

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR



ESTUDIO DEL FLUJO PULSÁTIL EN  
CONDUCTOS DE SECCIÓN CIRCULAR CON  
APLICACIÓN AL FLUJO EN ARTERIAS

Trabajo Fin de Grado

Fecha de lectura: 4 de julio de 2012

Autor: Ricardo Serrano Fernández  
Tutor: Javier Rodríguez Rodríguez



# Índice general

<b>1</b>	<b>Motivación</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Trabajo teórico realizado</b>	<b>11</b>
2.1	Planteamiento de las ecuaciones del problema . . . . .	11
2.2	Solución analítica . . . . .	13
2.3	Solución numérica . . . . .	16
2.3.1	Aproximación por diferencias finitas . . . . .	16
2.3.2	Implementación del código . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Montaje del experimento</b>	<b>21</b>
3.1	Medida de la viscosidad con un viscosímetro de Ostwald . . . . .	23
3.1.1	Calibración del viscosímetro de Ostwald . . . . .	24
3.1.2	Cálculo del cociente de viscosidad cinemático (y dinámico) del BMF . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Montaje del sistema de toma de medidas</b>	<b>25</b>
4.1	Introducción a las técnicas de velocimetría basadas en partículas . . . . .	25
4.2	Velocimetría por imágenes de partículas (PIV) . . . . .	26
4.3	Diseño del montaje . . . . .	29
4.4	Procesado digital de las imágenes . . . . .	31
4.5	Post-procesado de los resultados . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>39</b>
5.1	Dimensionado de los resultados teóricos . . . . .	39
5.2	Dimensionado de los resultados experimentales . . . . .	40
5.2.1	Ajuste de los resultados experimentales . . . . .	41
5.3	Comparativa de resultados y comentarios . . . . .	44
5.3.1	Resultados cuando se ajusta el caudal teórico al experimental . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Conclusión</b>	<b>53</b>



# Agradecimientos

Quisiera comenzar este Trabajo Fin de Grado mostrando mi agradecimiento a todos aquellos que, con su ayuda, lo han hecho posible.

En primer lugar me dirijo a los que más cerca han estado de mi, a mi familia. Sin duda alguna tenéis una gran parte de mérito de que yo esté hoy aquí escribiendo estas líneas. Por estar siempre ahí, porque siempre me habéis dado vuestro apoyo en todas las etapas de mi vida. Gracias.

Ahora quiero hacer mención a mi tutor, Javi. Dudo que hubiese una persona más adecuada para esta responsabilidad. Gracias por tu apoyo, por tus correcciones y por todo lo que me has enseñado.

Es el momento de agradecer a Antonio el que me pusiese en contacto con Javi y con mucha más gente con la que pasaré los próximos años de mi vida en San Diego. No desaprovecharé esta oportunidad que empieza con este trabajo.

No quiero olvidarme de todos mis amigos: Ana, Gonzalo, Edu, Casandra, Isa, Carlos, María y Andrea. Chicos, vosotros animáis todos y cada uno de mis fines de semana (y algunos días de diario) y eso no tiene precio.



# Capítulo 1

## Motivación

La cuestión que se trata de resolver en este proyecto presenta importantes aplicaciones prácticas, especialmente en el campo de la biomedicina puesto que el sistema vascular de un organismo seguirá estas leyes físicas. La bioingeniería es una ciencia pluridisciplinar que intenta aunar la capacidad de análisis cuantitativo propia de las ingenierías a un campo tan importante en la sociedad como es la medicina. Por esto, cualquier ingeniero, sea cual sea su especialidad, puede encontrar una manera de aprovechar su formación con el fin de incrementar el conocimiento que se tiene en las ciencias sanitarias.

El problema que con este trabajo de fin de grado se pretende analizar ya fue estudiado por J. R. Womersley (1954) [1]. Ya desde sus orígenes, este estudio muestra su carácter multidisciplinar al reunir a un matemático, Womersley, frente a un problema de mecánica de fluidos que finalmente será publicado en una revista de medicina como es el *Journal of Physiology*. La motivación que tuvo para publicar su artículo, que comparte directamente con este trabajo, surge de los trabajos realizados por Mc Donald (1952)[2]. En ellos se expone la existencia de un desfase entre el gradiente de presión y el caudal similar al que ocurre entre voltaje y corriente en circuitos eléctricos.

En este proyecto se pretende estudiar del flujo pulsátil en tubos de sección circular cuya aplicación práctica será una mejor comprensión del flujo sanguíneo en arterias. Este estudio se divide en dos grandes bloques: una aproximación teórica y una práctica experimental. La aproximación teórica se subdivide entre la solución analítica de las ecuaciones del problema y una solución numérica, mediante simulaciones en Matlab, de la que se pretende demostrar su validez para simular, no sólo el flujo que se estudia en este trabajo, sino otros más complejos que sean similares a los de la sangre en las arterias.

A lo largo del trabajo se muestran múltiples figuras que reflejan los resultados obtenidos mediante los diversos métodos explicados en el mismo. Estos resultados, salvo que se indique lo contrario, han sido obtenidos utilizando  $Wo = 5,4830$  donde  $Wo$  es el llamado número de Womersley; un número adimensional con una importancia crítica en la

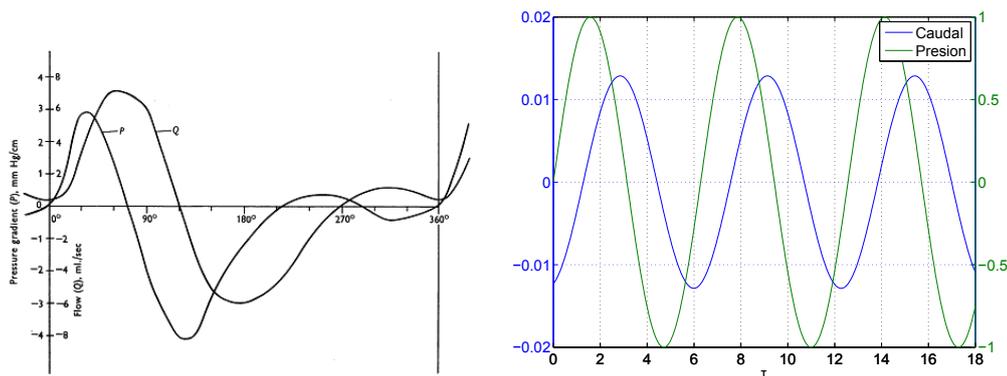


Figura 1.1: Relación entre el caudal ( $Q$ ) y el gradiente de presión ( $P$ ). Izquierda: Arteria femoral de un perro. Cortesía de Womersley[1]. Derecha: Utilizados a lo largo del presente trabajo.

caracterización de estos flujos. En particular, este valor es próximo al que caracteriza a la arteria carótida de un ser humano, por tanto, estaremos trabajando en condiciones que se dan en la naturaleza, lo cual prueba la practicidad de los experimentos. El motivo para la elección de este número es que es el que se ha obtenido en el montaje experimental, su cálculo se detalla más adelante en el proyecto.

En la Figura 1.1 se muestran dos gráficas que contienen dos curvas cada una. En ambos, una de las curvas representa el gradiente de presión mientras que la otra representa el caudal. En cada una de ellas se aprecia el claro desfase del que se habla en párrafos anteriores. En la Figura 1.2 se representa el desfase entre las dos curvas conforme se va aumentando el número de Womersley.

Como se puede apreciar, los gradientes de presión reales tienen una forma más compleja de la que se está simulando en este trabajo. Sin embargo, por motivos que se detallan a lo largo de este proyecto, es conveniente realizar estos cálculos con gradientes de presión sencillos para validar nuestros modelos mediante comparación de resultados (se espera entonces obtener resultados redundantes a lo largo de las diferentes secciones del trabajo). Al final de todos estos estudios, se podrá pasar a la aplicación práctica de la simulación numérica. Aunque no está detallado en este trabajo, la simulación de gradientes complejos podrá ser realizada mediante una sencilla descomposición en series de Fourier del gradiente a estudiar y la ejecución del código de integración numérica. Por tanto, este trabajo aporta una herramienta de simulación del perfil de velocidades que aparecerá en un conducto vascular de un organismo conocido el gradiente de presiones que provoca el flujo sanguíneo.

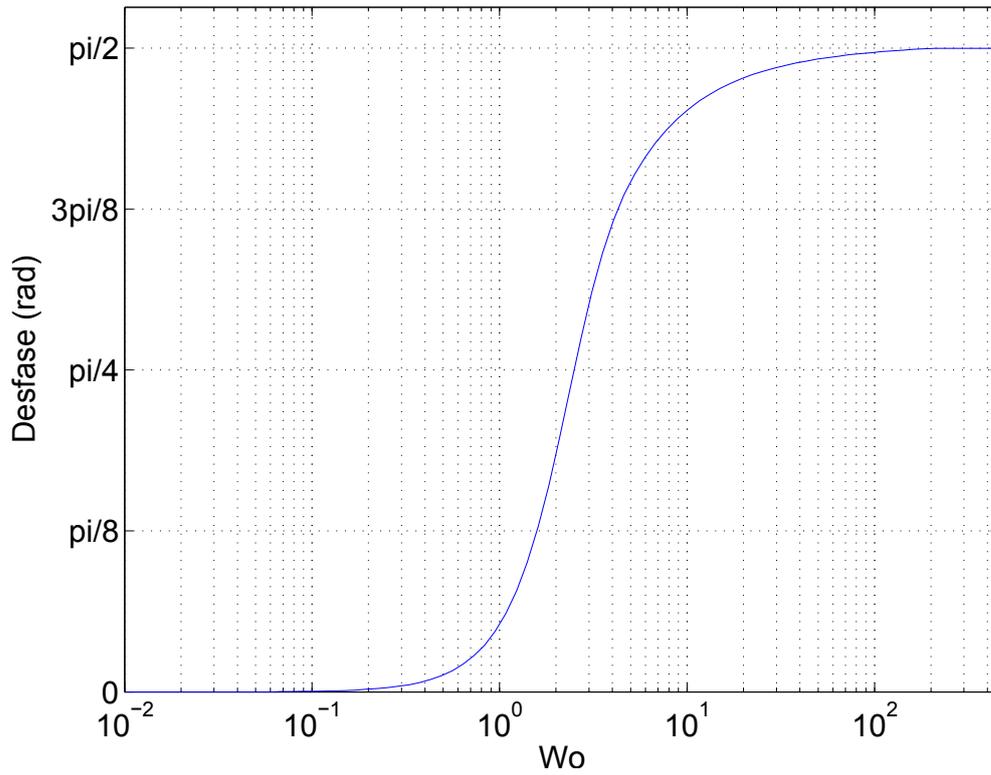


Figura 1.2: Desfase entre P y Q frente a los distintos valores de  $Wo$

La metodología para la adquisición de datos experimentales consistirá en el montaje de un sistema de toma de datos mediante técnicas PIV que se describirá detalladamente a lo largo de este trabajo. Esta parte tal vez resulte de especial interés académico por ser la parte más relacionada con la rama de la electrónica pese a que, como ya se indicó anteriormente, el problema tiene un carácter fuertemente multidisciplinar.



## Capítulo 2

# Trabajo teórico realizado

### 2.1. Planteamiento de las ecuaciones del problema

Se desea estudiar el perfil de velocidades característico que aparecerá en el interior de una arteria ante un flujo pulsátil periódico inducido por el efecto del bombeo del corazón. Partiremos de la suposición de que el gradiente de presiones será conocido y periódico, por lo que la solución también lo será. Como simplificación, consideraremos la arteria como un conducto rígido e infinitamente largo. Esto quiere decir que nos centraremos en los flujos que aparecen en zonas donde las arterias mantienen una sección más o menos constante y que estén alejadas de bifurcaciones.

En la Figura 2.1 puede observarse un dibujo esquematizado del problema a resolver. Por su simetría, utilizaremos un sistema de coordenadas cilíndricas como referencia donde  $r$  será la coordenada radial y  $x$  la coordenada axial, donde el uso de la coordenada azimutal es prescindible ya que no hallaremos ningún cambio en esa componente ( $\partial()/\partial\theta = 0$ ). De aquí en adelante consideraremos el gradiente de presión en  $x$  ( $P_l = -\partial P/\partial x$ ) como el único distinto de cero que además puede ser expresado en la forma  $P_l = Af(\omega t)$ . Además, la suposición de tubo infinitamente largo aportará la ecuación ( $\partial\vec{v}/\partial x = 0$ ).

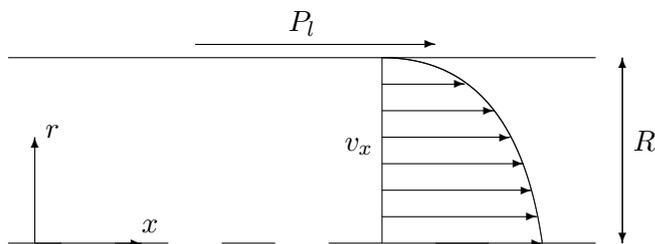


Figura 2.1: Dibujo esquemático del problema

Por último, estableceremos las condiciones de contorno del problema. En primer lugar, impondremos la condición de no deslizamiento en la pared. La segunda condición viene dada por la simetría del problema ya que este factor nos permitirá imponer de manera inequívoca que el perfil de velocidades será simétrico con respecto al eje del cilindro y derivable en ese punto al tratarse del movimiento de un fluido. Con esto, comenzaremos a resolver el problema partiendo desde la ecuación de la continuidad para hallar la velocidad en la componente  $r$  que, por intuición, esperamos que sea nula.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad r = R : v_r = 0 \quad (2.1)$$

Resolviendo (2.1):

$$v_r = 0 \quad (2.2)$$

Como puede verse, la solución que obtenemos confirma nuestras suposiciones a priori sobre el problema. A continuación, podremos pasar a plantear la ecuación de la cantidad de movimiento particularizada para la coordenada  $x$ .

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = P_l + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right]$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = P_l + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \begin{cases} r = 0 : \frac{\partial v_x}{\partial r} = 0 \\ r = R : v_x = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Antes de continuar con la resolución de las ecuaciones del problema, resulta conveniente expresarlas de manera adimensional. Las nuevas definiciones de cada variable se muestran junto a la nueva forma que tendrá la ecuación sin olvidarnos también de adimensionar correctamente las condiciones de contorno. También descompondremos el término para las presiones en una amplitud  $A$  y una función periodica  $f$ . Para adimensionar la velocidad utilizaremos un término  $u_c$  del que no se propondrá, de momento, una expresión basada en las magnitudes del sistema. Dejar un término libre es una práctica habitual a la hora de realizar análisis dimensional, la verdadera razón para esto es que, a priori, no se tiene una idea de qué orden de magnitud ha de ser  $u_c$  para que  $u$  sea de orden unidad (ya que desconocemos por completo  $v_x$ ).

$$\xi = \frac{r}{R} \quad ; \quad \tau = \omega t \quad ; \quad u = \frac{v_x}{u_c}$$

$$\underbrace{\rho \omega u_c \frac{\partial u}{\partial \tau}}_{\text{Term. no estacionario}} = \underbrace{A f}_{\text{Gradiente de presión}} + \underbrace{\frac{\mu u_c}{\xi R^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)}_{\text{Term. viscoso}} \begin{cases} \xi = 0 : \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \\ \xi = 1 : u = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Llegados a este punto nos encontramos con una ecuación donde aparecen 3 términos con significados físicos bien diferenciados. El término a la izquierda suele ser denominado

como no estacionario. El primer término a la derecha es el gradiente de presión que impondrá el movimiento en el torrente sanguíneo. El último término de la derecha es el considerado viscoso. Resulta de interés realizar una comparación entre dos términos para así poder determinar cuál es el predominante. Ya que el gradiente de presión es el origen del movimiento, el otro término relevante podrá ser el término no estacionario o el viscoso. Dividiremos (2.4) entre  $(\mu u_c/R^2)$ , donde aparecerá un parámetro adimensional que determinará la solución para cualquier problema de este tipo.

$$\frac{\rho \omega u_c R^2}{\mu u_c} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{AR^2}{\mu u_c} f + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)$$

Este parámetro es conocido como número de Womersley  $(Wo^2 = \frac{\rho \omega R^2}{\mu} = \frac{\omega R^2}{\nu})$  como reconocimiento a su aportación en este problema. Como puede deducirse analizando su definición,  $Wo$  será una medida de cómo se adapta el perfil de velocidades a los cambios en la presión. Entonces, para grandes valores de  $Wo$ , el perfil estará dominado por los términos no estacionarios, observando cómo el perfil entero sigue la evolución marcada por la presión apareciendo un perfil de velocidades uniforme. Para valores pequeños de  $Wo$ , la viscosidad será el factor predominante haciendo que el perfil se asemeje cada vez más a uno parabólico.

Como puede observarse, ha aparecido un término  $\frac{AR^2}{\mu}$  multiplicando a la función que aporta la periodicidad del gradiente de presión ( $A$  es tan sólo la amplitud de la onda). En análisis dimensional siempre se esperan resultados con órdenes de magnitud cercanos a la unidad (algo como decenas o fracción de unidad es válido, pero la aparición de valores en torno al millar o la milésima suele ir relacionado con errores). Si volvemos atrás unas líneas, recordamos que dejamos un término de velocidad libre. La forma correcta de adimensionarlo será por tanto,  $u_c = \frac{AR^2}{\mu}$  ya que de esta manera el término relativo a la presión será de orden unidad. Finalmente, se obtiene la ecuación (2.5) que es la que ha de integrarse de manera analítica o numérica, tarea a la que dedicaremos las siguientes 2 secciones.

$$Wo^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} = f + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \quad (2.5)$$

## 2.2. Solución analítica

Para solucionar (2.5) de manera analítica, vamos a desacoplar la velocidad en dos componentes, una que cargará con la dependencia en posición  $\bar{u}(\xi)$  y otra con la dependencia en el tiempo  $g(\tau)$ . Esta última es la que añadirá el carácter periódico de la solución. Replanteando el problema a resolver se tiene:

$$Wo^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} = f(\tau) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \begin{cases} \xi = 0 : \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \\ \xi = 1 : u = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$u(\xi, \tau) = \bar{u}(\xi)g(\tau) \quad (2.7)$$

Con estas dos ecuaciones se puede llegar a:

$$Wo^2\bar{u}(\xi)g'(\tau) = f(\tau) + g(\tau)\frac{1}{\xi}(\xi\bar{u}')'$$

Ahora, por conveniencia, definiremos:

$$f(\tau) = g(\tau) = Re(e^{i\tau}) \rightarrow g'(\tau) = ie^{i\tau}$$

Entonces:

$$Wo^2\bar{u}(\xi)ie^{i\tau} = ie^{i\tau} + ie^{i\tau}\frac{1}{\xi}(\xi\bar{u}')' \rightarrow Wo^2\bar{u}(\xi) = 1 + \frac{1}{\xi}(\xi\bar{u}')'$$

Consiguiendo de esta manera eliminar el tiempo de la ecuación. Ahora tan sólo queda despejar  $\bar{u}(\xi)$  para quedarnos con una ecuación diferencial ordinaria:

$$(\xi\bar{u}')' - Wo^2\xi\bar{u} + \xi = 0 \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) tiene como solución:

$$\bar{u} = \frac{1}{Wo^2} \left( -1 + \frac{I_0\left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}Wo\xi\right)}{I_0\left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}Wo\right)} \right)$$

Retomando la ecuación (2.7), es fácil llegar a que la solución analítica viene dada por la ecuación (2.9) y que se corresponde con la expuesta en el artículo de Womersley [1].

$$u = Re \left[ \frac{1}{Wo^2} \left( -1 + \frac{I_0\left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}Wo\xi\right)}{I_0\left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}Wo\right)} \right) e^{i\tau} \right] \quad (2.9)$$

Donde  $I_0$  hace referencia a la función de Bessel de primera especie y  $Re$  a la parte real del número complejo expresado entre corchetes. La ecuación (2.9) está lista para ser implementada en Matlab y desde allí ver su evolución temporal. Cabe recordar que, pese a que esta expresión sea la solución exacta del problema, se ha llegado a ella mediante la imposición de la existencia de un único armónico en la forma de onda del gradiente de presión. Esta imposición reduce la utilidad de la solución en cuanto a su uso práctico. Sin embargo, constituye una pieza clave en el desarrollo teórico del trabajo ya que es la referencia exacta frente a la que podremos estimar los errores que se produzcan a lo largo de este trabajo. En la Figura 2.2 se muestran los perfiles de velocidad que adquiere el fluido para 6 instantes de tiempo distintos.

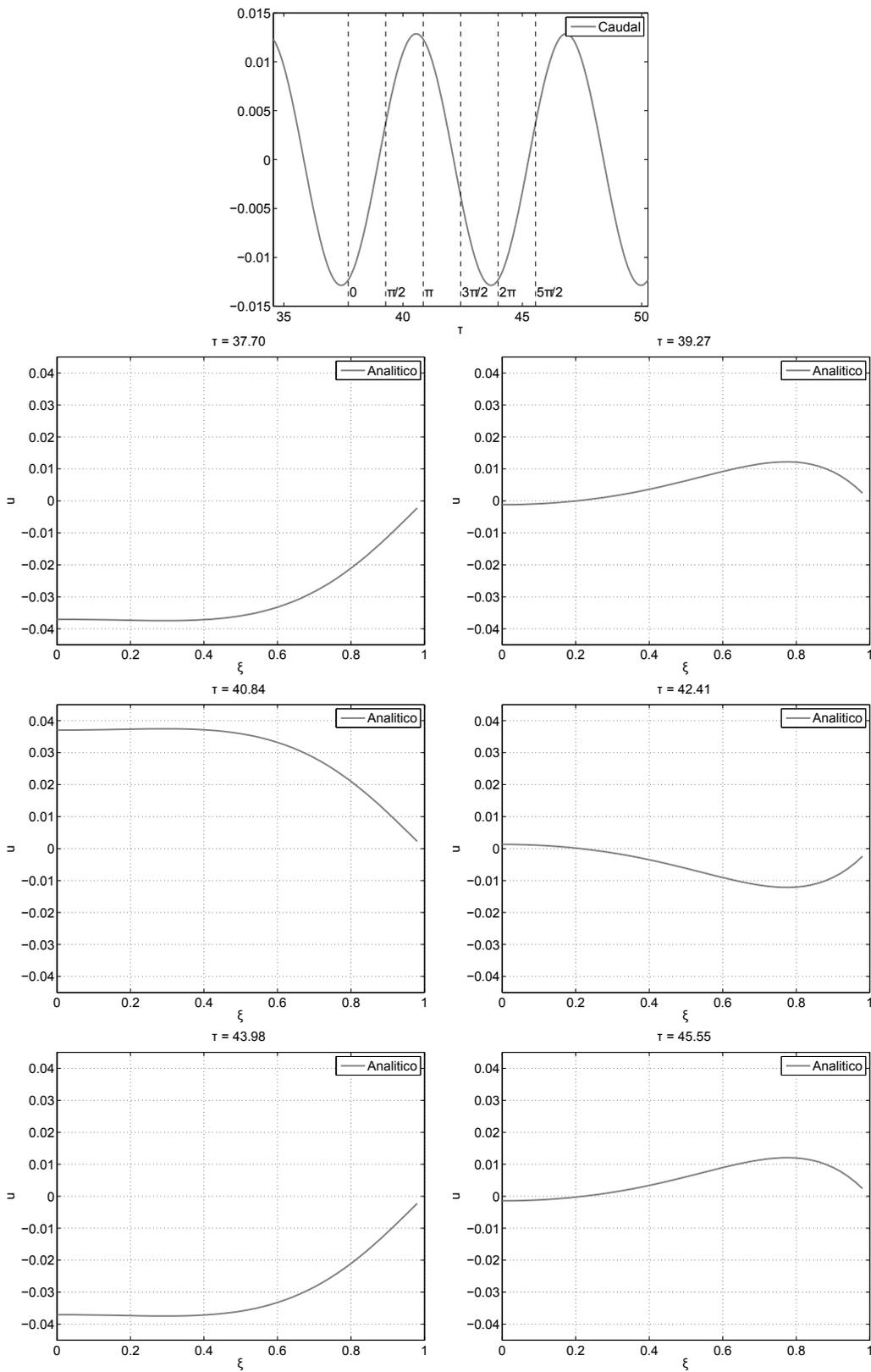


Figura 2.2: Evolución temporal de los perfiles de velocidades correspondientes a la simulación analítica. La gráfica de arriba se adjunta para ilustrar en qué tiempos han sido representados los perfiles.

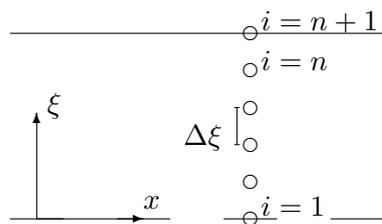


Figura 2.3: Malla para la discretización del sistema.

## 2.3. Solución numérica

La integración numérica de la ecuación (2.5) ha sido realizada mediante un código de Matlab. No obstante, previos a la programación, son necesarios ciertos pasos algebraicos intermedios que reduzcan la ecuación en derivadas parciales 2.5 a una ecuación diferencial ordinaria. La forma de la que se hizo esto fue mediante aproximación por diferencias finitas lo cual requiere una discretización del sistema tal y como la que se representa en la Figura 2.3. Esta malla consiste en  $n$  nodos, configurable en el software, uniformemente repartidos para cada cual se calcula su velocidad; formando en su conjunto, el perfil de velocidades buscado. En la nomenclatura establecida, el nodo *virtual*  $i = n + 1$  corresponde a la pared ( $\xi = 1$ ), mientras que el nodo  $i = 1$  corresponde al eje de simetría del tubo ( $\xi = 0$ ).

### 2.3.1. Aproximación por diferencias finitas

El método de las diferencias finitas consiste, dicho de una forma breve, en aproximar cada derivada a un cociente de cantidades finitas en lugar de infinitesimales. Esta aproximación supone una gran reducción de la complejidad de los problemas aunque, en contrapartida, se pierde exactitud en la solución y por tanto se hace necesario una estimación del error cometido. Por este motivo, para que la aproximación arroje unos resultados aceptables, se han de realizar una cantidad de operaciones inmensa, labor que por un lado resultaría tediosa para un ser humano, pero de extrema sencillez para los ordenadores de hoy en día.

Para llegar a una aproximación de la derivada emplearemos el desarrollo de Taylor para una función,  $f_i$ ; en un punto siguiente,  $f_{i+1}$  y en un punto anterior,  $f_{i-1}$ ; siendo  $h$  la separación entre puntos:

$$f_{i+1} = f_i + \frac{f'_i}{1!}h + \frac{f''_i}{2!}h^2 + \frac{f_i^{(3)}}{3!}h^3 + \dots$$

$$f_{i-1} = f_i - \frac{f'_i}{1!}h + \frac{f''_i}{2!}h^2 - \frac{f_i^{(3)}}{3!}h^3 + \dots$$

Tomando las expansiones hasta el término de primer orden, se puede encontrar una

expresión para la primera derivada de la función:

$$f'_i = \frac{f'_{i+1} - f'_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

Para la aproximación de la segunda derivada podemos expandir hasta los términos de tercer orden llegando a la expresión:

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^4)$$

Estas dos expresiones tienen común el uso de información del punto inmediatamente anterior e inmediatamente siguiente. En un caso especial de nuestro problema que se estudiará más adelante, se hará necesaria una aproximación para la primera derivada que no haga uso del punto anterior. Siguiendo el mismo procedimiento (desarrollo de Taylor y un poco de álgebra para despejar la incógnita) se consigue la expresión:

$$f'_i = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h} + O(h^2)$$

En nuestro problema, estamos interesados en aproximar aquellos términos que deriven con respecto a la coordenada espacial  $\xi$ . Entonces, particularizando las 2 expresiones anteriores obtenemos (2.10) y (2.11):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\xi_i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta\xi} + O[(\Delta\xi)^2] \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right|_{\xi_i} = \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{(\Delta\xi)^2} + O[(\Delta\xi)^4] \quad (2.11)$$

De esta manera, la ecuación (2.5) para un punto  $i$  de la malla puede ser reducida a la expresión (2.12):

$$W_o^2 \frac{\partial u_i}{\partial \tau} = f + A_i u_{i-1} + B_i u_i + C_i u_{i+1} \quad (2.12)$$

$$A_i = \frac{1}{(\Delta\xi)^2} - \frac{1}{2(\Delta\xi)\xi_i} \quad B_i = \frac{-2}{(\Delta\xi)^2} \quad C_i = \frac{1}{(\Delta\xi)^2} + \frac{1}{2(\Delta\xi)\xi_i}$$

Entonces, el cambio en la velocidad de cada punto dependerá linealmente de su velocidad y la de sus vecinos pero el problema ha quedado reducido a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En la siguiente sección se hablará de cómo se ha solucionado este sistema.

### 2.3.2. Implementación del código

A primera vista, la ecuación (2.12) parece preparada para ser directamente transcrita a Matlab para su integración. Desafortunadamente, existen 2 nodos problemáticos que hay que tener en cuenta antes de proceder.

El nodo  $i = 1$  haría uso, según (2.12) de la velocidad del nodo anterior a él. Obviamente, por la definición de la malla que se dió representada en la Figura 2.3, no existe ningún

nodo 0 del que se pueda usar su velocidad. La solución, como ya se adelantó en la sección anterior, pasa por el uso de la expresión descentrada en diferencias finitas. Esto es:

$$u'_i = \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2(\Delta\xi)}$$

Si ahora tomamos la condición de contorno  $u'_1 = 0$ , se llega a:

$$u_1 = \frac{4}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3 \quad (2.13)$$

El segundo nodo que en un principio plantearía problemas es  $i = 2$  ya que hace uso de la velocidad en el nodo  $i = 1$ . Afortunadamente, este problema ya ha quedado resuelto en el punto anterior con lo que, llegados a este punto, tenemos un sistema cerrado que puede ser resuelto mediante ordenador.

Existen diversas formas de pasar este sistema a código de ordenador de las que dependerá el tiempo de cómputo de la solución. La solución más rápida que se encontró fue mediante una programación vectorial del sistema, es decir, que calcula todos los coeficientes (A, B y C) en una sola línea de código. Sin embargo, se observó que implementando una solución que construyese una matriz tri-diagonal como (2.14), era tan sólo un poco más lenta que la versión vectorial pero ofrece a cambio una gran flexibilidad en el sentido de imponer futuras condiciones en los perfiles de velocidades. Estas condiciones podrían ser relativas, por ejemplo, al modelado de la cercanía a una bifurcación de las arterias o de un cambio brusco de la sección de la misma.

$$Wo^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} = f + \begin{pmatrix} B_2 + \frac{4}{3}A_2 & C_2 - \frac{1}{3}A_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_4 & B_4 & C_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_n & B_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

En la Figura 2.4 superponen los perfiles analítico y numérico para demostrar que no existen diferencias significativas entre ambas.

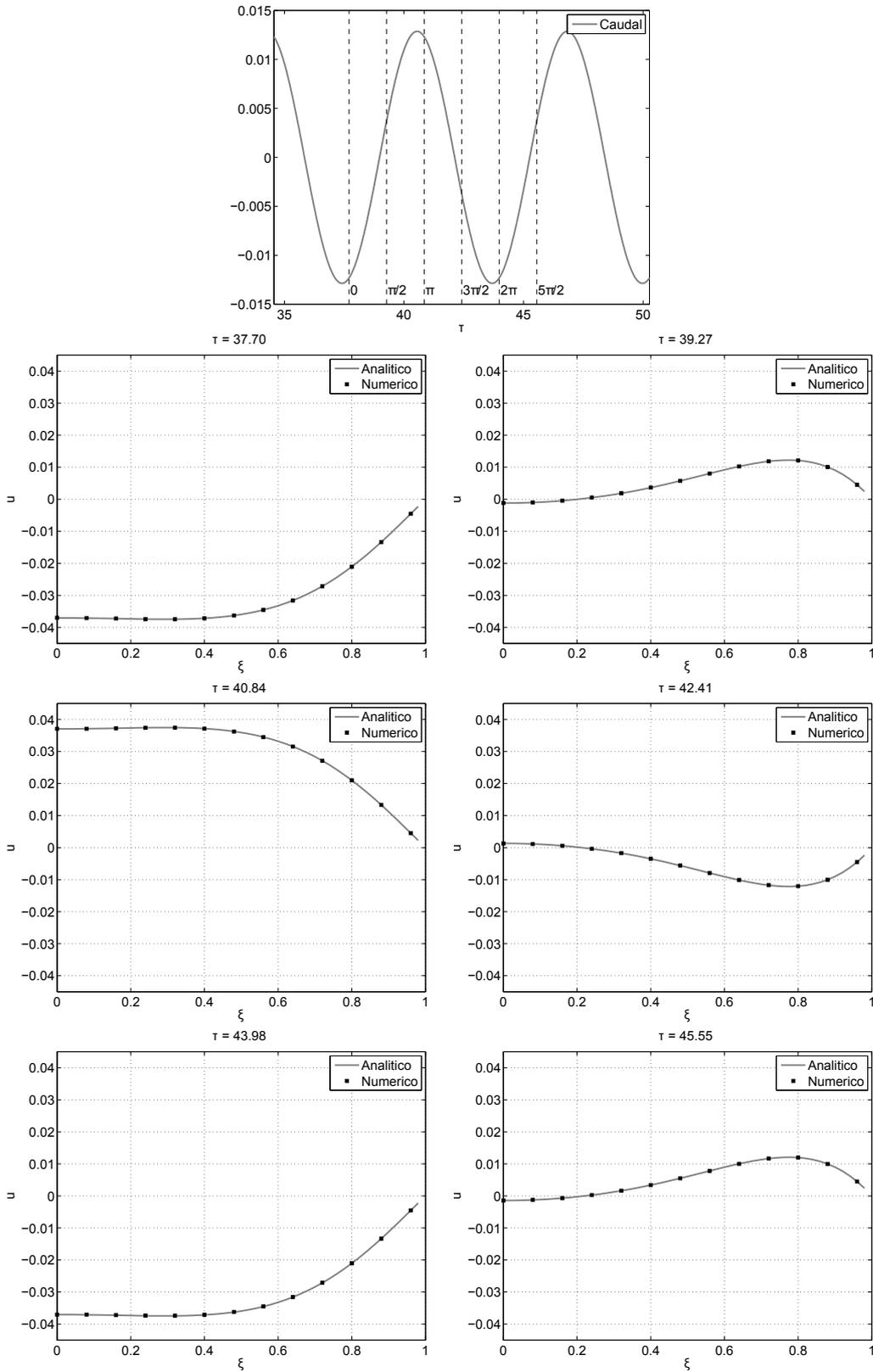


Figura 2.4: Evolución temporal de los perfiles de velocidades correspondientes a las simulaciones numérica y analítica. La gráfica de arriba se adjunta para ilustrar en qué tiempos han sido representados los perfiles. Nota: En esta figura y en todas las demás de aquí en adelante, para una mejor lectura de las gráficas se han representado tan sólo algunos de los puntos de la solución numérica ya que, de representarlos todos, se superpondrían los cuadrados sin dejar ver la solución analítica.



## Capítulo 3

# Montaje del experimento

Una vez hemos planteado y mencionado cómo se resuelve el problema de una manera teórica, es el momento de proceder a realizar un montaje experimental para corroborar la validez del trabajo previo. Esta comprobación nos servirá como garantía para el posterior simulado teórico de otros flujos sin tener que reproducirlos en el laboratorio donde, en algunas ocasiones, no podría ser recreado por limitaciones en el equipamiento. Hablaremos ahora del experimento en particular que ha sido llevado a cabo en el laboratorio.

En primer lugar, hubo que hacer una serie de toma de decisiones ya que fue necesaria la adquisición de nuevo material. Además, contábamos con equipamiento ya existente en el laboratorio por lo que hubimos de tener en cuenta las características de este último para la elección del que sería nuevo. En todo momento, el objetivo fue el de dimensionar el experimento para conseguir un número de Womersley cuyo valor sea característico de alguna arteria o vena del cuerpo (ver Tabla 3.1).

Conducto sanguíneo	Wo
Aorta Ascendente	13.2
Aorta Descendente	11.5
Aorta Abdominal	8
Arteria Femoral	3.5
Arteria Carótida	4.4
Arteriolas	0.04
Capilares	0.005
Venulas	0.035
Vena Cava Inferior	8.8
Arteria Pulmonar Principal	15

Tabla 3.1: Valores típicos de Womersley para diferentes conductos sanguíneos. Cortesía de Biomechanics: Circulation, Fung [2]

Una vez se vio el rango de valores que se quería alcanzar, fue el momento de recopilar datos de interés para así poder fijar un valor en concreto. Estos datos relevantes venían dados por el equipamiento ya existente en el laboratorio y que, por tanto, ya estaban fijados. Entre ese equipamiento entraba la bomba pulsátil y el sistema de toma de medidas al cual dedicaremos la siguiente sección.

Sobre la bomba pulsátil, hubo que centrarse en el caudal máximo de pico que es capaz de dar ya que es el factor limitante del caudal que se podrá reproducir en el laboratorio. En los experimentos, se usó la bomba CompuFlow 1000 de Shelley Medical Imaging Technologies, especialmente diseñada para la reproducción de flujos sanguíneos en experimentos. Su caudal máximo es de 35mL/s aunque a esos valores el motor patina, por tanto se eligieron valores menores a ese máximo. Además, como razón añadida para trabajar a caudales menores, veremos cómo un caudal lento beneficiará a la bondad de nuestro sistema de toma de imágenes. Esta bomba está preparada para simular flujos complejos como los que realmente aparecen en nuestras arterias, sin embargo, se programó un flujo sinusoidal ya que el objetivo del experimento es verificar la validez de los modelos teóricos, de entre los cuales el analítico fue obtenido bajo la hipótesis de que el flujo seguiría un perfil sinusoidal. En cuanto al modelo numérico, se podría reproducir con él un flujo más complejo aunque para ello sería necesario la descomposición en series de Fourier del mismo.

En lo relativo al tubo, se eligió uno de vidrio con diámetro interior de 8mm (similar al de la arteria carótida) por donde circulará el fluido que imita a la sangre. Este tubo cumple con la hipótesis de rigidez del conducto que fue supuesta para los cálculos teóricos. Además, la hipótesis de conducto infinitamente largo también se satisface ya que su longitud es de 30cm, suficientemente grande como para que exista una región donde esta última hipótesis se cumple. No obstante, existen métodos para calcular la longitud que debería tener el tubo para satisfacer esta condición, sin embargo, no se han realizado estos cálculos ya que se alejaban del propósito del trabajo.

Para finalizar con los elementos que componen el modelo a analizar, haremos mención del fluido con el que se ha trabajado. La intención de este fluido es la de simular las características propias de la sangre cuando circula por el organismo, es decir, cuando ésta se encuentra a una temperatura aproximada de 37°C. Siguiendo las propias indicaciones que encontramos en la documentación de la bomba, una simple mezcla de 40-60 % en volumen de glicerina y agua bastó para conseguir un fluido con densidad y viscosidad similar a la sangre. Para comprobar la viscosidad del mismo se utilizó un viscosímetro de Ostwald, como resultado de las medidas se obtuvo  $\nu = 3,344 \times 10^{-6} m^2/s$ . Ver datos experimentales en la siguiente sección.

A fin de verificar la correcta elección de los elementos del experimento, se hizo un cálculo del número de Womersley que gobierna el experimento. Además, es de vital importancia conocer este número ya que lo usaremos como variable de entrada para los modelos teóricos (numérico y analítico) para poder realizar la comparación final entre los modelos teóricos y los resultados experimentales.



Figura 3.1: Viscosímetro de Ostwald. Disponible en: <http://www.effe-ci.com/inglese/eprod4.htm>

Los datos necesarios para el cálculo del número de Womersley del experimento que hemos llevado a cabo son:

$$f = 1Hz \rightarrow \omega = 2\pi \text{ rad/s} ; \quad \nu = 3,344 \times 10^{-6} m^2/s ; \quad R = 4mm$$

$$Wo^2 = \frac{\omega R^2}{\nu} \rightarrow Wo = 5,4830$$

### 3.1. Medida de la viscosidad con un viscosímetro de Ostwald

El viscosímetro de Ostwald (ver Figura 3.1) sirve, como su propio nombre indica, para calcular la viscosidad de un fluido. En nuestro experimento resulta importante el conocimiento de este parámetro del BMF (del inglés *Blood Mimicking Fluid*) ya que aparece en la definición del número de Womersley y, por tanto, afecta significativamente al comportamiento del sistema. Este tipo de utensilios de medida requiere de una previa calibración que consiste en el cálculo de una constante de proporcionalidad que relaciona el coeficiente de viscosidad cinemático  $\nu$  con el tiempo que tarda en vaciarse uno de los bulbos.

### 3.1.1. Calibración del viscosímetro de Ostwald

Datos:

$$\rho_{H_2O} = 1 \text{ g/mL} \quad \nu_{H_2O}(@21,5^\circ C) = 0,979 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Medida	Tiempo (s)
1	15.69
2	15.96
3	15.90
4	15.87
5	15.81
6	15.94
7	15.88
$\bar{t}$	$15.86 \pm 0.09$

Tabla 3.2: Medida de tiempos para el agua.

Con estos datos se puede calcular la constante de calibración del viscosímetro,  $c$ :

$$\nu = ct \rightarrow c = \frac{\nu}{\bar{t}} \rightarrow c = 6,17 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

### 3.1.2. Cálculo del cociente de viscosidad cinemático (y dinámico) del BMF

Datos:

$$\rho = 1,07 \text{ g/mL} \quad c = 6,17 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Medida	Tiempo (s)
1	53.97
2	54.00
3	54.22
4	54.06
5	54.37
6	54.31
7	54.34
$\bar{t}$	$54.18 \pm 0.17$

Tabla 3.3: Medida de tiempos para el BMF.

Con estos datos se puede calcular el coeficiente de viscosidad del BMF:

$$\nu = ct \rightarrow \nu = 3,344 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}; \mu = \rho\nu \rightarrow \mu = 3,57 \text{ kg/m s}$$

## Capítulo 4

# Montaje del sistema de toma de medidas

### 4.1. Introducción a las técnicas de velocimetría basadas en partículas

La mayoría de fluidos que nos rodean son transparentes. Esto implica que su movimiento no puede ser apreciado a simple vista y que por tanto necesitaremos un marcador que haga visible su movimiento. Con este objetivo, existe una amplia familia de técnicas que se basan en la presencia de partículas en el fluido, que no sólo siguen fielmente su flujo, sino que además existen en una cantidad suficiente que satisfacen ambas resoluciones, espacial y temporal, deseadas. Mediante sistemas digitales de imagen y un posterior procesamiento por software se puede estimar la velocidad de cada partícula de forma instantánea obteniendo un campo de velocidades. Dentro de esta familia se incluye la técnica PIV (particle image velocimetry) que será la empleada en nuestro experimento y explicaremos más adelante. A continuación haremos un breve repaso a los factores críticos de cualquiera de estas técnicas de seguimiento de partículas.

En primer lugar, las partículas deberán tener buenas propiedades para la dispersión de la luz ya que de esa manera aumentaremos la calidad de la señal, que consistirá en la incidencia de un plano láser que corte al fluido en la dirección en la que se produce el movimiento de interés. Un mayor tamaño de partícula facilita su seguimiento y también consigue unas mejores propiedades de dispersión por lo que será necesario encontrar un problema de optimización a la hora de escoger el tipo de partículas que se usarán. Planteando dicho problema, se puede llegar a demostrar que el tamaño adecuado para las partículas en líquidos estará en el rango de diámetros ( $5\mu m < dp < 100\mu m$ ) [3].

Para la elección del material de la partícula habrá que tener en cuenta ciertas consideraciones como el peligro o toxicidad de las mismas ante una posible inhalación por parte

del usuario. También será de interés que las partículas no dañen al resto de equipos experimentales, así como la posibilidad de que las partículas se evaporen transcurrido un intervalo de tiempo para así evitar la acumulación de partículas en la instalación o en sus interfaces ópticas.

La dispersión de la luz ocurre en el llamado régimen de Mie, que se produce cuando el diámetro de la partícula ( $dp$ ) es mayor que el de la longitud de onda de la luz que la iluminará ( $\lambda$ ). En este régimen la luz se dispersa principalmente en la dirección que llevaba, una fracción significativa es reflejada en dirección opuesta y tan sólo una pequeña parte de la misma se dispersa en perpendicular (a  $90^\circ$  con respecto a la dirección con la que incidió). En la Figura 4.1 se muestra un patrón típico del parámetro Mie que está relacionado con la amplitud de la dispersión.

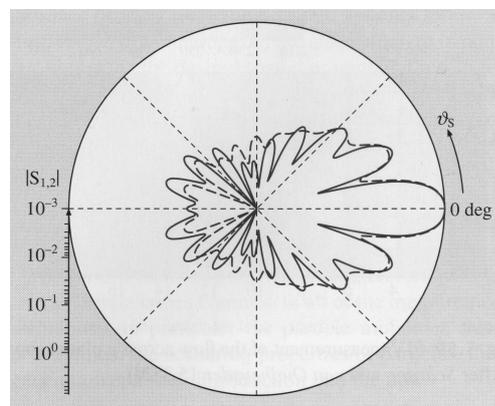


Figura 4.1: Diagrama de dispersión para un parámetro de Mie igual a 10. Línea continua: polarización perpendicular. Línea discontinua: polarización paralela. Extraído de Tropea et al. [3].

Una vez escogido el tipo de partículas que se usarán en el experimento tan solo queda determinar qué cantidad de ellas usaremos. Esta última decisión es generalmente la más difícil de todas en experimentos PIV ya que una correcta concentración de partículas incrementará enormemente el éxito del mismo. Por esto el proceso general en experimentos donde el fluido está en un circuito cerrado y que por tanto las partículas no escapan, es el de la adición paulatina de partículas hasta que el investigador considere que se ha alcanzado la resolución adecuada. La ausencia de datos técnicos que puedan orientar sobre qué cantidad será la adecuada hace que esta parte resulte complicada y que la experiencia del investigador resulte clave.

## 4.2. Velocimetría por imágenes de partículas (PIV)

Como ya mencionamos en el apartado anterior, las técnicas PIV tienen como objetivo el hacer visible el movimiento de fluidos que, a priori, no puede ser averiguado debido

a que son transparentes. Esto motivó el uso de partículas que cumplen una serie de características ya discutidas. En esta sección procederemos al detallado de las partes en las que consta un sistema PIV así como los principios en los que se basa para la obtención de resultados.

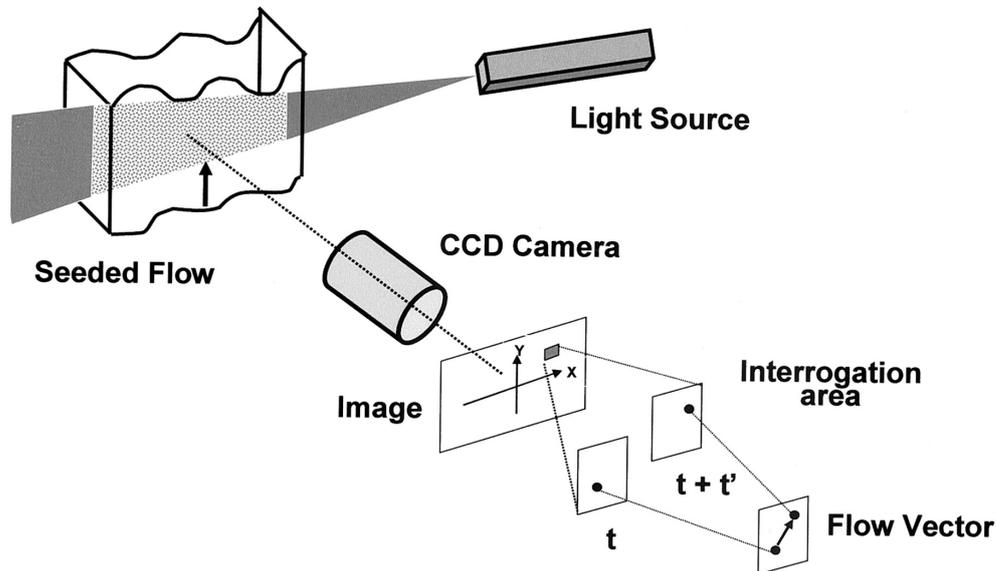


Figura 4.2: Vista general de un sistema PIV. Disponible en: <http://www.ajnr.org/content/24/4/604/F2.expansion.html>

El esquema de la Figura 4.2 describe cualitativamente el principio de funcionamiento de cualquier sistema PIV. Estos sistemas se basan en la medida de los desplazamientos de las partículas en suspensión en el fluido que se producen durante un corto y determinado periodo de tiempo. Como se puede observar, las partículas son iluminadas por una potente fuente de luz pulsada, lo que generalmente se consigue mediante el empleo de dos láseres que funcionan alternativamente. Además existe otra aproximación para obtener el mismo efecto pulsado de las imágenes y que es la que se empleó en el experimento. Esta segunda posibilidad consiste en el uso de un láser continuo cuya luz dispersada será captada mediante una cámara de alta velocidad. El resultado final de ambas soluciones es el mismo, una serie de fotogramas en los que aparece un determinado número de partículas cuya posición cambia de una a otra (ver Figura 4.3). Para la correcta toma de imágenes, será necesario entonces una buena iluminación de la región de estudio.

El primer criterio que ha de satisfacer esta iluminación está relacionado con la duración de los pulsos (en el caso de usar los dos láseres pulsados) o el tiempo de exposición del equipo de adquisición de imágenes. Consideraremos válido aquellos tiempos durante los cuales se produzcan desplazamientos significativamente más pequeños que el tamaño de la partícula.  $\partial t \ll \frac{d_p}{vM}$ . En una primera aproximación, haremos una inspección cualitativa para su corroboración. La forma de hacer esto resulta simple en ejecución pero efectiva en la práctica y consiste en un simple vistazo a la forma que tienen las partículas en

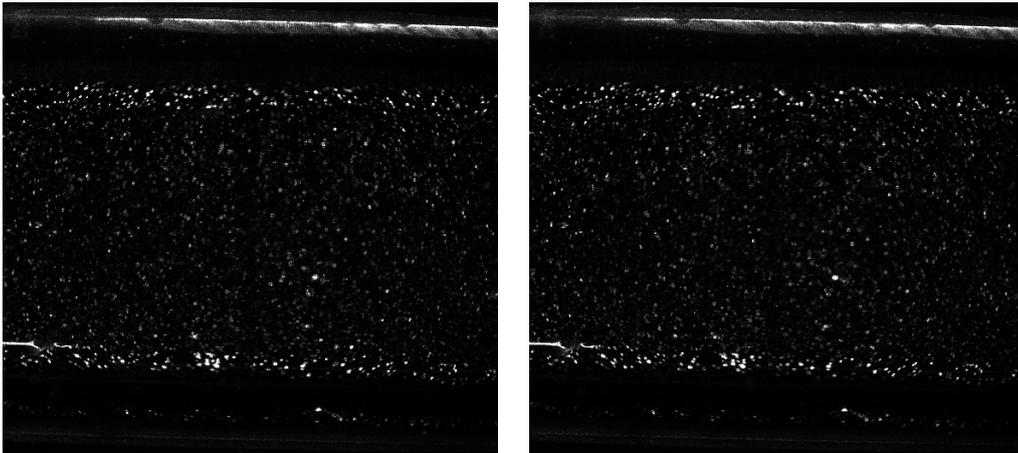


Figura 4.3: Imágenes tomadas por la cámara para tiempos distintos. Los puntos blancos son las partículas presentes en el fluido al ser iluminadas por el láser. Nota: Las líneas rectas corresponden a reflejos del tubo.

cada imagen. La Figura 4.4 muestra una región ampliada de la imagen en la parte izquierda de la Figura 4.3 en la cual las formas de las partículas que aparezcan han de ser redondas. Lo que se está buscando con este criterio es, hablando de manera coloquial, que la imagen no salga movida (que equivaldría a una forma ovalada de las partículas en la imagen).

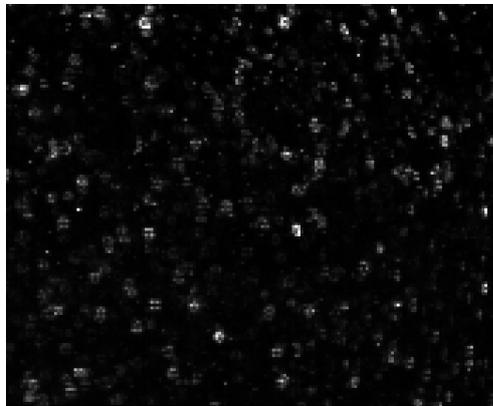


Figura 4.4: Región ampliada de la Figura 4.3 que muestra la forma redonda de la imagen de cada partícula, significando por tanto que la toma de imágenes está siendo realizada con un correcto tiempo de exposición

Por otro lado, el haz de luz que iluminará las partículas será un plano de muy poco espesor de manera que, mediante el correcto enfoque de la cámara, captaremos el movimiento en 2D despreciando aquella componente que vaya en dirección perpendicular al plano (paralelo a la cámara, por tanto). Aunque existen métodos para medir el campo

de velocidades en 3D mediante el uso de visión estereoscópica (con dos cámaras), podemos reducir nuestro estudio a un problema en 2D ya que, como se vio en la sección teórica del trabajo, tan sólo hay dos direcciones relevantes en el movimiento, la radial y la longitudinal.

Por último, tendremos que asegurar que la intensidad de la señal es suficientemente grande como para que la luz dispersada por las partículas pueda ser captada por la cámara. Volviendo a la figura 4.1, podemos asegurar que tan solo una pequeña fracción de la energía que emite el láser será reflejada hacia la cámara.

Por este motivo, el dispositivo de iluminación típico para PIV es el láser de estado sólido de doble pulso Nd:YAG el cual tiene una potencia suficiente para que las partículas puedan ser captadas por la cámara. La parte negativa de estos láseres es que cuentan con una frecuencia de repetición de entre 10 y 50 Hz con lo que solo serán apropiados para sistemas con flujos lentos ( $v < 0,2m/s$ ). En la actualidad, los láseres Nd:YLF son capaces de trabajar con frecuencias de entre 1 y 5 kHz aunque en contrapartida, la duración de los pulsos es mayor.

Sin embargo, en nuestro experimento no optaremos por utilizar láseres pulsados sino que emplearemos una cámara CCD de alta velocidad capaz de grabar a 500 fps con un tiempo de exposición  $\partial t = 1997\mu s$ . Pese a que el tiempo de exposición es elevado, tal y como se mostró previamente con la Figura 4.4, los resultados son aceptables.

A la luz de estos resultados, el experimento cumple con las condiciones antes descritas lo que permite garantizar su validez. No obstante, estas condiciones no contemplan ningún parámetro de diseño del montaje los cuales se proceden a discutir a continuación.

### 4.3. Diseño del montaje

Dedicaremos esta sección a la discusión de los parámetros de diseño del montaje del experimento. Estos ajustes no están relacionados con la validez de los resultados sino con la forma práctica de la que se obtendrán. Nuestra preocupación ahora irá destinada entonces a la correcta colocación de los distintos elementos de los que se compone el sistema PIV.

Comenzando con el láser, el haz de sección circular que este emite ha de ser manipulado ópticamente para conseguir un plano suficientemente fino como para que pueda asumirse que la región iluminada es de 2D. Aunque existen diversas configuraciones basadas en lentes cilíndricas y esféricas, nos centraremos en aquella mostrada esquemáticamente en la Figura 4.5 por ser la utilizada en nuestro experimento. En ella se representan una lente plano-cóncava de distancia focal  $f_1 = 10mm$  que servirá para abrir el haz láser de diámetro  $d = 0,74mm$  y longitud de onda  $\lambda = 530nm$  en la dirección horizontal con un ángulo  $2\theta_D$ . Después, una lente esférica de distancia focal variable  $200 < f_2 < 500 mm$  que está separada una distancia  $l$  de la primera, hará converger los rayos láser con

un ángulo  $\theta_w$  de manera que obtengamos un espesor en el plano vertical que varía con la distancia hasta su grosor mínimo,  $w$  (del inglés *waist*). Este espesor mínimo lo encontraremos situado a la distancia  $f_2$  de la segunda lente a lo largo de una región caracterizada por la longitud de Rayleigh  $Ra$ . Además, esta segunda lente, dependiendo de su ubicación, hará diverger (o converger) los rayos en el plano horizontal con un ángulo  $\theta_{div}$  de manera que se obtendrá un plano de ancho  $H$  que dependerá linealmente de la distancia a la lente a la que realicen las medidas. Esta distancia, será igual a  $f_2$  con el fin de medir en la región de mínimo espesor del plano.

Las ecuaciones que caracterizan este sistema [5], teniendo en cuenta que  $\tan(\theta) \approx \theta$  si  $\theta \ll 1$  son :

$$\begin{aligned}\theta_D &\approx \frac{d}{2f_1} & \theta_{div} &\approx \frac{d(f_2-l)}{2f_1f_2} & \theta_w &\approx \frac{d}{f_2} \\ w &= \frac{2\lambda}{\pi\theta_w} & D &= \frac{dl}{f_1} & H &= \frac{df_2}{f_1} \\ Ra &= \frac{2w}{\theta_w}\end{aligned}$$

Nótese que en el caso  $l = f_2$ ,  $\theta_{div} = 0$  y por lo tanto se obtiene un plano láser de ancho uniforme.

El efecto de  $\theta_{div}$  no será significativo en nuestro experimento por ser el diámetro del tubo pequeño y estar ubicado a una distancia corta de la segunda lente. Sin embargo, en experimentos en los que el elemento a iluminar este lejos o sean de mayor tamaño, esta divergencia deberá ser tratada con cuidado a fin de obtener una región de iluminación cuya sección no sea demasiado grande (porque se perdería potencia lumínica) y cuya geometría sea aproximadamente rectangular; lo que implica que  $\theta_{div} \approx 0$

Desafortunadamente, la segunda lente consiste en un sistema cerrado de dos lentes del que no disponemos información necesaria para averiguar con qué distancia focal estamos trabajando y tampoco cual es la distancia equivalente entre lente-sistema  $l$ , por lo que sólo podremos dar una estimación de los valores de  $f_2$  y  $l$ . Estos 2 valores fueron ajustados manualmente en el laboratorio hasta conseguir el espesor que, a nuestra vista, era mínimo. Este espesor aparece a la distancia focal, la cual estimamos en  $f_2 \approx 400 \text{ mm}$ . Para la distancia entre lentes, utilizamos el tamaño del dispositivo (lente cilíndica + lentes esféricas)  $l \approx 30 \text{ mm}$ . Con estos datos se obtiene:

$$\begin{aligned}\theta_D &\approx 37 \text{ mrad} \\ \theta_{div} &\approx 34 \text{ mrad} \\ \theta_w &\approx 1,8 \text{ mrad} \\ w &\approx 183 \text{ }\mu\text{m} \\ D &\approx 3,0 \text{ mm} \\ H &\approx 27 \text{ mm} \\ Ra &\approx 198 \text{ mm}\end{aligned}$$

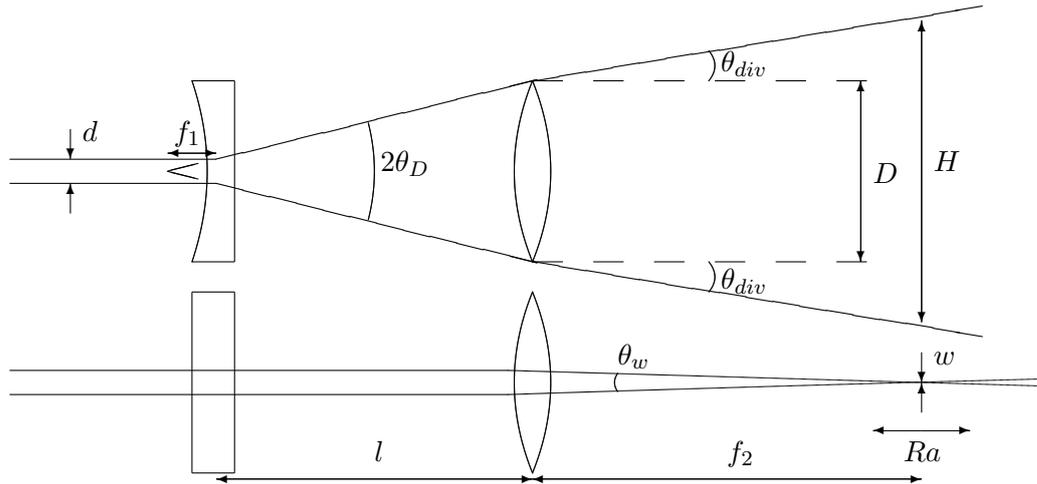


Figura 4.5: Esquema del sistema óptico realizado para la obtención del plano láser

Para dar por finalizado la parte relativa al equipamiento de PIV y antes de dar paso al procesamiento digital de las imágenes, mencionaremos la posible existencia de aberraciones en las imágenes. Entre las posibles aberraciones que podemos encontrar, la que mayor distorsión puede causar y por tanto la que más nos preocupará corregir, es el astigmatismo; producido por el salto de índice refractivo entre los medios por los que se propagará la luz en nuestro experimento (aire, vidrio y BMF) además de la distorsión generada por la superficie curva de la tubería. La medida recomendada para estos casos y que hemos tomado en nuestro experimento consiste en la inmersión del tubo en una caja prismática transparente llena de agua, cuyo índice de refracción es parecido al del BMF que circula por el interior de la tubería.

#### 4.4. Procesado digital de las imágenes

Una vez tomadas las imágenes, éstas son procesadas digitalmente por un ordenador. En la actualidad existe una amplia variedad de rutinas dedicadas al análisis de imágenes PIV que pueden ser ejecutados por un ordenador de sobremesa común, sin grandes especificaciones técnicas. Los análisis que estos programas realizan suelen estar basados en la correlación espacial de una imagen con la anterior la cual requiere que las imágenes sean estadísticamente homogéneas. Esto se traduce de manera práctica en 3 condiciones:

1. Las partículas han de estar distribuidas de manera uniforme.
2. La iluminación de la imagen ha de ser uniforme.

### 3. La iluminación del fondo ha de ser uniforme.

La primera de estas condiciones se consigue mediante la adición de la cantidad adecuada de partículas y su correcta disolución en el fluido. Por otro lado, consideraremos que la intensidad del plano láser no decae mientras se atraviesa el tubo por tratarse de un recorrido de tan solo 8mm. Por último, hemos conseguido una imagen de fondo uniforme utilizando una cartulina de color negro en el fondo del contenedor donde irá inmerso en agua el tubo de vidrio.

Como ya se mencionó antes, el análisis realizado por el ordenador para medir los desplazamientos recorridos por las partículas se basa en la correlación cruzada de dos imágenes. El resultado de esta operación es el emparejamiento más probable de las partículas en dos imágenes distintas. Lo cual quiere decir que el desplazamiento será el vector trazado desde el origen de coordenadas hasta el punto donde la correlación se haga máxima. Alrededor de este pico se extiende una zona de perfil parabólico o exponencial mediante la cual puede hacerse una estimación subpíxel. Esto quiere decir que podremos afinar los resultados con una resolución inferior a la unidad ya que, dado que una partícula no cae exclusivamente en un píxel, esta "ilumina" parcialmente los píxeles de su alrededor. Por tanto, si por ejemplo se observa que el nivel de gris es superior a la derecha que a la izquierda del pico, se puede deducir que la partícula estaba ligeramente desplazada hacia la derecha. De una manera cuantitativa y basándose en la relación entre los niveles de gris encontrados alrededor del pico, es posible dar un valor que indique hacia dónde estaba desplazada la partícula y cómo de desplazada estaba hacia el siguiente píxel (si estaba en su mayoría en el píxel central o si por el contrario ya estaba a medio camino entre el central y un vecino). Además de las estimaciones subpíxel, los sistemas PIV permiten un amplio abanico de posibilidades en cuanto a filtrados espaciales y formas complejas de calcular la correlación, dirigido hacia la eliminación de ruido basándose en trabajo estadístico. En la actualidad, existe toda una familia de algoritmos para la estimación de estos desplazamientos, cada una con sus ventajas e inconvenientes. En este trabajo no se realizará un repaso de todos estos algoritmos ya que se aleja de los objetivos propuestos. Sin embargo, cabe destacar una serie de reglas de diseño que tienen en común (salvo casos en los que, por la manera en la que se diseñó el algoritmo, evitan la restricción impuesta por alguna de las normas).

Estos algoritmos trabajan sobre las llamadas ventanas de interrogación, es decir regiones de la imagen con las que se opera para hacer el cálculo del desplazamiento. Dicho de otra manera, una misma imagen se subdivide en trozos más pequeños, las ventanas de interrogación, los cuales se correlacionan con su correspondiente pareja en la otra imagen. De esta manera, con una misma pareja de imágenes se realizan múltiples correlaciones por tanto se consigue un campo denso de desplazamientos, es decir, un campo con una distribución uniforme y abundante de "flechas" (desplazamientos) las cuales son producto de la correlación entre dos ventanas de interrogación de una imagen y su posterior. Entonces, para dos imágenes distintas el programa ha de iterar varias veces su rutina de correlación hasta recorrer todas las ventanas de interrogación de las mismas. Como medida adicional, los algoritmos permiten la superposición de ventanas de interrogación

con lo cual se consigue una mayor densidad en el campo de desplazamientos, de una forma mucho más exacta de lo que podrían dar otros métodos como por ejemplo la interpolación. No obstante hay un punto en el que, aunque se superpongan más las ventanas, el método pierde su eficacia. Esto significa que prácticamente todos los píxeles de una ventana y otra son los mismos por lo que la información que puede ser extraída (los desplazamientos) de la nueva ventana va a ser igual a la de la anterior. El punto a partir del cual se estima que la superposición deja de ser relevante y empieza a dar resultados redundantes es el 50 % según la estimación de Willert y Gharib[4].

Además, todas las ventanas de interrogación ha de satisfacer estas 3 condiciones para que sean válidas [3] y [4]:

1. La zona de interrogación ha de contener al menos 10 pares de partículas.
2. El desplazamiento de estas partículas ha de ser menor que un tercio del tamaño de la ventana de interrogación.
3. Las variaciones locales de los desplazamientos han de ser menores que el diámetro de las partículas. Es decir, dentro de una misma ventana, los desplazamientos han de ser (aproximadamente) uniformes; que no existan grandes cambios entre el desplazamiento que tuvo una partícula y su vecina.

En la Figura 4.6 se muestran representados de manera tridimensional y vista superior, los valores que toma la correlación de dos pares de ventanas de interrogación distintos. En las gráficas se aprecian los resultados típicos de este tipo de operación donde aparece un claro pico cerca del centro y algo de ruido de fondo por el resto de la imagen. Merece la pena recordar que la distancia al centro es el desplazamiento de las partículas de esa ventana por lo que no se espera que este pico aparezca alejado del centro que, de hacerlo, sería considerado error y se procedería a su descarte y posterior interpolación.

A continuación, en la Figura 4.7 se presenta de manera esquematizada el funcionamiento de un algoritmo general para el cálculo de desplazamientos. Para nuestro trabajo en particular se ha empleado el programa de código abierto PIVlab. La razón por la que se trabaja en el dominio de la frecuencia y no del espacio es el esfuerzo computacional que se requiere. Mientras que en el dominio del espacio realizar la convolución de dos señales requiere de muchos recursos (cálculos de integrales), en el dominio de la frecuencia esta se transforma en sumas y multiplicaciones. Esta propiedad de la convolución puede ser explotada por los ordenadores gracias a la transformada (y antitransformada) rápida de Fourier, referidas normalmente como FFT y FFT<sup>-1</sup>. Los pasos que sigue un algoritmo son:

1. Selección de la región de interrogación en ambas imágenes. Recordando, estas son con las que se trabajará y se hará la correlación.
2. Paso al dominio de la frecuencia mediante la transformada rápida de Fourier:

$$X(k) = \sum_{j=1}^N x(j)\omega_N^{(j-1)(k-1)} \text{ donde } \omega_N = e^{-i2\pi k \frac{j}{N}}$$

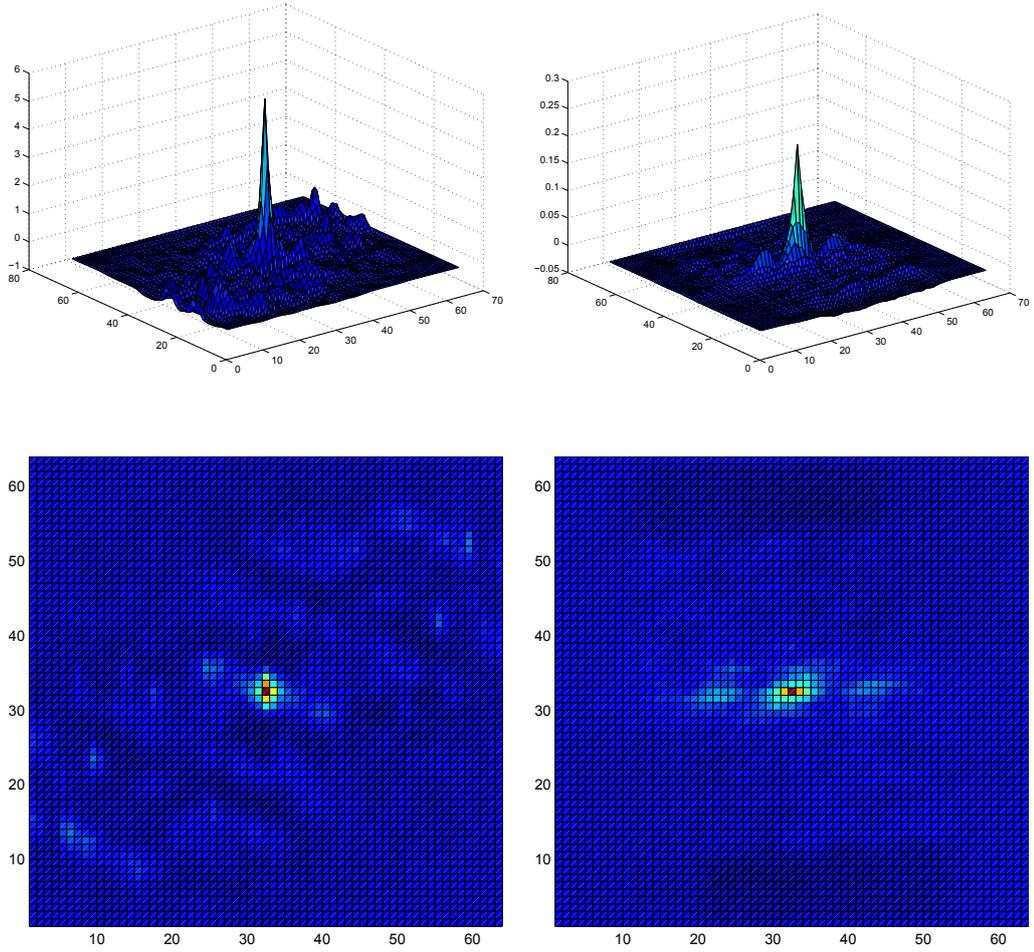


Figura 4.6: Correlación de dos pares de ventanas de interrogación distintos. Arriba: Vista 3D de los valores de la correlación. Abajo: Vista superior de cada gráfica. Relación señal a ruido (valor de pico/media) de cada correlación: 49.0 (izquierda), 44.9 (derecha)

3. Correlación cruzada de ambas ventanas de interrogación. Gracias a que estamos en el dominio de la frecuencia esta operación se simplifica resultando:

$$\Phi'(u, v) = F(u, v) * G(u, v)$$

4. Paso al dominio del espacio mediante la antitransformada rápida de Fourier:

$$x(j) = \sum_{k=1}^N X(k) \omega_N^{-(j-1)(k-1)} \text{ donde } \omega_N = e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}$$

5. Finalmente, se busca el pico en el mapa de correlaciones resultante y se calcula el desplazamiento. En esta etapa es donde se podrían aplicar métodos para una resolución subpíxel y de validación de resultados deshechando valores que, estadísticamente, sean descartables como ruido. En el caso de descartar algún dato, se procedería a una etapa de interpolado para reemplazarlo.

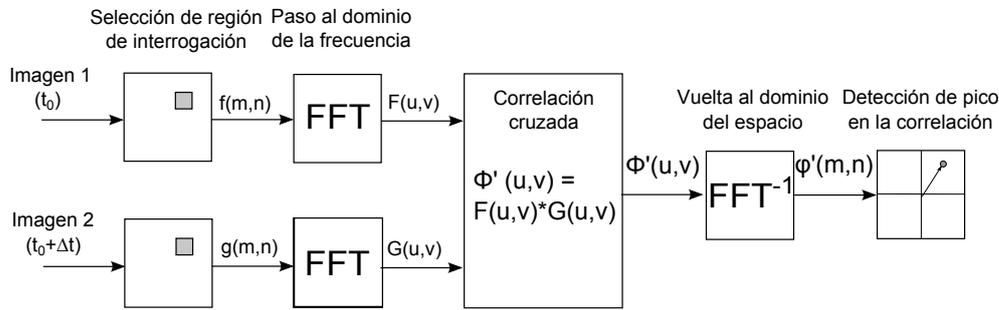


Figura 4.7: Diagrama de bloques de un algoritmo PIV.

## 4.5. Post-procesado de los resultados

Debido a problemas de ruido, los resultados que se obtienen desde PIV distan de ser ideales. Por ello, se hace necesario un tratamiento a posteriori de los mismos antes de considerarlos como resultados finales, aptos para la extracción de conclusiones y comparación con los teóricos. Se han tomado dos medidas para el suavizado del impacto del ruido en los resultados.

La primera de ellas ha consistido en el promediado de los resultados haciendo uso de la disponibilidad de obtener varios perfiles de velocidades con la comparación de dos imágenes. Esto quiere decir que en un mismo par de imágenes PIVlab no nos da un único perfil sino todos los que encuentra a lo largo del tubo (ver Figura 4.8). Gracias a esto, podemos elegir la sección de tubo que, a simple vista, nos parezca tener menos ruido o artefactos y hacer un promedio de los perfiles de velocidades calculados en esa región.

La segunda medida sigue con el razonamiento de la primera sólo que ahora el promediado no será realizado dentro del campo de desplazamientos entre un par de imágenes. En

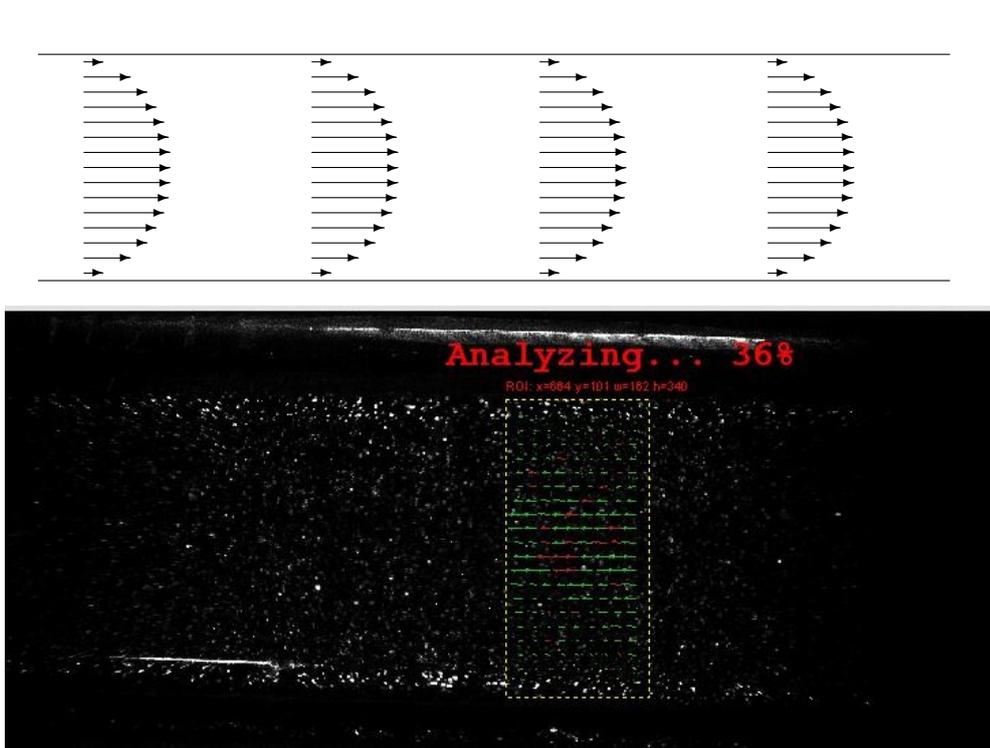


Figura 4.8: Arriba: Dibujo descriptivo de los resultados de un algoritmo PIV. Abajo: Imagen durante la ejecución de PIVlab.

este caso, realizará lo que se conoce por *phase averaging* que consiste en un “promediado de los promedios” que se encuentren en la misma fase. Esto se basa en el hecho de que los resultados han de repetirse cada cierto periodo  $T$ , que además es conocido por corresponderse con la frecuencia con la que bombeamos el fluido ( $f = 1Hz$ ). Con este dato y conociendo el número de campos de desplazamientos que corresponden con un mismo ciclo (250), se puede realizar entonces de manera sencilla el promediado de dichos desplazamientos obteniendo tras la ejecución un solo ciclo. En la Figura 4.9 se muestran los resultados para dos tiempos determinados antes y después del post-procesado. Como puede observarse, el promediado de los perfiles da un resultado aproximado de lo que está ocurriendo, sin embargo, hay irregularidades que persisten en el promediado. Los resultados conseguidos por *phase averaging* no distan mucho de los obtenidos tan sólo con la media de los perfiles en un mismo tiempo. Esto se debe a que, por limitaciones de la memoria de la cámara, sólo se tomaron imágenes para tres ciclos completos. No obstante se decidió implementar esta medida para el suavizado del ruido para el caso de que se consiguiesen datos para un mayor número de ciclos.

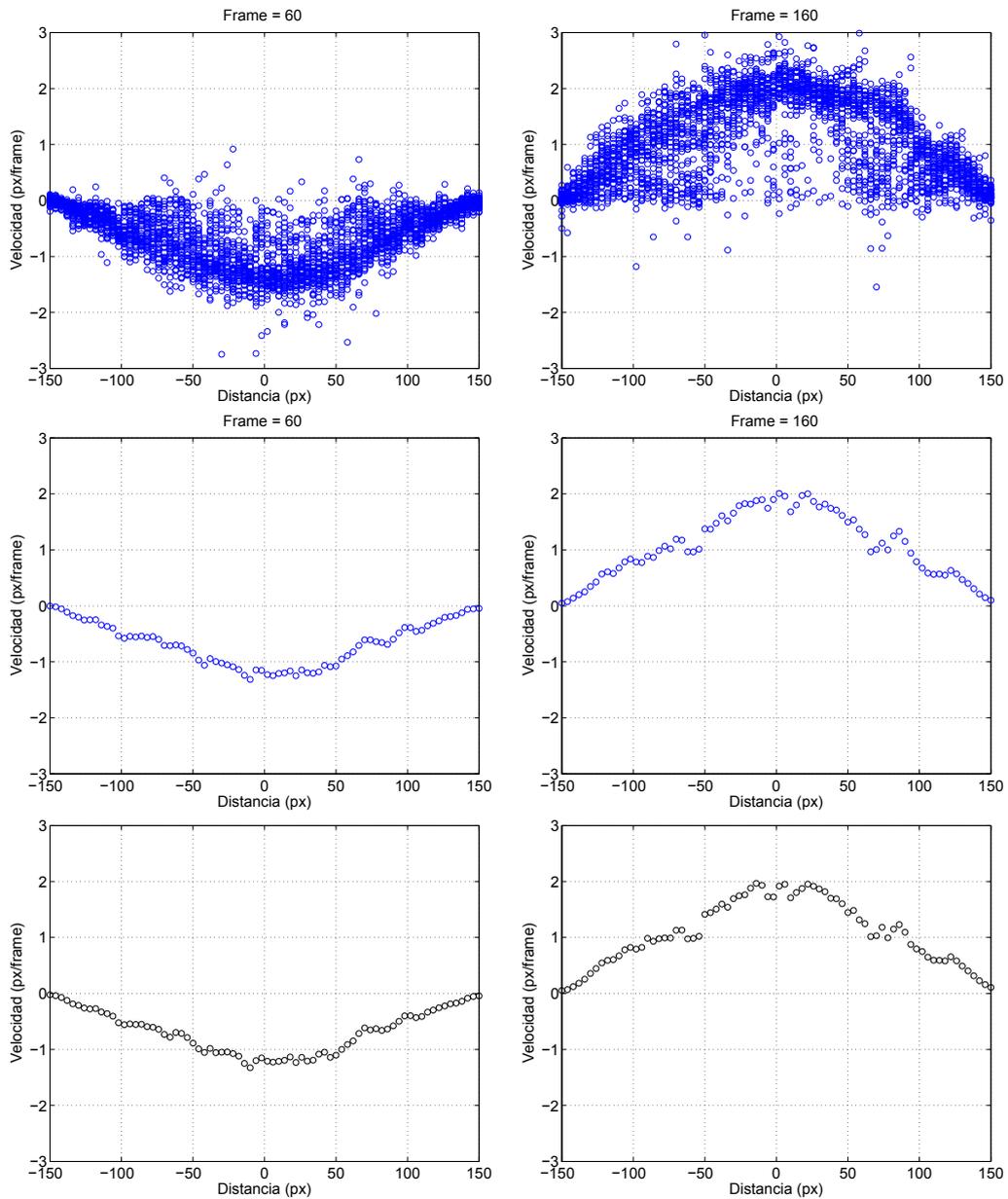


Figura 4.9: Efecto de suavizado de ruido. Arriba: Representación de todos los perfiles obtenidos por PIVlab para los frames 60 y 160. Medio: Promediado de los perfiles para los frames 60 y 160. Abajo: Promediado en fase de los perfiles que aparecen en los frames con la misma fase que 60 y 160, respectivamente. Estos serán: 60, 310 y 560 para el gráfico de la izquierda y 160, 410 y 660 para el gráfico de la derecha.

## Capítulo 5

# Resultados

En esta sección se hará un repaso de los resultados que se han obtenido del laboratorio y se compararán con aquellos de las simulaciones en Matlab. Como ya se ha discutido en secciones anteriores, se espera que los resultados experimentales corroboren los que ya se calcularon de manera numérica y analítica. Para realizar la comparación, se redimensionarán los resultados ya que se daban como adimensionales en las soluciones teóricas y en unidades propias de imágenes (píxeles, fps, etc.), los resultados obtenidos utilizando PIVlab.

### 5.1. Dimensionado de los resultados teóricos

Para dimensionar los valores teóricos es necesario recordar las identidades que se usaron para la adimensionalización. Estas eran:

$$\xi = \frac{r}{R} \quad ; \quad \tau = \omega t \quad ; \quad u = \frac{v_x}{u_c} \quad ; \quad u_c = \frac{AR^2}{\mu}$$

En particular, estamos interesados en redimensionar las variables referentes a la posición y a la velocidad. Es fácil deducir que en el caso de querer hablar de posiciones, simplemente multiplicaremos  $\xi$  por el radio  $R$  del tubo (4mm en nuestro experimento). Sin embargo, este procedimiento no resulta inmediato para la velocidad  $v_x$  ya que desconocemos la amplitud del gradiente de presión  $A$ , necesario para el cálculo de  $u_c$ .

Este valor de  $A$  puede ser calculado de manera exacta mediante la resolución de la ecuación del caudal 5.1 ya que éste es un dato conocido por ser impuesto por la bomba (1mL/s).

$$Q = 2\pi \int_0^R r \frac{AR^2}{\mu} u \, dr = \frac{2\pi AR^2}{\mu} \int_0^R r u \, dr = \frac{2\pi AR^4}{\mu} \int_0^1 \xi u \, d\xi \quad (5.1)$$

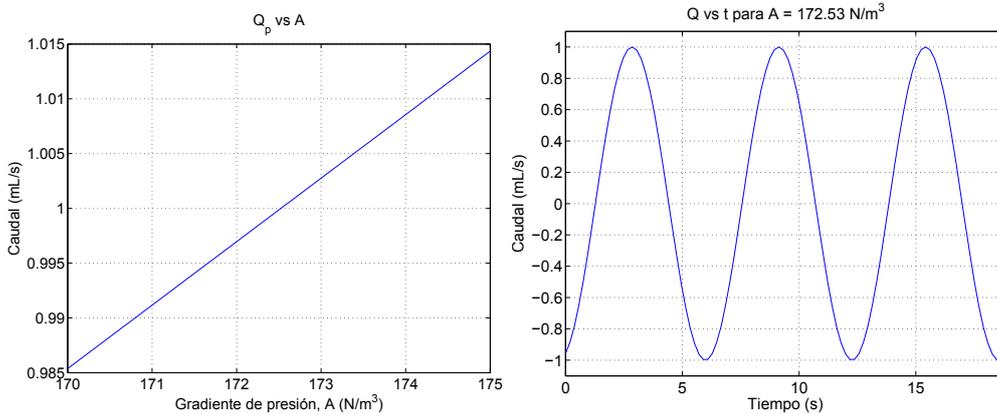


Figura 5.1: Izquierda: Representación gráfica de la recta obtenida al enfrentar el caudal  $Q$  y la amplitud del gradiente de presión  $A$ . Derecha: Evolución temporal del caudal obtenido para  $A = 172,53 \text{ N/m}^3$

La integración analítica de esta expresión puede resultar tediosa e incluso imposible de realizar en los casos reales donde no se conoce la expresión que sigue  $u$ . Por este motivo, se ha realizado una integración numérica mediante el método de los trapecios del problema en la que se buscará aquel valor de  $A$  que provocaría un caudal  $Q = 1 \text{ mL/s}$  tomando como datos los del experimento del laboratorio ( $Wo = 5,4830$ ,  $R = 4 \text{ mm}$ ). En la Figura 5.1, se muestran enfrentados el valor del caudal pico para cada valor de la amplitud del gradiente de presión. Como puede observarse, el caudal sigue una relación lineal con la presión. La ecuación que relaciona al caudal con la amplitud del gradiente de presión es entonces  $Q = 0,005796A$  con  $Q$  expresado en  $\text{mL/s}$  y  $A$  expresado en  $\text{N/m}^3$ . En particular, para un caudal  $Q = 1 \text{ mL/s}$  está ligado un gradiente de presión  $A = 172,53 \text{ N/m}^3$

## 5.2. Dimensionado de los resultados experimentales

El software PIVlab da la opción al usuario de dar unidades físicas a los resultados. Sin embargo, se ha decidido conservar los resultados en unidades ópticas y realizar el cambio de unidades posteriormente. Las variables del sistema que se desean redimensionar son la de la posición radial y la de la velocidad en dirección longitudinal del tubo. Es decir  $\xi \rightarrow r$  y  $u \rightarrow v_x$ .

El procedimiento que se ha seguido para dimensionar las magnitudes de distancia ha sido el establecimiento de una regla de proporcionalidad entre los píxeles que mide la zona de interés seleccionada (que coincide con el diámetro interior del tubo) y su tamaño real, que es conocido e igual a  $8 \text{ mm}$ . De las imágenes se obtiene  $\phi_{int} = 308 \text{ px}$  (que es el tamaño de la región de interés seleccionada) con lo que ya tendremos un factor de conversión para las distancias  $K_r = 38,5 \text{ px/mm}$ .

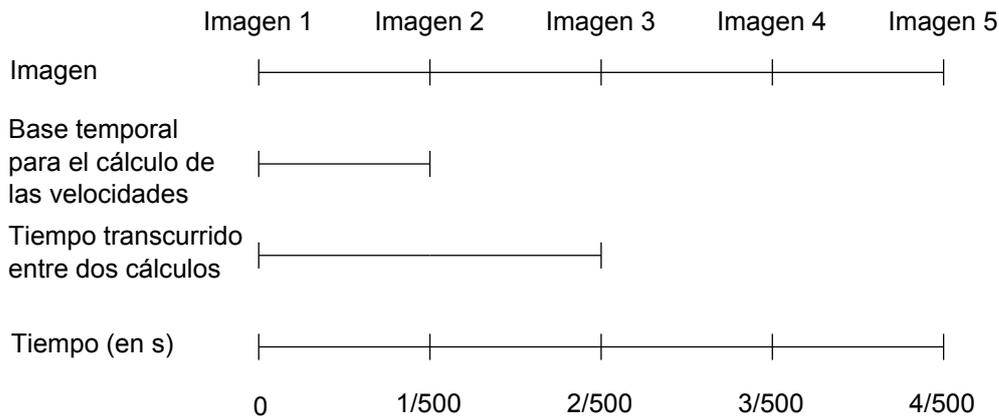


Figura 5.2: Escala temporal que refleja los instantes en los que se toman las imágenes, la base de tiempos con la cual se ha de convertir las unidades de tiempo de los perfiles obtenidos y la base de tiempos que se ha de usar para obtener los instantes en los cuales se produce cada perfil.

Por otro lado ha de dimensionarse el tiempo para así poder saber en qué instante de tiempo se está produciendo cada perfil de velocidades y además conocer el valor de estas velocidades en unidades físicas. A primera vista podría parecer que este factor de conversión que tenemos que encontrar es único para traducir el segundo al que nos estamos refiriendo y las velocidades que están apareciendo. No obstante, trazando una sencilla escala de tiempos como la de la Figura 5.2 vemos cómo esto no es cierto en nuestro caso. Como puede apreciarse, el tiempo que transcurre para el cálculo de los desplazamientos (es decir, entre la imagen 1 y 2) es distinto del que transcurre entre un perfil de desplazamientos y otro (que será el doble pues se podría decir que se corresponden temporalmente con imagen 1 y 3).

Para hayar un factor  $K_v$  que permita dimensionar las velocidades es necesario establecer una conversión de *frames* a segundos. Esto último viene dado por la frecuencia de disparo de la cámara, la cual se fijó en 500 disparos por segundo por lo que  $K_{vt} = 500 \text{ s}^{-1}$ . Finalmente,  $K_v = \frac{K_t}{K_r} \rightarrow K_v = 16,223 \text{ mm}/(\text{px s})$ . La Figura 5.3 muestra los mismos resultados que la Figura 4.9 expresados esta vez en unidades físicas.

### 5.2.1. Ajuste de los resultados experimentales

Una práctica común dentro del tratamiento de los resultados experimentales es su ajuste a una curva de manera que se pueda obtener una expresión analítica con unos parámetros tales que los puntos de esta última función, pasen por las cercanías de los puntos hallados experimentalmente. En este apartado se va a mostrar cómo resulta el ajuste a una parábola de los puntos cercanos a la pared.

Comenzamos definiendo una nueva base de coordenadas más apropiada para este trabajo

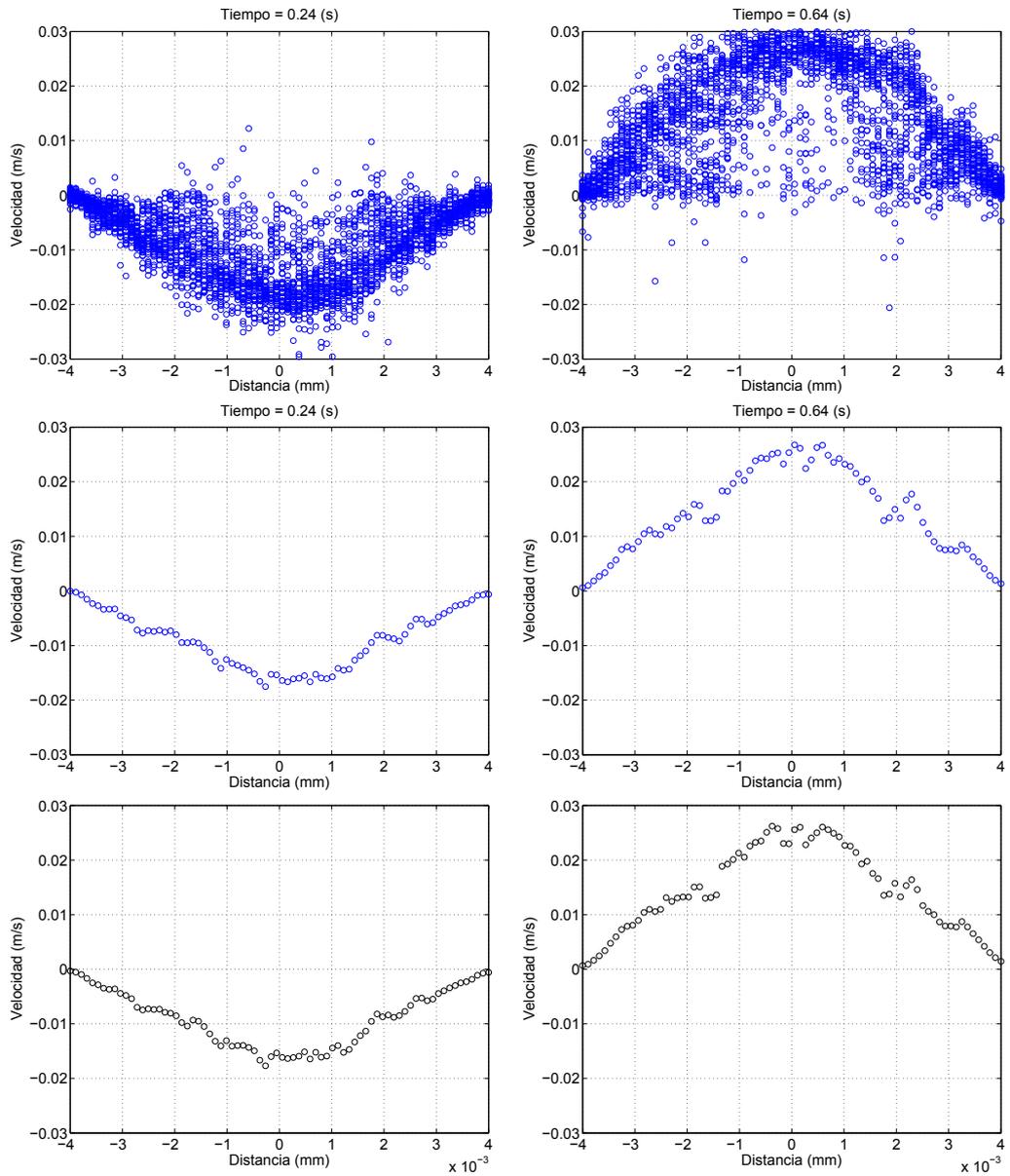


Figura 5.3: Perfiles de velocidades obtenidos experimentalmente expresados en unidades de magnitudes físicas.

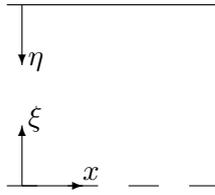


Figura 5.4: Malla para la discretización del sistema.

(ver Figura 5.4. Como se pretende trabajar con puntos cercanos a la pared, resulta natural poner el origen en la propia pared del tubo. Esta nueva coordenada ha sido llamada  $\eta$  y se relaciona con  $\xi$  mediante la expresión  $\eta = 1 - \xi$ .

Por otro lado, recuperamos la solución analítica del problema dada por la ecuación (2.9) expresada de una forma mas breve:

$$u = \frac{-i}{Wo} \left( 1 - \frac{f(\xi)}{f(\xi=1)} \right)$$

$$f(\xi) = I_0 \left( \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} Wo \xi \right)$$

La forma de aproximar los datos a una curva consiste en la minimización de una función de error, el método que se ha usado es el de *mínimos cuadrados*. Este método toma como función a minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor real de cada punto y los de la función ajustada. Ya que los valores reales son datos obtenidos experimentalmente, necesitamos definir la función de ajuste antes de ejecutar un método iterativo que ofrece Matlab para encontrar mínimos dentro de una función determinada.

La función a la que ajustaremos puede ser obtenida expandiendo en series de Taylor la función  $f$  la cual expresaremos en términos de  $\eta$  ya que el interés se centra en los puntos cercanos a la pared, es decir  $\eta = 0$  lo que facilita los calculos frente a la expresión en las coordenadas originales (resultaría  $\xi = 1$ ).

$$f(\eta) \approx f(\eta = 0) + \eta f'(\eta = 0) + \frac{1}{2} \eta^2 f''(\eta = 0)$$

Ahora, si nos fijamos,  $f(\eta = 0) = f(\xi = 1)$ , si además sustituimos en la expansión de Taylor anterior  $\eta \rightarrow (1 - \xi)$  podemos llegar a esta expresión:

$$u \approx \frac{-i}{Wo} \left( f'(\xi = 1)(1 - \xi) + \frac{1}{2}(1 - \xi)^2 f''(\xi = 1) \right)$$

Por tanto, se ha conseguido una parábola que se aproxima a  $u$ , teniendo dos parámetros de ajuste que llamaremos  $c_1$  y  $c_2$  que irán cambiado a lo largo del tiempo para ir ajustandose a las diferentes siluetas que adopta el perfil de velocidades:

$$\hat{u} \approx c_1(1 - \xi) + c_2(1 - \xi)^2$$

Entonces, la función a minimizar,  $err^2$ , será:

$$err^2 = \sum (u_i - u_a)^2$$

Donde  $u_i$  hace referencia a cada dato obtenido experimentalmente y  $u_a$  al valor de la función aproximada  $\hat{u}$  en ese punto. Tras la ejecución de un código en Matlab implementado para la búsqueda de  $c_1$  y  $c_2$  que minimicen  $err^2$ , se puede representar cómo queda el ajuste frente a los datos reales tal y como refleja la Figura 5.5.

Gracias a este ajuste se puede realizar una estimación de la tensión mecánica ( $\tau'$ ) en la pared. Ya que tan sólo la componente de la velocidad en la dirección axial es distinta de cero e igual a  $\hat{u}$  el esfuerzo cortante (adimensional) en la pared será (ver resultados en la Figura 5.6):

$$\bar{\tau}' = - \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} \bar{e}_x \quad (5.2)$$

Nota: Si se quisiese por algún motivo re-dimensionar físicamente este esfuerzo, tan sólo habría que multiplicar los resultados por  $\frac{\mu u_c}{R} \rightarrow AR$

Como se ha podido apreciar en las gráficas que muestran el ajuste, la curva resultante se asemeja a una recta (más que a una parábola). Esto deja entrever que debe existir una relación entre  $c_1$  y  $c_2$  que, en un principio, se dejaron como parámetros independientes del ajuste. En la Figura 5.7 se puede intuir cierta correlación entre  $c_1$  y  $c_2$  lo que confirma nuestra sospecha de que el perfil de velocidades, depende de un sólo parámetro.

### 5.3. Comparativa de resultados y comentarios

Una vez se han convertido los resultados a unidades físicas, es posible su comparación y análisis. Como ya se ha mencionado anteriormente, el objetivo principal de este trabajo es el de corroborar de manera experimental los modelos teóricos derivados a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes y ciertas simplificaciones que pueden ser asumidas para la reducción de la complejidad del problema. Por tanto, este último apartado estará dedicado a la representación de gráficas comparativas y comentarios acerca de lo que en ellas se observa.

Para comenzar, en la Figura 5.8, se muestran los 3 perfiles de velocidades que se han obtenido (integración numérica, solución analítica y métodos experimentales) para 6 momentos distintos con los que se pretende dar una noción de la evolución de los mismos. La periodicidad del sistema queda demostrada al observar los mismos perfiles una vez ha transcurrido un ciclo. Puesto que la frecuencia que se impuso fue de 1 Hz, transcurrido 1 segundo, los resultados se repiten con la salvedad de los hallados por métodos numéricos. Esto último no se trata de un error en la solución sino que es una consecuencia derivada del método de integración. En concreto, lo que se ve es que el sistema numérico parte desde una condición inicial arbitraria de reposo. Esto supone la aparición de un régimen de transición en el que el sistema numérico va acercándose hacia la solución exacta (analítica). Debido a que sólo disponemos de 3 ciclos de resultados experimentales, no

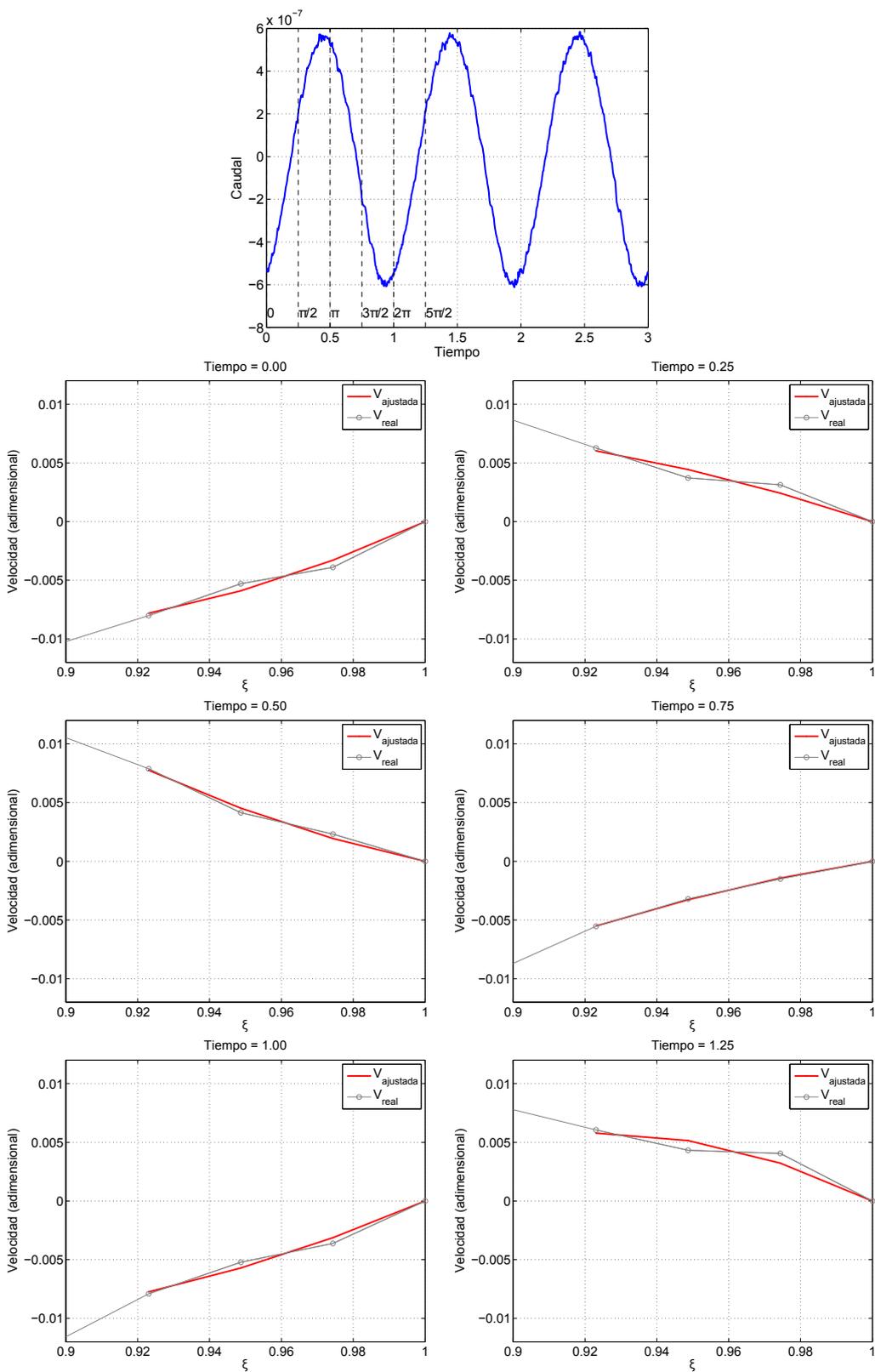


Figura 5.5: Curva ajustada frente a valores reales de cada punto. La gráfica de arriba se adjunta para ilustrar en qué tiempos han sido representados los perfiles.

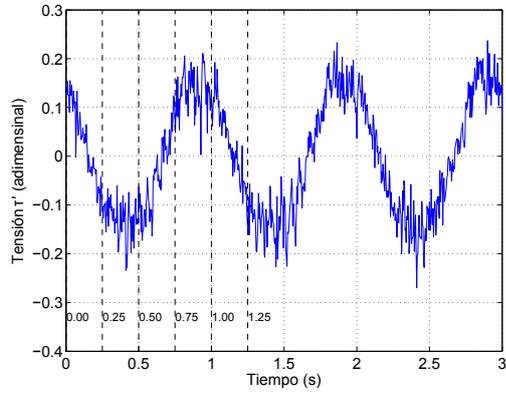


Figura 5.6: Evolución temporal del esfuerzo cortante  $\tau'$  en la pared calculado a partir de la curva ajustada. Los instantes marcados con líneas verticales son aquellos donde se ha representado el perfil de velocidades en la Figura 5.5

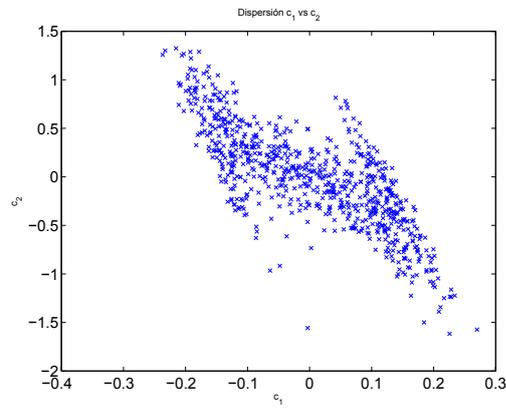


Figura 5.7: Diagrama de dispersión de  $c_1$  y  $c_2$ .

podemos representar todo el estado transitorio de la solución numérica aunque sí que se puede apreciar de manera cualitativa cómo el perfil obtenido numéricamente (cuadrados) se aproxima a aquel obtenido analíticamente (línea gris). De mayor relevancia es la comparación del perfil obtenido de los datos experimentales (azul) con el exacto (gris). A simple vista se ve una clara diferencia entre uno y otro, sobre todo en la región intermedia entre el centro y las paredes. Tanto las velocidades del centro como las de las paredes guardan bastante similitud con los valores que se obtienen de la teoría y además, observando su evolución temporal, los resultados muestran un claro comportamiento periódico.

Más adelante en esta sección se hará un breve repaso de las causas de estas discordancias pero antes nos centraremos en la información que puede ser extraída de la evolución temporal de los caudales. En la Figura 5.9 aparecen de nuevo las soluciones numérica (cuadrados), analítica (gris) y experimental (azul) pero esta vez lo que se encuentra representado es el caudal que cada una está imponiendo como resultado de la integración de las velocidades mediante la ecuación (5.1). En esta figura se aprecia con claridad el efecto que tiene el error que se produce entre los perfiles de velocidades, siendo el perfil obtenido en el laboratorio (azul) poco más de la mitad del valor de pico que se esperaba obtener (gris). Sin embargo, esto no afecta a la periodicidad, ya que ambas señales oscilan con la misma frecuencia. También cabe destacar la evolución que sigue la solución numérica (cuadrados) que al principio se encuentra claramente desviada de la solución analítica pero que en tan sólo 3 ciclos ya prácticamente ha alcanzado el régimen estacionario dictado por dicha solución exacta.

Tras estos resultados finales, es el momento de discutir las causas que han propiciado el error en las medidas experimentales. Las principales fuentes de error derivan principalmente del sistema de toma de datos, siendo especialmente propenso a errores aquellos factores que incumben al sistema óptico del láser y la actuación no deseada del tubo como lente.

En cuanto al láser, los problemas pueden venir resumidos en la Figura 5.10. Enumerándolos:

1. Mal posicionamiento vertical del láser. Este error es casi con certeza el que mayor impacto ha tenido sobre los resultados ya que en el laboratorio no se disponía de unos buenos elementos de posicionamiento para la altura a la que ubicar el láser. El efecto resultante es que se corta al tubo por un plano distinto al central, con lo que realmente nunca se llega a apreciar el centro del tubo y aparecerían unas bandas no iluminadas desde el último punto iluminado por el láser hasta la pared del tubo.
2. Orientación errónea del láser. Este error se produce cuando el láser no se encuentra apuntando perpendicularmente al tubo. El efecto resultante, es que en la imagen captada por la cámara, aparecerán puntos del plano superpuestos. Además, si la desviación es lo suficientemente grande, aparecerán zonas sin iluminar del tubo, que provocarán la aparición de bandas similares a las descritas en el punto anterior. Por las mismas razones que el punto 1, se espera que juntos hayan sido las principales

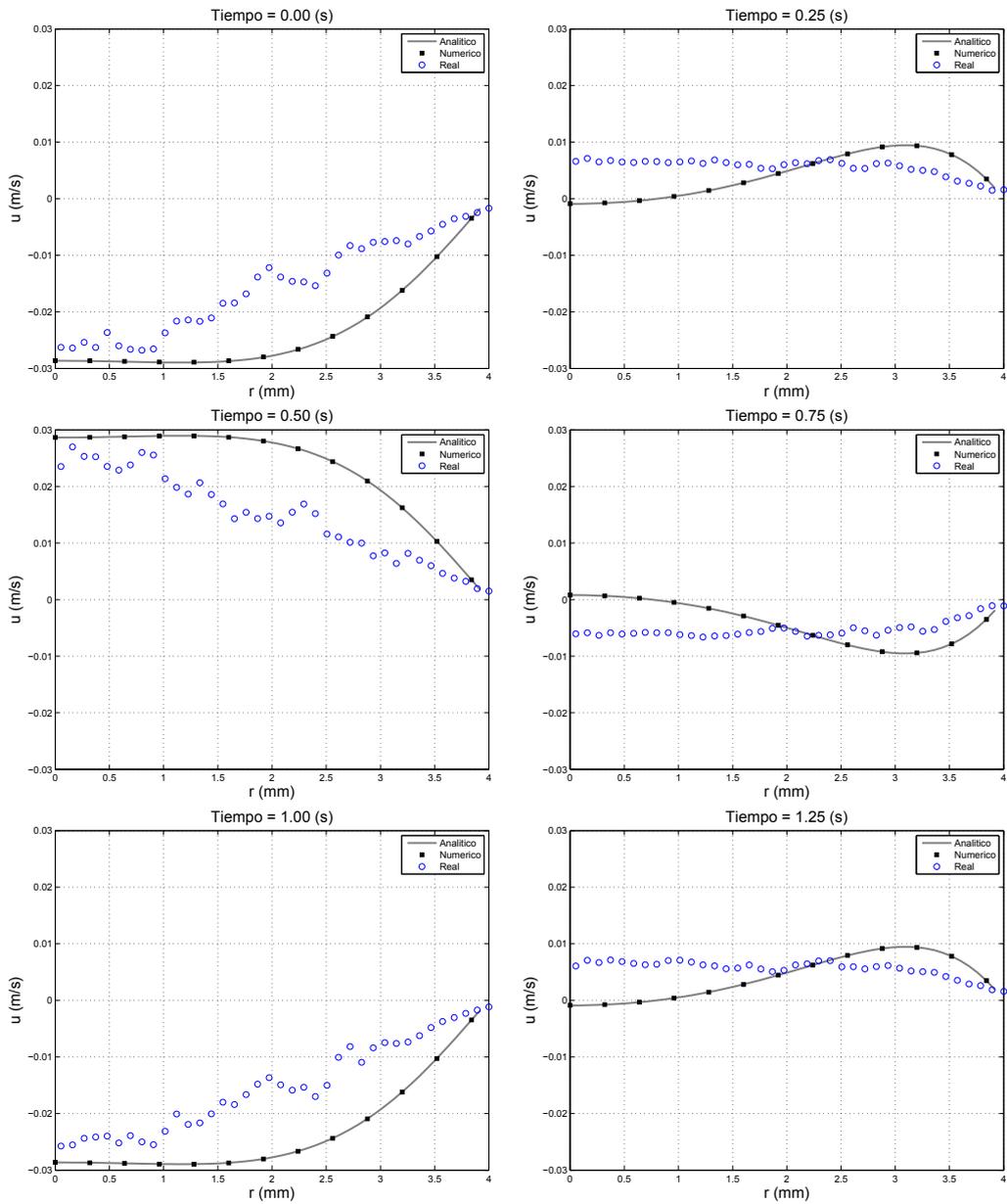


Figura 5.8: Perfiles de velocidades numérico, analítico y real para distintos tiempos. Nota: Los resultados fueron sincronizados en fase utilizando como referencia el máximo en los caudales de las 3 curvas.

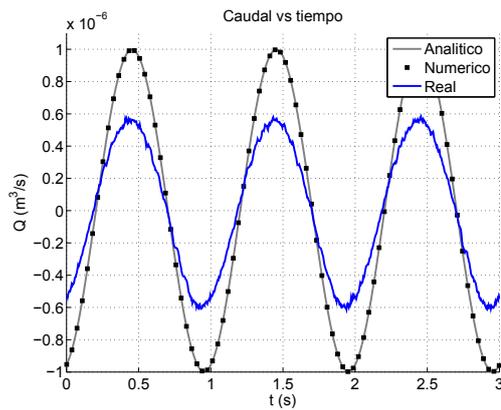


Figura 5.9: Evolución temporal de los caudales provenientes de cada método

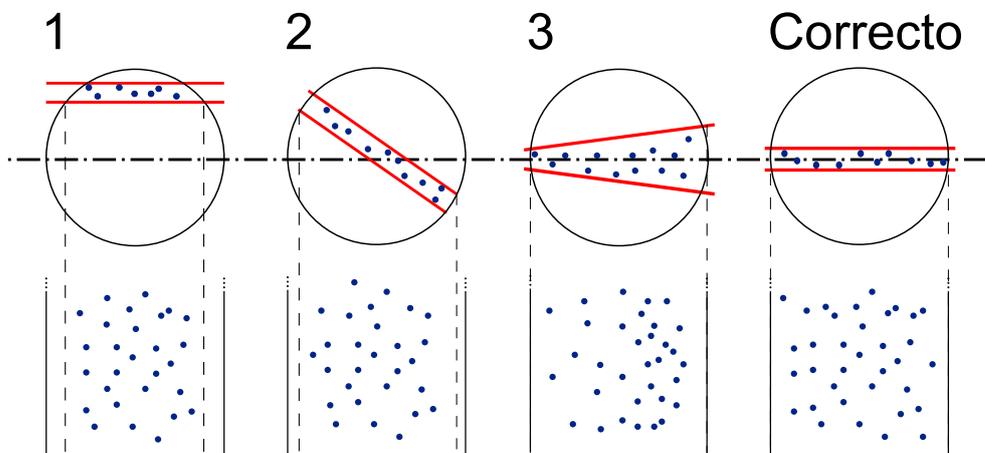


Figura 5.10: Posibles errores que pueden surgir derivados de un mal posicionamiento del láser o incorrecta orientación del mismo.

fuentes de error de nuestros datos.

3. Diferencias en el espesor del plano láser. El efecto de este error es la captación por parte de la cámara de más partículas en la zona donde el plano es más ancho que en la zona donde es más estrecho. Además, cerca de las paredes, se superpondrán partículas quietas (pegadas a la pared) sobre otras que estén en un plano más intermedio del tubo y que, por tanto, se estén moviendo. La aparición de este error vendría provocada por una mala elección en el sistema de lentes con el que se consigue el plano láser a partir del haz circular que emite. Gracias a los cálculos que se han realizado para el montaje del sistema óptico, se puede descartar este fenómeno como el causante de los errores que se aprecian en la figura.

Dejando de lado al láser, el tubo puede ser fuente de errores por si mismo. Esto es debido a que, como no podría ser de otra manera, está realizado con un material transparente,

concretamente de vidrio. Por ser un material que deja pasar la luz y que posee una forma curvada, éste actuará como una lente. Para evitar parcialmente este efecto, se llenó la cubeta donde va alojado el tubo con agua y así suavizar el salto de índice de refracción que experimentarían los rayos de luz. Pese a esta medida, puede que se siga produciendo el efecto conocido como “ojo de pez” lo que significaría que, en un mismo cuadrante del sensor CCD de la cámara, se están recogiendo los rayos provenientes de distintos planos del tubo.

En la Figura 5.11 se indican, dentro de una misma región, 2 partículas en movimiento (flechas verdes) y 2 que están quietas (rojas). Estas partículas quietas son las que han causado el error en el cómputo del caudal experimental. La principal razón por la que aparecen partículas inmóviles en las imágenes es que, debido a una combinación de los errores citados anteriormente, se están iluminando partículas pegadas a la pared pero que corresponden a otro plano distinto al que se está estudiando, en definitiva, que no deberían aparecer en la imagen. Esto explica por qué el mayor error se produce en una zona entre el centro y la pared ya que, en el caso de estar cerca del centro, las paredes en otros planos están muy alejadas del plano láser por lo que no son iluminadas mientras que en el caso de estar cerca de las paredes, lo esperado será que todas las partículas se encuentren quietas o con una velocidad muy baja. Con todo esto, se puede dar por finalizada la comparativa de resultados y proceder a la siguiente sección donde se resumirá todo lo expuesto a lo largo de este trabajo y se dará por concluido al mismo.

### 5.3.1. Resultados cuando se ajusta el caudal teórico al experimental

En esta sección vamos a dar los resultados que se producen cuando el caudal teórico, en lugar de ajustarse a 1mL/s como se estipuló en bomba, se ajusta al caudal que se está obteniendo experimentalmente. Estudiamos esta posibilidad ya que otra hipótesis para el error es que, por motivos relacionados con los tubos que conectan el tubo de vidrio con la bomba, el caudal que ésta está imponiendo no es igual a 1mL/s como se pretendía. Estimamos que la flexibilidad de estos tubos conectores así como su longitud, puede estar causando ese caudal inferior al esperado.

Queremos averiguar cómo se ajustan los perfiles teóricos a los experimentales en el caso de que el caudal que obtenemos de los datos experimentales sea el que efectivamente está saliendo de la bomba. La forma de hacer esto es sencilla, tan sólo consiste en un re-cálculo de la amplitud del gradiente de presión teniendo como dato que el caudal pico experimental es de (aproximadamente) 0.56mL/s. Previamente vimos que  $Q = 0,005796A$  por tanto, para los resultados que se van a mostrar aquí,  $A = 96,62$ . Con esto, se puede representar la Figura 5.12. Sorprendentemente, la región intermedia que presentaba el mayor error en los resultados presentados anteriormente ahora se ajusta de una manera bastante precisa. En contrapartida, hemos perdido ajuste al máximo de velocidad que presentaban los perfiles en el centro.

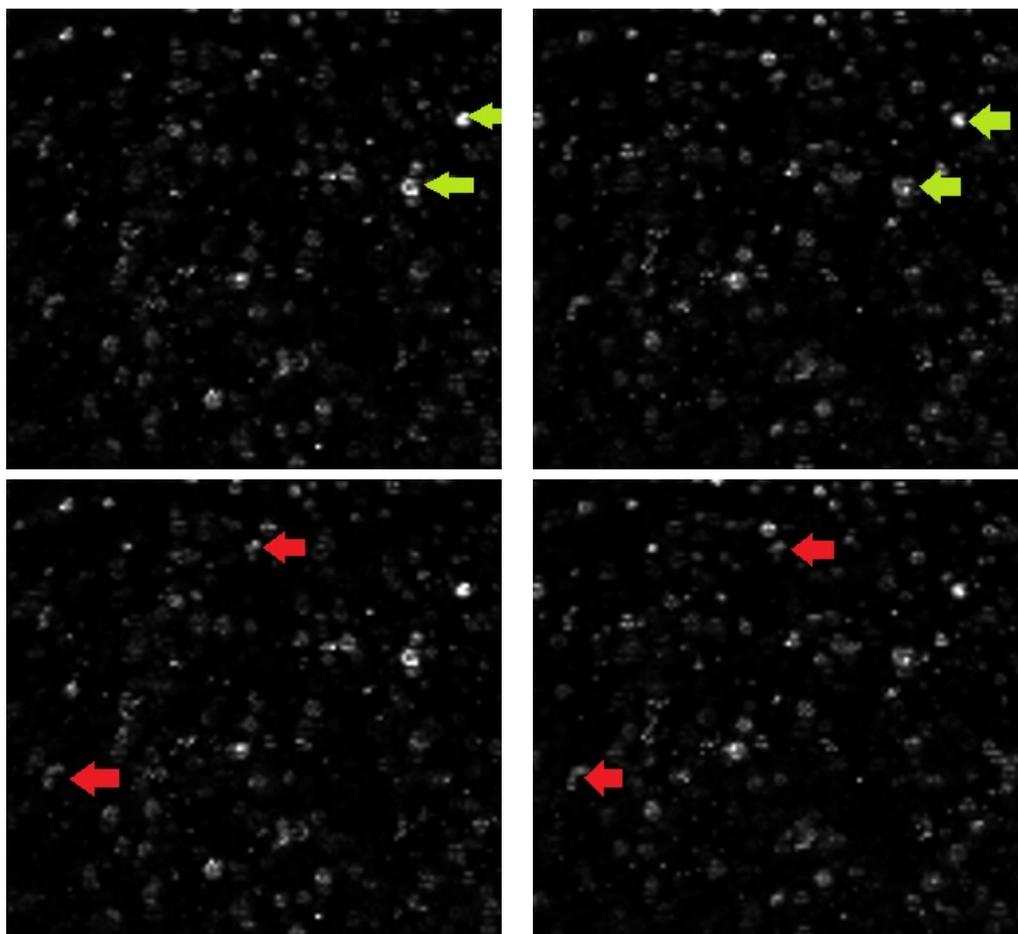


Figura 5.11: Imágenes tomadas en tiempos distintos para una misma región donde se aprecian partículas moviéndose (flechas verdes) y quietas (flechas rojas) que provocan el error de las medidas experimentales.

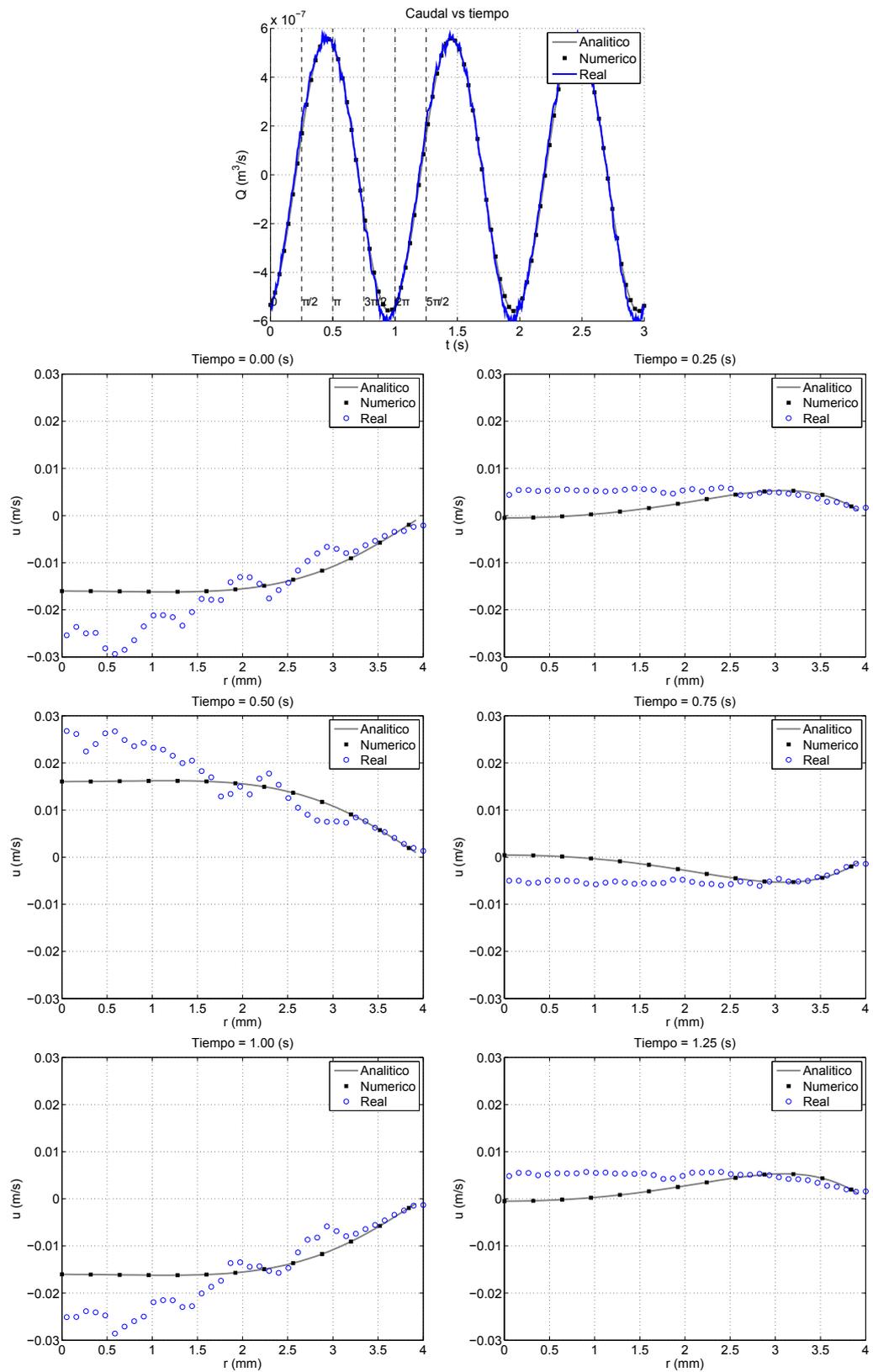


Figura 5.12: Perfiles de velocidades numérico, analítico y real para distintos tiempos. La gráfica de arriba se adjunta para ilustrar en qué tiempos han sido representados los perfiles. Nota: Los resultados fueron sincronizados en fase utilizando como referencia el máximo en los caudales de las 3 curvas.

## Capítulo 6

# Conclusión

Para dar un último repaso a todo el trabajo que se ha realizado, seguiremos el orden con el que éste ha sido detallado.

En primer lugar, se establecieron los objetivos del proyecto, los cuales se centraban en la repetición de los estudios efectuados por J. R. Womersley y que fueron publicados en el año 1954. Este artículo tenía como objetivo la explicación científica de por qué se producen, en arterias grandes, unos flujos reversos en la circulación de la sangre. Además, también se vió que se producía un retraso en fase entre el gradiente de presión y el caudal, similar al de la corriente y voltaje en circuitos. El objetivo fue entonces el de corroborar la aparición del flujo reverso mediante técnicas experimentales contando con un trabajo teórico previo de las soluciones descritas por Womersley.

La reproducción del experimento requirió de ciertas decisiones en la compra de material que además debían estar condicionadas al equipamiento ya existente en el laboratorio. El criterio para esta adquisición fue el de establecer un experimento tal que, en su conjunto, reprodujese un número de Womersley que pueda ser factible en el interior de una arteria. No obstante, el objetivo no fue el de reproducir el flujo arterial de una manera exacta ya que eso requeriría de un gradiente de presiones complejo. Como en cualquier caso éste último puede ser expresado en términos de soluciones sinusoidales, es conveniente hayar la solución analítica del problema cuando este gradiente tan sólo contiene un término sinusoidal; haciendo la labor más sencilla pero igualmente válida.

Sin embargo, resultaba de interés reproducir este tipo de flujo ya que el contar con una solución exacta del problema abre la opción de poder comprobar el correcto comportamiento de la solución numérica (mediante la cual sí que se pueden reproducir gradientes de presión con formas complejas) además de hacer una estimación del error que hemos obtenido en los datos obtenidos desde el laboratorio.

Desafortunadamente, como se ha podido ver, los datos del laboratorio no fueron todo lo bueno que nos hubiese gustado debido a errores de precisión en el montaje del laboratorio.

Una mayor precisión en las medidas no fue posible por falta de la misma en los elementos de posicionamiento, en especial aquellos donde el láser iba montado.

Pese a que los resultados son mejorables, en ellos sí que se puede apreciar el comportamiento periódico del sistema y cómo, en el centro del tubo sobre todo, los perfiles de velocidades teóricos y empíricos guardan una innegable relación. Por otro lado, el flujo reverso no ha podido ser captado con detalle debido a que los errores aparecen en la zona donde se produce.

Como colofón, y desde un punto de vista personal, quisiera acabar este trabajo haciendo hincapié en la gran formación académica que he recibido durante la realización del mismo. No sólo he podido repasar diversas asignaturas que he cursado a lo largo de la carrera, las cuales pertenecen a múltiples campos de la ingeniería, sino que he ampliado todo ese conocimiento adquirido además de ganar una valiosa experiencia investigadora que será de gran utilidad en mi futuro.

# Referencias

1. Womersley, John R. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *Journal Physiol*, vol. 127, 1955, p. 553-563.
2. Helps, E. P. W. y McDonald, D. A. Systolic backflow in the dog femoral artery. *Journal Physiol*, vol 122, 1953, p. 181-193.
3. Fung, Yuan-Cheng. *Biomechanics Motion, Flow and Growth*. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1990. 569 p. ISBN: 0387971246.
4. McKeon, Beverley J. Velocity, Vorticity and Mach Number. En: Tropea, Cameron, et al. *Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics*. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 2007. p. 215-471.
5. Willert, C. E. y Gharib, M. Digital particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, vol. 10, 1991, p.
6. Beam Shaping with Cylindrical Lenses [en línea] Irvine: Newport [Consulta: 28 mayo 2012]. Disponible en: <http://www.newport.com/Beam-Shaping-with-Cylindrical-Lenses/144888/1033/content.aspx>