mu}_1 &= (k_1\mu_1 - a\sigma_1)/q_1 \\
 q_2 &= k_2 + d\sigma_2, & L^* &= \hat{\mu}_2 - \sigma_2^2/(2q_2^2), & \hat{\mu}_2 &= (k_2\mu_2 - c\sigma_2)/q_2
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Demostración:

El método de separación de variables nos permite escribir la solución de la ecuación (3.20) sujeta a (3.21) como

$$P(s, L, t, T) = X(s, t, T)Z(L, t, T) \tag{3.26}$$

donde $X(s, t, T)$ es la solución de la ecuación

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 X_{ss} + q_1(\hat{\mu}_1 - s)X_s + X_t - sX = 0 \tag{3.27}$$

sujeta a la condición terminal

$$X(s, T, T) = 1, \quad \forall s \tag{3.28}$$

y donde $Z(L, t, T)$ soluciona la ecuación

$$\frac{1}{2}\sigma_2^2 Z_{LL} + q_2(\hat{\mu}_2 - L)Z_L + Z_t - LZ = 0 \tag{3.29}$$

con la condición terminal

$$Z(L, T, T) = 1, \quad \forall L \tag{3.30}$$

Para resolver la Ecuación (3.27), establecemos una solución del tipo

$$X(s, t, T) = X(s, \tau) = A_1(\tau)e^{-B(\tau)s} \quad (3.31)$$

donde $\tau = T - t$. Utilizando (3.31), se obtiene

$$\begin{aligned} X_s(\cdot) &= -B(\tau)X(\cdot), & X_{ss}(\cdot) &= B^2(\tau)X(\cdot) \\ X_t(\cdot) &= -\left[\frac{A_1'(\tau)}{A_1(\tau)} - B'(\tau)s\right]X(\cdot) \end{aligned} \quad (3.32)$$

y, por tanto, la ecuación (3.27) se convierte en

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 B^2(\tau) - q_1(\hat{\mu}_1 - s)B(\tau) - \left[\frac{A_1'(\tau)}{A_1(\tau)} - B'(\tau)s\right] - s = 0 \quad (3.33)$$

donde, utilizando (3.28), las condiciones terminales vienen dadas por

$$A_1(0) = 1, \quad B(0) = 0 \quad (3.34)$$

La ecuación (3.33) es lineal en la variable s y, por tanto, se anula cuando los correspondientes coeficientes se igualan a cero. Como consecuencia, esta ecuación es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$q_1 B(\tau) + B'(\tau) - 1 = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 B^2(\tau) - q_1 \hat{\mu}_1 B(\tau) - \frac{A_1'(\tau)}{A_1(\tau)} = 0 \quad (3.36)$$

sujeto a las condiciones terminales (3.34).

Primero resolvemos la ecuación (3.35) con condición terminal $B(0) = 0$. Incluyendo esta solución en (3.36), integrando esta ecuación y utilizando la condición $A_1(0) = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1 - e^{-q_1 \tau}}{q_1} \\ A_1(\tau) &= \exp\left\{-\frac{\sigma_1^2}{4q_1} B^2(\tau) + s^*(B(\tau) - \tau)\right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde

$$s^* = \hat{\mu}_1 - \sigma_1^2/(2q_1^2) \quad (3.38)$$

Sustituyendo (3.37) en (3.31), se obtiene la expresión final de $X(s, t, T)$. De manera totalmente análoga, la solución de la Ecuación (3.29) viene dada por

$$Z(L, t, T) = Z(L, \tau) = A_2(\tau)e^{-C(\tau)L} \quad (3.39)$$

donde

$$\begin{aligned} A_2(\tau) &= \exp \left\{ -\frac{\sigma_2^2}{4q_2} C^2(\tau) + L^*(C(\tau) - \tau) \right\} \\ C(\tau) &= \frac{1 - e^{-q_2\tau}}{q_2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

con

$$L^* = \hat{\mu}_2 - \sigma_2^2/(2q_2^2) \quad (3.41)$$

Por tanto, la expresión final de $Z(L, t, T)$ se obtiene sustituyendo (3.40) en (3.39). Incluyendo las expresiones finales de $X(L, t, T)$ y $Z(L, t, T)$ en (3.26), se obtiene la expresión analítica del precio de los bonos al descuento libres de riesgo para cualquier vencimiento.

□

Los dos términos de la ecuación (3.37) verifican

$$\begin{cases} B(\tau) > 0, \forall \tau > 0, & B(0) = 0, & B(\infty) = 1/q_1 \\ B(\tau) - \tau < 0, \forall \tau > 0 \\ A_1(\tau) < 1, \forall \tau > 0, & A_1(0) = 1, & A_1(\infty) = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

y, análogamente, los términos $A_2(\tau)$ y $C(\tau)$ en (3.40) cumplen

$$\begin{cases} C(\tau) > 0, \forall \tau > 0, & C(0) = 0, & C(\infty) = 1/q_2 \\ C(\tau) - \tau < 0, \forall \tau > 0 \\ A_2(\tau) < 1, \forall \tau > 0, & A_2(0) = 1, & A_2(\infty) = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

El precio del bono al descuento, $P(s, L, \tau)$, es función de las dos variables de estado, s y L , y del tiempo que resta hasta el vencimiento de dicho bono, $\tau = T - t$. Este precio depende de los parámetros del proceso Ornstein-Uhlenbeck ($k_1, \mu_1, \sigma_1, k_2, \mu_2, \sigma_2$) así como de los precios de mercado del riesgo asociado a las dos variables de estado.

Sustituyendo $t = T$ en (3.23), se comprueba fácilmente que se cumplen las condiciones terminales para el precio del bono, $P(s, L, 0) = 1, \forall s, L$. Más aún, utilizando (3.42) y (3.43), se deduce que

$$P(0, 0, \tau) = A(\tau) = A_1(\tau)A_2(\tau) < 1, \quad \forall \tau > 0$$

El precio del bono también verifica características muy realistas desde un punto de vista económico:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} P(s, L, \tau) = 0, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} P(s, L, \tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} P(s, L, \tau) = 0$$

es decir, cuando cualquiera de las variables que influyen sobre el precio del bono (las variables de estado o el tiempo hasta el vencimiento) tiende a infinito, el precio del bono converge a cero.

El precio del bono es decreciente y convexo en ambos factores. Para demostrar esta propiedad, se comprueba que las derivadas parciales con respecto a s y L son negativas

$$\begin{aligned} P_s(s, L, \tau) &= -B(\tau)P(s, L, \tau) < 0 \\ P_L(s, L, \tau) &= -C(\tau)P(s, L, \tau) < 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

y las segundas derivadas parciales verifican

$$\begin{aligned} P_{ss}(s, L, \tau) &= B^2(\tau)P(s, L, \tau) > 0 \\ P_{LL}(s, L, \tau) &= C^2(\tau)P(s, L, \tau) > 0 \\ P_{sL}(s, L, \tau) &= B(\tau)C(\tau)P(s, L, \tau) > 0 \end{aligned} \tag{3.45}$$

El precio del bono decrece con el tiempo al vencimiento. Para ver esto, aplicamos (3.23) y (3.24) para obtener

$$\begin{aligned} P_\tau(s, L, \tau) &= \left[\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} - B'(\tau)s - C'(\tau)L \right] P(s, L, \tau) \\ &= \left[\frac{A'_1(\tau)}{A_1(\tau)} - B'(\tau)s + \frac{A'_2(\tau)}{A_2(\tau)} - C'(\tau)L \right] P(s, L, \tau) \end{aligned}$$

Para analizar el signo de estas derivadas, consideraremos sólo las dos primeras derivadas pues la demostración es exactamente igual para $A'_2(\tau)/A_2(\tau)$ y $C'(\tau)$.

Utilizando (3.36) y (3.37) y reordenando términos, se obtiene

$$\frac{A'_1(\tau)}{A_1(\tau)} = -q_1 B(\tau) \left[s^* + \frac{\sigma_1^2 e^{-q_1 \tau}}{2q_1^2} \right] < 0, \quad \forall \tau > 0 \quad (3.46)$$

mientras que, derivando en (3.37), se obtiene

$$B'(\tau) = e^{-q_1 \tau} > 0, \quad \forall \tau > 0 \quad (3.47)$$

Omitiendo las demostraciones para $A'_2(\tau)/A_2(\tau)$ y $C'(\tau)$ por ser totalmente análogas, ya tenemos demostrado el resultado que mencionabamos anteriormente.

3.4 Implicaciones sobre la Estructura Temporal de los Tipos de Interés

Una vez que hemos calculado la expresión analítica, para cualquier vencimiento, del precio de un bono al descuento libre de riesgo, el siguiente paso que vamos a realizar es la obtención de la estructura temporal (y propiedades) de los tipos de interés.

El tipo de interés a plazo (*“forward”*), denotado por $f(s, L, t, T) \equiv f(s, L, \tau)$, en el instante t hasta el instante futuro $T = t + \tau$ viene dado por

$$f(s, L, \tau) = \frac{P_t}{P} = -\frac{P_\tau}{P} = -\left[\frac{A'_1(\tau)}{A_1(\tau)} + \frac{A'_2(\tau)}{A_2(\tau)} - B'(\tau)s - C'(\tau)L \right] \quad (3.48)$$

el cual, por (3.46) y (3.47), es siempre positivo.

Aplicando las ecuaciones (3.35), (3.36) y sus análogas para la variable $Z(\cdot)$ y reordenando términos, se cumple que

$$\begin{aligned} f(s, L, \tau) &= r - q_1(s - \hat{\mu}_1)B(\tau) - q_2(L - \hat{\mu}_2)C(\tau) \\ &\quad - \frac{1}{2} [\sigma_1^2 B^2(\tau) + \sigma_2^2 C^2(\tau)] \end{aligned} \quad (3.49)$$

Utilizando (3.42) y (3.43) se puede comprobar que

$$\begin{aligned} f(s, L, 0) &= r(t), \quad \forall s, L \\ f(s, L, \infty) &= s^* + L^*, \quad \forall s, L \end{aligned}$$

es decir, la curva de tipos de interés a plazo comienza en el valor actual del tipo de interés y el tipo de interés *forward* a un plazo muy largo es independiente del valor actual de los dos factores.

Derivando (3.48) puede verse que, para un cierto vencimiento, el tipo *forward* es función lineal y creciente de los dos factores:

$$\begin{aligned} f_s(s, L, \tau) &= B'(\tau) > 0 \\ f_L(s, L, \tau) &= C'(\tau) > 0 \end{aligned}$$

Como puede comprobarse gráficamente en la Figura 3.1, la curva de tipos a plazo puede presentar muchas formas: creciente, decreciente o no-monótona. Utilizando (3.48) tenemos que

$$f_\tau(s, L, \tau) = [q_1(\hat{\mu}_1 - s) - \sigma_1^2 B(\tau)]B'(\tau) + [q_2(\hat{\mu}_2 - L) - \sigma_2^2 C(\tau)]C'(\tau) \quad (3.50)$$

La forma de esta curva depende de su valor inicial. Así, esta curva crece con el vencimiento si

$$\begin{cases} s < \hat{\mu}_1 - (\sigma_1/q_1)^2 \\ L < \hat{\mu}_2 - (\sigma_2/q_2)^2 \end{cases}$$

decrece con el vencimiento si

$$\begin{cases} s > \hat{\mu}_1 \\ L > \hat{\mu}_2 \end{cases}$$

y es una curva no-monótona en el resto de casos.

El sesgo de esta curva, denotado por $bf(s, L, \tau)$, viene dado por la diferencia entre el tipo *forward* y el nivel esperado para los tipos de interés en el momento T , instante en que el bono llega a su vencimiento, $E_t[r(T)]$. Aplicando (3.17), (3.18) y (3.49), obtenemos que

$$\begin{aligned} bf(.) &= f(s, L, \tau) - E_t[r(T)] \\ &= (\hat{\mu}_1 - s)(1 - e^{-q_1\tau}) + (s - \mu_1)(1 - e^{-k_1\tau}) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 B^2(\tau) \\ &+ (\hat{\mu}_2 - L)(1 - e^{-q_2\tau}) + (L - \mu_2)(1 - e^{-k_2\tau}) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 C^2(\tau) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Se verifica que

$$bf(s, L, \infty) = (s^* + L^*) - (\mu_1 + \mu_2)$$

Así, el sesgo de la curva de tipos a plazo es negativo cuando

$$\begin{cases} a + b\mu_1 \geq 0 \\ c + d\mu_2 \geq 0, \end{cases}$$

este sesgo es positivo si

$$\begin{cases} a + b\mu_1 \leq -\sigma_1/q_1 \\ c + d\mu_2 \leq -\sigma_2/q_2 \end{cases}$$

y depende del vencimiento del bono en el resto de casos.

El rendimiento de un bono que vence en el instante $T = t + \tau$, denotado por $Y(s, L, t, T) \equiv Y(s, L, \tau)$, es la rentabilidad (compuesta de modo continuo) asociada a dicho bono. Viene definido implícitamente como

$$P(s, L, \tau)e^{Y(s, L, \tau)\tau} = 1$$

o, equivalentemente

$$Y(s, L, \tau) = -\frac{1}{\tau} \ln(P(s, L, \tau)) \quad (3.52)$$

que, en nuestro modelo, por (3.23), se convierte en

$$\begin{aligned} Y(\cdot) &= -\frac{\ln(A(\tau))}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau}s + \frac{C(\tau)}{\tau}L \\ &= \frac{\sigma_1^2}{4q_1} \frac{B^2(\tau)}{\tau} + s^* \left[1 - \frac{B(\tau)}{\tau} \right] + \frac{B(\tau)}{\tau}s \\ &\quad + \frac{\sigma_2^2}{4q_2} \frac{C^2(\tau)}{\tau} + L^* \left[1 - \frac{C(\tau)}{\tau} \right] + \frac{C(\tau)}{\tau}L \end{aligned} \quad (3.53)$$

Para valores fijos de s y L , la forma de $Y(s, L, \tau)$ caracteriza la estructura temporal de los tipos de interés (curva de tipos) en el instante t . Aplicando la regla de L'Hôpital, puede comprobarse que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{B(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{C(\tau)}{\tau} = 1 \quad (3.54)$$

lo cual implica

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{B^2(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{C^2(\tau)}{\tau} = 0 \quad (3.55)$$

Incluyendo estos resultados en (3.53), se verifica que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} Y(s, L, \tau) = s(t) + L(t) = r(t)$$

es decir, la curva de rentabilidades comienza en el valor actual del tipo de interés al contado.

Como $B(\tau)$ y $C(\tau)$ son funciones acotadas del vencimiento del bono (véanse (3.42) y (3.43)), se cumple que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{B(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{B^2(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{C(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{C^2(\tau)}{\tau} = 0 \quad (3.56)$$

y, por tanto, el rendimiento al vencimiento de un bono a largo plazo es

$$Y(s, L, \infty) = s^* + L^*$$

un valor que es independiente del valor actual de los dos factores.

Dado un cierto vencimiento, el rendimiento de un bono es una función lineal y creciente de los dos factores, s y L . Sus derivadas parciales con respecto a estos factores son

$$\begin{aligned} Y_s(s, L, \tau) &= \frac{B(\tau)}{\tau} > 0 \\ Y_L(s, L, \tau) &= \frac{C(\tau)}{\tau} > 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Esta curva puede presentar diferentes formas. A partir de (3.52) puede verse que

$$Y_\tau(s, L, \tau) = \frac{[f(s, L, \tau) - Y(s, L, \tau)]}{\tau} \quad (3.58)$$

La forma de esta curva depende de su valor inicial, $r(t)$. Si este valor es “suficientemente pequeño”, la curva es creciente con el vencimiento. En otros casos, es decreciente o no-monótona.

El sesgo de la curva de tipos, denotado por $by(s, L, \tau)$, viene dado por la diferencia entre el rendimiento del bono y el nivel de tipos de interés que se espera durante el período hasta el vencimiento del bono, $\frac{1}{\tau} \int_t^T E_t[r(u)]du$. Integrando (3.17) y (3.18) se obtiene que

$$\frac{1}{\tau} \int_t^T E_t[r(u)]du = \mu_1 + (s - \mu_1) \frac{1 - e^{-k_1\tau}}{k_1\tau} + \mu_2 + (L - \mu_2) \frac{1 - e^{-k_2\tau}}{k_2\tau} \quad (3.59)$$

Restando (3.59) de (3.53) se obtiene que

$$\begin{aligned} by(s, L, \tau) &= Y(s, L, \tau) - \frac{1}{\tau} \int_t^T E_t[r(u)]du \\ &= (s^* - \mu_1) \left[1 - \frac{B(\tau)}{\tau} \right] + (s - \mu_1) \left[\frac{1 - e^{-q_1\tau}}{q_1\tau} - \frac{1 - e^{-k_1\tau}}{k_1\tau} \right] \\ &+ (L^* - \mu_2) \left[1 - \frac{C(\tau)}{\tau} \right] + (L - \mu_2) \left[\frac{1 - e^{-q_2\tau}}{q_2\tau} - \frac{1 - e^{-k_2\tau}}{k_2\tau} \right] \\ &+ \frac{\sigma_1^2}{4q_1} \frac{B^2(\tau)}{\tau} + \frac{\sigma_2^2}{4q_2} \frac{C^2(\tau)}{\tau} \end{aligned}$$

Puede comprobarse que el sesgo de la curva de tipos es positivo si

$$\begin{cases} s < \mu_1 < s^* \\ L < \mu_2 < L^* \end{cases}$$

y si

$$\begin{cases} a + b\mu_1 \geq 0 \\ c + d\mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

entonces se obtiene un sesgo negativo.

La prima instantánea al plazo, $\pi(s, L, t, T) \equiv \pi(s, L, \tau)$ se define como la diferencia entre el rendimiento esperado del bono sobre el actual tipo al contado. Sustituyendo la expresión (3.23) dada por la Proposición (1) en (3.5) se obtiene la expresión de las variaciones no esperadas en la rentabilidad del bono

$$s_1(s, L, t, T) = s_1(s, L, \tau) = -\sigma_1 B(\tau)$$

$$s_2(s, L, t, T) = s_2(s, L, \tau) = -\sigma_2 C(\tau)$$

Incluyendo estas expresiones en (3.10) se obtiene que la rentabilidad esperada del bono, $\mu(s, L, t, T) \equiv \mu(s, L, \tau)$, es igual a

$$\mu(s, L, \tau) = r - \sigma_1(a + bs)B(\tau) - \sigma_2(c + dL)C(\tau)$$

Por tanto, la prima instantánea al plazo viene dada por

$$\pi(s, L, \tau) = -\sigma_1(a + bs)B(\tau) - \sigma_2(c + dL)C(\tau) \quad (3.60)$$

Por tanto, la prima de plazo es proporcional a las variaciones no esperadas en la rentabilidad del bono. Más aún, estas variaciones no esperadas son proporcionales a la desviación típica de los factores y son crecientes con respecto al tiempo hasta el vencimiento del bono.

Se comprueba fácilmente que

$$\begin{aligned}\pi(s, L, 0) &= 0 \\ \pi(s, L, \infty) &= -\frac{\sigma_1(a + bs)}{q_1} - \frac{\sigma_2(c + dL)}{q_2}\end{aligned}$$

Para un vencimiento dado, la prima de plazo es lineal en ambos factores. A partir de (3.60) se verifica que

$$\begin{aligned}\pi_s(s, L, \tau) &= -b\sigma_1 B(\tau) \\ \pi_L(s, L, \tau) &= -d\sigma_2 C(\tau) \\ \pi_\tau(s, L, \tau) &= -\sigma_1(a + bs)B'(\tau) - \sigma_2(c + dL)C'(\tau)\end{aligned}$$

Por tanto, la prima de plazo crece con el factor $s(L)$ si $b(d) < 0$. Es una función suavizada del tiempo hasta el vencimiento, τ , que crece (decrece) con el tiempo al vencimiento τ si los precios de mercado del riesgo son negativos (positivos).

3.5 Expresión Analítica del Precio de Activos Derivados

La ecuación de valoración de bonos (3.20) nos permite la obtención de expresiones cerradas para el precio de diferentes activos derivados si sustituimos la condición terminal (3.21), que indicaba el pago al vencimiento del bono cupón-cero, por el pago terminal de estos activos derivados. Así, el precio en el instante t , $U(s, L, t, T) \equiv U(s, L, \tau)$, de un activo que paga una cantidad $g(s_T, L_T)$ en el instante de su vencimiento T , satisface la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 U_{ss} + q_1(\hat{\mu}_1 - s)U_s + \frac{1}{2}\sigma_2^2 U_{LL} + q_2(\hat{\mu}_2 - L)U_L + U_t - (L + s)U = 0 \quad (3.61)$$

sujeta a la condición terminal¹

$$U(s, L, T, T) = g(s_T, L_T) \quad (3.62)$$

y, de este modo, podemos utilizar la solución de esta ecuación (para una función particular $g(s, L)$) para obtener los precios de diferentes activos derivados. La solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales (3.61) con la condición terminal (3.62) viene dada por la siguiente proposición:

Proposición 2 *Dada la evolución temporal de los tipos de interés indicada en el Supuesto 2, el precio en el instante t , $U(s, L, t, T) \equiv U(s, L, \tau)$, de un activo derivado que paga una cantidad $g(s_T, L_T)$ en el instante de su vencimiento T es*

$$U(s, L, t, T) = P(s, L, t, T)E[g(s', L')] \quad (3.63)$$

donde

$$\begin{aligned} s' &\sim N(m_s(s, t, T) - q_{sY}(t, T), v_s^2(t, T)) \\ L' &\sim N(m_L(s, t, T) - q_{LY}(t, T), v_L^2(t, T)) \end{aligned} \quad (3.64)$$

con

$$\begin{aligned} m_s(s, t, u) &= e^{-q_1(u-t)}s + (1 - e^{-q_1(u-t)})\hat{\mu}_1 \\ q_{sY}(t, u) &= \frac{\sigma_1^2(1 - e^{-q_1(u-t)})^2}{2q_1^2} \\ v_s^2(t, u) &= \frac{\sigma_1^2}{2q_1}(1 - e^{-2q_1(u-t)}) \\ m_L(L, t, u) &= e^{-q_2(u-t)}L + (1 - e^{-q_2(u-t)})\hat{\mu}_2 \\ q_{LY}(t, u) &= \frac{\sigma_2^2(1 - e^{-q_2(u-t)})^2}{2q_2^2} \\ v_L^2(t, u) &= \frac{\sigma_2^2}{2q_2}(1 - e^{-2q_2(u-t)}) \end{aligned} \quad (3.65)$$

¹Nótese que, si $g \equiv 1$, se obtiene la expresión analítica para el precio de bonos al descuento que se ha derivado en la Sección 3.3.



Demostración:

Sean $\tilde{s}(t)$ y $\tilde{L}(t)$ los “procesos neutrales al riesgo” definidos por

$$\begin{cases} d\tilde{s} &= q_1(\hat{\mu}_1 - \tilde{s})dt + \sigma_1 dw_1 \\ d\tilde{L} &= q_2(\hat{\mu}_2 - \tilde{L})dt + \sigma_2 dw_2 \end{cases}$$

y sea $Y(t, u) = \int_t^u (\tilde{s}(v) + \tilde{L}(v))dv$.

Entonces, podemos aplicar Friedman (1975) (Sección 6, Teorema 5.3, p. 148) para obtener la solución de (3.61)-(3.62). Esta solución viene dada por²

$$U(s, L, t, T) = E_{s, L, t} [g(\tilde{s}(T), \tilde{L}(T))e^{-Y(t, T)}] \quad (3.66)$$

Denotando por $p(s, L, t, u, s', L', Y)$ la probabilidad conjunta de la variable

$$X(u) = [\tilde{s}(u), \tilde{L}(u), Y(t, u)]'$$

condicionada a $\tilde{s}(t) = s, \tilde{L}(t) = L$, (3.66) es equivalente a

$$\begin{aligned} U(s, L, t, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s', L') e^{-Y} p(s, L, t, T, s', L', Y) dY ds' dL' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(s, L, s', L', t, T) g(s', L') ds' dL' \end{aligned} \quad (3.67)$$

donde

$$G(s, L, s', L', t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Y} p(s, L, t, u, s', L', Y) dY \quad (3.68)$$

Aplicando Arnold (1974) (Corolario 8.2.4, p. 130) se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{s}(u) &= e^{-q_1(u-t)} \tilde{s}(t) + \int_t^u e^{-q_1(u-z)} [q_1 \hat{\mu}_1 dz + \sigma_1 dw_1(z)] \\ \tilde{L}(u) &= e^{-q_2(u-t)} \tilde{L}(t) + \int_t^u e^{-q_2(u-z)} [q_2 \hat{\mu}_2 dz + \sigma_2 dw_2(z)] \end{aligned}$$

² $E_{s, L, t}[\cdot] = E[\cdot | \tilde{s}(t) = s, \tilde{L}(t) = L]$. Similarmente para los términos de varianzas y covarianzas.

Reordenando términos, obtenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{s}(u) &= e^{-q_1(u-t)}[\tilde{s}(t) - s] + \hat{\mu}_1 + \sigma_1 \int_t^u e^{-q_1(u-z)} dw_1 - \\ \tilde{L}(u) &= e^{-q_2(u-t)}[\tilde{L}(t) - L] + \hat{\mu}_2 + \sigma_2 \int_t^u e^{-q_2(u-z)} dw_2\end{aligned}$$

y, por tanto, se verifica (véase Arnold (1974), Sección 8.3, p. 134–136) que

$$\begin{aligned}m_s(s, t, u) &\equiv E_{s,L,t}[\tilde{s}(u)] = e^{-q_1(u-t)}s + (1 - e^{-q_1(u-t)})\hat{\mu}_1 \\ v_s^2(t, u) &\equiv V_{s,L,t}[\tilde{s}(u)] = \frac{\sigma_1^2}{2q_1}(1 - e^{-2q_1(u-t)}) \\ m_L(L, t, u) &\equiv E_{s,L,t}[\tilde{L}(u)] = e^{-q_2(u-t)}L + (1 - e^{-q_2(u-t)})\hat{\mu}_2 \\ v_L^2(t, u) &\equiv V_{s,L,t}[\tilde{L}(u)] = \frac{\sigma_2^2}{2q_2}(1 - e^{-2q_2(u-t)})\end{aligned}$$

Aplicando Arnold (1974) (Teorema 8.2.12, p. 133) se verifica que la variable $X(u)$ sigue una distribución normal trivariante. Un poco de álgebra nos lleva a

$$\begin{aligned}E_{s,L,t}[Y(t, u)] &= \left[\hat{\mu}_1(u-t) + (s - \hat{\mu}_1)\frac{1 - e^{-q_1(u-t)}}{q_1} \right] \\ &+ \left[\hat{\mu}_2(u-t) + (L - \hat{\mu}_2)\frac{1 - e^{-q_2(u-t)}}{q_2} \right] \\ &\equiv n_{sY}(s, t, u) + n_{LY}(L, t, u)\end{aligned}\tag{3.69}$$

Intercambiando el orden de integración y aplicando Davidson (1994) (Sección 30.3, p. 503–509) se obtiene que

$$\begin{aligned}V_{s,L,t}[Y(t, u)] &= \left[\frac{\sigma_1^2}{2q_1^3}(4e^{-q_1(u-t)} - e^{-2q_1(u-t)} + 2q_1(u-t) - 3) \right] \\ &+ \left[\frac{\sigma_2^2}{2q_2^3}(4e^{-q_2(u-t)} - e^{-2q_2(u-t)} + 2q_2(u-t) - 3) \right] \\ &\equiv v_{sY}^2(t, u) + v_{LY}^2(t, u) \\ q_{sY}(t, u) &\equiv \text{Cov}_{s,L,t}[\tilde{s}(u), Y(t, u)] = \frac{\sigma_1^2(1 - e^{-q_1(u-t)})^2}{2q_1^2} \\ q_{LY}(t, u) &\equiv \text{Cov}_{s,L,t}[\tilde{L}(u), Y(t, u)] = \frac{\sigma_2^2(1 - e^{-q_2(u-t)})^2}{2q_2^2}\end{aligned}$$

y, por tanto, obtenemos la distribución de la variable X :

$$X \sim N(\xi, V)$$

donde

$$\xi = \begin{pmatrix} m_s \\ m_L \\ n_{sY} + n_{LY} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_s^2 & 0 & q_{sY} \\ 0 & v_L^2 & q_{LY} \\ q_{sY} & q_{LY} & v_{sY}^2 + v_{LY}^2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la probabilidad conjunta de $X(u)$ condicionada a $\tilde{s}(t) = s$, $\tilde{L}(t) = L$ viene dada por

$$p(s, L, t, u, s', L', Y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}|V|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(X - \xi)'V^{-1}(X - \xi) \right\}$$

Sustituyendo esta expresión en (3.68) se obtiene

$$G(s, L, s', L', t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}|V|^{1/2}} e^{-Y} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(X - \xi)'V^{-1}(X - \xi) \right\} dY$$

expresión que, tras un poco de algebra, nos lleva a

$$\begin{aligned} G(s, L, s', L', t, u) &= \exp \left\{ \frac{1}{2}v_{sY}^2(t, u) - n_{sY}(s, t, u) \right\} f_1(s') \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2}v_{LY}^2(t, u) - n_{LY}(L, t, u) \right\} f_2(L') \end{aligned}$$

donde $f_1(\cdot)$ es la función de densidad de una variable normal con media $m_s - q_{sY}$ y desviación típica v_s . Similarmente, $f_2(\cdot)$ corresponde a una distribución normal con media $m_L - q_{LY}$ y desviación típica v_L .

Sustituyendo esta expresión en (3.67) se obtiene

$$\begin{aligned} U(s, L, t, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2}v_{sY}^2(t, u) - n_{sY}(s, t, u) \right\} f_1(s') \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2}v_{LY}^2(t, u) - n_{LY}(s, t, u) \right\} f_2(L') g(s', L') ds' dL' \quad (3.70) \end{aligned}$$

Si $g \equiv 1$ y $u = T$, la ecuación (3.70) implica que

$$P(s, L, t, T) = \exp \left\{ \frac{1}{2} v_{sY}^2(t, T) - n_{sY}(s, t, T) \right\} \times \exp \left\{ \frac{1}{2} v_{LY}^2(t, T) - n_{LY}(L, t, T) \right\} \quad (3.71)$$

Sustituyendo (3.71) en (3.70) se obtiene la expresión final para el precio, en el instante t , del correspondiente activo derivado.

□

A continuación, podemos utilizar la expresión analítica dada por esta proposición junto con el correspondiente pago en el vencimiento, $g(s_T, L_T)$, para obtener los precios de diferentes activos derivados. Veremos los siguientes ejemplos:

- Opción europea sobre un bono cupón cero.
- Opción europea sobre una cartera de bonos.
- *Cap* de tipos de interés.
- *Floor* de tipos de interés.
- *Collar* de tipos de interés.
- Permuta (*swap*) de tipos de interés.
- Opción sobre un swap de tipos de interés (*swaption*).
- Opción compuesta.
- Opción a la medida (*“as you like it” option*).
- Opción binaria.

(a) Una **opción europea de compra sobre un bono cupón-cero** es un contrato en el que el vendedor de dicha opción garantiza al comprador el derecho (aunque no la obligación) a comprar un activo subyacente (en este caso, un bono cupón-cero) en un

instante predeterminado fijo (fecha de expiración o vencimiento de la opción). Sea K el precio de ejercicio (“*strike price*”) de esta opción, es decir, el precio a que se compra el bono cupón-cero. Si se ejerce la opción en el instante en que expira, T_c , el poseedor de esta opción pagará una cantidad K y recibirá un bono al descuento que vence en el instante $T_b > T_c$.

La ecuación (3.63) para el caso particular

$$g(s, L) = P(s, L, T_c, T_b)$$

implica que el precio, en el instante t , del bono al descuento que recibirá el poseedor de la opción viene dado por

$$P(s, L, t, T_b) = P(s, L, t, T_c) E[P(s', L', T_c, T_b)]$$

Si definimos

$$\tilde{P} = P(s', L', T_c, T_b)$$

entonces, se cumple que

$$E[\tilde{P}] = \frac{P(s, L, t, T_b)}{P(s, L, t, T_c)} \quad (3.72)$$

Aplicando (3.71), se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \exp \left\{ \frac{1}{2} [v_{sY}^2(T_c, T_b) + v_{LY}^2(T_c, T_b)] \right\} \\ &\times \exp \{ -[n_{sY}(s', T_c, T_b) + n_{LY}(L', T_c, T_b)] \} \end{aligned}$$

Como $n_{sY}(s', T_c, T_b)$ y $n_{LY}(L', T_c, T_b)$ son lineales en s' y L' (véase la ecuación (3.69)), entonces \tilde{P} es la exponencial de una combinación lineal de dos variables normales (véase la ecuación (3.64)) y, por tanto, \tilde{P} sigue una distribución lognormal. Más aún, el valor de los coeficientes de esta combinación lineal implica que

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{P}}^2 &\equiv \text{Var}[\ln(\tilde{P})] \\ &= \left[\frac{1 - e^{-q_1(T_b - T_c)}}{q_1} \right]^2 v_s^2(t, T_c) + \left[\frac{1 - e^{-q_2(T_b - T_c)}}{q_2} \right]^2 v_L^2(t, T_c) \end{aligned}$$

El precio en el instante t , $C(s, L, t, T_c; K, T_b)$, de esta opción de compra se deduce de la ecuación (3.63) con la condición terminal

$$g(s, L) = C(s, L, T_c, T_c; K, T_b) = \max\{P(s, L, T_c, T_b) - K, 0\} \quad (3.73)$$

En este momento, exigimos que $P(0, 0, T_c, T_b) > K$. En caso contrario, como el precio del bono es decreciente en ambas variables de estado, se cumpliría que $P(s, L, T_c, T_b) < K$ para todos los valores de s y L y, por tanto, la opción nunca se ejercería.

Sustituyendo (3.73) en (3.63), tenemos que

$$C(s, L, t, T_c; K, T_b) = P(s, L, t, T_c)E[\tilde{Z}] \quad (3.74)$$

donde

$$\tilde{Z} = \max\{\tilde{P} - K, 0\} = (\tilde{P} - K)I_{[K, \infty)}(\tilde{P})$$

e $I(\cdot)$ es la función indicatriz definida como

$$I_{[K, \infty)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < K \\ 1 & \text{if } x > K \end{cases}$$

Entonces

$$E[\tilde{Z}] = \int_K^\infty (\tilde{P} - K)f(\tilde{P})d\tilde{P} \quad (3.75)$$

Para calcular esta esperanza, definimos la nueva variable

$$v(\tilde{P}) = \frac{E[\ln(\tilde{P})] - \ln(\tilde{P})}{\sigma_{\tilde{P}}}$$

Si aplicamos la relación

$$\ln(E[\tilde{P}]) = E[\ln(\tilde{P})] + \frac{1}{2}V[\ln(\tilde{P})]$$

tenemos que (3.75) se convierte en

$$E[\tilde{Z}] = E[\tilde{P}]\Phi(h + \sigma_{\tilde{P}}) - K\Phi(h) \quad (3.76)$$

donde $\Phi(\cdot)$ denota la función de distribución de una variable normal tipificada y

$$h = v(K) = \frac{E[\ln(\tilde{P})] - \ln(K)}{\sigma_{\tilde{P}}}$$

Sustituyendo (3.72) y (3.76) en 3.74), se obtiene que la expresión final de la opción de compra es

$$C(s, L, t, T_c; K, T_b) = P(s, L, t, T_b)\Phi(h + \sigma_{\tilde{P}}) - KP(s, L, t, T_c)\Phi(h) \quad (3.77)$$

Existe una gran similitud entre esta fórmula y la expresión deducida por Black-Scholes para el precio de una opción. En ambas fórmulas, tenemos una variable aleatoria, \tilde{P} , que indica el precio del activo subyacente que se recibe cuando la opción expira y que sigue una distribución lognormal. El factor de descuento $P(s, L, t, T_c)$ es el análogo de $e^{-r(T_c-t)}$ y $\sigma_{\tilde{P}}^2$, la varianza del logaritmo de \tilde{P} , es el equivalente a $\sigma^2(T_c - t)$.

Los precios de las opciones europeas de venta (“put”) se obtienen por la paridad “call-put”, es decir

$$\text{call} - \text{put} = P(s, L, t, T_b) - KP(s, L, t, T_c) \quad (3.78)$$

(b) Podemos extender la ecuación (3.77) para obtener el precio de una **opción europea de compra sobre una cartera de bonos al descuento**. Sean K y T_c el precio de ejercicio y el momento de vencimiento de esta opción, respectivamente. La cartera está compuesta por N bonos al descuento e invertimos una proporción α_i , $i = 1, \dots, N$ en cada bono con instante de vencimiento T_b^i .

Sea $C_\alpha(s, L, t, T_c; K, T_b^N)$ el precio, en el instante t , de la opción sobre esta cartera de bonos. Análogamente al precio de la opción sobre bonos al descuento, se obtiene que

$$C_\alpha(s, L, t, T_c; K, T_b^N) = P(s, L, t, T_c) E[\max\{0, \tilde{P}_\alpha - K\}] \quad (3.79)$$

donde

$$\tilde{P}_\alpha = \sum_i \alpha_i P(s', L', T_c, T_b^i) \quad (3.80)$$

y donde i es tal que $T_c < T_b^i$.

Las ecuaciones (3.72) y (3.80) implican que

$$E[\tilde{P}_\alpha] = \sum_i \alpha_i \frac{P(s, L, t, T_b^i)}{P(s, L, t, T_c)} \quad (3.81)$$

Sean \bar{s} y \bar{L} tales que

$$K = \sum_i \alpha_i P(\bar{s}, \bar{L}, T_c, T_b^i) = \sum_i \alpha_i K_i \quad (3.82)$$

Aplicando que el precio del bono es decreciente en ambos factores, s y L , se sigue que

$$\max\{\tilde{P}_\alpha - K, 0\} = \sum_i \alpha_i \max\{P(s', L', T_c, T_b^i) - K_i, 0\} \quad (3.83)$$

Sustituyendo esta igualdad en (3.79), un poco de álgebra nos lleva a

$$C_\alpha(s, L, t, T_c; K, T_b^N) = \sum_i C_\alpha(s, L, t, T_c; K_i, T_b^i) \quad (3.84)$$

Por tanto, hemos probado que esta opción de compra sobre una cartera de N bonos es equivalente a una cartera de opciones con los apropiados precios de ejercicio, K_i . Más aún, esta expresión que hemos obtenido nos permite valorar cualquier opción sobre bonos con cupón puesto que este tipo de bonos puede interpretarse como un caso particular de la cartera de bonos que hemos considerado hasta ahora. Este argumento también es válido para opciones de venta sobre una cartera de bonos al descuento.

(c) Un **cap de tipos de interés** establece un valor máximo sobre el pago de los intereses que se pagan en un préstamo a interés variable. Así, como se muestra en la Figura 3.2, un cap garantiza que - en cualquier instante - el tipo de interés correspondiente a un préstamo, será el menor de dos valores: el actual tipo de interés y un cierto valor, conocido como el *tipo de interés cap*. Por tanto, este instrumento financiero nos protege frente a la subida del tipo de interés por encima del tipo de interés cap.

Suponemos que los intereses son pagados en los instantes $1, 2, \dots, n$ desde el comienzo de la vida del cap. Sean R_c y R_k ($k = 1, 2, \dots, n$) el tipo de interés cap y el actual tipo de interés en cada instante de pago, respectivamente. Sea $\$M$ el principal del préstamo. Entonces, en el instante $k + 1$, el emisor del cap debe pagar la cantidad

$$M \max\{R_k - R_c, 0\}$$

Este pago es equivalente, en el instante k , a

$$\frac{M}{1 + R_k} \max\{R_k - R_c, 0\}$$

y esta expresión, reordenando términos, se convierte en

$$\max\left\{M - \frac{1 + R_c}{1 + R_k} M, 0\right\}$$

Por tanto, esta expresión corresponde al pago de una opción de venta (llamada *caplet*) que vence en el instante k y cuyo activo subyacente es un bono que vence en el instante $k + 1$. El valor nominal del bono es $(1 + R_c)M$ y el precio de ejercicio es M . Puesto que un cap es una sucesión de este tipo de opciones, este activo derivado se puede interpretar como una cartera de opciones europeas de venta sobre bonos al descuento.

(d) Un **floor de tipos de interés** puede definirse de modo análogo al cap. Así, un *floor* establece un límite inferior sobre el tipo de interés a pagar (véase la Figura 3.2).

Como consecuencia, este derivado protege contra una bajada en los tipos de interés más allá de un cierto nivel (*tipo de interés floor*). De modo similar a los *caps*, un *floor* se puede interpretar como una cartera de opciones europeas de compra sobre bonos al descuento. Si el tipo de interés floor es R_f , entonces

$$\max \left\{ \frac{1 + R_f}{1 + R_k} M - M, 0 \right\} \quad (3.85)$$

es la condición terminal correspondiente a cada instante de pago.

(e) Un **collar de tipos de interés** es simplemente una posición larga en un *cap* y una posición corta en un *floor* donde ambos derivados tienen los mismos instantes de pago. Por tanto, el precio del *collar* es la diferencia entre el precio de ambos activos derivados.

(f) Un **swap** es un acuerdo privado entre dos compañías, A y B , para intercambiar un flujo de capitales en el futuro de acuerdo con una fórmula predeterminada. El tipo de permuta más común es el *swap de tipos de interés* en el que B acuerda hacerle a A una serie de pagos periódicos como intereses (a un tipo de interés fijo) correspondientes a una cantidad (llamada principal de la operación) $\$M$ durante una serie de años. Al mismo tiempo, B recibirá intereses (a tipo de interés variable) correspondientes al mismo principal y durante el mismo número de años. Los principales no se intercambian. Así, un *swap* transforma un préstamo a interés fijo en un préstamo a interés variable o viceversa. Generalmente, las dos compañías utilizan un intermediario financiero para acordar las características de la permuta de tipos de interés que desean realizar.

Podemos suponer, exclusivamente con el objetivo de calcular el precio del *swap*, que, al final de esta permuta, ambas compañías proceden al intercambio de los principales $\$M$. Por tanto, el *swap* es un acuerdo en el que (1) la compañía B ha prestado

al intermediario financiero una cantidad $\$M$ a un tipo de interés variable y (2) el intermediario financiero ha prestado a la compañía B la cantidad $\$M$ a un tipo de interés fijo. Es decir, la entidad financiera ha vendido - a tipo de interés variable - a B un bono con valor nominal $\$M$ y ha comprado - a tipo de interés fijo - un bono con el mismo valor nominal. Por tanto, esta permuta se puede interpretar como un acuerdo para intercambiar un bono a tipo de interés fijo por un bono a tipo de interés variable. Como consecuencia, el precio del *swap* es la diferencia entre el precio de estos dos bonos. Así, suponiendo que la institución financiera recibe pagos a interés fijo y hace pagos a interés variable, y denotando por P_1 y P_2 los precios de los bonos a tipo de interés fijo y variable, respectivamente, el precio del *swap* viene dado por

$$V_s = P_1 - P_2$$

De modo análogo, si la institución financiera paga a tipo de interés fijo y recibe a tipo de interés variable, el precio del *swap* sería

$$V_s = P_2 - P_1$$

(g) Una **swaption** es una opción cuyo activo subyacente es un *swap* de tipos de interés. Así, este activo da a su poseedor el derecho a participar en una permuta de tipos de interés mediante un precio de ejercicio K en el instante $T < T_s$, instante en que vence dicha permuta. Dicho de otro modo, una *swaption* se puede interpretar como una opción a intercambiar un bono a tipo de interés fijo por un bono a tipo de interés variable. Sea $V(s, L, t, T_s)$ el precio en el instante t del *swap*. El precio de la opción de compra puede obtenerse utilizando la condición

$$g(s, L) = \max\{V(s, L, T, T_s) - K, 0\}$$

en la fórmula (3.73). Un argumento similar es válido para las opciones sobre *swaps* de venta.

(h) Una **opción compuesta** es una opción sobre una opción. Por tanto, tiene dos precios y dos fechas de ejercicio, $T_1 < T_2$. Tenemos cuatro posibles combinaciones: opción de compra sobre opción de compra, opción de compra sobre opción de venta, opción de venta sobre opción de compra y opción de venta sobre opción de venta. El poseedor de las dos primeras tiene el derecho a realizar una compra mientras las dos últimas otorgan el derecho a realizar una venta-

Si consideramos una opción de compra sobre una opción de compra, en el instante T_1 , el poseedor de esta opción compuesta tiene el derecho a comprar la opción subyacente de compra al primer precio de ejercicio, K_1 . Esta segunda opción de compra le da derecho a comprar, en el instante T_2 , un bono que vence en el instante T_3 para lo cual debe pagar un segundo precio de ejercicio, K_2 .

Se ejerce esta opción compuesta en el instante T_1 si el precio - en esa fecha - de la opción subyacente, $C(s, L, T_1, T_2; K_2, T_3)$, es mayor que el primer precio de ejercicio. Por tanto, el pago terminal en T_1 de la opción compuesta es

$$g(s_{T_1}, L_{T_1}) = \max\{C(s, L, T_1, T_2; K_2, T_3) - K_1, 0\}$$

(i) Una **opción a la medida** (*"as you like it" option*) es una opción en la que su poseedor, en el instante T_1 , puede elegir entre una opción de compra o de venta. Así, el valor en este instante de esta opción es

$$\max\{C, P\}$$

donde C y P son los precios de las opciones (de compra o de venta) entre las que puede elegir, respectivamente.

Suponemos que ambas opciones son europeas, tienen el mismo precio de ejercicio, K , y que ambas vencen en el instante T_2 . El activo subyacente de estas opciones es un

bono que vence en el instante T_3 . Mediante la paridad call-put (3.78), se obtiene que

$$\begin{aligned}\max\{C, P\} &= \max\{C, C + KP(s, L, T_1, T_2) - P(s, L, T_1, T_3)\} \\ &= C + \max\{KP(s, L, T_1, T_2) - P(s, L, T_1, T_3), 0\}\end{aligned}$$

Por tanto, esta opción es una combinación de (1) una opción de compra con precio de ejercicio K y vencimiento en T_2 y (2) una opción de venta con precio de ejercicio igual a $KP(s, L, T_1, T_2)$ y vencimiento en T_1 . Por tanto, este tipo de opción puede valorarse utilizando las fórmulas obtenidas para opciones sobre bonos al descuento.

Si las opciones subyacentes (entre las que se puede elegir) difieren en el precio de ejercicio y/o en el tiempo de vencimiento, este tipo de opción es similar a una opción compuesta, previamente analizada y valorada.

(j) Una **opción binaria** es una opción con pagos discontinuos. Centrándonos en opciones de compra, dos ejemplos de este tipo de opciones son (1) *cash or nothing call* y (2) *asset or nothing call*.

Una “cash or nothing call” paga una cantidad fija predeterminada, Q , si la opción está “en dinero” en el vencimiento y no paga nada en cualquier otro caso. Es decir, este tipo de opción no paga nada si el precio P del bono subyacente es inferior al precio de ejercicio K y paga una cantidad fija Q si el precio del bono es superior al precio de ejercicio de la opción. Sean T_c y T_b las fechas de vencimiento de la opción de compra y del bono subyacente, respectivamente. El pago terminal de esta opción viene dado por

$$\frac{Q}{P(s, L, T_c, T_b) - K} \max\{P(s, L, T_c, T_b) - K, 0\}$$

Una “asset or nothing call” no paga nada si el precio del bono P es inferior al precio de ejercicio K y paga una cantidad igual al precio del bono si éste es superior al precio

de ejercicio. Por tanto, su pago terminal viene dado por

$$\frac{P(s, L, T_c, T_b)}{P(s, L, T_c, T_b) - K} \max\{P(s, L, T_c, T_b) - K, 0\}$$

donde T_c y T_b son las fechas en que vencen la opción de compra y el bono subyacente, respectivamente,

Muchos otros tipos de opciones pueden ser valoradas mediante un enfoque similar al expuesto. De modo análogo al que hemos visto previamente, también podemos valorar **opciones americanas**. Este tipo de opciones puede ejercerse en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento en contraste con las opciones europeas que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento. Consideramos una opción de compra americana con precio de ejercicio igual a K y que vence en el instante T_c . Suponemos que el activo subyacente de esta opción es un bono que paga continuamente dividiendos a una tasa $\alpha(t)$ y que vence en el instante $T_b > T_c$. Denotando como $P(s, L, t, T_b)$ el precio en el instante t del bono subyacente, el precio en el instante t , $V(s, L, t, T_c; K, T_b)$, de esta opción americana se deriva de la ecuación (3.63) con las condiciones terminales

$$V(s, L, T_c, T_c; K, T_b) = \max\{P(s, L, T_c, T_b) - K, 0\} \quad (3.86)$$

$$\lim_{(s, L) \rightarrow \mathcal{B}} V(s, L, t, T_c; K, T_b) = P(s, L, t, T_b) - K \quad (3.87)$$

$$\lim_{(s, L) \rightarrow \mathcal{B}} \frac{\partial V(s, L, t, T_c; K, T_b)}{\partial P(s, L, t, T_b)} = -1 \quad (3.88)$$

donde \mathcal{B} es la región de ejercicio, que representa el conjunto de los precios de bonos por encima de los cuales es óptimo ejercer la opción americana. Las condiciones (3.87) y (3.88) son llamadas “value matching” y “supper contact”, respectivamente.

3.6 Aplicación Empírica

En esta sección se describen las características básicas de la aplicación empírica que hemos llevado a cabo. El diferencial de tipos de interés (*spread*) y el tipo de interés a largo plazo son las variables de estado de nuestro modelo de dos factores. El tipo de interés instantáneo sin riesgo y el tipo de interés a largo plazo son aproximados por los tipos de interés a 1 día y 10 años, respectivamente.

Nuestros datos son diarios, corresponden a tipos de interés y precios de bonos cupón-cero y fueron obtenidos gracias al Servicio de Estudios del Banco de España³. Los datos para los precios de los bonos cupón-cero comprenden desde el 2 de Enero de 1991 hasta el 29 de Diciembre de 1995. Consideramos diez vencimientos: 1, 7 y 15 días, 1, 3 y 6 meses y 1, 3, 5 y 10 años. Los tipos de interés están expresados en valores anualizados (compuestos continuamente) y comprenden el mismo período muestral, habiendo un total de 1230 observaciones.

Los gráficos del diferencial de tipos de interés y de los tipos de interés así como su primera diferencia se incluyen en las Figuras 3.3 y 3.4. Las dos series de tipos de interés crecen en los períodos Marzo-Octubre de 1992 y desde Junio de 1994 hasta Marzo de 1995 y decrecen en el primer semestre de 1991, en el período Junio-Diciembre de 1993 (donde alcanzan su valor mínimo, cercano al 7%) y en el segundo semestre de 1995. Los tipos de interés a corto plazo superan el 10% hasta Octubre de 1993 mientras los tipos de interés a largo plazo superan este nivel en todo el período muestral excepto desde Junio de 1993 hasta Junio de 1994.

Centrándonos en la primera diferencia de las variables, la mayoría de los cambios en los tipos de interés a corto plazo son inferiores a 100 puntos básicos. Los mayores

³Véase Nuñez (1995) para más detalles sobre estos datos y el método de estimación utilizados para su construcción.

cambios en esta variable (alrededor de un 4%) corresponden a la segunda semana de Mayo de 1993. Por otro lado, los cambios en los tipos de interés a largo plazo son mucho más suaves. Estos cambios se dan en un intervalo mucho más estrecho y nunca superan los 80 puntos básicos. Por tanto, los cambios en el diferencial de tipos de interés son similares a los cambios en los tipos de interés a corto plazo. Así, el diferencial no suele variar más de un 1% excepto en la segunda semana de Mayo de 1993 cuando observamos los máximos cambios en esta variable, cercanos al 4%.

Las tablas I–III incluyen los estadísticos descriptivos y la estructura de correlación y de autocorrelación para todas las variables de estado. En concreto, la Tabla I incluye la media aritmética, la varianza, los valores extremos y los coeficientes de asimetría y de exceso de curtosis de las variables de estado. Estas características numéricas relacionadas con la localización, dispersión y forma se calculan para nuestros datos durante todo el período muestral. El coeficiente de autocorrelación de primer orden, denotado por ρ_1 , también se incluye en esta tabla.

Para los dos tipos de interés, la media incondicional es superior al 10%. El tipo de interés a corto plazo es más volátil y se mueve a lo largo de un intervalo de valores más amplio que el tipo de interés a largo plazo. Por otro lado, el diferencial de tipos de interés tiene un valor medio muy cercano a cero y toma valores entre -4% y 8% . Los tipos de interés a corto plazo alcanzan sus valores máximo (18.21%) y mínimo (6.53%) el 13 de Mayo de 1993 y el 7 de Junio de 1994, respectivamente. Análogamente, los valores extremos de los tipos de interés a largo plazo (13.28% y 7.58%) se dan el 6 de Febrero de 1991 y el 1 de Febrero de 1994, respectivamente.

La matriz de correlaciones muestra la escasa correlación que existe entre el *spread* y el tipo de interés a largo plazo. Los coeficientes de autocorrelación de orden j de las variables de estado se incluyen en la Tabla III. Estos coeficientes son cercanos a

la unidad y decaen muy lentamente. Por tanto, la principal característica de nuestros datos es el alto grado de correlación serial que presentan todas las series.

Los rasgos más destacados en relación con la primera diferencia de los datos originales se reflejan en las Tablas IV-VI. Se observa que los cambios medios en los tipos de interés son negativos pero bastante cercanos a cero. Por tanto, se deduce que, en este período muestral, ha habido un pequeño descenso - en media - en los tipos de interés. Como este valor medio decrece con el vencimiento del tipo de interés, deducimos que los tipos de interés a largo plazo descienden menos que los tipos de interés a corto plazo. Como consecuencia, el valor medio de los cambios en el *spread* es negativo.

Los cambios en los tipos de interés a largo plazo están menos dispersos que los cambios en los tipos de interés a corto plazo. Estos datos muestran un gran coeficiente de curtosis (indicativo de colas pesadas en la distribución de las variables) aunque este coeficiente decrece con el vencimiento.

La Tabla V incluye los coeficientes de correlación entre las variables que reflejan los cambios de las variables de estado. Esta tabla muestra la pequeña correlación que existe entre los cambios del *spread* y los cambios de los tipos de interés a largo plazo y, por tanto, sugiere que nuestro supuesto teórico sobre las variables de estado se corrobora empíricamente.

La Tabla VI muestra la estacionariedad de los cambios de las variables de estado. Los coeficientes de autocorrelación de la primera diferencia de los datos decae más rápidamente (en comparación con las variables en niveles) y son prácticamente nulos para retardos suficientemente grandes. Como el coeficiente de autocorrelación de primer orden, ρ_1 , es negativo en todas las variables, deducimos que el *spread* y los tipos de interés muestran evidencia de reversión a la media.

A continuación, presentamos el comportamiento empírico del modelo de dos factores

en comparación con un modelo de un factor que supone que la única variable de estado relevante es el tipo de interés a corto plazo. Análogamente a lo realizado para las variables de estado del modelo de dos factores, realizamos los siguientes supuestos:

Supuesto 3 *El precio de mercado del riesgo del tipo de interés a corto plazo es lineal en esta variable, es decir*

$$\lambda_3(\cdot) = e + fr \quad (3.89)$$

Supuesto 4 *El tipo de interés a corto plazo sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck*

$$dr = k_3(\mu_3 - r)dt + \sigma_3 dw_3 \quad (3.90)$$

El parámetro k_3 refleja la velocidad de ajuste del tipo de interés a corto plazo hacia su valor medio a largo plazo, μ_3 , σ_3 es la (constante) desviación típica de esta variable de estado y dw_3 es un proceso Gauss-Wiener.

Utilizando este modelo de un único factor, la expresión analítica del precio de un bono al descuento libre de riesgo viene dada por

$$P(s, L, t, T) = P(s, L, \tau) = A_3(\tau)e^{-D(\tau)r} \quad (3.91)$$

donde

$$\begin{aligned} A_3(\tau) &= \exp\left\{-\frac{\sigma_3^2}{4q_3}D^2(\tau) + r^*(D(\tau) - \tau)\right\} \\ D(\tau) &= (1 - e^{-q_3\tau})/q_3 \end{aligned} \quad (3.92)$$

con

$$q_3 = k_3 + f\sigma_3, \quad r^* = \hat{\mu}_3 - \sigma_3^2/(2q_3^2), \quad \hat{\mu}_3 = (k_3\mu_3 - e\sigma_3)/q_3 \quad (3.93)$$

Cada variable de estado del modelo de dos factores, s y L , así como el tipo de interés a corto plazo, r , sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck (véanse las ecuaciones (3.14) y (3.90)). Los parámetros de difusión de estos procesos ($k_i, \mu_i, \sigma_i, i = 1, 2, 3$)

se estiman mediante mínimos cuadrados ordinarios. La especificación econométrica en tiempo discreto es

$$\begin{aligned} s_t - s_{t-1} &= a_1 + b_1 s_{t-1} + \varepsilon_t^s, & \varepsilon_t^s &\sim IID(0, \sigma_1^2) \\ L_t - L_{t-1} &= a_2 + b_2 L_{t-1} + \varepsilon_t^L, & \varepsilon_t^L &\sim IID(0, \sigma_2^2) \\ r_t - r_{t-1} &= a_3 + b_3 r_{t-1} + \varepsilon_t^r, & \varepsilon_t^r &\sim IID(0, \sigma_3^2) \end{aligned} \quad (3.94)$$

con

$$\text{Cov}(\varepsilon_t^s, \varepsilon_t^L) = \text{Cov}(\varepsilon_t^s, \varepsilon_t^r) = \text{Cov}(\varepsilon_t^L, \varepsilon_t^r) = 0$$

por lo que

$$\begin{aligned} k_1 &= -b_1, & \mu_1 &= -\frac{a_1}{b_1} \\ k_2 &= -b_2, & \mu_2 &= -\frac{a_2}{b_2} \\ k_3 &= -b_3, & \mu_3 &= -\frac{a_3}{b_3} \end{aligned}$$

Los resultados de la estimación que se obtienen para el período completo 1991-1995 se incluyen en la Tabla VII y muestran cómo los parámetros b_i de la especificación en tiempo discreto son diferentes de cero. Por tanto, los parámetros de difusión k_i son también significativamente distintos de cero y, como consecuencia, existe evidencia de reversión a la media en los tipos de interés así como en el diferencial de tipos de interés. Los dos tipos de interés tienden a un valor cercano al 10%. El *spread* tiende a un valor medio cercano a cero y es la variable de estado con mayor velocidad de reversión a la media.

Una vez que hemos estimado los parámetros de difusión de los procesos Vasicek que siguen las tres variables de estado (el *spread* y el tipo de interés a largo plazo en el modelo de dos factores y el tipo de interés a corto plazo en el modelo de un factor), se pueden utilizar los valores de estos parámetros de estos parámetros ($k_i, \mu_i, \sigma_i, i = 1, 2, 3$) para obtener los restantes parámetros de las ecuaciones (3.23) y (3.91).

Así, siguiendo Das (1994a), utilizamos las especificaciones

$$\begin{aligned} P &= P(q_1, q_2, s^*, L^* | k_1, k_2, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2; s, L, \tau) + \varepsilon \\ P &= P(q_3, r^* | k_3, \mu_3, \sigma_3; r, \tau) + \varepsilon \end{aligned} \quad (3.95)$$

donde P es el precio observado en el instante t del bono al descuento, $P(\cdot)$ es la expresión cerrada obtenida para el precio del bono en cada modelo (véanse las ecuaciones (3.23) y (3.91)) y ε es un término de error.

Empleamos un panel de datos consistente en una serie temporal de curvas de tipos que contiene una sección cruzada de precios de bonos cupón-cero para estimar los parámetros $(q_i, i = 1, 2, 3, s^*, L^*, r^*)$ de la ecuación (3.95) en cada uno de los días del período 1991-1995. Así, tenemos una matriz de datos con 1230 filas y 10 columnas. La fila i contiene los (diez) precios de bonos cupón-cero de que disponemos en el día i . Cada columna incluye los precios de bonos que corresponden a un cierto vencimiento: la primera columna contiene los precios diarios de los bonos a 1 día, la segunda columna contiene los precios diarios de los bonos a 7 días, ..., y la última columna incluye los precios diarios de los bonos que vencen dentro de diez años.

Estimamos la ecuación no lineal (3.95) para cada día del período 1991-1995. Esta estimación, aplicada a la primera ecuación, proporciona los parámetros del modelo de dos factores (es decir, q_1, q_2, s^* y L^*) mientras que la estimación de la segunda ecuación nos proporciona los parámetros del modelo de un factor, es decir, q_3 y r^* . Los resultados de la estimación diaria de los parámetros de ambos modelos se incluyen en la Tabla VIII. Esta tabla muestra la media de los valores estimados que se han obtenido para todo el período muestral y refleja que todos los parámetros son altamente significativos.

Llegados a este punto, podemos utilizar los valores estimados de los parámetros del sistema de ecuaciones (3.95) junto con las ecuaciones (3.25) y (3.93) y los Supuestos 1 y 3 para obtener explícitamente los precios (diarios) de mercado del riesgo relacionado

con cada una de las variables de estado. Un resumen de estos valores se incluye en la Tabla IX. El Panel A de esta tabla incluye la media de los precios de mercado del riesgo para el período completo 1991-1995 y el Panel B incluye la media de estos precios cuando dividimos el período total en años.

Para el período completo, se puede observar que los precios de mercado del riesgo de las tres variables de estado son positivos y significativamente diferentes de cero. El valor medio más alto corresponde al tipo de interés a largo plazo mientras el mínimo valor medio es el correspondiente al diferencial de tipos de interés.

Dividiendo este período por años, los parámetros también son significativamente diferentes de cero. Operando con el modelo de un factor, el valor medio del precio de mercado es positivo en los tres primeros años alcanzándose los máximos valores en 1993. El precio medio de mercado del riesgo del diferencial de tipos de interés es también negativo en los dos últimos años del período considerado. Por otro lado, el precio de mercado del riesgo de los tipos de interés a largo plazo tiene un valor (medio) positivo en 1993 (donde alcanza su máximo) y en 1995 siendo negativo en los restantes años.

También podemos utilizar los valores obtenidos en la estimación del sistema de ecuaciones (3.95) junto con los valores estimados para los parámetros de difusión para analizar las propiedades (dentro y fuera de la muestra) del modelo de dos factores en comparación con el modelo unifactorial.

Así, utilizamos ambos modelos para estimar los datos en el período 1991-1994 y para predecir estos datos en el año 1995. Cada día del período 1991-1994, los datos estimados se obtienen mediante la inclusión de los parámetros (diarios) estimados y de los parámetros de difusión estimados en el sistema de ecuaciones (3.95). Para generar predicciones k -pasos hacia adelante para los precios diarios de los bonos, en ambos

modelos, tomamos los coeficientes estimados en el día t . Estos valores estimados se utilizan para generar las predicciones correspondientes al día $t+k$. Este procedimiento se continúa a lo largo del período de predicción hasta el último día de 1995.

Después de obtener los valores estimados (dentro de la muestra) y predichos (fuera de la muestra), calculamos los errores de valoración (dentro y fuera de la muestra) de ambos modelos para realizar la comparación entre ellos. Así, definimos, para el día t , el error, e_t , y el error porcentual, PE_t , como

$$e_t = P_t - \hat{P}_t$$

y

$$PE_t = \frac{P_t - \hat{P}_t}{P_t} 100$$

donde P_t y \hat{P}_t son, respectivamente, el precio observado y estimado, en el día t del bono al descuento con un cierto vencimiento.

Los errores de valoración, en términos absolutos y porcentuales, para ambos modelos, en el período completo de estimación están incluidos en las Figuras 3.5 y 3.6. Considerando los vencimientos inferiores a un mes, se puede ver - en ambos modelos - un gran error de valoración en la segunda semana de Mayo de 1993. Este error coincide con un brusco cambio (mencionado anteriormente) en los tipos de interés a corto plazo y en el *spread*. Este gran error también aparece en los vencimientos restantes cuando utilizamos el modelo de dos factores.

El modelo de un factor, para vencimientos de 3 meses a 3 años, sobreestima el precio de los bonos entre 1991 y 1992, período donde los tipos de interés a corto superan el 10%. En estos vencimientos, los mayores errores positivos, que indican infravaloración, se dan en el primer semestre de 1994, período en el que los tipos de interés a corto plazo fueron inferiores al 8%. Para el mayor vencimiento, 10 años, el modelo de un factor refleja el resultado opuesto: infravaloración en 1991-1992 y sobrevaloración

desde Enero de 1993 hasta Junio de 1994. Finalmente, la contemplación de estas dos representaciones gráficas no sugiere que los errores del modelo de dos factores sigan un patrón de modo sistemático.

Denotando por N el número de días del período (o subperíodo) que se ha considerado, calculamos cinco medidas diferentes relacionadas con los errores de valoración para comparar los resultados de ambos modelos:

1. **Error Medio (ME)**. Esta medida da igual peso a los errores de cada día. Si los errores son sumados, los valores positivos pueden cancelarse con los valores negativos y el error medio puede ser pequeño, aunque los errores diarios sean de gran tamaño. Esta medida se define como

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_t = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (P_t - \hat{P}_t)$$

2. **Error Absoluto Medio (MAE)**. Esta medida es también conocida como desviación absoluta media. Al igual que el error medio, también pondera igual a todos los errores diarios aunque ahora los valores positivos y negativos no se cancelan. Su expresión es

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |e_t| = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |P_t - \hat{P}_t|$$

3. **Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RMSE)**. Es una de las medidas de ajuste más empleadas. Esta medida supone que la función de pérdida es cuadrática y su definición es

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (e_t)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (P_t - \hat{P}_t)^2}$$

4. **Error Absoluto Medio Porcentual (MAPE)** Esta medida es similar al error absoluto medio pero pondera cada error mediante el precio del bono observado en el

día. Esta medida viene dada por

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |PE_t|$$

5. Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio Porcentual (RMSPE). Es similar a la raíz cuadrada del error cuadrático medio con la diferencia de que los errores diarios son ponderados mediante el precio del bono observado en el día de estimación. Su expresión es

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (PE_t)^2}$$

Estas medidas, utilizando ambos modelos, se calculan para los períodos de estimación y de predicción así como para diferentes subperíodos. Estos resultados se incluyen en las Tablas X-XII y en las Tablas XIII-XVI, respectivamente.

Así, los resultados para el período completo de estimación (1991-1994) se incluyen en la Tabla X. En este período, el modelo de un factor sobreestima los precios de los bonos con vencimiento inferior a 6 meses así como el precio de los bonos a 10 años. Por otro lado, el modelo de dos factores infravalora los bonos que vencen antes de un año así como los bonos a 10 años.

Puede verse que ambos modelos ajustan muy bien los datos. Aunque las medidas relacionadas con los errores de valoración crecen con el tiempo hasta el vencimiento, el error absoluto medio porcentual (MAPE) del modelo de uno y dos factores nunca sobrepasa el 1.6% y el 0.3%, respectivamente.

Los estadísticos MAE y MAPE indican que los valores estimados con el modelo de dos factores se ajustan más a los datos que los estimados con el modelo de un factor. Así, los valores estimados con el modelo de dos factores reducen los estadísticos correspondientes al modelo de un factor en más de la mitad si consideramos los bonos que

vencen antes de un año mientras que esta mejora se eleva a más del 80% si examinamos los bonos a 3 y 10 años.

Esta tabla también refleja que, utilizando un criterio basado en el cuadrado de los errores (RMSE o RMSPE), el modelo de dos factores genera unos valores estimados mucho más cercanos a los datos, especialmente en bonos a 3 y 10 años. Solamente en el caso de bonos a 1 y 3 meses, el modelo de un factor se comporta ligeramente mejor que el modelo de dos factores.

La Tabla XI incluye las medidas relacionadas con los errores de estimación correspondientes al año 1992. El modelo de un factor produce una ligera sobrevaloración en todos los vencimientos, excepto en los bonos a 10 años. Como en el período 1991-1994, el modelo de dos factores sobreestima ligeramente los precios de los bonos que vencen antes de seis meses.

Todos los estadísticos muestran la superioridad en el ajuste del modelo de dos factores con respecto al modelo de un factor. Puede verse que, en todos los vencimientos excepto 5 años, las medidas de los errores del modelo de un factor triplican las correspondientes al modelo de dos factores. Como en el período total de estimación, las mayores mejoras en el ajuste de los datos se encuentran en los bonos a 3 y 10 años donde los estadísticos del modelo de dos factores son menos del 20% de los obtenidos con el modelo de un factor.

Para concluir con los resultados de la estimación, finalizamos con la Tabla XII que contiene las medidas de los errores para cada semestre⁴ del período 1991-1994 cuando nos centramos en bonos a 10 años.

Para estos bonos, basados en el estadístico MAPE, se puede ver que el modelo de un factor se comporta bastante bien en el período 1991-1992 mientras que su ajuste

⁴Otros subperíodos fueron analizados y las conclusiones no cambian cualitativamente.

empeora desde Junio de 1993 hasta Junio de 1994. Por otro lado, el modelo de dos factores se muestra superior en todos los semestres del período de estimación, ajusta especialmente bien en el primer semestre de 1992 y en el segundo de 1994 y su superioridad sobre el modelo de un factor es especialmente notable en los tres últimos semestres.

El poder predictivo de ambos modelos es analizado mediante predicciones uno y cinco pasos adelante de los precios diarios de los bonos, durante el año 1995, para cada vencimiento. Los estadísticos correspondientes se muestran en las Tablas XIII-XVI.

Las Tablas XIII-XIV incluyen los resultados para las predicciones un paso adelante mientras las dos últimas tablas contienen las predicciones cinco pasos hacia delante. Así, la Tabla XIII muestra que el comportamiento predictivo de ambos modelos es razonablemente bueno aunque empeora con el tiempo al vencimiento. Ambos modelos se comportan de modo similar en los vencimientos más cortos pero, a medida que se incrementa el vencimiento del bono, el modelo de dos factores predice mejor que el modelo de un factor. Así, todas las medidas de los errores se reducen más de un 20% cuando consideramos bonos que vencen después de tres años.

La Tabla XIV se centra en bonos a 10 años y detalla las predicciones realizadas en cada mes de 1995. El modelo de un factor se comporta mejor en el segundo semestre de este año siendo el estadístico MAPE siempre inferior al 1%. Análogamente, el estadístico MAPE correspondiente al modelo de dos factores suele ser cercano al 0.5%. El comportamiento de este modelo es especialmente bueno en el primer cuatrimestre de 1995 cuando se reducen los errores del modelo de un factor en más de un 40%.

Las dos últimas tablas muestran los resultados que se han obtenido, en ambos modelos, cuando se predice cinco pasos hacia adelante. Similarmente a la Tabla XIII, la Tabla XV incluye las predicciones para todos los precios de los bonos en el año 1995.

El poder predictivo es ligeramente inferior al correspondiente a las predicciones anteriores y esta capacidad predictiva decae con el tiempo hasta el vencimiento. En ambos modelos, los errores de predicción, en términos porcentuales, son inferiores al 1% en todos los vencimientos excepto en los bonos a 10 años. Como antes, ambos modelos se comportan similarmente en los vencimientos inferiores a tres meses. La superioridad del modelo de dos factores es más débil que en las predicciones anteriores pero aún se consigue una mejora (10%) en la predicción de los precios de los bonos a 10 años.

Finalmente, la Tabla XVI incluye los resultados de predicción, dividiendo el año 1995 en trimestres, para bonos a 6 meses y a 10 años. En los bonos a 6 meses, el estadístico MAPE es inferior al 0.11% en todos los subperíodos. Ambos modelos predicen mejor en el segundo semestre de 1995. El modelo de dos factores mejora la capacidad predictiva del modelo de un factor en, al menos, un 10% en todos los trimestres. Si consideramos bonos a 10 años, el estadístico MAPE toma valores entre el 1% y el 2.5%. Una vez más, el modelo de dos factores predice mejor y reduce los estadísticos MAE y MAPE en un 20% en el primer trimestre de este año. En los restantes trimestres, la mejora de predicción nunca supera el 11%.

3.7 Conclusiones

En este capítulo hemos presentado un modelo de dos factores para la estructura temporal de los tipos de interés. El principal supuesto que hemos realizado es que el precio de los bonos al descuento libres de riesgo es función de dos variables de estado y del tiempo al vencimiento. Estas variables de estado son el tipo de interés a largo plazo y el diferencial de tipos de interés (*spread*), que es igual a la diferencia entre el tipo de interés (instantáneo) a corto plazo sin riesgo y el tipo de interés a largo plazo.

Suponiendo que ambos factores siguen un proceso Ornstein-Uhlenbeck, hemos hallado una ecuación general de valoración de bonos que debe cumplir el precio de todos los bonos al descuento libres de riesgo. Una vez obtenida la expresión analítica para el precio de bonos cupón-cero con cualquier vencimiento, hemos examinado las implicaciones de esta expresión para la estructura temporal de los tipos de interés.

También hemos calculado una expresión cerrada que permite la valoración de activos derivados. Esta fórmula ha sido aplicada para valorar opciones europeas sobre bonos al descuento. Hemos mostrado la similitud entre esta expresión y la derivada por Black-Scholes. Más aún, hemos extendido esta fórmula a la valoración de opciones sobre carteras de bonos al descuento. Como consecuencia, podemos valorar cualquier opción europea sobre bonos con cupón. También hemos ilustrado el empleo de esta fórmula para valorar analíticamente otros tipos de opciones más complejas.

Finalmente, hemos presentado el comportamiento empírico de este modelo en comparación con un modelo de un factor que supone que la única variable de estado relevante es el tipo de interés a corto plazo. Los parámetros de difusión han sido estimados mediante mínimos cuadrados ordinarios y los resultados sugieren evidencia de reversión a la media en los tipos de interés así como en el diferencial de tipos de interés. Los restantes parámetros se han estimado mediante un procedimiento de sección cruzada que nos permite identificar los precios de mercado del riesgo relacionados con cada una de las variables de estado. Para el período muestral completo, hemos mostrado que los precios de mercado del riesgo de las tres variables de estado son positivos y significativamente diferentes de cero.

Ha sido evaluada la capacidad de ambos modelos para estimar y predecir precios de bonos, siendo 1991-1994 y 1995 los períodos de estimación y predicción, respectivamente. Aunque ambos modelos ajustan los datos muy bien, los estadísticos de los

errores indican que los valores estimados mediante el modelo de dos factores reducen los errores del modelo de un factor en más de un 50% para todos los bonos. Más aún, las mayores mejoras en el ajuste se encuentran en los bonos a 3 y 10 años en los que todos los estadísticos del modelo de un factor se reducen en más de un 75%.

El poder predictivo de ambos modelos ha sido analizado mediante las predicciones (uno y cinco pasos hacia adelante) de los precios diarios de los bonos durante el año 1995, para cada vencimiento. Aunque la capacidad predictiva de ambos modelos es razonablemente buena, los estadísticos muestran que las predicciones un paso hacia adelante del modelo de dos factores se acercan más a los precios observados de los bonos que las predicciones obtenidas con el modelo de un factor. Ambos modelos se comportan de modo similar en los vencimientos más cortos pero, considerando bonos con mayor vencimiento, todas las medidas de los errores se reducen en más de un 20% cuando consideramos el modelo de dos factores.

La calidad de las predicciones cinco pasos hacia delante es inferior a la obtenida con las anteriores predicciones a un paso aunque ambos modelos aún predicen bastante bien. Las predicciones empeoran con el tiempo al vencimiento pero sus errores, en términos porcentuales, son inferiores al 1% en la mayoría de los vencimientos. Aunque la superioridad del modelo de dos factores sobre el modelo de un factor es más débil que en las predicciones anteriores, aún se obtiene una mejora del 10% para los bonos de más largo vencimiento.

Por tanto, independientemente de los estadísticos que usemos, de los subperíodos que analicemos o de los vencimientos que consideremos, la evidencia empírica sugiere que el modelo de dos factores es más adecuado (tanto para estimar como para predecir) que el modelo de un factor.

Apéndice de Tablas y Representaciones Gráficas

Tabla I. Estadísticos Descriptivos de las Variables de Estado

Esta tabla incluye los estadísticos descriptivos de las variables de estado. La media aritmética, desviación típica, los valores extremos y los coeficientes de asimetría y el exceso de curtosis se calculan desde Enero de 1991 hasta Diciembre de 1995. Los datos están en términos porcentuales. N denota el número de observaciones

Variable	Spread	Tipo de Interés a l/p	Tipo de Interés a c/p
N	1230	1230	1230
Media	0.09257	10.4467	10.5393
Desviación típica	1.96963	1.0884	2.1808
Mínimo	-4.078	7.5794	6.5306
Máximo	7.433	13.2838	18.2134
Coef. de asimetría	-0.27139	-0.5503	0.16944
Exceso de curtosis	-0.59905	0.39954	-0.84618
ρ_1	0.9842	0.9919	0.9861

Tabla II. Matriz de Correlaciones de las Variables de Estado

Esta tabla incluye los coeficientes de correlación entre las variables de estado. Estos coeficientes se calculan desde Enero de 1991 hasta Diciembre de 1995. Los datos están en términos porcentuales.

Variable	Spread	Tipo de Interés a l/p	Tipo de Interés a c/p
Spread	1.0000		
Tipo de Interés a l/p	-0.0718	1.0000	
Tipo de Interés a c/p	0.8673	0.4342	1.0000

Tabla III. Estructura de Autocorrelación de las Variables de Estado

En esta tabla se incluyen los coeficientes de autocorrelación de orden j , denotados por ρ_j , de las variables de estado. Estos coeficientes se calculan desde Enero de 1991 hasta Diciembre de 1995. Los datos están en términos porcentuales.

	Spread	Tipo de Interés a l/p	Tipo de Interés a c/p
ρ_1	0.9842	0.9919	0.9861
ρ_2	0.9758	0.9854	0.9786
ρ_3	0.9718	0.9780	0.9745
ρ_4	0.9667	0.9718	0.9693
ρ_5	0.9625	0.9655	0.9647
ρ_6	0.9590	0.9591	0.9608
ρ_7	0.9534	0.9531	0.9554
ρ_8	0.9481	0.9468	0.9501
ρ_9	0.9439	0.9420	0.9457
ρ_{10}	0.9403	0.9361	0.9416
ρ_{11}	0.9376	0.9304	0.9380
ρ_{12}	0.9329	0.9247	0.9333

Tabla IV. Estadísticos Descriptivos de los Cambios en las Variables de Estado

Esta tabla incluye los estadísticos descriptivos de los cambios producidos en las variables de estado. La media aritmética, desviación típica, los valores extremos y los coeficientes de asimetría y de curtosis se calculan desde Enero de 1991 hasta Diciembre de 1995. Los datos originales están en términos porcentuales. N denota el número de observaciones

Variable	Spread	Tipo de Interés a l/p	Tipo de Interés a c/p
N	1229	1229	1229
Media	-0.00165	-0.00284	-0.00449
Desviación típica	0.34792	0.11608	0.3453
Mínimo	-4.0344	-0.7715	-4.0929
Máximo	3.3687	0.8188	3.417
Coef. de asimetría	-0.4659	-0.12488	-0.45456
Exceso de curtosis	25.0356	8.70715	27.553
ρ_1	-0.2393	-0.1508	-0.2565

Tabla V. Matriz de Correlaciones de los Cambios de las Variables de Estado

Esta tabla incluye los coeficientes de correlación entre los cambios de las variables de estado. Estos coeficientes se calculan desde Enero de 1991 hasta Diciembre de 1995. Los datos originales están en términos porcentuales.

Variable	Spread	Tipo de Interés a l/p	Tipo de Interés a c/p
Spread	1.0000		
Tipo de Interés a l/p	-0.1891	1.0000	
Tipo de Interés a c/p	0.9439	0.1456	1.0000

Tabla VI. Estructura de Autocorrelación de los Cambios de las Variables de Estado

En esta tabla se incluyen los coeficientes de autocorrelación de orden j , denotados por ρ_j , de los cambios de las variables de estado. Estos coeficientes se calculan desde Enero de 1991 hasta Diciembre de 1995. Los datos originales están en términos porcentuales.

	Spread	Tipo de Interés a l/p	Tipo de Interés a c/p
ρ_1	-0.2393	-0.1508	-0.2565
ρ_2	-0.1435	0.0356	-0.1415
ρ_3	0.0396	-0.0699	0.0451
ρ_4	-0.0312	-0.0099	-0.0289
ρ_5	-0.0261	0.0353	-0.0259
ρ_6	0.0693	-0.0577	0.0590
ρ_7	-0.0093	0.0920	-0.0030
ρ_8	-0.0374	-0.1064	-0.0281
ρ_9	-0.0157	0.0769	-0.0157
ρ_{10}	-0.0283	-0.0488	-0.0183
ρ_{11}	0.0625	-0.0010	0.0478
ρ_{12}	0.0497	0.0616	0.0460

Tabla VII. Estimación de los Parámetros de Difusión

Esta tabla incluye los valores estimados para los parámetros (con t -valores entre paréntesis) de los procesos Vasicek que siguen cada una de las variables de estado. El período muestral abarca desde Enero de 1991 hasta Diciembre de 1995. Los parámetros son estimados por el método de mínimos cuadrados ordinarios aplicado a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} s_t - s_{t-1} &= a_1 + b_1 s_{t-1} + \varepsilon_t^s, & \varepsilon_t^s &\sim IID(0, \sigma_1^2) \\ L_t - L_{t-1} &= a_2 + b_2 L_{t-1} + \varepsilon_t^L, & \varepsilon_t^L &\sim IID(0, \sigma_2^2) \\ r_t - r_{t-1} &= a_3 + b_3 r_{t-1} + \varepsilon_t^r, & \varepsilon_t^r &\sim IID(0, \sigma_3^2) \end{aligned}$$

con

$$\text{Cov}(\varepsilon_t^s, \varepsilon_t^L) = \text{Cov}(\varepsilon_t^s, \varepsilon_t^r) = \text{Cov}(\varepsilon_t^L, \varepsilon_t^r) = 0$$

Variable	a	b	k	μ	σ^2
Spread	-2.08×10^{-4} (-0.0210)	-0.01544 (-3.0756)	0.01544 (3.0756)	-0.01347 (-0.021)	0.3467
Tipo de Interés a l/p	0.0732 (2.2968)	-0.00728 (-2.3988)	0.00728 (2.3988)	10.05747 (20.881)	0.1159
Tipo de Interés a c/p	0.13086 (2.6980)	-0.01284 (-2.8498)	0.01284 (2.8498)	10.19102 (13.155)	0.3443

Tabla VIII. Media de los Parámetros Estimados en las Regresiones de Sección Cruzada

Esta tabla contiene los resultados de la estimación, para cada día del período 1991-1995, de los parámetros $(q_i, i = 1, 2, 3, s^*, L^*, r^*)$ en la expresión analítica, para ambos modelos, del precio de los bonos

$$P(s, L, t, T) = P(s, L, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)s - C(\tau)L}$$

donde

$$\begin{aligned} A(\tau) &= A_1(\tau)A_2(\tau) \\ A_1(\tau) &= \exp\left\{-\frac{\sigma_1^2}{4q_1}B^2(\tau) + s^*(B(\tau) - \tau)\right\} \\ A_2(\tau) &= \exp\left\{-\frac{\sigma_2^2}{4q_2}C^2(\tau) + L^*(C(\tau) - \tau)\right\} \\ B(\tau) &= (1 - e^{-q_1\tau})/q_1 \\ C(\tau) &= (1 - e^{-q_2\tau})/q_2 \end{aligned}$$

y

$$P(s, L, t, T) = P(s, L, \tau) = A_3(\tau)e^{-D(\tau)r}$$

donde

$$\begin{aligned} A_3(\tau) &= \exp\left\{-\frac{\sigma_3^2}{4q_3}D^2(\tau) + r^*(D(\tau) - \tau)\right\} \\ D(\tau) &= (1 - e^{-q_3\tau})/q_3 \end{aligned}$$

Los números en paréntesis representan la media de los t -valores de las regresiones de sección cruzada.

Los números en corchetes representan la desviación típica de las series temporales de los parámetros estimados.

Modelo de Un Factor		Modelo de Dos Factores			
q_3	r^*	q_1	q_2	s^*	L^*
1.8803	6.7638	0.4984	0.3909	-12.5420	0.0708
(47.32)	(583.88)	(65.24)	(52.02)	(-39.98)	(61.59)
[5.5197]	[10.8496]	[0.9849]	[0.6812]	[27.7878]	[30.2253]

Tabla IX. Media de los Precios de Mercado del Riesgo

Esta tabla contiene los resultados de la estimación, para cada día del período 1991-1995, de los precios de mercado del riesgo ($\lambda_i, i = 1, 2, 3$) relacionados con cada variable de estado. Los números en paréntesis representan la media de los t -valores de estos valores estimados. Los números en corchetes representan la desviación típica de las series temporales de los precios de mercado del riesgo estimados.

Panel A: Período 1991-1995

Modelo de Un Factor	Modelo de Dos Factores	
λ_3 (Tipo de Interés a c/p)	λ_1 (Spread)	λ_2 (Tipo de Interés a l/p)
3.5178	0.2386	4.8419
(34.54)	(5.09)	(15.22)
[13.1444]	[12.2793]	[41.8299]

Panel B: Período 1991-1995, año a año

	1991	1992	1993	1994	1995
λ_3	2.4644	0.9249	20.3565	-0.5997	-5.8946
(Tipo de interés a corto plazo)	(73.75)	(75.95)	(72.67)	(-11.00)	(-38.70)
	[5.9616]	[1.7058]	[15.5313]	[13.0031]	[3.2618]
λ_1	3.1513	1.8632	2.6534	-0.7678	-5.7401
(Diferencial de tipos de interés)	(46.88)	(34.10)	(1.19)	(-2.07)	(-54.31)
	[10.1866]	[5.6779]	[13.3915]	[18.0933]	[7.5040]
λ_2	-8.4789	-6.9682	37.8514	-1.7900	2.8856
(Tipo de interés a largo plazo)	(-49.31)	(-30.41)	(30.75)	(-29.76)	(1.75)
	[32.8720]	[15.2471]	[59.6728]	[44.0095]	[20.7386]

Tabla X. Medidas de los Errores de Estimación. 1991-1994

Esta tabla contiene las medidas relacionadas con los errores de estimación de los modelos de uno y dos factores para el período 1991-1994. Consideramos bonos cupón cero con valor nominal igual a \$1 y vencimientos desde 1 día hasta 10 años. Hemos calculado cinco medidas: el error medio (ME), el error absoluto medio (MAE), la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), el error absoluto medio porcentual (MAPE) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio porcentual (RMSPE).

Modelo de Un Factor					
Vencimiento	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
1 día	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000012	0.000020
7 días	-0.000002	0.000002	0.000005	0.000228	0.000463
15 días	-0.000005	0.000007	0.000016	0.000753	0.001570
1 mes	-0.000017	0.000028	0.000052	0.002849	0.005281
3 meses	-0.000078	0.000165	0.000256	0.016969	0.026337
6 meses	-0.000116	0.000424	0.000742	0.044640	0.078232
1 año	0.000106	0.001154	0.001969	0.127859	0.219042
3 años	0.001170	0.003030	0.004746	0.402362	0.632349
5 años	0.000208	0.002157	0.003050	0.358169	0.508367
10 años	-0.003633	0.006202	0.010055	1.587365	2.506414
Modelo de Dos Factores					
Vencimiento	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
1 día	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000010	0.000016
7 días	-0.000000	0.000001	0.000004	0.000106	0.000421
15 días	0.000000	0.000003	0.000015	0.000321	0.001519
1 mes	0.000003	0.000012	0.000053	0.001239	0.005413
3 meses	0.000034	0.000074	0.000273	0.007631	0.028254
6 meses	0.000109	0.000200	0.000712	0.021114	0.075686
1 año	0.000241	0.000480	0.001457	0.053265	0.162536
3 años	-0.000081	0.000517	0.001156	0.070541	0.159114
5 años	-0.000481	0.001547	0.002887	0.256526	0.467754
10 años	0.000157	0.000606	0.001535	0.167148	0.432554

Tabla XI. Medidas de los Errores de Estimación. 1992

Esta tabla contiene las medidas relacionadas con los errores de estimación de los modelos de uno y dos factores para el año 1992. Consideramos bonos cupón cero con valor nominal igual a \$1 y vencimientos desde 1 día hasta 10 años. Hemos calculado cinco medidas: el error medio (ME), el error absoluto medio (MAE), la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), el error absoluto medio porcentual (MAPE) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio porcentual (RMSPE).

Modelo de Un Factor					
Vencimiento	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
1 día	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000002	0.000003
7 días	-0.000001	0.000001	0.000001	0.000077	0.000149
15 días	-0.000003	0.000003	0.000006	0.000313	0.000640
1 mes	-0.000014	0.000015	0.000030	0.001481	0.003054
3 meses	-0.000114	0.000121	0.000246	0.012435	0.025345
6 meses	-0.000382	0.000407	0.000818	0.043320	0.087150
1 año	-0.001071	0.001137	0.002253	0.129028	0.256560
3 años	-0.001963	0.001995	0.004337	0.293732	0.644732
5 años	-0.000032	0.001308	0.002251	0.238129	0.421463
10 años	0.001693	0.001890	0.004296	0.600565	1.396797
Modelo de Dos Factores					
Vencimiento	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
1 día	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003	0.000005
7 días	0.000000	0.000000	0.000001	0.000035	0.000068
15 días	0.000000	0.000001	0.000002	0.000124	0.000230
1 mes	0.000001	0.000005	0.000009	0.000533	0.000940
3 meses	0.000005	0.000037	0.000062	0.003838	0.006357
6 meses	0.000002	0.000109	0.000188	0.011595	0.019969
1 año	-0.000042	0.000305	0.000510	0.034493	0.057827
3 años	-0.000081	0.000349	0.000500	0.050313	0.072872
5 años	0.000208	0.001013	0.001542	0.181938	0.281741
10 años	-0.000061	0.000341	0.000605	0.103375	0.187527

Tabla XII. Medidas de los Errores de Estimación. Bonos a 10 años

Esta tabla contiene las medidas relacionadas con los errores de estimación de los modelos de uno y dos factores para cada semestre del período 1991-1994. Consideramos bonos cupón cero con valor nominal igual a \$1 y que vencen a los 10 años. Hemos calculado cinco medidas: el error medio (ME), el error absoluto medio (MAE), la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), el error absoluto medio porcentual (MAPE) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio porcentual (RMSPE).

Modelo de Un Factor					
Período	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
1991:I	0.000248	0.001060	0.002724	0.337539	0.852722
1991:II	0.000076	0.000794	0.001811	0.232777	0.529352
1992:I	-0.000053	0.000313	0.000522	0.087562	0.148913
1992:II	0.003498	0.003521	0.006103	1.130811	1.986138
1993:I	-0.004414	0.004420	0.007783	1.246517	2.191687
1993:II	-0.018630	0.018630	0.018928	4.503009	4.590118
1994:I	-0.014238	0.015052	0.017290	3.511278	4.022404
1994:II	0.005308	0.005308	0.005577	1.537958	1.621560
Modelo de Dos Factores					
Período	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
1991:I	-0.000107	0.000380	0.000814	0.119866	0.253813
1991:II	0.000388	0.000718	0.001193	0.209669	0.348161
1992:I	-0.000023	0.000261	0.000420	0.071953	0.115901
1992:II	-0.000099	0.000425	0.000750	0.135853	0.240062
1993:I	-0.000184	0.001061	0.003271	0.309411	0.963612
1993:II	0.000468	0.000765	0.001397	0.186202	0.341814
1994:I	0.000892	0.001025	0.001746	0.245455	0.414290
1994:II	-0.000123	0.000181	0.000385	0.050999	0.107501

Tabla XIII. Predicciones un paso adelante. 1995

Esta tabla contiene las medidas relacionadas con los errores de predicción un paso adelante de los modelos de uno y dos factores para el año 1995. Consideramos bonos cupón cero con valor nominal igual a \$1 y vencimientos de 1 día a 10 años. Hemos calculado cinco medidas: el error medio (ME), el error absoluto medio (MAE), la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), el error absoluto medio porcentual (MAPE) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio porcentual (RMSPE).

Modelo de Un Factor					
Vencimiento	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
1 día	0.000000	0.000002	0.000004	0.000241	0.000353
7 días	0.000001	0.000016	0.000024	0.001648	0.002410
15 días	0.000003	0.000032	0.000047	0.003246	0.004740
1 mes	0.000011	0.000068	0.000098	0.006831	0.009912
3 meses	0.000074	0.000188	0.000264	0.019189	0.026946
6 meses	0.000213	0.000345	0.000472	0.036095	0.049372
1 año	0.000423	0.000592	0.000782	0.065144	0.086047
3 años	-0.000827	0.001647	0.002221	0.225719	0.306270
5 años	-0.001998	0.002710	0.003500	0.467543	0.609406
10 años	0.002731	0.003469	0.004322	1.035002	1.300559
Modelo de Dos Factores					
Vencimiento	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
1 día	0.000000	0.000002	0.000004	0.000241	0.000353
7 días	0.000000	0.000016	0.000024	0.001648	0.002410
15 días	0.000000	0.000032	0.000047	0.003242	0.004738
1 mes	-0.000001	0.000067	0.000098	0.006781	0.009874
3 meses	-0.000016	0.000180	0.000255	0.018363	0.026064
6 meses	-0.000065	0.000321	0.000436	0.033589	0.045608
1 año	-0.000209	0.000580	0.000767	0.063822	0.084462
3 años	-0.000239	0.001320	0.001790	0.180321	0.245460
5 años	0.000961	0.002096	0.002760	0.357493	0.473140
10 años	0.000177	0.002174	0.002889	0.641176	0.857203



Tabla XIV. Predicciones un paso adelante. Bonos a 10 años

Esta tabla contiene las medidas relacionadas con los errores de predicción un paso adelante de los modelos de uno y dos factores para cada mes del año 1995. Consideramos bonos cupón cero con valor nominal igual a \$1 y que vencen a los 10 años. Hemos calculado cinco medidas: el error medio (ME), el error absoluto medio (MAE), la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), el error absoluto medio porcentual (MAPE) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio porcentual (RMSPE).

Modelo de Un Factor					
Período	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
1995:I	0.006637	0.006637	0.007043	2.037704	2.161546
1995:II	0.005492	0.005492	0.005802	1.651017	1.743038
1995:III	0.003847	0.004455	0.005099	1.426704	1.632764
1995:IV	0.003368	0.003585	0.003896	1.131093	1.228890
1995:V	0.003515	0.004376	0.005721	1.296065	1.683145
1995:VI	0.002111	0.003443	0.004240	1.028990	1.263961
1995:VII	0.002515	0.003142	0.004035	0.924951	1.189217
1995:VIII	0.001255	0.002028	0.002312	0.579070	0.660393
1995:IX	0.000804	0.002788	0.003323	0.788667	0.941235
1995:X	0.000756	0.001676	0.002115	0.475194	0.599417
1995:XI	0.001623	0.002134	0.002423	0.585739	0.664042
1995:XII	0.000989	0.001852	0.002329	0.482712	0.608311

Tabla XIV (cont.). Predicciones un paso adelante. Bonos a 10 años

Esta tabla contiene las medidas relacionadas con los errores de predicción un paso adelante de los modelos de uno y dos factores para cada mes del año 1995. Consideramos bonos cupón cero con valor nominal igual a \$1 y que vencen a los 10 años. Hemos calculado cinco medidas: el error medio (ME), el error absoluto medio (MAE), la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), el error absoluto medio porcentual (MAPE) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio porcentual (RMSPE).

Modelo de Dos Factores					
Período	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
1995:I	-0.000097	0.001703	0.002181	0.524966	0.673928
1995:II	-0.000148	0.001449	0.001841	0.436042	0.554446
1995:III	-0.000615	0.002752	0.003596	0.885325	1.156787
1995:IV	0.000267	0.001483	0.001907	0.468220	0.603750
1995:V	0.000543	0.003592	0.004614	1.061447	1.351137
1995:VI	-0.000863	0.002836	0.003771	0.850663	1.135221
1995:VII	0.000135	0.002498	0.003163	0.735885	0.934982
1995:VIII	0.000309	0.001714	0.001953	0.489602	0.558105
1995:IX	0.000550	0.002790	0.003398	0.790182	0.963648
1995:X	0.000321	0.001597	0.002033	0.453225	0.576983
1995:XI	0.000914	0.001732	0.002053	0.475627	0.563572
1995:XII	0.001045	0.001725	0.002163	0.448974	0.564103

Tabla XV. Predicciones cinco pasos adelante. 1995

Esta tabla contiene las medidas relacionadas con los errores de predicción cinco pasos adelante de los modelos de uno y dos factores para el año 1995. Consideramos bonos cupón cero con valor nominal igual a \$1 y vencimientos desde 1 día a 10 años. Hemos calculado cinco medidas: el error medio (ME), el error absoluto medio (MAE), la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), el error absoluto medio porcentual (MAPE) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio porcentual (RMSPE).

Modelo de Un Factor					
Vencimiento	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
1 día	0.000000	0.000004	0.000006	0.000425	0.000599
7 días	0.000001	0.000029	0.000041	0.002912	0.004107
15 días	0.000003	0.000057	0.000081	0.005764	0.008117
1 mes	0.000013	0.000121	0.000170	0.012228	0.017145
3 meses	0.000089	0.000338	0.000469	0.034582	0.047975
6 meses	0.000265	0.000638	0.000871	0.066794	0.091163
1 año	0.000588	0.001208	0.001623	0.132807	0.178648
3 años	-0.000178	0.003421	0.004461	0.467336	0.613071
5 años	-0.001071	0.004838	0.006269	0.829320	1.085631
10 años	0.003801	0.006263	0.007752	1.843197	2.291128
Modelo de Dos Factores					
Vencimiento	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
1 día	0.000000	0.000004	0.000006	0.000425	0.000600
7 días	0.000000	0.000029	0.000041	0.002909	0.004112
15 días	0.000001	0.000057	0.000081	0.005751	0.008135
1 mes	0.000001	0.000120	0.000171	0.012137	0.017204
3 meses	-0.000003	0.000327	0.000469	0.033434	0.047936
6 meses	-0.000017	0.000590	0.000857	0.061792	0.089773
1 año	-0.000052	0.001140	0.001600	0.125428	0.176266
3 años	0.000457	0.003296	0.004247	0.449916	0.582409
5 años	0.001967	0.004852	0.006077	0.826338	1.039909
10 años	0.001142	0.005498	0.006991	1.617977	2.074195

Tabla XVI. Predicciones cinco pasos adelante. Bonos a 6 meses y 10 años

Esta tabla contiene las medidas relacionadas con los errores de predicción cinco pasos adelante de ambos modelos para cada trimestre del año 1995. Consideramos bonos cupón cero con valor nominal igual a \$1 y que vencen a 6 meses y a 10 años. Hemos calculado cinco medidas: el error medio (ME), el error absoluto medio (MAE), la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), el error absoluto medio porcentual (MAPE) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio porcentual (RMSPE).

Panel A: Bonos a 6 meses					
Período	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
Modelo de Un Factor					
1995:I	0.000076	0.001038	0.001306	0.108704	0.136850
1995:II	0.000313	0.000619	0.000765	0.064922	0.080179
1995:III	0.000281	0.000406	0.000557	0.042469	0.058307
1995:IV	0.000397	0.000489	0.000651	0.051043	0.067861
Modelo de Dos Factores					
1995:I	-0.000281	0.000992	0.001336	0.103954	0.140094
1995:II	-0.000056	0.000543	0.000718	0.056939	0.075213
1995:III	0.000016	0.000382	0.000508	0.039963	0.053153
1995:IV	0.000262	0.000442	0.000608	0.046100	0.063438
Panel B: Bonos a 10 años					
Período	ME	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
Modelo de Un Factor					
1995:I	0.003895	0.006470	0.007815	2.004213	2.424683
1995:II	0.004386	0.007751	0.009623	2.337035	2.877908
1995:III	0.002966	0.005815	0.007382	1.665991	2.114848
1995:IV	0.004015	0.005018	0.005661	1.364009	1.531478
Modelo de Dos Factores					
1995:I	-0.001815	0.005149	0.006909	1.612713	2.194463
1995:II	0.001280	0.006844	0.008548	2.063493	2.555043
1995:III	0.001610	0.005236	0.006751	1.498283	1.928249
1995:IV	0.003603	0.004780	0.005391	1.300279	1.460397

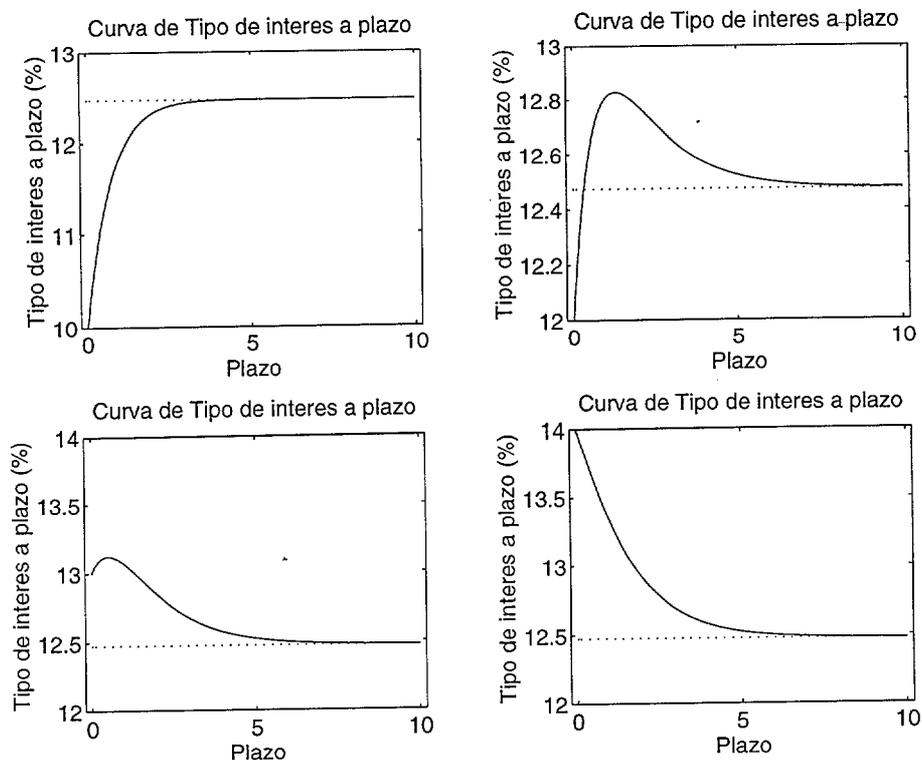


Figura 3.1: Curva de tipo de interés a plazo

El tipo de interés a plazo $f(s, L, t, T) \equiv f(s, L, \tau)$ en el instante t para el período futuro $T = t + \tau$ viene dado por

$$f(s, L, \tau) = r - q_1(s - \hat{\mu}_1)B(\tau) - q_2(L - \hat{\mu}_2)C(\tau) - \frac{1}{2} [\sigma_1^2 B^2(\tau) + \sigma_2^2 C^2(\tau)]$$

Los parámetros empleados corresponden al 2 de Enero de 1991: $q_1 = 1.3456$, $\hat{\mu}_1 = 4.5924$, $\sigma_1 = 0.3467$, $q_2 = 0.744$, $\hat{\mu}_2 = 7.9259$, $\sigma_2 = 0.1159$. Los valores de los dos factores, s y L , de izquierda a derecha y de arriba a abajo, vienen dados por los vectores $(2, 8)$, $(2, 10)$, $(3, 10)$ y $(4, 10)$, respectivamente

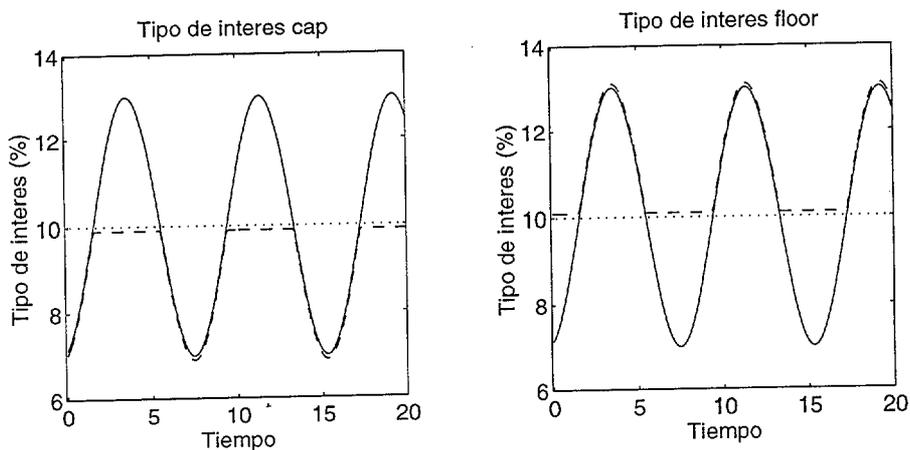


Figura 3.2: Tipo de interés efectivo para el prestatario con *caps* y *floors*.

Esta figura muestra el tipo de interés variable (línea continua), el tipo de interés cap y/o floor (línea punteada), y el tipo de interés efectivo para el prestatario (línea discontinua).

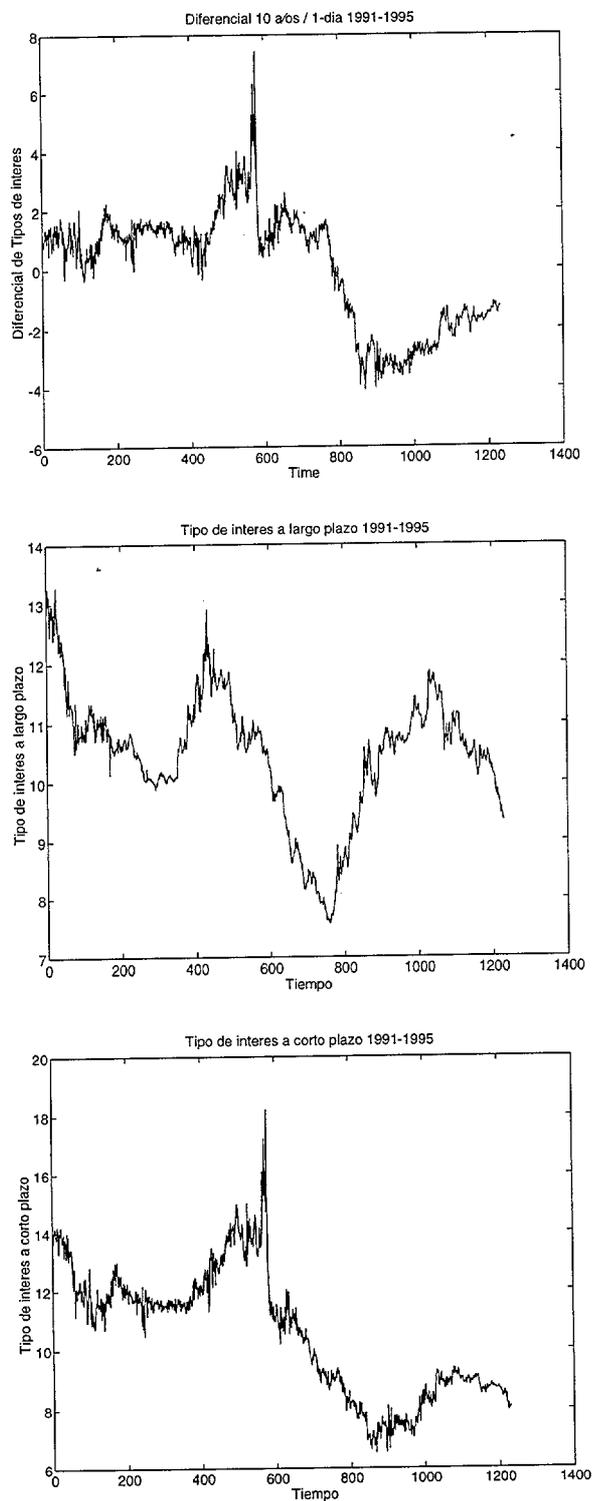


Figura 3.3: Representación gráfica de las variables de estado.

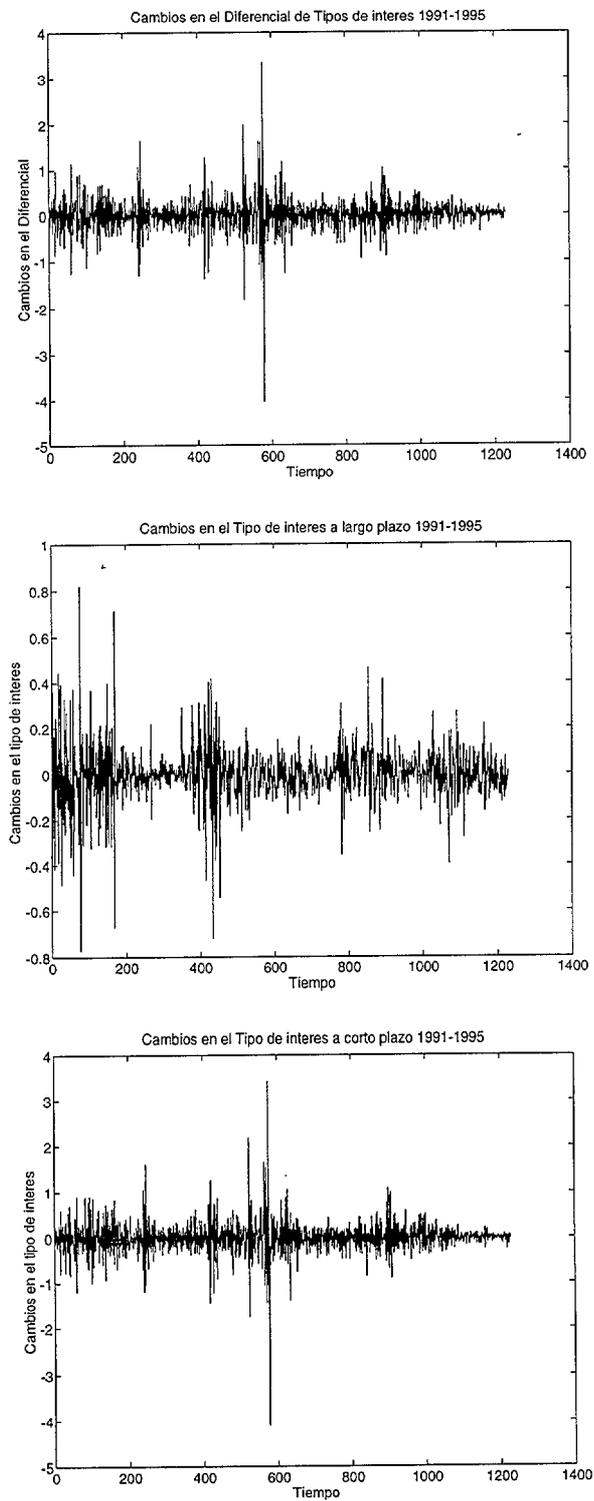
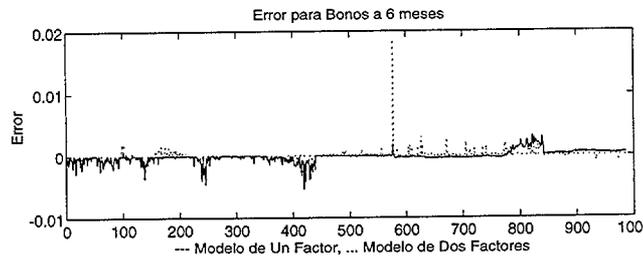
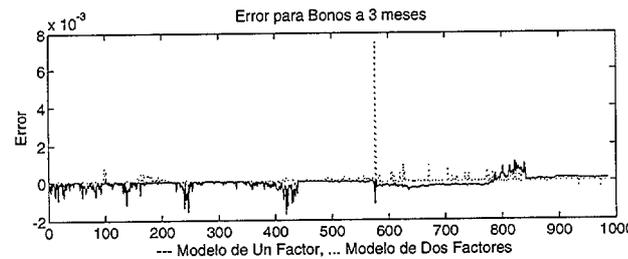
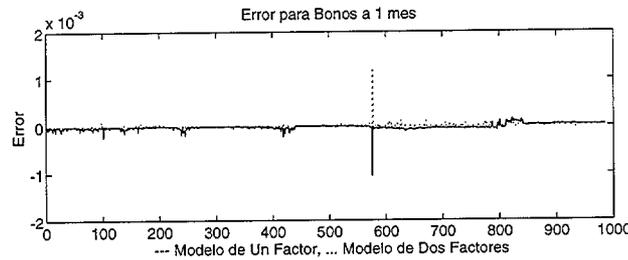
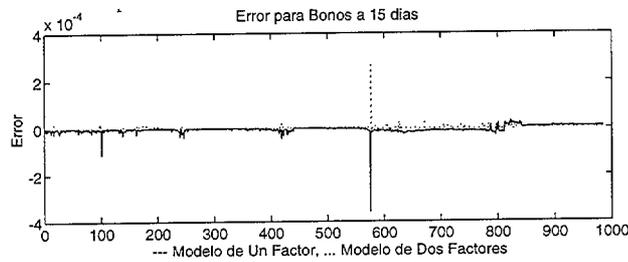
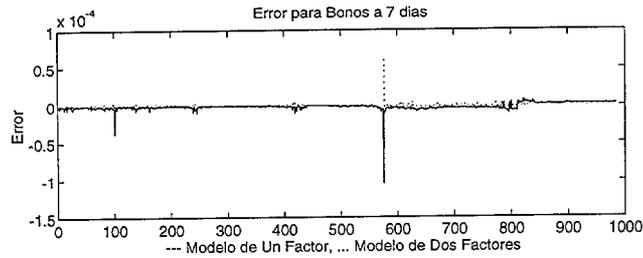
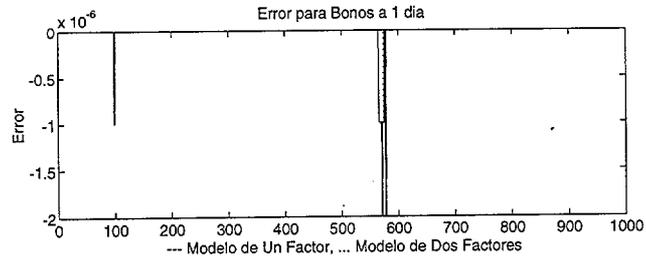


Figura 3.4: Representación gráfica de la primera diferencia de las variables de estado.



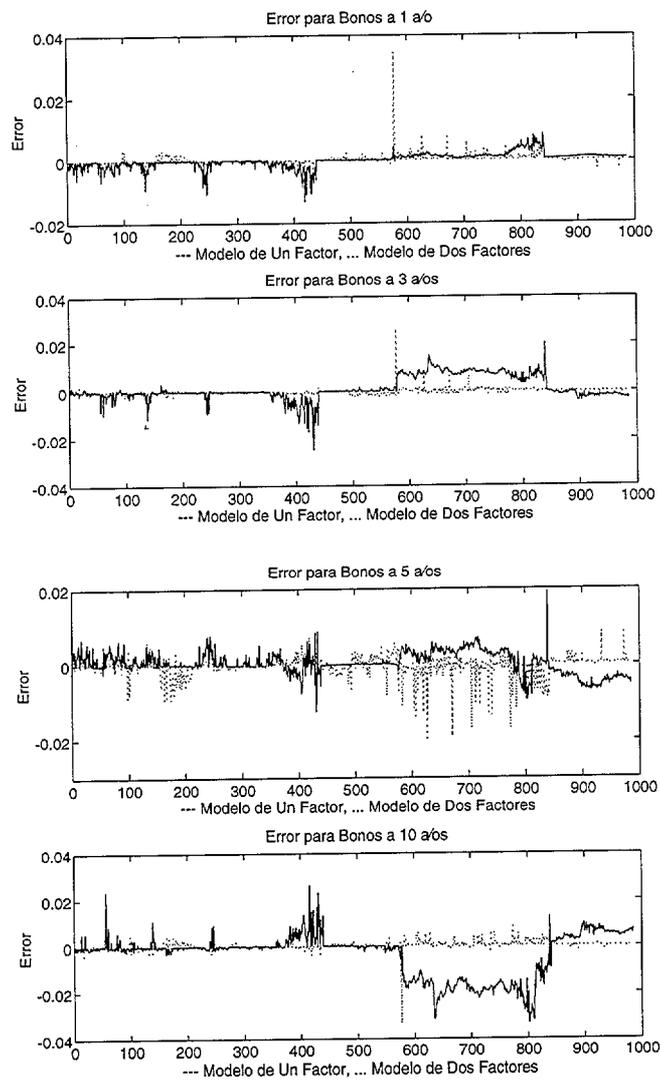
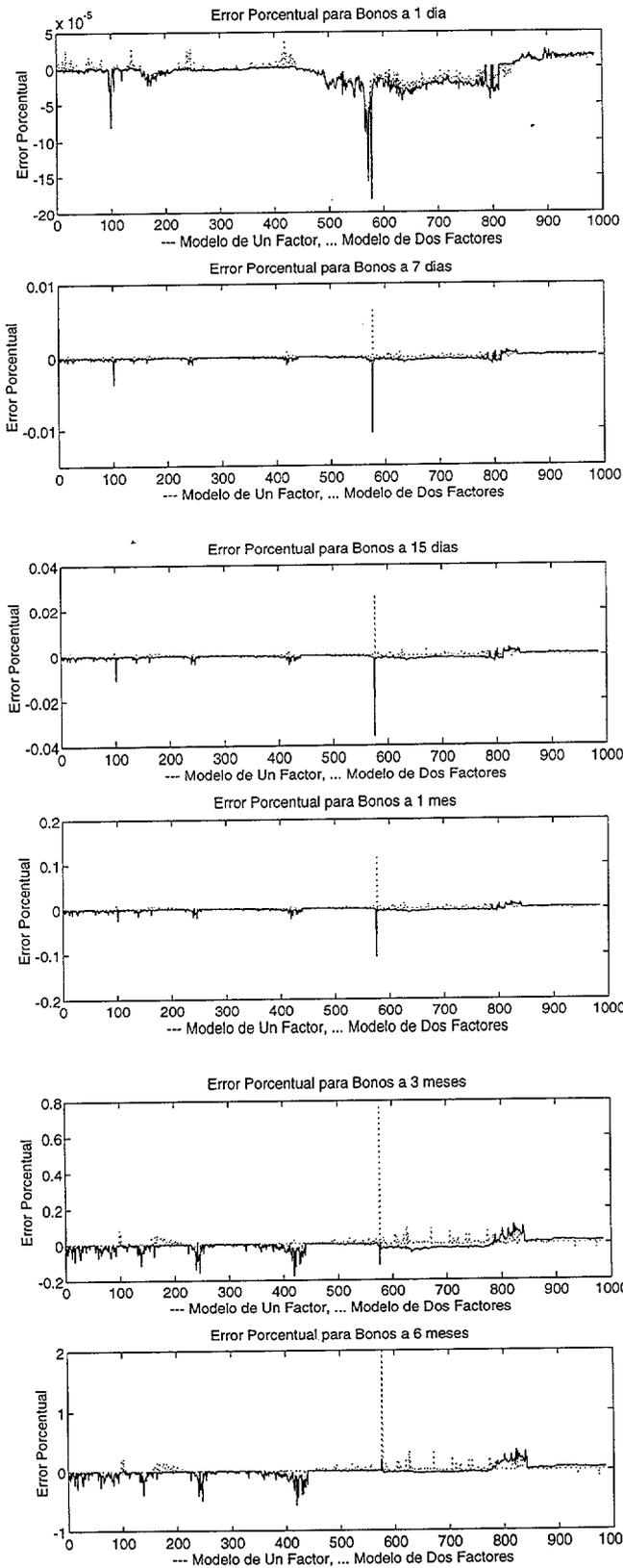


Figura 3.5: Errores de estimación de los modelos de uno y dos factores.



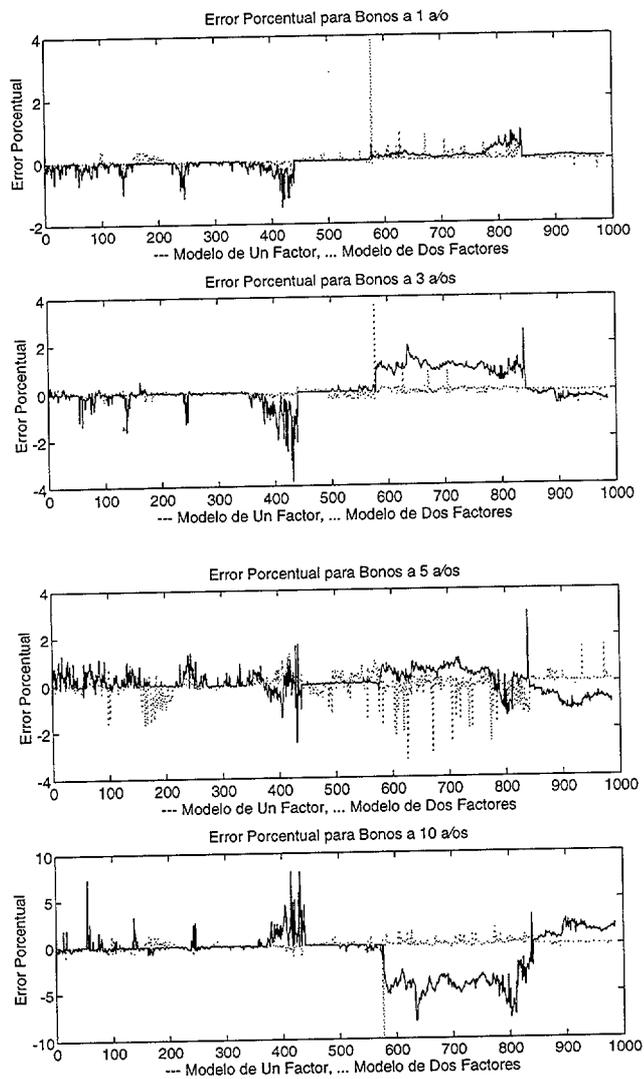


Figura 3.6: Errores porcentuales de estimación de los modelos de uno y dos factores.

Capítulo 4

Gestión del riesgo de tipos de interés bajo un modelo bifactorial de la estructura temporal de los tipos de interés

4.1 Introducción

Los mercados de renta fija han experimentado, desde hace dos décadas, un gran aumento en la volatilidad de los productos que en ellos se negocian¹. Este hecho ha llevado a los académicos y, en general, a los participantes en estos mercados a desarrollar e implementar herramientas y técnicas que ayuden a gestionar el riesgo (*“risk management”*) derivado de los tipos de interés. En general, el valor de una cartera de bonos se ve afectado por muchos factores: el nivel y la volatilidad de los tipos de interés, cambios en la forma de la curva de rentabilidades, probabilidad de quiebra y cambios en la liquidez. En particular, vamos a considerar activos libres de riesgo y con mercados líquidos y profundos. Nos centraremos en dos tipos de riesgo que dependen de los cambios que experimenta la curva de rentabilidades:

- Riesgo de mercado (*“risk market”*). Es el riesgo derivado de cambios de nivel en todos los tipos de interés. Por tanto, este riesgo está asociado a **cambios paralelos** (cambios similares en magnitud en todos los vencimientos) de la curva

¹Este hecho aparece ilustrado en Nelson and Schaefer (1983) y Smithson and Smith (1995).

de rentabilidades.

- Riesgo de la curva de rentabilidades (*“yield curve risk”*). Es el riesgo derivado de **cambios no paralelos**, variaciones en la forma de la curva de rentabilidades. Este riesgo se compone de dos partes:

- Cambios en la pendiente: La variación en los tipos de interés a corto plazo es distinta en magnitud al cambio experimentado por los tipos de interés a largo plazo. La pendiente de la curva de rentabilidades desciende (aumenta) si los tipos de interés a corto plazo varían más (menos) que los tipos de interés correspondientes a mayores vencimientos.
- Cambios en la curvatura: Las variaciones en los extremos de la curva de rentabilidades son similares entre sí y diferentes en dirección a las que experimentan los tipos de interés a vencimiento intermedio.

La solución clásica para gestionar el riesgo de mercado se basa en el uso de la duración con el objetivo de inmunizar la correspondiente cartera de bonos. La duración es una medida de la sensibilidad del valor de un activo ante cambios en los tipos de interés. Por tanto, mediante la duración se establece una relación entre la variabilidad de los tipos de interés y la variabilidad de las rentabilidades de una serie de bonos.

Mediante la inmunización se construye y gestiona una cartera de bonos de modo que dicha cartera cumpla un objetivo predeterminado: replicar un determinado índice, asegurar una serie de pagos futuros² o conseguir una cierta rentabilidad.

En general, la estrategia a seguir para inmunizar una cartera de bonos es igualar la duración de dicha cartera con la duración del activo que se desea replicar. Una característica a considerar en relación con el empleo de la duración es que esta medida

²Este es el objetivo con el que la inmunización fue establecida y desarrollada inicialmente por Redington (1952).

supone que las rentabilidades de los distintos activos varían en la misma dirección y magnitud asumiendo, por tanto, que los cambios en la curva de rentabilidades son paralelos y de pequeña magnitud relativa (véase Macaulay (1938)). Por tanto, la duración estima el cambio en el precio de los bonos ante cambios paralelos pequeños en la curva de rentabilidades y puede ser una herramienta adecuada para gestionar el riesgo de mercado. De hecho, diversos estudios como Fisher and Weil (1971), Bierwag *et al* (1981), Bierwag *et al* (1983a) y Brennan and Schwartz (1983) muestran la utilidad de esta medida a la hora de reducir dicho riesgo. Más aún, Bierwag and Khang (1979) muestran que, cuando la única fuente de incertidumbre en la curva de rentabilidades se debe a un shock aditivo, es posible inmunizar una cartera de bonos-cupón mediante el empleo de la duración. Trabajos como Ingersoll (1983), Nelson and Schaefer (1983) y Brennan and Schwartz (1983) muestran la superioridad de la duración frente a técnicas más sofisticadas.

Los resultados obtenidos con la duración pueden mejorarse mediante el empleo de la convexidad. Como la duración puede interpretarse como una aproximación de primer orden al cambio en el precio de un bono, sólo es válida ante pequeños cambios en la curva de rentabilidades y, en general, infraestima la ganancia o pérdida esperada ante un cambio en los tipos de interés. Por otro lado, la convexidad se puede ver como un elemento de segundo orden, menos importante que la duración pero cuyo efecto, cuando se produce un cambio suficientemente grande en los tipos de interés, puede ser importante. Por tanto, la convexidad puede corregir la estimación, obtenida mediante la duración, del cambio en el precio de los bonos cuando se producen grandes cambios en los tipos de interés.

La posibilidad de movimientos no paralelos³ en la curva de rentabilidades limita el uso de la duración. Estas limitaciones son ilustradas en artículos como Ingersoll *et al* (1978), CIR (1979), Hilliard and Jordan (1992) y D'Eclessia and Zenios (1994) que reflejan cómo los resultados obtenidos mediante la duración son inferiores a los obtenidos mediante diversos métodos alternativos.

Diversas medidas de duración relacionadas con los movimientos no paralelos de la curva de rentabilidades han sido propuestas y contrastadas en diferentes artículos. Así, en Bierwag *et al* (1983b) se evalúan una serie de procesos estocásticos aditivos y multiplicativos y sus duraciones. Garbade (1985) se centra en la inmunización frente a cambios en la pendiente de la curva de rentabilidades. Gultekin and Rogalski (1984), Elton *et al* (1988) y Elton *et al* (1990) desarrollan y contrastan empíricamente medidas de duración basadas en modelos multifactoriales. Klaffky *et al* (1992) propone dos medidas de duración (“*reshaping durations*”) para reflejar los cambios en los extremos de la curva de rentabilidades. Ho (1992) propone unas duraciones (“*key rate durations*”) basadas en los cambios de los tipos de interés a unos ciertos vencimientos. Reitano (1992, 1996) trabaja con cambios no paralelos y desarrolla unos vectores de duración (“*directional durations*”) que indican la dirección de estos cambios. Finalmente, Ibáñez (1997) propone una nueva estrategia de inmunización basada en una medida de dispersión lineal y prueba que cualquier medida de dispersión es una medida del riesgo de inmunización. Así mismo, este autor calcula las carteras *maximin* en modelos donde la inmunización no es posible y en modelos de cobertura de dos períodos.

El principal problema relacionado con esta serie de medidas es que no se derivan a partir de un modelo de la estructura temporal de los tipos de interés sino que se especifican de modo arbitrario. A este respecto podemos señalar como excepciones los

³Evidencia empírica de estos movimientos aparece en Jones (1991), Litterman and Scheinkman (1991), Zhang (1993) y Knez *et al* (1994).

trabajos de Ingersoll *et al* (1978), CIR (1979) y Chen (1996) que desarrollan medidas de duración basadas en el modelo de CIR (1985b). Recientemente, Wu (1996) presenta y contrasta empíricamente unas medidas de duración basadas en los modelos de Vasicek (1977) y CIR (1985b).

El objetivo de este capítulo es definir y aplicar medidas de duración basadas en el modelo de dos factores (tipo de interés a largo plazo y el diferencial de tipos de interés (*spread*)) que ha sido presentado en el capítulo anterior. De este modo podemos analizar el comportamiento de una cartera de bonos ante diferentes cambios en la curva de rentabilidades. Por tanto, podemos solucionar el problema derivado de las limitaciones de la duración convencional a la hora de tratar con cambios no paralelos en dicha curva.

Las limitaciones de la duración convencional son ilustradas mediante un ejemplo numérico que aparece incluido en el apéndice final. En dicho ejemplo, se presentan dos carteras de bonos con la misma duración modificada. Estas dos carteras difieren en su rentabilidad y en su convexidad. En ausencia de cambios en la curva de rentabilidades, parece claro que la mejor estrategia sería comprar la cartera de mayor rentabilidad y vender la cartera de menor rentabilidad. Sin embargo, la diferencia entre la convexidad de ambas carteras sugiere la posibilidad de realizar otras alternativas de inversión si se dan ciertos cambios en la curva de tipos de interés. En el apéndice se comprueba que, a pesar de tener la misma duración modificada, el comportamiento relativo (medido por la diferencia entre sus rentabilidades) de estas dos carteras depende de la magnitud y del tipo de cambio que se produzca en la curva de rentabilidades. Por tanto, la principal conclusión de este ejemplo es que medidas habitualmente empleadas como la rentabilidad, duración o convexidad de una cartera no informan sobre el comportamiento de dicha cartera ante cambios en la curva de rentabilidades. De hecho, la rentabilidad final conseguida por una cartera depende de la magnitud y del tipo de cambio que se produce en los tipos de interés.

En la línea de Chen (1996), generalizaremos la medida de duración convencional y obtendremos unas medidas de “duración generalizada” que reflejarán los cambios ocurridos en los dos factores de nuestro modelo. Una vez obtenidas estas medidas, estudiaremos su aplicación al cálculo de los correspondientes ratios de cobertura que nos permitirán inmunizar una cartera de bonos mediante el uso de opciones sobre bonos. Así mismo, analizaremos la utilidad de estas medidas para gestionar el riesgo derivado de tipos de interés cuando se producen cambios (paralelos y/o en la pendiente) en la curva de rentabilidades.

El desarrollo de este capítulo es como sigue. En la Sección 4.2 se generalizan las medidas de duración y convexidad convencionales mediante el empleo del modelo de dos factores presentado en el anterior capítulo. Los ratios de cobertura (utilizables para inmunizar una cartera de bonos) se calculan en la Sección 4.3. En la Sección 4.4 se aborda, en general, el problema de la cobertura de riesgos. La Sección 4.5 particulariza este problema para el caso particular del riesgo derivado de cambios en la pendiente de la curva de rentabilidades. En la Sección 4.6 se presenta un ejemplo numérico que muestra de qué modo las medidas propuestas solucionan las limitaciones relacionadas con el empleo de la duración convencional. Finalmente, la Sección 4.7 resume las principales conclusiones de este capítulo. En el apéndice final, se ilustra mediante un ejemplo numérico las limitaciones de la duración convencional. Los resultados asociados a este ejemplo se incluyen en las Tablas I-VI. Así mismo, las Tablas VII-XII de este apéndice reflejan los resultados obtenidos con la propuesta de solución que se presenta en este capítulo.

4.2 Duración y Convexidad Generalizadas

En esta sección, vamos a generalizar los conceptos de duración y convexidad teniendo en cuenta el modelo de dos factores de la estructura temporal de los tipos de interés presentado en el capítulo anterior. De este modo, podremos medir el riesgo derivado de los tipos de interés con respecto a dos factores estocásticos y, por tanto, reflejar las consecuencias de los cambios de los tipos de interés sobre la rentabilidad de un bono o de una cartera de bonos.

Recordamos brevemente los conceptos de duración y convexidad de un bono cupón-cero. Macaulay (1938) establece la duración de un bono-cupón como media ponderada de los cupones pagados por dicho bono:

$$\sum_{t=1}^n t \frac{CF_t / (1+y)^t}{P}$$

donde CF_t es el cupón pagado por el bono en el período t , ($t = 1, 2, \dots, n$), y es la rentabilidad correspondiente a este período y P es el precio de dicho bono. Dividiendo la anterior expresión por el número de pagos anuales, obtenemos la duración de Macaulay en años.

La duración de Macaulay da una medida de la volatilidad del precio del bono pues se cumple

$$\begin{aligned} & \text{Cambio (aproximado) porcentual en el precio del bono} = \\ & - \left(\frac{1}{1+y} \right) \times \text{Duración de Macaulay} \times \text{Cambio en la rentabilidad} \end{aligned}$$

igualdad que se puede reescribir como

$$\begin{aligned} & \text{Cambio (aproximado) porcentual en el precio del bono} = \\ & - \text{Duración modificada} \times \text{Cambio en la rentabilidad} \end{aligned}$$

Así, la duración modificada indica el cambio porcentual en el precio de bono ante un determinado cambio en la rentabilidad de dicho bono. Por ejemplo, el precio de un bono cuya duración modificada es igual a D cambia aproximadamente un $D\%$ si su rentabilidad varía cien puntos básicos.

La convexidad de un bono-cupón, utilizada para complementar la estimación que hace la duración sobre el cambio en el precio del bono ante cambios en su rentabilidad, se define como

$$\sum_{t=1}^n t(t+1) \frac{CF_t/(1+y)^t}{(1+y)^2 P}$$

Para obtener la convexidad en años se divide esta expresión entre el cuadrado del número de pagos anuales.

Sea $P(s, L, t, T) \equiv P(s, L, \tau)$ el precio, en el instante t , de un bono cupón-cero libre de riesgo que paga \$1 en el momento de su vencimiento, $T = t + \tau$. Este precio viene dado por la expresión

$$P(s, L, t, T) = P(t, T) = e^{-(T-t)Y(s, L, t, T)} \quad (4.1)$$

donde $Y(s, L, t, T) \equiv Y(s, L, \tau)$, es la rentabilidad (compuesta de modo continuo) asociada a dicho bono.

Aplicando el lema de Itô, el cambio instantáneo en el precio de este bono viene dado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dP(.) = P_s ds + P_L dL + P_t dt + \frac{1}{2} P_{ss} (ds)^2 + \frac{1}{2} P_{LL} (dL)^2 \quad (4.2)$$

donde

$$P_s = \frac{\partial P(.)}{\partial s}, \quad P_L = \frac{\partial P(.)}{\partial L}, \quad P_t = \frac{\partial P(.)}{\partial t}, \quad P_{ss} = \frac{\partial^2 P(.)}{\partial s^2}, \quad P_{LL} = \frac{\partial^2 P(.)}{\partial L^2}$$

Utilizando la expresión de estas derivadas parciales y la dinámica de las variables de estado (véase el supuesto 2 realizado en el capítulo anterior), la ecuación (4.2) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 dP(t, T) &= [P_s k_1(\mu_1 - s) + P_L k_2(\mu_2 - L) + P_t + \frac{1}{2} P_{ss} \sigma_1^2 + \frac{1}{2} P_{LL} \sigma_2^2] dt \\
 &\quad - (T - t) P(t, T) \left[\frac{\partial Y(t, T)}{\partial s} \sigma_1 dw_1 + \frac{\partial Y(t, T)}{\partial L} \sigma_2 dw_2 \right] \\
 &= \mu_p(\cdot) dt - (T - t) P(t, T) \left[\frac{\partial Y(t, T)}{\partial s} \sigma_1 dw_1 + \frac{\partial Y(t, T)}{\partial L} \sigma_2 dw_2 \right] \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

A continuación, consideramos un bono cupón que paga n cupones c_i en los instantes t_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Este bono tiene un valor nominal igual a \$1 y vence en el instante $T = t_n$. Este bono se puede considerar como una cartera de n bonos cupón-cero: $n - 1$ bonos cupón-cero que vencen en los instantes t_i , $i = 1, \dots, n - 1$ y cuyo valor nominal es igual a c_i , $i = 1, \dots, n - 1$ y un bono cupón-cero que vence en el instante $T = t_n$ con un valor nominal igual a $1 + c_n$, suma del valor nominal del bono-cupón y del último cupón pagado por este bono.

Sea $P^*(s, L, t, T) \equiv P^*(t, T)$ el precio, en el instante t , de este bono-cupón. Entonces

$$P^*(t, T) = \sum_{i=1}^n c_i P(t, t_i)$$

Utilizando la expresión (4.3), se deduce que

$$\begin{aligned}
 dP^*(t, T) &= \sum_{i=1}^n c_i \left(\mu_p(\cdot) dt - (t_i - t) P(t, t_i) \left[\frac{\partial Y(t, t_i)}{\partial s} \sigma_1 dw_1 + \frac{\partial Y(t, t_i)}{\partial L} \sigma_2 dw_2 \right] \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n c_i \mu_p(\cdot) dt - \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t) P(t, t_i) \frac{\partial Y(t, t_i)}{\partial s} \sigma_1 dw_1 \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t) P(t, t_i) \frac{\partial Y(t, t_i)}{\partial L} \sigma_2 dw_2
 \end{aligned}$$

Por tanto, el cambio porcentual instantáneo en el precio de este bono-cupón viene

dado por la expresión

$$\begin{aligned} \frac{dP^*(t, T)}{P^*(t, T)} &= \frac{1}{P^*(t, T)} \sum_{i=1}^n c_i \mu_p(\cdot) dt \\ &\quad - \frac{1}{P^*(t, T)} \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t) P(t, t_i) \frac{\partial Y(t, t_i)}{\partial s} \sigma_1 dw_1 \\ &\quad - \frac{1}{P^*(t, T)} \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t) P(t, t_i) \frac{\partial Y(t, t_i)}{\partial L} \sigma_2 dw_2 \end{aligned}$$

que se puede reescribir como

$$\frac{dP^*(t, T)}{P^*(t, T)} = \frac{1}{P^*(t, T)} \sum_{i=1}^n c_i \mu_p(\cdot) dt - D_s \sigma_1 dw_1 - D_L \sigma_2 dw_2$$

donde

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{1}{P^*(t, T)} \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t) P(t, t_i) \frac{\partial Y(t, t_i)}{\partial s} \\ D_L &= \frac{1}{P^*(t, T)} \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t) P(t, t_i) \frac{\partial Y(t, t_i)}{\partial L} \end{aligned}$$

Los parámetros D_s y D_L representan las medidas de “duración generalizada” que miden la sensibilidad de la rentabilidad del bono en relación con cambios en los factores s y L . Esta “duración generalizada” es diferente de la duración convencional en dos aspectos:

- Hay dos medidas de duración, una para cada factor. En el caso de la duración convencional, sólo existe una medida de duración, la cual mide la sensibilidad de la rentabilidad del bono ante cambios en un único factor.
- Hay un factor adicional

$$\frac{\partial Y(t, t_i)}{\partial s}, \quad \frac{\partial Y(t, t_i)}{\partial L}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

que mide la sensibilidad de la rentabilidad al vencimiento ante cambios en cada uno de los factores.

Ahora, ya estamos en condiciones de definir las medidas de “duración generalizada”:

Definición (Duración generalizada) Las “duraciones generalizadas” D_s y D_L de un bono que paga n cupones c_i en los instantes t_i , $i = 1, 2, \dots, n$ con respecto a los factores s y L vienen dadas por las expresiones

$$D_s = \frac{1}{P^*(t, T)} \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t) P(t, t_i) \frac{\partial Y(t, t_i)}{\partial s}$$

$$D_L = \frac{1}{P^*(t, T)} \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t) P(t, t_i) \frac{\partial Y(t, t_i)}{\partial L}$$

donde $P(t, t_i)$ es el precio, en el instante t , de un bono cupón-cero que vence en el instante t_i (véase la Proposición 1 del capítulo anterior)

Para el caso particular de un bono cupón-cero, tenemos

$$P^*(t, T) = P(t, T), \quad c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0, \quad c_n = 1$$

Por tanto, las “duraciones generalizadas” D_s y D_L de un bono cupón-cero con respecto a los factores s y L vienen dadas por

$$D_s = \frac{1}{P(t, T)} (T - t) P(t, T) \frac{\partial Y(t, T)}{\partial s} = (T - t) \frac{\partial Y(t, T)}{\partial s}$$

$$D_L = \frac{1}{P(t, T)} (T - t) P(t, T) \frac{\partial Y(t, T)}{\partial L} = (T - t) \frac{\partial Y(t, T)}{\partial L} \quad (4.4)$$

Sustituyendo la ecuación (3.57) en (4.4), obtenemos que la expresión final para las medidas de “duración generalizada” correspondientes a un bono cupón-cero con respecto a los factores s y L vienen dadas por

$$D_s = B(t, T) = B(\tau) \quad (4.5)$$

$$D_L = C(t, T) = C(\tau) \quad (4.6)$$

Por tanto, $B(\tau)$ y $C(\tau)$ son medidas indicativas de la exposición de un bono cupón-cero al riesgo derivado de los cambios en los tipos de interés. Así, $B(\tau)$, la duración con respecto al diferencial de tipos de interés, indica la sensibilidad de un bono cupón-cero ante cambios en dicho diferencial. Por tanto, es una medida indicativa de la influencia de los cambios en la pendiente de la curva de rentabilidades sobre el precio de dicho bono. Análogamente, $C(\tau)$, la duración con respecto al tipo de interés a largo plazo, refleja la influencia de cambios paralelos en la curva de rentabilidades sobre el precio de este bono cupón-cero.

Por tanto, ambas medidas de “duración generalizada” pueden ser útiles para gestionar el riesgo de tipos de interés derivado de cambios en el nivel y en la pendiente de la curva de rentabilidades. Una vez cuantificado el comportamiento de la cartera de bonos ante dichos cambios, estas medidas pueden ser una herramienta adecuada para la gestión de carteras. Así, los inversores que quieran inmunizar sus carteras frente a estos cambios deberían gestionar la cartera de modo que sus medidas de “duración generalizada” coincidan con las del activo a replicar. Si se tienen expectativas sobre una bajada (subida) de los tipos de interés, se debe cambiar la composición de la cartera de modo que aumente (descienda) su “duración generalizada”. Análogamente para el caso de un aumento o descenso (previsto) del diferencial de tipos de interés.

Una herramienta que puede complementar los resultados obtenidos con la duración es la convexidad. La convexidad corrige las estimaciones (obtenidas mediante la duración) de los cambios en el precio de los bonos cuando se producen grandes variaciones en los tipos de interés. Generalizamos a continuación la medida de la convexidad con el objetivo de tener en cuenta las variaciones que puedan experimentar los dos factores de nuestro modelo.

Definición (Convexidad generalizada) Las “convexidades generalizadas” δ_s y δ_L de un bono que paga n cupones c_i en los instantes t_i , $i = 1, 2, \dots, n$ con respecto a los factores s y L vienen dadas por las expresiones

$$\delta_s = \frac{1}{P^*(t, T)} \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t) P(t, t_i) \frac{\partial^2 Y(t, t_i)}{\partial s^2}$$

$$\delta_L = \frac{1}{P^*(t, T)} \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t) P(t, t_i) \frac{\partial^2 Y(t, t_i)}{\partial L^2}$$

donde $P(t, t_i)$ es el precio, en el instante t , de un bono cupón-cero que vence en el instante t_i (véase la Proposición 1 del capítulo anterior)

Por tanto, las “convexidades generalizadas” δ_s y δ_L de un bono cupón-cero con respecto a los factores s y L vienen dadas por

$$\delta_s = \frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial s^2} = B^2(t, T) = B^2(\tau)$$

$$\delta_L = \frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial L^2} = C^2(t, T) = C^2(\tau) \quad (4.7)$$

4.3 Ratios de Cobertura

Una alternativa al uso de la duración como herramienta para realizar la cobertura de riesgos es el uso de opciones sobre bonos. Puesto que la duración es una medida de la sensibilidad de un valor presente ante un cambio en los tipos de interés, la duración no es solo aplicable a los bonos sino que también puede extenderse al caso de las opciones. De este modo, es posible definir medidas de la sensibilidad de diferentes activos derivados con respecto a los diversos factores y, a continuación, formular la correspondiente estrategia de cobertura.

Consideremos una opción europea de compra sobre un bono cupón-cero. Sea K el precio de ejercicio de esta opción. Si se ejerce la opción en el instante en que expira,

T_c , el poseedor de esta opción pagará una cantidad K y recibirá un bono al descuento que vence en el instante $T_b > T_c$.

El precio en el instante t , $C(s, L, t, T_c; K, T_b)$, de esta opción de compra (véase la sección 3.5 del capítulo anterior) viene dado por

$$C(s, L, t, T_c; K, T_b) = P(t, T_b)\Phi(h + \sigma_{\bar{p}}) - KP(t, T_c)\Phi(h) \quad (4.8)$$

donde $P(t, T_i)$ es el precio, en el instante t , de un bono cupón-cero que vence en el instante T_i (véase la Proposición 1 del capítulo anterior), donde $\Phi(\cdot)$ denota la función de distribución de una variable normal tipificada y donde

$$h = \frac{\ln(P(t, T_b)) - \ln(KP(t, T_c))}{\sigma_{\bar{p}}} - \frac{1}{2}\sigma_{\bar{p}}$$

Derivando en la ecuación (4.8), se obtiene que la duración generalizada de la opción de compra ante cambios en el diferencial de tipos de interés (medida indicativa de la variación en el precio de la opción ante cambios en dicho factor) viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(\cdot)}{\partial s} &= P_s(t, T_b)\Phi(h + \sigma_{\bar{p}}) + P(t, T_b)\Phi_s(h + \sigma_{\bar{p}}) \\ &\quad - KP_s(t, T_c)\Phi(h) - KP(t, T_c)\Phi_s(h) \\ &= -B(t, T_b)P(t, T_b)\Phi(h + \sigma_{\bar{p}}) + P(t, T_b)\Phi_s(h + \sigma_{\bar{p}}) \\ &\quad + KB(t, T_c)P(t, T_c)\Phi(h) - KP(t, T_c)\Phi_s(h) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aplicando la regla de la cadena, se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi_s(h + \sigma_{\bar{p}}) &= \frac{\partial \Phi(h + \sigma_{\bar{p}})}{\partial (h + \sigma_{\bar{p}})} \frac{\partial (h + \sigma_{\bar{p}})}{\partial s} = f(h + \sigma_{\bar{p}}) \frac{B(t, T_c) - B(t, T_b)}{\sigma_{\bar{p}}} \\ \Phi_s(h) &= f(h) \frac{B(t, T_c) - B(t, T_b)}{\sigma_{\bar{p}}} \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación (4.9) se puede reescribir como

$$\frac{\partial C(\cdot)}{\partial s} = -B(t, T_b)P(t, T_b)\Phi(h + \sigma_{\bar{p}}) + P(t, T_b)f(h + \sigma_{\bar{p}}) \frac{B(t, T_c) - B(t, T_b)}{\sigma_{\bar{p}}}$$

$$\begin{aligned}
& + KB(t, T_c)P(t, T_c)\Phi(h) - KP(t, T_c)f(h)\frac{B(t, T_c) - B(t, T_b)}{\sigma_{\bar{p}}} \\
& = [B(t, T_c) - B(t, T_b)] \left[P(t, T_b)\frac{f(h + \sigma_{\bar{p}})}{\sigma_{\bar{p}}} - KP(t, T_c)\left(\frac{f(h)}{\sigma_{\bar{p}}} - \Phi(h)\right) \right] \\
& - B(t, T_b)C(t, T_c; K, T_b) \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Análogamente, la duración generalizada de la opción de compra ante cambios en el tipo de interés a largo plazo viene dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C(\cdot)}{\partial L} & = [C(t, T_c) - C(t, T_b)] \left[P(t, T_b)\frac{f(h + \sigma_{\bar{p}})}{\sigma_{\bar{p}}} - KP(t, T_c)\left(\frac{f(h)}{\sigma_{\bar{p}}} - \Phi(h)\right) \right] \\
& - C(t, T_b)C(t, T_c; K, T_b)
\end{aligned}$$

El conocimiento de las medidas de “duración generalizada” de la opción nos permitirá obtener el ratio de cobertura correspondiente a esta opción. Partimos de la siguiente relación⁴ existente entre las duraciones generalizadas de la opción y del activo subyacente (un bono cupón-cero en este caso):

$$\begin{aligned}
\text{Duración gener. de la opción} & = \text{Elasticidad de la opción} \\
& \times \text{Duración gener. del bono} \tag{4.11}
\end{aligned}$$

donde

$$\text{Elasticidad de la opción} = \frac{P(t, T_b)}{C(t, T_c; K, T_b)} \frac{\partial C(t, T_c; K, T_b)}{\partial P(t, T_b)} \tag{4.12}$$

La elasticidad de la opción es el producto de dos términos. El primer término es el cociente entre los precios del bono (activo subyacente) y de la opción e indica el apalancamiento de dicha opción. El segundo término indica la influencia de un cambio en el precio del activo subyacente sobre el precio de la opción e indica el ratio de cobertura. Por tanto, utilizando las ecuaciones (4.5), (4.11) y (4.12), se deduce que

⁴Véase Fabozzi (1993), Cap. 15.

dicho ratio de cobertura (“delta de la opción”) es igual a

$$\Delta = \frac{\partial C(\cdot)}{\partial s} \frac{1}{B(t, T_b)} \frac{C(t, T_c; K, T_b)}{P(t, T_b)}$$

donde $\partial C(\cdot)/\partial s$ viene dada por la ecuación (4.10).

4.4 El Problema de la Cobertura

En general, el problema de la cobertura se relaciona con la elaboración de una estrategia de negociación (compra o venta) a partir de una serie de activos con el objetivo de replicar el valor de un activo-objetivo. En particular, este objetivo puede ser la obtención de un conjunto de flujos de caja de modo que se puedan realizar una serie de pagos futuros (problema conocido como “*asset/liability management*”). Una vez construida la estrategia “replicante” del activo-objetivo, la cobertura (frente al riesgo de tipos de interés) de este activo-objetivo se lleva a cabo mediante la venta de esta estrategia. En otras palabras, la cobertura de una posición requiere la construcción sintética de la posición contraria.

Sea $T(s, L, t)$ el precio, en el instante t , del activo-objetivo a cubrir. Este precio viene dado como solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales con la adecuada condición terminal que indica el pago que realiza dicho activo en el instante en el que vence (véase la sección 3.5, dedicada a valoración de activos derivados, del capítulo anterior).

Realizamos los siguientes supuestos:

- Existen dos activos, U_1 y U_2 , cuyos valores de mercado, en el instante t , vienen dados por

$$U_1 = U_1(s, L, t)$$

$$U_2 = U_2(s, L, t)$$

- El precio del activo-objetivo y de estos dos activos es diferenciable al menos una vez.
- Las variaciones del precio de estos activos ante cambios en los dos factores de nuestro modelo son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} U_{1s} & U_{2s} \\ U_{1L} & U_{2L} \end{vmatrix} \neq 0$$

En estas condiciones, formamos una cartera de cobertura mediante una unidad del activo-objetivo, x_1 unidades del activo U_1 y x_2 unidades del activo U_2 . El valor de mercado, en el instante t , de esta cartera viene dado por

$$V(s, L, t) = T(s, L, t) + x_1 U_1(s, L, t) + x_2 U_2(s, L, t)$$

Esta cartera es de cobertura perfecta ante cambios en los dos factores s y L si su valor de mercado no cambia ante variaciones en dichos factores. Por tanto, se ha de verificar

$$\frac{\partial V(s, L, t)}{\partial s} = \frac{\partial V(s, L, t)}{\partial L} = 0$$

lo cual nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} T_s(s, L, t) + x_1 U_{1s}(s, L, t) + x_2 U_{2s}(s, L, t) = 0 \\ T_L(s, L, t) + x_1 U_{1L}(s, L, t) + x_2 U_{2L}(s, L, t) = 0 \end{cases}$$

que puede reescribirse como

$$\begin{cases} x_1 U_{1s}(s, L, t) + x_2 U_{2s}(s, L, t) = -T_s(s, L, t) \\ x_1 U_{1L}(s, L, t) + x_2 U_{2L}(s, L, t) = -T_L(s, L, t) \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones, gracias al último de los supuestos realizados anteriormente, tiene una única solución $(x_1(s, L, t), x_2(s, L, t))$ que indica las unidades de los activos $U_1(\cdot)$ y $U_2(\cdot)$ que debemos incluir en la cartera de cobertura para realizar la

cobertura del activo-objetivo. Esta solución viene dada por la regla de Cramer aplicada al anterior sistema de ecuaciones:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -T_s(\cdot) & U_{2s}(\cdot) \\ -T_L(\cdot) & U_{2L}(\cdot) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_{1s}(\cdot) & U_{2s}(\cdot) \\ U_{1L}(\cdot) & U_{2L}(\cdot) \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} U_{1s}(\cdot) & -T_s(\cdot) \\ U_{1L}(\cdot) & -T_L(\cdot) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_{1s}(\cdot) & U_{2s}(\cdot) \\ U_{1L}(\cdot) & U_{2L}(\cdot) \end{vmatrix}}$$

donde $T_s(\cdot)$ y $T_L(\cdot)$ son las medidas de “duración generalizada” del activo-objetivo, $U_{1s}(\cdot)$ y $U_{1L}(\cdot)$ son las medidas de “duración generalizada” del activo U_1 y $U_{2s}(\cdot)$ y $U_{2L}(\cdot)$ son las medidas de “duración generalizada” del activo U_2 .

4.5 Cobertura Frente al Riesgo de Tipos de Interés

En esta sección, utilizaremos las medidas de “duración generalizada” definidas previamente para realizar una cobertura frente a un tipo específico de riesgo, el riesgo derivado de “cambios no paralelos” en la curva de rentabilidades.

Suponemos un inversor que debe pagar una cantidad $\$M$ en el instante m . En el instante actual, t_0 , la riqueza del inversor es igual al valor presente - obtenido mediante la curva de rentabilidades presente en el instante t_0 , $Y(s_0, L_0, t_0, t) \equiv Y(t_0, t)$ - de la cantidad $\$M$ que debe pagar en el futuro.

El objetivo del inversor es utilizar su riqueza actual para adquirir una cartera de n bonos. Los bonos disponibles en el momento actual tienen las siguientes características:

- Precio de los bonos: $P_1(\cdot), P_2(\cdot), \dots, P_n(\cdot)$
- Vencimiento de los bonos: T^1, T^2, \dots, T^n
- Flujo de cupones de los bonos: $c_i(t), t \leq T^i, i = 1, 2, \dots, n$

El valor, en el instante m , de cada uno de los bonos es

$$\begin{aligned} V_1(s_0, L_0) &= \int_{t_0}^{T^1} c_1(t) \exp\{-Y(m, t)(t - m)\} dt + \exp\{-Y(m, T^1)(T^1 - m)\} \\ V_2(s_0, L_0) &= \int_{t_0}^{T^2} c_2(t) \exp\{-Y(m, t)(t - m)\} dt + \exp\{-Y(m, T^2)(T^2 - m)\} \\ &\dots \\ V_n(s_0, L_0) &= \int_{t_0}^{T^n} c_n(t) \exp\{-Y(m, t)(t - m)\} dt + \exp\{-Y(m, T^n)(T^n - m)\} \end{aligned}$$

Sean x_1, x_2, \dots, x_n las proporciones de la cartera que invertimos en cada bono. Entonces, el valor, en el instante m , de la cartera de n bonos es

$$\begin{aligned} V_p(s_0, L_0) &= \sum_{i=1}^n x_i V_i(s_0, L_0) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left[\int_{t_0}^{T^i} c_i(t) \exp\{-Y(m, t)(t - m)\} dt + \exp\{-Y(m, T^i)(T^i - m)\} \right] \end{aligned}$$

La cartera de bonos toma este valor siempre que la estructura temporal de tipos de interés presente en el instante t_0 no experimente cambios en el intervalo $[t_0, m]$. Supongamos que se produce un cambio en la curva de rentabilidades y que dicho cambio se produce instantáneamente después de haber adquirido esta cartera de bonos. La nueva estructura temporal de tipos de interés viene dada por $Y(\hat{s}, \hat{L}, t_0, t) \equiv \hat{Y}(t_0, t)$. Considerando esta nueva curva de rentabilidades, el valor - en el instante m - del i -ésimo bono viene dado por

$$V_i(\hat{s}, \hat{L}) = \int_{t_0}^{T^i} c_i(t) \exp\{-\hat{Y}(m, t)(t - m)\} dt + \exp\{-\hat{Y}(m, T^i)(T^i - m)\} \quad (4.13)$$

y, por tanto, el valor de mercado, en el instante m , de esta cartera de bonos es

$$\begin{aligned} V_p(\hat{s}, \hat{L}) &= \sum_{i=1}^n x_i V_i(\hat{s}, \hat{L}) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left[\int_{t_0}^{T^i} c_i(t) \exp\{-\hat{Y}(m, t)(t - m)\} dt + \exp\{-\hat{Y}(m, T^i)(T^i - m)\} \right] \end{aligned}$$

Este nuevo valor de mercado debe ser suficiente para hacer frente al pago de la cantidad $\$M$ en el instante m . El objetivo de la cobertura a realizar es asegurar que el menor valor que puede tomar esta cartera (en función de los valores de \hat{s} y \hat{L}) sea igual o superior a $\$M$.

Por tanto, la “cartera de inmunización”, dada por las proporciones $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, debe conseguir que el valor óptimo de

$$\begin{aligned} \min_{\hat{s}, \hat{L}} \quad & \sum_{i=1}^n x_i^* V_i(\hat{s}, \hat{L}) \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n x_i^* P_i = \exp\{-Y(t_0, m)(m - t_0)\} M \end{aligned}$$

sea igual a $\$M$. La restricción de este problema es la restricción presupuestaria a la que se enfrenta el inversor: el precio de adquisición de la “cartera de inmunización” debe ser igual a la riqueza de la que dispone dicho inversor en el instante t_0 .

Por tanto, la “cartera de inmunización” $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es la solución del problema

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 0} \quad & \left\{ \min_{\hat{s}, \hat{L}} \sum_{i=1}^n x_i V_i(\hat{s}, \hat{L}) \right\} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n x_i P_i = \exp\{-Y(t_0, m)(m - t_0)\} M \end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones (4.1) y (4.13) así como la expresión del precio de un bono cupón-cero obtenida en el capítulo anterior, podemos concluir que la “cartera de inmunización” $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es la solución del problema

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 0} \quad & \left\{ \min_{\hat{s}, \hat{L}} \sum_{i=1}^n x_i \int_{t_0}^{T^i} c_i(t) \exp\{\ln(A(t - m)) - B(t - m)\hat{s} - C(t - m)\hat{L}\} dt \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n x_i \exp\{\ln(A(T^i - m)) - B(T^i - m)\hat{s} - C(T^i - m)\hat{L}\} \right\} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n x_i P_i = \exp\{-Y(t_0, m)(m - t_0)\} M \end{aligned}$$

4.6 Una Propuesta de Solución de las Limitaciones de la Duración Convencional

En esta sección se ilustra numéricamente de qué modo las medidas de “duración generalizadas” D_s y D_L pueden solucionar las limitaciones de la duración convencional. En el ejemplo que se muestra en esta sección se presentan dos carteras con las mismas “duraciones generalizadas” respecto al *spread* y al tipo de interés a largo plazo. Ambas carteras difieren en su rentabilidad y en su convexidad. A continuación veremos que, al coincidir estas dos “duraciones generalizadas”, el comportamiento relativo de ambas carteras no depende de la magnitud ni del tipo de cambio que se produzca en la curva de rentabilidades.

La cartera 1 se compone de los bonos A, B y C y la cartera 2 está formada exclusivamente por el bono D. Las características de estos bonos, cuyo valor nominal es igual a 100 y que realizan un pago semestral de cupones, vienen dadas por la siguiente tabla:

Bono	A	B	C	D
Cupón (%)	5.5	10	12	9
Vencimiento (años)	5	15	20	10
Rentabilidad (%)	5.5	10	12	9
Duración respecto a s (D_s)	0.5085	0.5499	0.6344	0.5346
Duración respecto a L (D_L)	0.8714	0.9342	1.0750	0.9123
Convexidad respecto a s (δ_s)	0.3686	0.3924	0.4519	0.3826
Convexidad respecto a L (δ_L)	1.1002	1.1644	1.3354	1.1439

Las proporciones de los bonos A, B y C que forman la cartera 1 se eligen de modo que las “duraciones generalizadas” D_s y D_L (ante un cambio de cien puntos básicos en la rentabilidad) y el precio de mercado de ambas carteras coincida. De este modo se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_A D_s^A + x_B D_s^B + x_C D_s^C = D_s^D \\ x_A D_L^A + x_B D_L^B + x_C D_L^C = D_L^D \\ x_A + x_B + x_C = 1 \end{cases} \quad (4.14)$$

donde x_j , $j = A, B, C$, son las proporciones que invertimos en cada bono y donde D_i^j , $i = s, L$, $j = A, B, C$, representa la “duración generalizada” del bono j respecto al factor i . Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que las proporciones de los bonos A, B y C son 59.930%, 11.203% y 28.866%, respectivamente.

A partir de estos datos, podemos calcular las “convexidades generalizadas” y la rentabilidad de ambas carteras. Para el cálculo de los valores correspondientes a la cartera 1, utilizamos la media ponderada (donde las ponderaciones vienen dadas por la proporción de la cartera invertida en cada bono) de la convexidad y de la rentabilidad de los bonos que la forman. Los resultados obtenidos son los siguientes:

	Cartera 1	Cartera 2
Duración respecto a s (D_s)	0.5346	0.5346
Duración respecto a L (D_L)	0.9123	0.9123
Duración respecto a r (D_r)	2.8476	3.1155
Convexidad respecto a s (δ_s)	0.3848	0.3826
Convexidad respecto a L (δ_L)	1.1451	1.1439
Rentabilidad (%)	7.5272	9

Estos resultados muestran que ambas carteras tienen las mismas “duraciones generalizadas” respecto al *spread* y al tipo de interés a largo plazo pero la “duración generalizada” respecto al tipo de interés a corto plazo de la cartera 2 es superior a la de la cartera 1. Así mismo, la rentabilidad de la cartera 2 es superior a la obtenida para la cartera 1. Por otro lado, las “convexidades generalizadas” de la cartera 2 son

ligeramente inferiores a las de la cartera 1. La diferencia entre la rentabilidad de las dos carteras sugiere que la mejor estrategia a seguir consistiría en la compra de la cartera 2 y en la venta de la cartera 1. De este modo se obtendría una mejora en la rentabilidad de 147.2 puntos básicos. Sin embargo, las mayores “convexidades generalizadas” de la cartera 1 sugieren que esta cartera generaría rentabilidades superiores (en comparación con la cartera 2) si se produjeran ciertos movimientos de la curva de rentabilidades.

A continuación supondremos que se produce un cambio en la curva de rentabilidades inmediatamente después de la adquisición de la cartera y calcularemos el comportamiento relativo, medido por la diferencia entre las rentabilidades obtenidas en un determinado horizonte de inversión (seis meses), de las dos carteras. Más concretamente, analizaremos tres tipos de cambios en la curva de rentabilidades:

- Cambio paralelo: los tipos de interés a diferentes vencimientos se mueven en la misma magnitud y dirección.
- Cambio en la pendiente: los tipos de interés a diferentes vencimientos se mueven en la misma dirección y distinta magnitud. Consideramos dos alternativas:
 - Los tipos de interés a corto plazo se mueven más que los tipos de interés a largo plazo. En este caso, disminuye la pendiente de la curva de rentabilidades.
 - Los tipos de interés a corto plazo se mueven menos que los tipos de interés a largo plazo. En este caso, aumenta la pendiente de la curva de rentabilidades.

Como resultado de nuestra inversión, obtendremos un determinado valor acumulado para cada cartera al final del horizonte de inversión. Este valor acumulado es igual a la suma de los cupones recibidos, de los intereses generados por dichos cupones y del precio de mercado de los bonos que componen cada cartera. El cambio en los tipos de

interés tiene dos efectos sobre este valor acumulado y, por tanto, sobre la rentabilidad obtenida con cada cartera. El primer efecto de dicho cambio se relaciona con los intereses generados por los cupones y nos referiremos a él como “riesgo de reinversión”. El segundo efecto se relaciona con el precio de mercado del bono y representa un “riesgo de precio”.

Si los tipos de interés suben, los cupones recibidos generan unos intereses superiores pero el precio de mercado del bono desciende. La situación inversa ocurre si los tipos de interés bajan. Por tanto, el valor final que se obtiene con cada cartera - en relación con el valor que se obtendría si no hubiera cambios en los tipos de interés - dependerá de la variación de los tipos de interés y del efecto combinado de ambos riesgos.

En nuestro caso, el horizonte de inversión es igual a seis meses. Por tanto, no necesitamos realizar ningún supuesto sobre la tasa de reinversión de los cupones puesto que cada bono es vendido al final del horizonte de inversión, instante en el que recibimos el pago del primer y único cupón, el cual no genera intereses.

La Tabla VII muestra el valor acumulado obtenido a los seis meses y la rentabilidad (en términos anuales) que se obtiene con cada uno de los tres bonos que componen la cartera 1 cuando se produce un cambio paralelo en la curva de rentabilidades. La primera columna de esta tabla indica la cuantía, igual para los tres bonos, en que han cambiado los tipos de interés. En este caso, el valor acumulado es igual al precio de mercado del bono más el cupón recibido. El valor de este cupón, pagado por los bonos A, B y C, es igual a 2.75, 5 y 6, respectivamente. Se puede observar como, a medida que los tipos de interés van subiendo, la rentabilidad final obtenida por el bono va descendiendo. Los valores más extremos se obtienen para el bono C pues es el que tiene mayor vencimiento mientras que el Bono A, debido a ser el de menor vencimiento, presenta el menor rango de rentabilidades.

VIII refleja el valor acumulado y la rentabilidad que se obtiene con cada una de las carteras. El valor acumulado de la cartera 1 es la media ponderada de los valores (véase la tabla anterior) obtenidos con los dos bonos que la componen. La última columna, análogamente a la Tabla VII, muestra el cambio producido en la curva de rentabilidades. La última columna refleja la diferencia entre las rentabilidades de las carteras. Más concretamente, esta diferencia se ha calculado como “rentabilidad de la cartera 2” menos “rentabilidad de la cartera 1”. Por tanto, un valor negativo indica que la cartera 1 proporciona una rentabilidad superior (inferior) a la cartera 2. La estrategia a seguir con estas carteras depende del tipo de variación que se produce en la curva de rentabilidades. Tal como indica la última columna de esta tabla, la cartera 1 será preferible a la cartera 2 si los tipos de interés suben. Por otro lado, la cartera 2 ofrece una rentabilidad superior a la generada por la cartera 1 si los tipos de interés bajan. Este resultado es consecuencia de un hecho señalado anteriormente: la “duración efectiva” respecto al tipo de interés a corto plazo de la cartera 1 es inferior a la correspondiente a la cartera 2. Por tanto, una subida (bajada) en los tipos de interés hace que la cartera 1 (subir) en mayor cuantía el valor acumulado correspondiente a esta cartera que la cartera 2 (descenso (aumento) que experimenta el valor acumulado de la cartera 1. Por tanto, esta cartera presenta un mejor (peor) comportamiento respecto al tipo de interés a corto plazo es que la rentabilidad adicional obtenida en la cartera 1 crece monótonamente con respecto a la magnitud del cambio de los tipos de interés: a medida que aumenta la variación de los tipos de interés, dicha variación tiene una mayor influencia sobre la rentabilidad final conseguida por cada cartera.

ente de la
e conside-

ento (des-
ne que el
s igual al
s básicos
ambio en
resultados
Tabla IX

io en los
con cada
l cambio
pone la
cambio
lad final
para el
ntan un

do y la
IX, la
última
seguidas
urva de

rentabilidades, la última columna de esta tabla indica que los resultados son análogos a los obtenidos en el caso del cambio paralelo: la cartera 1 es preferible a la cartera 2 si los tipos de interés suben y se produce el resultado contrario si los tipos de interés bajan. Como en el anterior cambio que hemos analizado, este comportamiento se debe a la menor “duración generalizada” respecto al tipo de interés a corto plazo que presenta la cartera 1 en comparación con la cartera 2. Una subida en los tipos de interés perjudica más a la cartera 2 mientras que un descenso en los tipos de interés beneficia más a la cartera 1. Análogamente al anterior cambio, la diferencia de “duraciones generalizadas” respecto al tipo de interés a corto plazo implica que la rentabilidad adicional obtenida por cada cartera es monótona respecto al tamaño de la variación que experimentan los tipos de interés.

El segundo cambio no paralelo que consideramos representa un aumento en la pendiente de la curva de rentabilidades. El cambio en el tipo de interés correspondiente al menor (mayor) vencimiento es igual al cambio en el tipo de interés correspondiente al bono D menos (más) 100 puntos básicos mientras que el cambio en el tipo de interés a 15 años (bono B) es igual al cambio en el tipo de interés correspondiente al bono D más 50 puntos básicos. Los resultados obtenidos para los tres bonos que componen la cartera 1 se incluyen en la Tabla XI mientras la Tabla XII contiene los resultados obtenidos para las dos carteras.

La Tabla XI muestra los cambios producidos en el valor acumulado y en la rentabilidad obtenida con cada uno de los bonos. Análogamente a la tabla IX, la primera columna indica el cambio producido en los tipos de interés a 10 años, el vencimiento del bono D. Los resultados obtenidos son los mismos que los obtenidos con los dos cambios que hemos considerado anteriormente: una subida en los tipos de interés hace que descienda la rentabilidad final obtenida por bono y las rentabilidades más extremas se obtienen para el bono de mayor vencimiento.

En la Tabla XII se incluyen el valor acumulado y la rentabilidad final obtenida en cada cartera. Nuevamente, la última columna de esta tabla indica que los resultados son análogos a los obtenidos en los dos cambios anteriores: la cartera 2 es preferible a la cartera 1 si los tipos de interés bajan y se produce el resultado contrario si los tipos de interés suben. Una vez más, este hecho es consecuencia de la menor duración generalizada respecto al tipo de interés a corto plazo que presenta la cartera 1. Así mismo, la rentabilidad adicional obtenida por la cartera correspondiente se incrementa a medida que consideramos mayores cambios en los tipos de interés.

Por tanto, la principal conclusión que podemos extraer de este ejemplo es que, habiendo analizado tres posibles cambios en la curva de rentabilidades, las medidas de “duración generalizadas” sirven como indicativo del comportamiento futuro de una cartera ante cambios en la curva de rentabilidades. Hemos comprobado que, independientemente de la magnitud y del tipo de cambio que se produce en los tipos de interés, la cartera 1 siempre proporciona una rentabilidad superior (inferior) a la de la cartera 2 si los tipos de interés suben (bajan). Así mismo, hemos mostrado que la rentabilidad adicional obtenida en cada caso es monótona respecto a la magnitud del cambio que se ha producido en la curva de rentabilidades. Estas dos características se deben a la menor “duración generalizada” respecto al tipo de interés a corto plazo que presenta la cartera 1: si los tipos de interés suben, el valor acumulado obtenido por esta cartera desciende en menor cuantía que el correspondiente a la cartera 2 y, por tanto, se obtiene una mayor rentabilidad. El caso contrario ocurre si los tipos de interés bajan.

Este ejemplo ilustra un hecho que tiene importantes implicaciones prácticas para la gestión de carteras de renta fija: dada una determinada cartera siempre se puede construir una segunda cartera de modo que las “duraciones generalizadas” respecto al *spread* y al tipo de interés a largo plazo de ambas carteras coincidan. Esta igualdad asegura que el comportamiento relativo de ambas carteras es independiente del tipo (y

magnitud) de cambio futuro que se produzca en la curva de rentabilidades. Es decir, haya un cambio en el nivel y/o en la pendiente de la curva de rentabilidades, la cartera con menor (mayor) “duración generalizada” respecto al tipo de interés a corto plazo siempre será preferible cuando los tipos de interés suban (bajen). Por tanto, si se tienen expectativas sobre una subida (bajada) de los tipos de interés, se debe elegir la cartera de menor (mayor) “duración generalizada” respecto al tipo de interés a corto plazo. A medida que estas expectativas vayan cambiando, se puede proceder a una alteración en la elección entre las carteras disponibles y/o en la composición de dichas carteras.

4.7 Conclusiones

El riesgo de tipos de interés se relaciona con los cambios que puede presentar la curva de rentabilidades. Así, tenemos el riesgo de mercado (“*market risk*”) que se deriva de cambios paralelos en dicha curva mientras que el riesgo de curva de rentabilidades (“*yield curve risk*”) se debe a cambios en la pendiente y/o en la curvatura de esta curva. Mientras la solución clásica para gestionar el riesgo de mercado se basa en el uso de la duración, la solución para resolver los problemas asociados al segundo tipo de riesgo no es tan clara.

Con el propósito de gestionar este tipo de riesgo, este capítulo ha presentado y aplicado unas nuevas medidas de “duración generalizada”. Dichas medidas se basan en el modelo bifactorial para la estructura temporal de los tipos de interés que ha sido presentado y analizado en el anterior capítulo. Utilizando este modelo, se han generalizado las medidas de duración y convexidad convencionales y se han obtenido unas medidas de duración y convexidad “generalizadas”.

Posteriormente, esta medida de “duración generalizada” ha sido utilizada para el cálculo de los ratios de cobertura. Dichos ratios nos permiten inmunizar una cartera

de bonos mediante el empleo de opciones sobre bonos. A continuación se ha abordado, de modo general, el problema de la cobertura. Así mismo, se ha descrito el modo de utilizar estas medidas para gestionar el riesgo derivado de los tipos de interés ante cambios (paralelos y/o en la pendiente) en la curva de rentabilidades.

Finalmente, se ha presentado un ejemplo numérico que ilustra el modo en que las medidas definidas en este capítulo pueden, efectivamente, paliar las limitaciones asociadas a técnicas convencionales previamente empleadas en la literatura. El problema asociado a la duración tradicional es que esta medida sólo informa adecuadamente sobre el comportamiento futuro de una cartera ante cambios en la curva de rentabilidades si dichos cambios son paralelos y “suficientemente pequeños”.

El ejemplo presentado se basa en dos carteras que tienen las mismas “duraciones generalizadas” respecto al *spread* y al tipo de interés a largo plazo. Analizando tres posibles cambios en la curva de rentabilidades (un cambio paralelo y dos tipos de cambios de pendiente), se comprueba que las nuevas medidas de “duración generalizadas” sí informan de modo adecuado sobre el comportamiento futuro de una cartera ante estos tipos de cambios en la curva de rentabilidades. Así, hemos mostrado que, independientemente de la magnitud y del tipo de cambio que se produce en los tipos de interés, la cartera con menor “duración generalizada” respecto al tipo de interés a corto plazo siempre proporciona una rentabilidad superior (inferior) si los tipos de interés suben (bajan). La rentabilidad adicional que se obtiene es monótona respecto a la magnitud del cambio que se ha producido en la curva de rentabilidades. En otras palabras, si los tipos de interés suben, el valor acumulado obtenido por la cartera que presenta menor “duración generalizada” respecto al tipo de interés a corto plazo disminuye en menor cuantía que el correspondiente a la cartera 2 y, por tanto, se obtiene una mayor rentabilidad.

Como consecuencia, estas nuevas medidas de “duración generalizada” pueden ser una herramienta útil para la gestión de carteras de renta fija: independientemente del tipo de cambio (y de la magnitud de dicho cambio) que experimenten los tipos de interés, las características relevantes para determinar el comportamiento futuro de una cartera de renta fija son la “duración generalizada” respecto al tipo de interés a corto plazo y las expectativas sobre subidas o bajadas de los tipos de interés. Así, entre dos carteras alternativas en las que coinciden las medidas de “duración generalizada” respecto al *spread* y al tipo de interés a largo plazo, la cartera con menor (mayor) “duración generalizada” respecto al tipo de interés a corto plazo siempre será preferible cuando los tipos de interés suban (bajen). Por tanto, en función de las expectativas sobre el movimiento futuro (subida o bajada) de los tipos de interés, se debe elegir la cartera correspondiente (con menor o mayor “duración generalizada” respecto al tipo de interés a corto plazo).



Apéndice: Limitaciones de la Duración Convencional

En este apéndice final ilustramos numéricamente las limitaciones que presenta el uso de la duración como medida informativa sobre los cambios que se producen en el valor de un bono (o de una cartera de bonos) ante cambios en la curva de rentabilidades. Así mismo, este apéndice contiene los resultados obtenidos con la propuesta de solución que se ha presentado en este capítulo.

En el ejemplo que se muestra en este apéndice, se presentan dos carteras de bonos con la misma duración modificada. Estas dos carteras difieren en su rentabilidad y en su convexidad. A priori, la mejor estrategia parece ser comprar la cartera de mayor rentabilidad y vender la cartera de menor rentabilidad. Sin embargo, la diferente convexidad de ambas carteras sugiere la posibilidad de realizar otras alternativas de inversión si se dan ciertos cambios en la curva de tipos de interés. A continuación veremos que, a pesar de tener la misma duración modificada, el comportamiento relativo de estas dos carteras depende de la magnitud y del tipo de cambio que se produzca en la curva de rentabilidades.

Sean dos carteras de bonos: la cartera 1 se compone de los bonos A y B y la cartera 2 está formada exclusivamente por el bono C. Estos tres bonos tienen un valor nominal igual a 100, realizan un pago semestral de cupones y sus características vienen dadas por la siguiente tabla:

Bono	Cupón (%)	Vencimiento (años)	Rentabilidad (%)	Duración modificada	Convexidad =
A	7	5	7	4.1583	20.9592
B	9.75	20	9.75	8.7284	120.7668
C	9	10	9	6.5039	56.3576

Las proporciones de los bonos A y B que forman la cartera 1 se eligen de modo que la duración modificada (ante un cambio de cien puntos básicos en la rentabilidad) y el precio de mercado de ambas carteras coincida. De modo análogo a (4.14), se obtiene el sistema

$$\begin{cases} x_A D_r^A + x_B D_r^B = D_r^C \\ x_A + x_B = 1 \end{cases}$$

donde $x_j, j = A, B$, son las proporciones que invertimos en cada bono y donde $D_r^j, j = A, B$, representa la duración generalizada del bono j respecto al tipo de interés a corto plazo. Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que las proporciones de los bonos A y B son 48.674% y 51.326%, respectivamente. Mediante estas ponderaciones, obtenemos la duración modificada, convexidad y rentabilidad de ambas carteras. Los resultados obtenidos son los siguientes:

	Duración Modificada	Convexidad	Rentabilidad (%)
Cartera 1	6.5039	72.1864	8.4114
Cartera 2	6.5039	56.3576	9

Estos resultados muestran que la rentabilidad (convexidad) de la cartera 2 es superior (inferior) a la correspondiente a la cartera 1 y sugieren que la cartera 1 puede generar rentabilidades superiores (en comparación con la cartera 2) si se produjeran ciertos movimientos de la curva de rentabilidades.

A continuación supondremos que se produce un cambio en la curva de rentabilidades y calcularemos el comportamiento relativo de ambas carteras. Análogamente a la sección 4.6, supondremos que (1) este cambio se produce inmediatamente después de la adquisición de la cartera, (2) existen tres posibles cambios: un cambio paralelo y dos posibles cambios en la pendiente, (3) el horizonte de inversión es igual a seis meses,

La Tabla I muestra el valor acumulado obtenido al final del horizonte de inversión y la rentabilidad (en términos anuales) que se obtiene con cada uno de los tres bonos cuando se produce un cambio paralelo en la curva de rentabilidades. La primera columna de esta tabla indica la cuantía, igual para los tres bonos, en que han cambiado los tipos de interés. Se puede observar como, a medida que los tipos de interés van subiendo, la rentabilidad final obtenida por el bono va descendiendo. Los valores más extremos se obtienen para el bono B pues es el que tiene mayor vencimiento mientras que el Bono A, debido a ser el de menor vencimiento, presenta el menor rango de rentabilidades.

La tabla II refleja los resultados obtenidos con ambas carteras. El valor acumulado de la cartera 1 es la media ponderada de los valores acumulados obtenidos con los dos bonos que la componen. La primera columna, análogamente a la Tabla I, muestra el cambio producido en la curva de rentabilidades. La última columna refleja la diferencia entre las rentabilidades de las dos carteras (“rentabilidad de la cartera 2” menos “rentabilidad de la cartera 1”).

Tal como indica la última columna de esta tabla, la cartera 1 será preferible a la cartera 2 si los tipos de interés varían más de 200 puntos básicos. La rentabilidad adicional obtenida con la cartera 1 crece monótonamente con respecto a la magnitud del cambio de los tipos de interés. El mejor comportamiento de la cartera 1 ante grandes variaciones en los tipos de interés se debe a su mayor convexidad.

Por otro lado, vemos que la cartera 2 ofrece una rentabilidad superior a la generada por la cartera 1 cuando los tipos de interés cambian en una cuantía inferior a 200 puntos básicos. En esta situación, nos encontramos ante un cambio paralelo “suficientemente pequeño” en los tipos de interés. Al ser éste el supuesto básico en el que se basa la duración convencional, se obtiene el resultado intuitivamente esperado: entre dos carteras con la misma duración, es preferible la cartera que ofrece una mayor rentabilidad en ausencia de cambios en los tipos de interés.

A continuación, analizamos las consecuencias de un cambio en la pendiente de la curva de rentabilidades. Más concretamente, en la primera alternativa que analizamos, se supone que el cambio en el tipo de interés correspondiente al vencimiento del bono A es igual al cambio en el tipo de interés correspondiente al vencimiento intermedio (bono C) más 25 puntos básicos mientras que el cambio en el tipo de interés correspondiente al mayor vencimiento (bono B) es igual al cambio en el tipo de interés a 10 años menos 25 puntos básicos. Por tanto, este cambio representa un aplanamiento (descenso en la pendiente) en la curva de rentabilidades. Los resultados obtenidos para los tres bonos y las dos carteras se incluyen en las Tablas III-IV.

La primera columna de la Tabla III indica el cambio producido en los tipos de interés a 10 años, el vencimiento intermedio que estamos considerando. Análogamente a lo sucedido con el cambio paralelo, una subida en los tipos de interés produce un descenso en la rentabilidad final obtenida por el bono y las rentabilidades más extremas se obtienen para el bono de mayor vencimiento.

De modo similar a la Tabla II, la tabla IV contiene los resultados obtenidos para ambas carteras. La última columna de esta tabla refleja la diferencia entre las rentabilidades finales conseguidas por ambas carteras. Como todos los valores incluidos en esta columna son negativos, se deduce que, independientemente de la magnitud

del cambio de los tipos de interés, la cartera 1 siempre es superior a la cartera 2. La rentabilidad adicional conseguida por la cartera 1 depende de la magnitud del cambio en los tipos de interés. Las mayores mejoras de rentabilidad se consiguen cuando los tipos de interés experimentan grandes descensos.

El segundo cambio no paralelo que consideramos representa un aumento en la pendiente de la curva de rentabilidades. El cambio en el tipo de interés correspondiente al menor vencimiento (bono A) es igual al cambio en el tipo de interés correspondiente al vencimiento intermedio menos 25 puntos básicos mientras que el cambio en el tipo de interés correspondiente al bono B es igual al cambio en el tipo de interés correspondiente al bono C más 25 puntos básicos. Los resultados obtenidos para los tres bonos y para las dos carteras están contenidos en las Tablas V-VI.

La Tabla V muestra los cambios producidos en el valor acumulado y en la rentabilidad obtenida con cada uno de los bonos. Los resultados obtenidos son los mismos que los obtenidos en los casos anteriores: una subida en los tipos de interés hace que descienda la rentabilidad final obtenida por cada uno de los bonos y las rentabilidades más extremas se obtienen para el bono de mayor vencimiento.

En la Tabla VI se incluyen el valor acumulado y la rentabilidad final obtenida en cada cartera. La diferencia entre estas rentabilidades indica que la cartera 1 es superior a la cartera 2 si los tipos de interés suben más de 300 puntos básicos o bajan más de 350 puntos básicos. Para cambios menores en los tipos de interés, la cartera 2 genera una rentabilidad superior a la de la cartera 1.

Tabla I. Comportamiento relativo de tres bonos ante un cambio paralelo en la curva de rentabilidades

Esta tabla contiene el valor acumulado (precio de mercado del bono más el cupón recibido) y la rentabilidad (en términos anuales) obtenida por tres bonos ante un cambio paralelo (los tipos de interés a diferentes vencimientos cambian en la misma magnitud, indicada en la primera columna) en la curva de rentabilidades. El valor nominal de cada bono es igual a 100. La cuantía del cupón (pagado semestralmente) es igual a 3.5, 4.875 y 4.5, respectivamente. El vencimiento de los tres bonos es igual a 5, 20 y 10 años, respectivamente. El horizonte de inversión considerado es igual a seis meses.

Cambio en los tipos de interés	Bono A		Bono B		Bono C	
	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)
5	86.495	-27.008	73.089	-53.820	78.661	-42.677
4.5	88.028	-23.943	75.452	-49.095	80.802	-38.395
4	89.595	-20.808	77.959	-44.080	83.030	-33.938
3.5	91.198	-17.602	80.624	-38.751	85.349	-29.301
3	92.838	-14.323	83.458	-33.083	87.762	-24.474
2.5	94.515	-10.969	86.475	-27.048	90.275	-19.448
2	96.231	-7.537	89.690	-20.619	92.892	-14.215
1.5	97.986	-4.027	93.119	-13.761	95.617	-8.764
1	99.782	-0.435	96.780	-6.439	98.457	-3.085
0.5	101.619	3.239	100.691	1.383	101.416	2.832
0	103.5	7	104.875	9.75	104.5	9
-0.5	105.424	10.848	109.353	18.706	107.714	15.429
-1	107.393	14.786	114.152	28.304	111.066	22.133
-1.5	109.408	18.816	119.298	38.597	114.562	29.125
-2	111.470	22.941	124.822	49.645	118.209	36.419
-2.5	113.582	27.164	130.758	61.516	122.014	44.029
-3	115.743	31.486	137.140	74.280	125.985	51.971
-3.5	117.955	35.911	144.009	88.019	130.130	60.261
-4	120.221	40.442	151.409	102.818	134.457	68.915
-4.5	122.540	45.080	159.387	118.774	138.976	77.953
-5	124.915	49.830	167.996	135.992	143.696	87.392

Tabla II. Comportamiento relativo de dos carteras ante un cambio paralelo en la curva de rentabilidades

Esta tabla contiene el valor acumulado (precio de mercado de la cartera más cupones recibidos) y la rentabilidad (en términos anuales) obtenida por dos carteras ante un cambio paralelo (los tipos de interés a diferentes vencimientos cambian en la misma magnitud, indicada en la primera columna) en la curva de rentabilidades. La cartera 1 incluye los bonos A y B en proporciones 48.674% y 51.326%, respectivamente. La cartera 2 está compuesta por el bono C. El horizonte de inversión considerado es igual a seis meses.

Cambio en los tipos de interés	Cartera 1		Cartera 2		Diferencia (%)
	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)	
5	79.615	-40.769	78.661	-42.677	-1.908
4.5	81.573	-36.853	80.802	-38.395	-1.541
4	83.623	-32.753	83.030	-33.938	-1.185
3.5	85.771	-28.457	85.349	-29.301	-0.843
3	88.023	-23.952	87.762	-24.474	-0.522
2.5	90.388	-19.222	90.275	-19.448	-0.226
2	92.874	-14.251	92.892	-14.215	0.036
1.5	95.488	-9.023	95.617	-8.764	0.258
1	98.241	-3.517	98.457	-3.085	0.431
0.5	101.143	2.286	101.416	2.832	0.545
0	104.205	8.411	104.5	9	0.588
-0.5	107.440	14.881	107.714	15.429	0.547
-1	110.862	21.724	111.066	22.133	0.409
-1.5	114.484	28.969	114.562	29.125	0.156
-2	118.323	36.647	118.209	36.419	-0.228
-2.5	122.397	44.795	122.014	44.029	-0.765
-3	126.725	53.451	125.985	51.971	-1.479
-3.5	131.328	62.656	130.130	60.261	-2.395
-4	136.228	72.457	134.457	68.915	-3.542
-4.5	141.452	82.904	138.976	77.953	-4.951
-5	147.026	94.053	143.696	87.392	-6.661

Tabla III. Comportamiento relativo de tres bonos ante un descenso en la pendiente de la curva de rentabilidades

Esta tabla contiene el valor acumulado (precio de mercado del bono más el cupón recibido) y la rentabilidad (en términos anuales) obtenida por tres bonos ante un descenso en la pendiente de la curva de rentabilidades. El valor nominal de cada bono es igual a 100. La cuantía del cupón (pagado semestralmente) es igual a 3.5, 4.875 y 4.5, respectivamente. El vencimiento de los tres bonos es igual a 5, 20 y 10 años, respectivamente. El horizonte de inversión considerado es igual a seis meses. La primera columna indica el cambio en los tipos de interés a 10 años. Además se verifica

Cambio en el tipo de interés a 5 (20) años = Cambio en el tipo de interés a 10 años + (-) 0.25%

Cambio en los tipos de interés	Bono A		Bono B		Bono C	
	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)
5	85.742	-28.515	74.253	-51.492	78.661	-42.677
4.5	87.257	-25.484	76.687	-46.625	80.802	-38.395
4	88.807	-22.384	79.271	-41.456	83.030	-33.938
3.5	90.392	-19.214	82.019	-35.961	85.349	-29.301
3	92.013	-15.972	84.943	-30.113	87.762	-24.474
2.5	93.672	-12.655	88.057	-23.885	90.275	-19.448
2	95.368	-9.263	91.377	-17.245	92.892	-14.215
1.5	97.103	-5.792	94.919	-10.160	95.617	-8.764
1	98.879	-2.241	98.703	-2.593	98.457	-3.085
0.5	100.695	1.391	102.747	5.495	101.416	2.832
0	102.554	5.108	107.075	14.151	104.5	9
-0.5	104.456	8.912	111.711	23.422	107.714	15.429
-1	106.402	12.805	116.680	33.360	111.066	22.133
-1.5	108.394	16.789	122.011	44.022	114.562	29.125
-2	110.433	20.867	127.736	55.473	118.209	36.419
-2.5	112.520	25.040	133.890	67.781	122.014	44.029
-3	114.656	29.312	140.511	81.023	125.985	51.971
-3.5	116.843	33.686	147.640	95.280	130.130	60.261
-4	119.081	38.163	155.323	110.646	134.457	68.915
-4.5	121.373	42.747	163.609	127.219	138.976	77.953
-5	123.720	47.441	172.555	145.110	143.696	87.392

Tabla IV. Comportamiento relativo de dos carteras ante un descenso en la pendiente de la curva de rentabilidades

Esta tabla contiene el valor acumulado (precio de mercado de la cartera más cupones recibidos) y la rentabilidad (en términos anuales) obtenida por dos carteras ante un descenso en la pendiente de la curva de rentabilidades. La cartera 1 incluye los bonos A y B en proporciones 48.674% y 51.326%, respectivamente. La cartera 2 está compuesta por el bono C. El horizonte de inversión considerado es igual a seis meses. La primera columna indica el cambio en los tipos de interés a 10 años. Además se verifica

Cambio en el tipo de interés a 5 (20) años = Cambio en el tipo de interés a 10 años + (-) 0.25%

Cambio en los tipos de interés	Cartera 1		Cartera 2		Diferencia (%)
	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)	
5	79.845	-40.308	78.661	-42.677	-2.369
4.5	81.832	-36.335	80.802	-38.395	-2.059
4	83.913	-32.173	83.030	-33.938	-1.765
3.5	86.094	-27.810	85.349	-29.301	-1.491
3	88.384	-23.230	87.762	-24.474	-1.243
2.5	90.790	-18.419	90.275	-19.448	-1.029
2	93.319	-13.360	92.892	-14.215	-0.855
1.5	95.982	-8.034	95.617	-8.764	-0.729
1	98.788	-2.422	98.457	-3.085	-0.663
0.5	101.749	3.498	101.416	2.832	-0.665
0	104.875	9.75	104.5	9	-0.750
-0.5	108.179	16.359	107.714	15.429	-0.930
-1	111.677	23.355	111.066	22.133	-1.221
-1.5	115.383	30.767	114.562	29.125	-1.641
-2	119.314	38.629	118.209	36.419	-2.209
-2.5	123.489	46.978	122.014	44.029	-2.948
-3	127.926	55.853	125.985	51.971	-3.882
-3.5	132.650	65.300	130.130	60.261	-5.039
-4	137.682	75.365	134.457	68.915	-6.450
-4.5	143.051	86.103	138.976	77.953	-8.150
-5	148.785	97.570	143.696	87.392	-10.178

Tabla V. Comportamiento relativo de tres bonos ante un aumento en la pendiente de la curva de rentabilidades

Esta tabla contiene el valor acumulado (precio de mercado del bono más el cupón recibido) y la rentabilidad (en términos anuales) obtenida por tres bonos ante un aumento en la pendiente de la curva de tipos de interés. El valor nominal de cada bono es igual a 100. La cuantía del cupón (pagado semestralmente) es igual a 3.5, 4.875 y 4.5, respectivamente. El vencimiento de los tres bonos es igual a 5, 20 y 10 años, respectivamente. El horizonte de inversión considerado es igual a seis meses. La primera columna indica el cambio en los tipos de interés a 10 años. Además se verifica

Cambio en el tipo de interés a 5 (20) años = Cambio en el tipo de interés a 10 años + (-) 0.25%

Cambio en los tipos de interés	Bono A		Bono B		Bono C	
	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)
5	87.257	-25.484	71.960	-56.079	78.661	-42.677
4.5	88.807	-22.384	74.253	-51.492	80.802	-38.395
4	90.392	-19.214	76.687	-46.625	83.030	-33.938
3.5	92.013	-15.972	79.271	-41.456	85.349	-29.301
3	93.672	-12.655	82.019	-35.961	87.762	-24.474
2.5	95.368	-9.263	84.943	-30.113	90.275	-19.448
2	97.103	-5.792	88.057	-23.885	92.892	-14.215
1.5	98.879	-2.241	91.377	-17.245	95.617	-8.764
1	100.695	1.391	94.919	-10.160	98.457	-3.085
0.5	102.554	5.108	98.703	-2.593	101.416	2.832
0	104.456	8.912	102.747	5.495	104.5	9
-0.5	106.402	12.805	107.075	14.151	107.714	15.429
-1	108.394	16.789	111.711	23.422	111.066	22.133
-1.5	110.433	20.867	116.680	33.360	114.562	29.125
-2	112.520	25.040	122.011	44.022	118.209	36.419
-2.5	114.656	29.312	127.736	55.473	122.014	44.029
-3	116.843	33.686	133.890	67.781	125.985	51.971
-3.5	119.081	38.163	140.511	81.023	130.130	60.261
-4	121.373	42.747	147.640	95.280	134.457	68.915
-4.5	123.720	47.441	155.323	110.646	138.976	77.953
-5	126.123	52.247	163.609	127.219	143.696	87.392

Tabla VI. Comportamiento relativo de dos carteras ante un aumento en la pendiente de la curva de rentabilidades

Esta tabla contiene el valor acumulado (precio de mercado de la cartera más cupones recibidos) y la rentabilidad (en términos anuales) obtenida por dos carteras ante un aumento en la pendiente de la curva de rentabilidades. La cartera 1 incluye los bonos A y B en proporciones 48.674% y 51.326%, respectivamente. La cartera 2 está compuesta por el bono C. El horizonte de inversión considerado es igual a seis meses. La primera columna indica el cambio en los tipos de interés a 10 años. Además se verifica

Cambio en el tipo de interés a 5 (20) años = Cambio en el tipo de interés a 10 años + (-) 0.25%

Cambio en los tipos de interés	Cartera 1		Cartera 2		Diferencia (%)
	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)	
5	79.406	-41.187	78.661	-42.677	-1.490
4.5	81.337	-37.324	80.802	-38.395	-1.070
4	83.358	-33.283	83.030	-33.938	-0.654
3.5	85.473	-29.052	85.349	-29.301	-0.248
3	87.691	-24.617	87.762	-24.474	0.143
2.5	90.017	-19.964	90.275	-19.448	0.516
2	92.460	-15.078	92.892	-14.215	0.863
1.5	95.028	-9.942	95.617	-8.764	1.178
1	97.731	-4.537	98.457	-3.085	1.452
0.5	100.577	1.155	101.416	2.832	1.676
0	103.579	7.159	104.5	9	1.840
-0.5	106.748	13.496	107.714	15.429	1.933
-1	110.096	20.193	111.066	22.133	1.940
-1.5	113.639	27.279	114.562	29.125	1.846
-2	117.391	34.783	118.209	36.419	1.636
-2.5	121.370	42.740	122.014	44.029	1.289
-3	125.593	51.186	125.985	51.971	0.785
-3.5	130.080	60.161	130.130	60.261	0.099
-4	134.855	69.710	134.457	68.915	-0.795
-4.5	139.940	79.881	138.976	77.953	-1.928
-5	145.363	90.727	143.696	87.392	-3.335

Tabla VII. Comportamiento relativo de los tres bonos de la cartera 1 ante un cambio paralelo en la curva de rentabilidades

Esta tabla contiene el valor acumulado (precio de mercado del bono más el cupón recibido) y la rentabilidad (en términos anuales) obtenida por tres bonos ante un cambio paralelo (los tipos de interés a diferentes vencimientos cambian en la misma magnitud, indicada en la primera columna) en la curva de rentabilidades. El valor nominal de cada bono es igual a 100. La cuantía del cupón (pagado semestralmente) es igual a 2.75, 5 y 6, respectivamente. El vencimiento de los tres bonos es igual a 5, 15 y 20 años, respectivamente. El horizonte de inversión considerado es igual a seis meses.

Cambio en los tipos de interés	Bono A		Bono B		Bono C	
	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)
5	85.176	-29.646	75.759	-48.480	77.809	-44.381
4.5	86.757	-26.485	78.042	-43.915	79.966	-40.067
4	88.374	-23.250	80.444	-39.110	82.242	-35.514
3.5	90.029	-19.940	82.974	-34.051	84.648	-30.703
3	91.722	-16.554	85.638	-28.722	87.191	-25.616
2.5	93.455	-13.088	88.447	-23.105	89.883	-20.233
2	95.229	-9.541	91.409	-17.181	92.735	-14.529
1.5	97.044	-5.911	94.534	-10.931	95.758	-8.482
1	98.901	-2.196	97.833	-4.333	98.967	-2.064
0.5	100.803	1.606	101.317	2.635	102.376	4.752
0	102.75	5.5	105	10	106	12
-0.5	104.742	9.485	108.892	17.785	109.856	19.713
-1	106.782	13.565	113.010	26.021	113.964	27.928
-1.5	108.871	17.743	117.369	34.738	118.343	36.687
-2	111.010	22.020	121.983	43.967	123.017	46.034
-2.5	113.200	26.401	126.872	53.744	128.008	56.016
-3	115.443	30.887	132.053	64.107	133.344	66.688
-3.5	117.740	35.481	137.547	75.095	139.054	78.108
-4	120.093	40.186	143.376	86.753	145.168	90.337
-4.5	122.502	45.005	149.563	99.127	151.723	103.447
-5	124.971	49.942	156.133	112.267	158.756	117.512

Tabla VIII. Comportamiento relativo de dos carteras ante un cambio paralelo en la curva de rentabilidades

Esta tabla contiene el valor acumulado (precio de mercado de la cartera más cupones recibidos) y la rentabilidad (en términos anuales) obtenida por dos carteras ante un cambio paralelo (los tipos de interés a diferentes vencimientos cambian en la misma magnitud, indicada en la primera columna) en la curva de rentabilidades. La cartera 1 incluye los bonos A, B y C en proporciones 59.930%, 11.203% y 28.866%, respectivamente. La cartera 2 está compuesta por el bono C. El horizonte de inversión considerado es igual a seis meses.

Cambio en los tipos de interés	Cartera 1		Cartera 2		Diferencia (%)
	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)	
5	81.632	-36.734	78.661	-42.677	-5.943
4.5	83.480	-33.038	80.802	-38.395	-5.356
4	85.398	-29.202	83.030	-33.938	-4.736
3.5	87.390	-25.219	85.349	-29.301	-4.081
3	89.459	-21.081	87.762	-24.474	-3.392
2.5	91.609	-16.780	90.275	-19.448	-2.668
2	93.847	-12.305	92.892	-14.215	-1.909
1.5	96.175	-7.648	95.617	-8.764	-1.115
1	98.600	-2.798	98.457	-3.085	-0.287
0.5	101.128	2.256	101.416	2.832	0.576
0	103.763	7.527	104.5	9	1.472
-0.5	106.513	13.027	107.714	15.429	2.402
-1	109.385	18.770	111.066	22.133	3.363
-1.5	112.385	24.771	114.562	29.125	4.354
-2	115.523	31.046	118.209	36.419	5.373
-2.5	118.806	37.612	122.014	44.029	6.417
-3	122.243	44.487	125.985	51.971	7.483
-3.5	125.846	51.692	130.130	60.261	8.568
-4	129.623	59.247	134.457	68.915	9.668
-4.5	133.588	67.176	138.976	77.953	10.776
-5	137.751	75.503	143.696	87.392	11.888

Tabla IX. Comportamiento relativo de los tres bonos de la cartera 1 ante un descenso en la pendiente de la curva de rentabilidades

Esta tabla contiene el valor acumulado (precio de mercado del bono más el cupón recibido) y la rentabilidad (en términos anuales) obtenida por los tres bonos de la cartera 1 ante un descenso en la pendiente de la curva de rentabilidades. El valor nominal de cada bono es igual a 100. La cuantía del cupón (pagado semestralmente) es igual a 2.75, 5 y 6, respectivamente. El vencimiento de los tres bonos es igual a 5, 15 y 20 años, respectivamente. El horizonte de inversión considerado es igual a seis meses. La primera columna indica el cambio en los tipos de interés a 10 años. Además se verifica

Cambio en el tipo de interés a 5 (15) (20) años = Cambio en el tipo de interés a 10 años +1%(-0.5%)(-1%)

Cambio en los tipos de interés	Bono A		Bono B		Bono C	
	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)
5	82.121	-35.757	78.042	-43.915	82.242	-35.514
4.5	83.631	-32.737	80.444	-39.110	84.648	-30.703
4	85.176	-29.646	82.974	-34.051	87.191	-25.616
3.5	86.757	-26.485	85.638	-28.722	89.883	-20.233
3	88.374	-23.250	88.447	-23.105	92.735	-14.529
2.5	90.029	-19.940	91.409	-17.181	95.758	-8.482
2	91.722	-16.554	94.534	-10.931	98.967	-2.064
1.5	93.455	-13.088	97.833	-4.333	102.376	4.752
1	95.229	-9.541	101.317	2.635	106	12
0.5	97.044	-5.911	105	10	109.856	19.713
0	98.901	-2.196	108.892	17.785	113.964	27.928
-0.5	100.803	1.606	113.010	26.021	118.343	36.687
-1	102.75	5.5	117.369	34.738	123.017	46.034
-1.5	104.742	9.485	121.983	43.967	128.008	56.016
-2	106.782	13.565	126.872	53.744	133.344	66.688
-2.5	108.871	17.743	132.053	64.107	139.054	78.108
-3	111.010	22.020	137.547	75.095	145.168	90.337
-3.5	113.200	26.401	143.376	86.753	151.723	103.447
-4	115.443	30.887	149.563	99.127	158.756	117.512
-4.5	117.740	35.481	156.133	112.267	166.308	132.616
-5	120.093	40.186	163.113	126.227	174.424	148.849

Tabla X. Comportamiento relativo de dos carteras ante un descenso en la pendiente de la curva de rentabilidades

Esta tabla contiene el valor acumulado (precio de mercado de la cartera más cupones recibidos) y la rentabilidad (en términos anuales) obtenida por dos carteras ante un descenso en la pendiente de la curva de rentabilidades. La cartera 1 incluye los bonos A, B y C en proporciones 59.930%, 11.203% y 28.866%, respectivamente. La cartera 2 está compuesta por el bono C. El horizonte de inversión considerado es igual a seis meses. La primera columna indica el cambio en los tipos de interés a 10 años. Además se verifica

Cambio en el tipo de interés a 5 (15) (20) años = Cambio en el tipo de interés a 10 años +1%(-0.5%)(-1%)

Cambio en los tipos de interés	Cartera 1		Cartera 2		Diferencia (%)
	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)	
5	80.957	-38.085	78.661	-42.677	-4.592
4.5	82.825	-34.349	80.802	-38.395	-4.045
4	84.766	-30.466	83.030	-33.938	-3.471
3.5	86.784	-26.430	85.349	-29.301	-2.870
3	88.884	-22.231	87.762	-24.474	-2.242
2.5	91.069	-17.860	90.275	-19.448	-1.588
2	93.346	-13.307	92.892	-14.215	-0.907
1.5	95.718	-8.562	95.617	-8.764	-0.201
1	98.193	-3.612	98.457	-3.085	0.527
0.5	100.776	1.552	101.416	2.832	1.279
0	103.473	6.946	104.5	9	2.053
-0.5	106.292	12.584	107.714	15.429	2.844
-1	109.240	18.481	111.066	22.133	3.652
-1.5	112.326	24.652	114.562	29.125	4.473
-2	115.557	31.115	118.209	36.419	5.304
-2.5	118.944	37.889	122.014	44.029	6.139
-3	122.497	44.995	125.985	51.971	6.975
-3.5	126.227	52.454	130.130	60.261	7.806
-4	130.145	60.290	134.457	68.915	8.624
-4.5	134.264	68.528	138.976	77.953	9.424
-5	138.598	77.197	143.696	87.392	10.194

Tabla XI. Comportamiento relativo de los tres bonos de la cartera 1 ante un aumento en la pendiente de la curva de rentabilidades

Esta tabla contiene el valor acumulado (precio de mercado del bono más el cupón recibido) y la rentabilidad (en términos anuales) obtenida por los tres bonos de la cartera 1 ante un aumento en la pendiente de la curva de rentabilidades. El valor nominal de cada bono es igual a 100. La cuantía del cupón (pagado semestralmente) es igual a 2.75, 5 y 6, respectivamente. El vencimiento de los tres bonos es igual a 5, 15 y 20 años, respectivamente. El horizonte de inversión considerado es igual a seis meses. La primera columna indica el cambio en los tipos de interés a 10 años. Además se verifica

Cambio en el tipo de interés a 5 (15) (20) años = Cambio en el tipo de interés a 10 años $-1\%(+0.5\%)(+1\%)$

Cambio en los tipos de interés	Bono A		Bono B		Bono D	
	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)
5	88.374	-23.250	73.589	-52.821	73.823	-52.353
4.5	90.029	-19.940	75.759	-48.480	75.764	-48.471
4	91.722	-16.554	78.042	-43.915	77.809	-44.381
3.5	93.455	-13.088	80.444	-39.110	79.966	-40.067
3	95.229	-9.541	82.974	-34.051	82.242	-35.514
2.5	97.044	-5.911	85.638	-28.722	84.648	-30.703
2	98.901	-2.196	88.447	-23.105	87.191	-25.616
1.5	100.803	1.606	91.409	-17.181	89.883	-20.233
1	102.75	5.5	94.534	-10.931	92.735	-14.529
0.5	104.742	9.485	97.833	-4.333	95.758	-8.482
0	106.782	13.565	101.317	2.635	98.967	-2.064
-0.5	108.871	17.743	105	10	102.376	4.752
-1	111.010	22.020	108.892	17.785	106	12
-1.5	113.200	26.401	113.010	26.021	109.856	19.713
-2	115.443	30.887	117.369	34.738	113.964	27.928
-2.5	117.740	35.481	121.983	43.967	118.343	36.687
-3	120.093	40.186	126.872	53.744	123.017	46.034
-3.5	122.502	45.005	132.053	64.107	128.008	56.016
-4	124.971	49.942	137.547	75.095	133.344	66.688
-4.5	—	—	143.376	86.753	139.054	78.108
-5	—	—	149.563	99.127	145.168	90.337

Tabla XII. Comportamiento relativo de dos carteras ante un aumento en la pendiente de la curva de rentabilidades

Esta tabla contiene el valor acumulado (precio de mercado de la cartera más cupones recibidos) y la rentabilidad (en términos anuales) obtenida por dos carteras ante un aumento en la pendiente de la curva de rentabilidades. La cartera 1 incluye los bonos A, B y C en proporciones 59.930%, 11.203% y 28.866%, respectivamente. La cartera 2 está compuesta por el bono C. El horizonte de inversión considerado es igual a seis meses. La primera columna indica el cambio en los tipos de interés a 10 años. Además se verifica

Cambio en el tipo de interés a 5 (15) (20) años = Cambio en el tipo de interés a 10 años $-1\%(+0.5\%)(+1\%)$

Cambio en los tipos de interés	Cartera 1		Cartera 2		Diferencia (%)
	Valor acum.	Rentab. (%)	Valor acum.	Rentab. (%)	
5	82.476	-35.047	78.661	-42.677	-7.630
4.5	84.312	-31.375	80.802	-38.395	-7.019
4	86.215	-27.569	83.030	-33.938	-6.369
3.5	88.188	-23.622	85.349	-29.301	-5.678
3	90.236	-19.526	87.762	-24.474	-4.947
2.5	92.363	-15.273	90.275	-19.448	-4.174
2	94.572	-10.855	92.892	-14.215	-3.359
1.5	96.868	-6.263	95.617	-8.764	-2.500
1	99.256	-1.487	98.457	-3.085	-1.598
0.5	101.741	3.483	101.416	2.832	-0.651
0	104.329	8.659	104.5	9	0.340
-0.5	107.026	14.052	107.714	15.429	1.377
-1	109.837	19.675	111.066	22.133	2.458
-1.5	112.771	25.542	114.562	29.125	3.583
-2	115.833	31.667	118.209	36.419	4.752
-2.5	119.032	38.065	122.014	44.029	5.963
-3	122.377	44.755	125.985	51.971	7.216
-3.5	125.876	51.753	130.130	60.261	8.507
-4	129.539	59.079	134.457	68.915	9.835
-4.5	—	—	138.976	77.953	—
-5	—	—	143.696	87.392	—

Referencias

- Aase, K.K. and P. Guttorp (1987). Estimation in Models for Security Prices. *Scandinavian Actuarial Journal*, 211–224.
- Ahn, C.M. and H.E. Thompson (1988). Jump-Diffusion Processes and Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, 43, 1, 155–174.
- Ait-Sahalia, Y. (1996). Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate. *Review of Financial Studies*, 9, 2, 385–426.
- Amin, K. (1993). Jump-Diffusion Option Valuation in Discrete Time. *Journal of Finance*, 48, 5, 1833–1863.
- Amin, K.I. and A.J. Morton (1994). Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure Models. *Journal of Financial Economics*, 35, 2, 141–180.
- Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Ayres, H.R. and J.Y. Barry (1980). A Theory of the U.S. Treasury Market Equilibrium. *Management Science*, 26, 6, 539–569.
- Backus, D.K., S. Foresi, and S.E. Zin (1994). Arbitrage Opportunities in Arbitrage-Free Models of Option Pricing. Working Paper. New York University Salomon Center.
- Ball, C.A. and A. Roma (1994). Stochastic Volatility Option Pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, 4, 589–607.

- Barone-Adesi, G. and R.E. Whaley (1987). Efficient Analytic Approximation of American Option Values. *Journal of Finance*, 42, 2, 301-320.
- Bierwag, G.O., G.G. Kaufman, R. Schweitzer and A. Toevs (1981). The Art of Risk Management in Bond Portfolios. *Journal of Portfolio Management*, 7, 3, 27-36.
- Bierwag, G.O., G.G. Kaufman, and A. Toevs (1983a). Bond Portfolio Immunization and Stochastic Process Risk. *Journal of Bank Research*, 13, 282-291.
- (1983b). Recent Developments in Bond Portfolio Strategies. In *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, eds. G.O. Bierwag, G.G. Kaufman, and A. Toevs, Greenwich, CT: JAI Press.
- Bierwag and Khang (1979). An Immunization Strategy is a Minimax Strategy. *Journal of Finance*, 34, 2, 389-399.
- Black, F., E. Derman and W. Toy (1990). A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options. *Financial Analysts Journal*, 46, 33-39.
- Black, F. and P. Karasinski (1991). Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal. *Financial Analysts Journal*, 47, 52-59.
- Black, F. and M. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 3, 637-654.
- Brennan, M.J. and E.S. Schwartz (1979). A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds. *Journal of Banking and Finance*, 3, 133-155.
- (1980). Analyzing Convertible Bonds. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, 4, 907-929.
- (1983). Duration, Bond Pricing, and Portfolio Management. In *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, eds. G.O. Bierwag, G.G. Kaufman, and A. Toevs, Greenwich, CT: JAI Press.
- Brown, S.J. and P.H. Dybvig (1986). The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, 41, 3,

617–632.

- Brown, S.J. and S.M. Schaefer (1994). The Term Structure of Real Interest Rates and the Cox, Ingersoll and Ross Model. *Journal of Financial Economics*, 35, 1, 3–42.
- Bühler, W., M. Uhrig, U. Walter and Th. Weber (1997). Hull/White or Heath/Jarrow/Morton Type Models? An Empirical Comparison of Models for Valuing Interest Rate Options. Working Paper 97-06. University of Mannheim.
- Chan, K.C., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff and A.B. Sanders (1992). An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate. *Journal of Finance*, 47, 3, 1209–1228.
- Chen, L. (1996). *Interest Rate Dynamics, Derivatives Pricing, and Risk Management*. Springer-Verlag, Berlin.
- Chen, R. and L. Scott (1992). Pricing Interest Rate Options in a Two-Factor Cox-Ingersoll-Ross Model of the Term Structure. *Review of Financial Studies*, 5, 4, 613–636.
- (1993a). Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Fixed Income*, 3, 3, 14–31.
- (1993b). Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Tests from a State-Space Model Using a Kalman Filter, mimeo, University of Georgia.
- Constantinides, G.M. (1992). A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates. *Review of Financial Studies*, 5, 4, 531–552.
- Constantinides, G.M. and J.E. Ingersoll (1984). Optimal Bond Trading with Personal Taxes. *Journal of Financial Economics*, 13, 299–335.
- Cox, J.C. (1975). Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions. Working Paper. Stanford University.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross (1979). Duration and the Measurement of Basis

- Risk. *Journal of Business*, 52, 1, 51-61.
- (1980). An Analysis of Variable Rate Loan Contracts, *Journal of Finance*, 35, 2, 389-403.
- (1985a). An Intertemporal General equilibrium Model of Asset Prices. *Econometrica*, 53, 2, 363-384.
- (1985b). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53, 2, 385-408.
- Cox, J.C. and S.A. Ross (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, 3, 1/2, 145-166.
- Cox, J.C., S.A. Ross and M. Rubinstein (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 7, 3, 229-263.
- Das, S. R. (1994a). Jump-Hunting Interest Rates. Working Paper. Stern School of Business. New York University.
- (1994b). Jump-Diffusion Processes and the Bond Markets. Working Paper. Stern School of Business. New York University.
- Das, S.R. and S. Foresi (1996). Exact Solution for Bond and Option Prices with Systematic Jump Risk. *Review of Derivatives Research*, 1,
- Davidson, J. (1994). *Stochastic Limit Theory*, ed. C.W.J. Granger. Oxford University Press, New York.
- D'Eclessia, R.L. and S.A. Zenios (1994). Risk Factor Analysis and Portfolio Immunization in the Italian Bond Market. *Journal of Fixed Income*, 4, 2, 51-58.
- De Munnik, J.F.J. and P.C. Schotman (1994). Cross Sectional versus Time Series Estimation of Term Structure Models: Empirical Results for the Dutch Bond Market. *Journal of Banking and Finance*, 18, 5, 997-1025.
- Dothan, U.L. (1978). On the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, 6, 1, 59-69.

- Duan, J.C. and J.G. Simonato (1995). Estimating and Testing Exponential-Affine Term Structure Models by Kalman Filter. Working Paper. University of Montreal.
- Duffie, D. (1992). *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Duffie, D. and R. Kan (1996). A Yield-Factor Model of Interest Rates. *Mathematical Finance*, 6, 4, 379-406.
- Elton, E.J., M.J. Gruber and R. Michaely (1990). The Structure of Spot Rates and Immunization. *Journal of Finance*, 45, 2, 629-642.
- Elton, E.J., M.J. Gruber and P.G. Nabar (1988) Bond Returns, Immunization and the Return Generating Process. *Studies in Banking and Finance*, 5, 125-154.
- Fabozzi, F.J. (1993) *Fixed Income Mathematics*. Probus Publishing Company, Chicago.
- Fisher, L. and R.L. Weil (1971). Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations. Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies. *Journal of Business*, 44, 4, 408-431.
- Flesaker, B. (1993). Testing the Heath-Jarrow-Morton/Ho-Lee Model of Interest Rate Contingent Claims Pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, 4, 483-495.
- Friedman, A. (1975). *Stochastic Differential Equations and Applications*. Academic Press, New York.
- Geske, R. and H.E. Johnson (1984). The American Put Option Valued Analytically. *Journal of Finance*, 39, 5, 1511-1524.
- Geyer, A.L.J. and S. Pichler (1996). A State-Space Approach to Estimate and Test Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure, mimeo, Vienna University of Technology.
- Gibbons, M.R. and K. Ramaswamy (1993). A Test of the Cox, Ingersoll and Ross Model of the Term Structure. *Review of Financial Studies*, 6, 3, 619-658.

- Gultekin, N.B. and R.J. Rogalski (1984). The Alternative Duration Specifications and the Measurement of Basis Risk: Empirical Tests. *Journal of Business*, 57, 2, 241–264.
- Hansen, L.P. (1982). Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. *Econometrica*, 50, 4, 1029–1054.
- Harrison, J.M. and S. Pliska (1981). Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, 215–260.
- Heath, D., R. Jarrow and A. Morton (1990). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 4, 419–440.
- (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation *Econometrica*, 60, 1, 77–105.
- Heston, S.L. (1992). Testing Continuous Time Models of the Term Structure of Interest Rates. Working Paper. Yale University, New Haven.
- (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, 6, 2, 327–343.
- Hilliard, J.E. and S.D. Jordan (1992). Hedging Interest Rate Risk under Term Structure Effects: an Application to Financial Institutions. *Journal of Financial Research*, 45, 4, 355–368.
- Ho, T.S.Y. (1992). Key Rate Durations: Measures of Interest Rate Risks. *Journal of Fixed Income*, 29–44.
- (1995). Evolution of Interest Rate Models. A Comparison. *Journal of Derivatives*, 2, 4, 9–20.
- Ho, T.S.Y. and S.B. Lee (1986). Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. *Journal of Finance*, 41, 5, 1011–1029.

- Hull, J. (1997). *Options, Futures and other Derivative Securities*. Third Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Hull, J. and A. White (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, 42, 2, 281-300.
- (1990). Pricing Interest-Rate-Derivative Securities. *Review of Financial Studies*, 3, 4, 573-592.
- (1993). One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, 2, 235-254.
- Ibáñez, A. (1997). *Una Teoría de Inmunización de Carteras de Bonos*. Tesis Doctoral. Universidad Carlos III de Madrid.
- Ingersoll, J.E. (1983). Is Immunization Feasible? Evidence from the CRSP Data. In *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, eds. G.O. Bierwag, G.G. Kaufman, and A. Toevs, Greenwich, CT: JAI Press.
- Ingersoll, J.E., J. Skelton and R. L. Weil (1978). Duration Forty Years Later. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, 627-650.
- Jamshidian, F. (1989). An Exact Bond Option Formula. *Journal of Finance*, 44, 1, 205-209.
- Jones, F.J. (1991). Yield Curve Strategies. *Journal of Fixed Income*, 33-41.
- Klaffky, T.E., Y.Y. Ma, and A. Nozari (1992). Managing Yield Curve Exposure: Introducing Reshaping Durations. *Journal of Fixed Income*, 2, 3, 39-45.
- Knez, P.J., R. Litterman, R., and J. Scheinkman (1994). Explorations Into Factor Explaining Money Market Returns. *Journal of Finance*, 49, 5, 1861-1882.
- Koedijk, K.G., F.G. Nissen, P.C. Schotman and C.C. Wolff (1994). The Dynamics of Short-Term Interest Rate Volatility Reconsidered, mimeo, Linburg Institute of Financial Economics (LIFE), Maastricht, The Netherlands.

- Litterman, R. and J. Scheinkman (1991). Common Factors Affecting Bond Returns. *Journal of Fixed Income*, 1, 1, 54-61.
- Longstaff, F.A. and E.S. Schwartz (1992). Interest Rate Volatility and The Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model. *Journal of Finance*, 47, 4, 1259-1282.
- Lund, J. (1994). Econometric Analysis of Continuous-Time Arbitrage-Free Models of the Term Structure of Interest Rates. Working Paper. The Aarhus School of Business.
- Macaulay, F.R. (1938). Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in U.S. since 1856. National Bureau of Economic Research, New York.
- Malliari, A.G. and W.A. Brock (1988). *Stochastic Methods in Economics and Finance*. North Holland.
- Marsh, T.A. and E.R. Rosenfeld (1983). Stochastic Processes for Interest Rates and Equilibrium Bond Prices. *Journal of Finance*, 38, 2, 635-646.
- McCulloch, J.H. (1975). An Estimate of the Liquidity Premium. *Journal of Political Economy*, 83, 1, 95-119.
- Merton, R.C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 1, 141-183.
- (1976). Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3, 1/2, 125-144.
- Moraleda, J.M. (1997). Avances Recientes en la Valoración de Activos Derivados en Renta Fija, mimeo, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands.
- Moraleda, J.M. and T.C. Vorst (1996). An Empirical Comparison of Path-Independent Term Structure Models for Pricing Interest Rate Derivative Securities, mimeo, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands.

- Naik, V. (1993). Option Valuation and Hedging Strategies with Jumps in the Volatility of Asset Returns. *Journal of Finance*, 48, 5, 1969–1984.
- Naik, V. and M. Lee (1990). General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns. *Review of Financial Studies*, 3, 4, 493–521.
- (1995). The Yield Curve and Bond Option Prices with Discrete Shifts in Economic Regimes, mimeo, University of British Columbia.
- Nelson, J. and S.M. Schaefer (1983). The Dynamics of the Term Structure and Alternative Portfolio Immunization Strategies. In *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, eds. G.O. Bierwag, G.G. Kaufman, and A. Toevs, Greenwich, CT: JAI Press.
- Núñez, S. (1995). Estimación de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés en España: Elección entre Métodos Alternativos. Documento de Trabajo 9522. Banco de España.
- Pearson, N.D. and T. Sun (1994). Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model. *Journal of Finance*, 49, 4, 1279–1304.
- Redington, F.M. (1952). Review of of the Principles of Life-Office Valuations. *Journal of the Institute of Actuaries*, 18, 286–340.
- Reitano, R.R. (1992). Non-Parallel Yield Curve Shifts and Immunization. *Journal of Portfolio Management*, 18, 3, 36–43.
- (1996). Non-Parallel Yield Curve Shifts and Stochastic Immunization. *Journal of Portfolio Management*, 22, 2, 71–78.
- Richard, S.F. (1978). An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, 6, 1, 33–57.
- Ritchken, P. and K. Boenawan (1990). On Arbitrage-Free Pricing of Interest Rate Contingent Claims. *Journal of Finance*, 45, 1, 259–264.

- Ritchken, P. and L. Sankarasubramanian (1995). Volatility Structure of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure. *Mathematical Finance*, 5, 1, 55–72.
- Schaefer, S. (1980). Discussion. *Journal of Finance*, 35, 2, 417–419.
- Schaefer, S. and E.S. Schwartz (1984). A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, 4, 413–424.
- Smithson, C.W. and C.W. Smith, Jr. (1995). *Managing Financial Risk*. Irwin Inc., New York.
- Stapleton, R.C. and M.G. Subrahmanyam (1993). The Analysis and Valuation of Interest Rate Options. *Journal of Banking and Finance*, 17, 6, 1079–1095.
- Stein, E.M. and C.J. Stein (1991). Stock Price Distribution with Stochastic Volatility: an Analytic Approach. *Review of Financial Studies*, 4, 4, 727–752.
- Subrahmanyam, M.G. (1996). The Term Structure of Interest Rates: Alternative Approaches and Their Implications for the Valuation of Contingent Claims. The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, Spring.
- Sun, T. (1992). Real and Nominal Interest Rates: A Discrete-Time Model and its Continuous-Time Limit. *Review of Financial Studies*, 5, 4, 581–611.
- Turnbull, S.M. and F. Milne (1991). A Simple Approach to Interest-Rate Option Pricing. *Review of Financial Studies*, 4, 1, 87–120.
- Vasicek, O. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5, 2, 177–188.
- Whaley, R.E. (1981). On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends. *Journal of Financial Economics*, 9, 2, 207–211.
- (1982). Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks. Empirical Tests. *Journal of Financial Economics*, 10, 1, 29–58.
- Wiggins, J.B. (1987). Option Values Under Stochastic Volatility. Theory and Empirical

- Estimates. *Journal of Financial Economics*, 19, 351-372.
- Wu, X. (1996). A New Stochastic Duration Measure by the Vasicek and CIR Term Structure Theories, mimeo, City University of Hong Kong.
- Zhang, H. (1993). Treasury Yield Curves and Cointegration. *Applied Economics*, 25, 3, 361-367.