

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA



APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS  
FINITOS EXTENDIDO A LA PROPAGACIÓN DE  
FISURAS EN VIGAS CILÍNDRICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

AUTOR: LUIS ALONSO SAN JOSÉ  
TUTORA: MARÍA BELÉN MUÑOZ ABELLA  
LEGANÉS, JUNIO DE 2015



# AGRADECIMIENTOS

*Quiero agradecer la realización del presente Trabajo a mi tutora, María Belén Muñoz Abella, cuya ayuda ha sido inestimable durante toda su realización.*

*A mis padres cuyos esfuerzos y sacrificios han hecho posible llegar hasta el punto en el que me encuentro.*

*Y por último a mi hermana que me ha apoyado y animado en todo momento.*



# RESUMEN

Las estructuras que se construyen en la actualidad son cada vez más complejas y exigentes. La seguridad de las mismas es un requisito fundamental, es por ello que el campo de la Mecánica de Fractura ha adquirido un papel fundamental en las últimas décadas a la hora del diseño. Las estructuras pueden estar sometidas a cargas estáticas o dinámicas y la capacidad de predecir el crecimiento de las fisuras en elementos como las vigas es fundamental para asegurar la seguridad durante la vida útil y para alargar esta última

Con la llegada de los métodos numéricos y su posterior desarrollo se han conseguido realizar grandes avances en este campo. Paulatinamente se han ido introduciendo nuevos métodos que permitieran realizar estudios cada vez más precisos de los mecanismos de fractura. Uno de los más útiles y que ha sido desarrollado recientemente es el conocido como Método de Elementos Finitos eXtendido o XFEM.

La principal ventaja que ofrece el XFEM es la posibilidad de estudiar el crecimiento de fisuras de un modo mucho más libre que el que permitía el Método de Elementos Finitos tradicional (MEF). Sin embargo, el XFEM también presenta desventajas, la más destacable es la complejidad tanto para alcanzar la convergencia en algunas ocasiones como por la necesidad de un conocimiento extenso de los mecanismos de fractura por parte del usuario.

En este Trabajo Fin de Grado se ha desarrollado un modelo numérico tridimensional mediante el XFEM y cuyo principal objetivo es cuantificar la dispersión en los resultados al utilizar diferentes tipos de mallado en condiciones cuasiestáticas. Es muy importante conocer la importancia relativa del mallado en los resultados para poder realizar análisis fiables que garanticen la seguridad adecuada de cualquier estructura. Con cada tipo de mallado se ha estudiado la propagación de fisuras en vigas cilíndricas en función del tamaño inicial de las mismas. Asimismo se proporciona un manual en el que se explican perfectamente las dos alternativas que ofrece el código Abaqus para este tipo de problemas: la de los modelos cohesivos CZM (que es la que se ha utilizado) y la que se basa en la Mecánica de Fractura Elástico-Lineal MFEL. Por último se han comparado los resultados obteniendo varias conclusiones esclarecedoras, sobre todo, en lo respectivo a la influencia del mallado.



# ABSTRACT

The structures which are built nowadays are more complicated and tough each time. The safety of them is an essential requirement, for this reason the field of the fracture mechanisms has got a vital role in the last decades, especially concerning in design aspects. The structures can be subdued to static or dynamic forces and the capacity of prediction about the growth of cracks in elements like beams is absolutely necessary to assure the security during the useful life as well as to extend this life.

Many progresses have been done in this area with the arrival of the numeric methods and their following development. Progressively new methods, which allow to do more accurate analysis of the fracture mechanisms, have been introduced. One of the most useful and which has been developed recently is the eXtended Method of Finite Element as known as XFEM.

The main advantage which XFEM offers is the possibility of studying the growth of cracks in a freer mode than the traditional Finite Element Method (FEM) allows. However, the XFEM presents disadvantages too, the most important of them is the complexity to reach the convergence in the equations occasionally enough to have a vast knowledge of the fracture mechanisms by the user.

Within this Project a 3D XFEM numeric model has been developed, the main objective is quantify the dispersion of the results when different kind of meshes are used in quasistatic conditions. The mesh shape and dimensions are important for the reliability of the analysis which must guarantee the suitable safety of any structure. With each kind of mesh the cracks propagation in beams has been studied in function of the initial depth of each crack. In addition, a manual in the Abaqus code is provided in which the two alternatives offered by Abaqus for this kind of problems are fully explained: the first one based on the Cohesive Zone Model (which is the used one) and the second one based on the Linear Elastic Fracture Mechanics. Finally, the obtained results have been discussed, leading to some clarifying conclusions, above everything, in the influence of the mesh.



# ÍNDICE

Agradecimientos.....	3
Resumen.....	5
Abstract.....	7
Índice.....	9
Índice de figuras.....	13
Índice de tablas.....	21
1 Introducción.....	23
1.1 Motivación.....	24
1.2 Objetivos.....	24
1.3 Organización del documento.....	25
2 Mecánica del daño.....	27
2.1 Mecánica de fractura.....	28
2.1.1 Mecánica de Fractura Elástico-Lineal.....	29
2.1.2 Mecánica de Fractura Elasto-Plástica.....	41
2.2 Modelos de Zona Cohesiva.....	44
2.2.1 Ley de Tracción-Separación.....	48
3 Fatiga.....	53
3.1 Antecedentes históricos.....	54
3.2 Ensayos de fatiga.....	55
3.2.1 Diagramas de fatiga: Curvas S-N.....	56
3.2.2 Factores correctores del límite a fatiga.....	59
3.3 Criterios para tensiones medias no nulas.....	67
3.4 Propagación de fisuras por fatiga. Ley de Paris.....	70
3.5 Métodos para la detección de microgrietas.....	72
3.6 Geometría de la fisura.....	73
4 FEM y XFEM.....	77
4.1 Método de los Elementos Finitos.....	78

4.1.1 Ideas básicas del MEF.....	78
4.1.2 Hipótesis de discretización.....	79
4.1.3 Aplicación a problemas estructurales de elasticidad tridimensional.....	80
4.2 Método de los Elementos Finitos Extendido.....	88
4.2.1 Funciones de enriquecimiento.....	90
4.2.2 Funciones de enriquecimiento de Heaviside.....	91
4.3 Modelización de fisuras en Abaqus mediante XFEM.....	93
4.3.1 Introducción a Abaqus.....	93
4.3.2 Definición e implementación de los enriquecimientos.....	98
4.3.3 Definición e implementación de los mecanismos de daño.....	106
4.3.4 Visualización de los resultados.....	137
5 Planteamiento del problema.....	141
5.1 Explicación del problema tratado.....	142
5.2 Mallado.....	143
5.2.1 Selección del mallado.....	146
6 Resultados y discusión.....	154
6.1 Análisis con cargas estáticas.....	155
6.1.1 Tamaño de fisura $\frac{a}{D} = 0.1$ .....	155
6.1.2 Tamaño de fisura $\frac{a}{D} = 0.2$ .....	161
6.1.3 Tamaño de fisura $\frac{a}{D} = 0.3$ .....	165
6.1.4 Tamaño de fisura $\frac{a}{D} = 0.4$ .....	169
6.1.5 Tamaño de fisura $\frac{a}{D} = 0.5$ .....	174
6.2 Análisis con cargas alternantes.....	178
6.2.1 Tamaño de fisura $\frac{a}{D} = 0.4$ .....	179
6.2.2 Tamaño de fisura $\frac{a}{D} = 0.5$ .....	183
6.3 Discusión de resultados.....	187
7 Planificación y presupuesto.....	193
7.1 Planificación.....	194
7.2 Presupuesto.....	196

7.2.1 Amortización de equipos y licencias de software.....	196
7.2.2 Honorarios de personal.....	197
8 Conclusiones y desarrollos futuros.....	199
8.1 Conclusiones.....	200
8.2 Desarrollos futuros.....	201
Bibliografía.....	203



# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Rotura del Petrolero Schenectady (4).....	28
Figura 2.2: Agujero elíptico de una placa plana (4).....	30
Figura 2.3: Definición del sistema de coordenadas en el extremo de la fisura (4).....	33
Figura 2.4: Modos básicos de fractura: Modo I (apertura), Modo II (cortadura), Modo III (cizalladura) (4).....	33
Figura 2.5: Distribución de tensiones en el frente de grieta junto con la solución singular en el origen (4).....	36
Figura 2.6: Primera aproximación del tamaño de la zona plástica en las cercanías del frente de grieta (4).....	38
Figura 2.7: Diagramas esquemáticos de las curvas de la fuerza motriz $G$ y de la tenacidad $R$ para dos materiales con comportamientos diferentes (4).....	40
Figura 2.8: Embotamiento del frente de grieta en un material dúctil (4).....	42
Figura 2.9: Curva de diseño basada en el $CTOD$ (4).....	43
Figura 2.10: Representación esquemática de la curva tensión-deformación de un material con comportamiento lineal y otro no lineal (4).....	44
Figura 2.11: Representación esquemática del comportamiento del material, comportamiento en la zona de fractura y criterio de localización (8).....	46
Figura 2.12: División de la grieta en real y ficticia y valores de tensión en las proximidades del frente de grieta (69).....	47
Figura 2.13: Representación de las dos partes de la grieta a escala atómica (69).....	47
Figura 2.14: Leyes de tracción-separación disponibles en el programa Abaqus (69).....	48
Figura 2.15: Gráfica Tracción-Separación indicando las etapas de la evolución del daño y otros parámetros característicos (8).....	49
Figura 2.16: Modelos de Tracción-Separación (a) polinómico de grado 3, (b) trapezoidal, (c) trapezoidal suavizado, (d) exponencial, (e) lineal, (f) bilineal (13) (69).....	50
Figura 2.17: Representación de las ecuaciones 2.31 y 2.32 adimensionalizadas (69).....	51
Figura 3.1: Máquina de Moore para ensayos de probeta rotatoria.....	55
Figura 3.2: Tensión cíclica alternante (tensión media nula).....	55
Figura 3.3: Representación aproximada de la curva S-N de un material con límite a fatiga (24)...	57
Figura 3.4: Representación de dos materiales con y sin límite a fatiga (69).....	58

Figura 3.5: Factor de acabado superficial en función del mismo y de la resistencia última del acero o su dureza (19).....	60
Figura 3.6: Sensibilidad a las ranuras para cargas de flexión y axiales alternantes (22).....	64
Figura 3.7: Sensibilidad a las ranuras para cargas de torsión alternantes (22).....	64
Figura 3.8: Factor $K_t$ para esfuerzo axial en eje con entalla (22).....	65
Figura 3.9: Factor $K_t$ para esfuerzo de torsión en eje agujereado (22).....	65
Figura 3.10: Comparación de la curva S-N inicial (negra) y la obtenida al aplicarle los coeficientes de Marin (azul).....	67
Figura 3.11: Tensión cíclica alternante con tensión media no nula (24).....	68
Figura 3.12: Criterios para el fallo por fatiga con tensiones medias no nulas para N ciclos (24)...	69
Figura 3.13: Rotura en un eje de transmisión (24).....	70
Figura 3.14: Representación gráfica de la evolución de la fisura en función de la velocidad de propagación de la misma (4).....	72
Figura 3.15: Representación de los parámetros geométricos de una fisura de frente semi-elíptico y de su sección correspondiente (70).....	74
Figura 3.16: Esquemas de la fisura completamente cerrada y completamente abierta (70).....	75
Figura 4.1: Representación de las fuerzas que actúan sobre un elemento, exteriores y puntuales (rojo) e interiores (azul) (8).....	86
Figura 4.2: Adaptación de la malla a la topología de la fisura.....	89
Figura 4.3: Comparación entre la fisura en una malla estructurada (izquierda) y una no estructurada (derecha) (53).....	89
Figura 4.4: Representación en XFEM de la grieta y el elemento fisurado por separado (54).....	90
Figura 4.5: Enriquecimiento de los nodos del elemento en que se encuentra el frente de grieta (69).....	91
Figura 4.6: Enriquecimientos de Heaviside (nodos en azul) de los elementos alejados del frente de grieta (69).....	92
Figura 4.7: Menú principal de Abaqus/CAE (69).....	94
Figura 4.8: Esquema general del funcionamiento interno de Abaqus (69).....	95
Figura 4.9: Módulos de la GUI en Abaqus/CAE.....	96
Figura 4.10: Funcionamiento de los nodos fantasma al propagarse la grieta de un elemento (59).....	99
Figura 4.11: Creación del enriquecimiento en el <i>Módulo Interaction</i> .....	100
Figura 4.12: Asignación de un nombre para identificar el enriquecimiento.....	101

Figura 4.13: Grieta estacionaria.....	102
Figura 4.14: Grieta móvil.....	103
Figura 4.15: Selección del dominio susceptible de ser afectado por la grieta en su propagación.....	103
Figura 4.16: Especificación de las propiedades en el contacto.....	105
Figura 4.17: Selección del dominio que constituye la grieta.....	105
Figura 4.18: Detalle del <i>Módulo Property. Create Material y Material Manager</i> (69).....	107
Figura 4.19: Detalle del <i>Material editor</i> . Selección de un material elástico.....	107
Figura 4.20: Parámetros necesarios para especificar el comportamiento de un material elástico isótropo.....	108
Figura 4.21: Selección del criterio de inicio del daño basándose en la TSL.....	109
Figura 4.22: Parámetros necesarios en el caso de seleccionar Maxe Damage o Quade Damage como criterios de inicio de daño.....	110
Figura 4.23: Parámetros necesarios en el caso de seleccionar Maxs Damage o Quads Damage como criterios de inicio del daño.....	111
Figura 4.24: Parámetros necesarios en el caso de seleccionar Maxpe Damage como criterio de inicio del daño.....	112
Figura 4.25: Parámetros necesarios en el caso de seleccionar Maxps Damage como criterio de inicio del daño.....	113
Figura 4.26: Detalle <i>Edit Material</i> : selección de la dirección de propagación de la fisura en el caso de seleccionar Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage o Maxs Damage como criterios de inicio del daño.....	114
Figura 4.27: Curva Tracción-Separación para un material con comportamiento lineal en la evolución del daño (8).....	115
Figura 4.28: Detalle del <i>Material editor</i> para seleccionar la evolución del daño tras haber seleccionado uno de los criterios del inicio del mismo.....	116
Figura 4.29: Definición de la evolución del daño basado en el desplazamiento efectivo.....	117
Figura 4.30: Selección del tipo de evolución del daño: linear, exponencial o tabular.....	118
Figura 4.31: Evolución exponencial del daño de una gráfica Tracción-Separación (8).....	119
Figura 4.32: Parámetros necesarios para la caracterización de la evolución exponencial del daño.....	120
Figura 4.33: Parámetros necesarios para la definición de una evolución tabular del daño.....	120
Figura 4.34: Tipos de comportamiento en modo mixto basado en desplazamientos.....	121

Figura 4.35: Parámetros necesarios para una descripción tabular del modo mixto de fractura.....	122
Figura 4.36: Definición de la evolución del daño basado en energías.....	122
Figura 4.37: Tipos de comportamiento en modo mixto basado en energías.....	124
Figura 4.38: Parámetros necesarios para definir el comportamiento en modo mixto de acuerdo a la Ley de Potencias.....	126
Figura 4.39: Introducción del exponente de la Ley de Potencias.....	126
Figura 4.40: Definición del índice de modo mixto en términos de energía o de tracciones.....	128
Figura 4.41: Coeficiente de amortiguación viscosa para facilitar la convergencia de las ecuaciones.....	130
Figura 4.42: Detalle ventana <i>Edit Crack. Creation Property Interaction</i> .....	130
Figura 4.43: Detalle del <i>Módulo Interaction. Creation Property Interaction y Property Interaction Manager (69)</i> .....	131
Figura 4.44: Detalla ventana <i>Edit Contact Property</i> . Seleccionar criterio de fractura.....	132
Figura 4.45: Parámetros necesarios para definir el criterio de fractura mediante XFEM basado en la MFEL y utilizando la VCCT.....	133
Figura 4.46: Selección de la dirección de crecimiento de la grieta.....	134
Figura 4.47: Selección del comportamiento en modo mixto de fractura.....	134
Figura 4.48: Parámetros necesarios para definir el comportamiento en modo mixto según la Ley de Benzeggagh-Kenane.....	135
Figura 4.49: Parámetros necesarios para definir el comportamiento en modo mixto según la Ley de Potencias.....	136
Figura 4.50: Parámetros necesarios para definir el comportamiento en modo mixto según la Ley de Reeder.....	136
Figura 4.51: Selección PHILSM en la ventana <i>Edit Field Output Request</i> .....	138
Figura 4.52: Detalle <i>Edit Field Output Request</i> . Selección STATUSXFEM.....	139
Figura 5.1: Iconos más útiles del <i>Módulo Mesh</i> .....	143
Figura 5.2: Asignación de las semillas para el mallado global por tamaño del elemento.....	144
Figura 5.3: Selección del mallado de forma local.....	145
Figura 5.4: Sembrado de las semillas de la malla para la línea roja.....	145
Figura 5.5: Selección de la forma de los elementos que se crearán en el elemento en rojo.....	146
Figura 5.6: Asignación de las semillas para el mallado en la dirección longitudinal en las zonas alejadas de la fisura.....	147

Figura 5.7: Asignación de las semillas para el mallado en la dirección longitudinal en la fisura.....	148
Figura 5.8: Mallado final lejos de la fisura.....	148
Figura 5.9: Mallado final en la fisura.....	149
Figura 5.10: Tamaños de malla, en amarillo 0.5 mm y en rojo 1 mm.....	150
Figura 5.11: Mallado final 1 en la sección transversal.....	150
Figura 5.12: Tamaño de malla, en rojo 0.35 mm.....	151
Figura 5.13: Mallado final 2 en la sección transversal.....	152
Figura 6.1: Leyendas de izquierda a derecha: PHILSM, STATUSXFEM y S33 en Pascales.....	156
Figura 6.2: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.1$ incremento 1.....	156
Figura 6.3: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.1$ incremento 2.....	157
Figura 6.4: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.1$ incremento 3.....	157
Figura 6.5: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.1$ incremento 4.....	158
Figura 6.6: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.1$ incremento 5.....	158
Figura 6.7: Vista interior de la sección fisurada para fisura $\frac{a}{b} = 0.1$ para el mallado 1.....	159
Figura 6.8: Vista interior de la sección fisurada para fisura $\frac{a}{b} = 0.1$ para el mallado 2.....	160
Figura 6.9: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.2$ incremento 1.....	161
Figura 6.10: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.2$ incremento 2.....	161
Figura 6.11: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.2$ incremento 3.....	162
Figura 6.12: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.2$ incremento 4.....	162
Figura 6.13: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.2$ incremento 5.....	163
Figura 6.14: Vista interior de la sección fisurada para fisura $\frac{a}{b} = 0.2$ para el mallado 1.....	164
Figura 6.15: Vista interior de la sección fisurada para fisura $\frac{a}{b} = 0.2$ para el mallado 2.....	164
Figura 6.16: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.3$ incremento 1.....	165
Figura 6.17: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.3$ incremento 2.....	165
Figura 6.18: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.3$ incremento 3.....	166
Figura 6.19: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.3$ incremento 4.....	166

Figura 6.20: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.3$  incremento 5.....167

Figura 6.21: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.3$  para el mallado 1.....168

Figura 6.22: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.3$  para el mallado 2.....168

Figura 6.23: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 1.....169

Figura 6.24: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 2.....170

Figura 6.25: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 3.....170

Figura 6.26: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 4.....171

Figura 6.27: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 5.....171

Figura 6.28: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  para el mallado 1.....172

Figura 6.29: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  para el mallado 2.....173

Figura 6.30: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 1.....174

Figura 6.31: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 2.....174

Figura 6.32: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 3.....175

Figura 6.33: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 4.....175

Figura 6.34: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 5.....176

Figura 6.35: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  para el mallado 1.....177

Figura 6.36: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  para el mallado 2.....177

Figura 6.37: Leyendas de izquierda a derecha: PHILSM, STATUSXFEM y S33 en Pascales par cargas alternantes.....178

Figura 6.38: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 1.....179

Figura 6.39: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 2.....179

Figura 6.40: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 3.....180

Figura 6.41: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 4.....180

Figura 6.42: Vista interior de la sección fisurada para cargas alternantes para fisura $\frac{a}{b} = 0.4$ para el mallado 1.....	181
Figura 6.43: Vista interior de la sección fisurada para cargas alternantes para fisura $\frac{a}{b} = 0.4$ para el mallado 2.....	182
Figura 6.44: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.5$ incremento 1.....	183
Figura 6.45: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.5$ incremento 2.....	183
Figura 6.46: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.5$ incremento 3.....	184
Figura 6.47: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura $\frac{a}{b} = 0.5$ incremento 4.....	184
Figura 6.48: Vista interior de la sección fisurada para cargas alternantes para fisura $\frac{a}{b} = 0.5$ para el mallado 1.....	185
Figura 6.49: Vista interior de la sección fisurada para cargas alternantes para fisura $\frac{a}{b} = 0.5$ para el mallado 2.....	186
Figura 6.50: Posiciones de fisura cerrada (arriba) y abierta (abajo) (69).....	186
Figura 6.51: Detalle de los dos tipos de mallado en la zona central de la sección transversal...188	188
Figura 6.52: Detalle de los dos tipos de mallado en la parte superior de la sección transversal.....	189
Figura 6.53: Advertencias ante el tamaño de los elementos en el <i>Módulo Job</i> .....	190
Figura 7.1: Diagrama de Gantt del proyecto.....	195



# ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1.....	60
Tabla 3.2.....	62
Tabla 3.3.....	74
Tabla 4.1.....	98
Tabla 7.1.....	196
Tabla 7.2.....	197
Tabla 7.3.....	197



# 1

# INTRODUCCIÓN

## 1.1 Motivación

A lo largo de la historia el ser humano ha construido estructuras para protegerse y facilitar su existencia, desde las casas construidas por los egipcios a base de adobe y barro hasta los puentes más espectaculares de la ingeniería moderna como el de San Francisco. Las vigas son un elemento fundamental en la construcción de estructuras ya que son las que soportan el peso de esta, por ello es fundamental asegurar su integridad. El conocimiento del comportamiento de las vigas ante la aplicación de cargas y momentos es amplio y una de las mayores líneas de investigación que está abierta desde el siglo pasado es el comportamiento de estas cuando presentan algún defecto en su geometría como es el caso de las fisuras.

Predecir el comportamiento de vigas bajo estas condiciones es fundamental para evitar errores catastróficos que pueden causar importantes pérdidas económicas como la interrupción del suministro de energía si se derrumba una central eléctrica. Se pueden reducir notablemente estos costes mediante el análisis y el mantenimiento preventivo de las estructuras necesarias en el momento adecuado. Sin embargo cuando se habla de pérdidas humanas es inadmisibles correr cualquier riesgo. Por ejemplo, si no se revisan las estructuras pertinentes se pueden producir fallos irreparables como el derrumbamiento de un edificio lleno de personas o el de un puente por el que están circulando vehículos. Por lo tanto existe un interés práctico del comportamiento y desarrollo de fisuras en elemento mecánicos y en particular en vigas.

El presente Trabajo se incluye en esta línea de investigación centrada en el estudio y detección de fisuras en vigas cilíndricas así como de la influencia del mallado en los resultados. Se busca introducir una aproximación del estudio de este fenómeno mediante herramientas de análisis por el Método de los Elementos Finitos (MEF). Para ello se va a utilizar una herramienta idónea como es el XFEM a la vez de introducirlo como un método útil en futuros desarrollos relacionados con la propagación de fisuras.

## 1.2 Objetivos

El principal objetivo del presente Trabajo es estudiar la influencia del tipo de malla en el inicio y propagación de fisuras en vigas cilíndricas en condiciones cuasiestáticas mediante el Método de los Elementos Finitos eXtendido (XFEM). Para conseguirlo se implementarán diferentes modelos numéricos en tres dimensiones parametrizado mediante el código comercial Abaqus/Standard por ser el más conocido por el autor.

Para poder alcanzar el objetivo principal es necesario pasar por diferentes pasos intermedios que también se consideran objetivos y están expuestos a continuación:

- ❖ Realizar una vasta revisión bibliográfica de todas las materias relacionadas con el Proyecto (Mecánica de la Fractura, fenómeno de la fatiga, Método de los Elementos Finitos eXtendido XFEM e influencia de los tipos de mallado). Este paso es fundamental ya que todo

este Trabajo se cimentará sobre estos conceptos, por lo tanto es muy importante conocer en profundidad estos temas.

- ❖ Estudiar la propagación de una fisura en una viga cilíndrica mediante el XFEM. Se utilizarán diferentes profundidades de la misma así como diferentes mallados.
- ❖ Conocer alternativas que ofrece el código Abaqus para este tipo de problemas: la de los modelos cohesivos CZM y la que se basa en la Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal MFEL. Para los modelos que se van a estudiar al ser el aluminio el material utilizado se va a elegir los CZM por los motivos explicados en el Capítulo 2, pero es básico conocer las dos alternativas para futuros trabajos en los que se utilicen otro tipo de materiales.

## 1.3 Organización del documento

El documento está dividido en 8 capítulos, el primero de ellos corresponde con la presente introducción.

El segundo capítulo contiene los aspectos más importantes de la Mecánica de la Fractura con la consiguiente presentación de las dos corrientes principales: la Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal (MFEL) y los Modelos Cohesivos (CZM).

En el tercer capítulo se trata el fenómeno de la fatiga, especialmente la propagación de fisuras en elementos sometidos a fatiga.

El cuarto capítulo contiene un detallado manual de las alternativas del XFEM en el código comercial Abaqus. Además se explican los aspectos teóricos del FEM y su comparación con el XFEM.

En el quinto capítulo se explica la importancia del mallado y su influencia en los resultados obtenidos así como los diferentes tipos de malla que se han utilizado.

En el sexto capítulo se explican los resultados obtenidos del análisis numérico para cada caso. Posteriormente se comparan los resultados con los proporcionados por la bibliografía.

El séptimo capítulo está dedicado a la planificación del Trabajo con todos sus costes y tareas proporcionando un presupuesto final.

Para finalizar, se incluye un último capítulo, el octavo, donde se exponen las conclusiones obtenidas además de la proposición de alternativas para desarrollos futuros.



2

# MECÁNICA DEL DAÑO

## 2.1 Mecánica de Fractura

La mecánica de fractura es la ciencia que estudia los mecanismos y procesos de propagación de fisuras en sólidos o en materiales con otro tipo de discontinuidades así como su campo tensión-deformación ante una carga externa.

Esta disciplina nació a principios del siglo XX y ha sufrido un espectacular desarrollo hasta nuestros días debido a la necesidad cada vez mayor de maximizar la vida de los componentes de las máquinas. La mecánica de fractura analiza la estabilidad de los elementos sometidos a cargas externas en presencia de defectos que son concentradores de tensiones. El estudio del origen y la propagación de estos defectos es de vital importancia para saber cuándo hay que cambiar un componente antes de que se produzca el fallo. También es interesante para poder establecer unos coeficientes de seguridad adecuados que aseguren la integridad del elemento así como adecuar los procesos de fabricación para minimizar los defectos que se producen en esta etapa.

A pesar de la escasa longevidad de esta ciencia, el problema de la fractura de elementos ya existía desde la antigüedad. El mismo Julio César en el segundo libro *“La Guerra de las Galias”* abordaba el diseño de estructuras para evitar la fractura de las fortificaciones. Los arquitectos de los Faraones del Antiguo Egipto también ideaban diseños para evitar la fractura en sus incontables estructuras. Incluso en la Vieja Europa hay muchas puentes y edificios construidos durante el Renacimiento que aguantan en perfectas condiciones. Los problemas que se han producido en la sociedad son consecuencia de la fragilidad de los materiales y datan de principios del Siglo XIX cuando empezaron a aparecer las estructuras soldadas con un aumento espectacular de los accidentes.

El problema de la fractura frágil se hizo especialmente notable con la llegada de la Segunda Guerra Mundial poniendo a prueba a la profesión ingenieril. Los astilleros americanos adoptaron una técnica de fabricación mucho más rápida que la utilizada anteriormente bajo la dirección de Henry Kaiser, un famoso ingeniero de la época. Los cascos se empezaron a fabricar enteramente soldados para intentar evitar problemas como los de la Figura 2.1.



Figura 2.1: Rotura del Petrolero Schenectady (4)

Los primeros estudios que se iniciaron con esta ciencia estaban principalmente focalizados para el estudio de materiales frágiles, es decir, materiales en los que no se producía prácticamente deformación antes de la rotura. Esta rama se conoce como Mecánica de Fractura Elástico-Lineal. Sin embargo, el crecimiento exponencial de la utilización de los metales en la industria provocó el desarrollo de teorías como la Mecánica de Fractura Elasto-Plástica en la que se tienen en cuenta materiales dúctiles que presentan una clara deformación plástica antes de producirse el fallo por rotura.

Se van a analizar en detalle estas dos teorías en los siguientes apartados.

### 2.1.1 Mecánica de Fractura Elástico-Lineal

Los conceptos de Mecánica de Fractura que fueron establecidos anteriormente a 1960 solo pueden ser aplicados a materiales que cumplen rigurosamente la Ley de Hooke. Se introdujeron correcciones a principios de 1948, incluyendo entre otros aspectos la plasticidad a pequeña escala, pero los análisis seguían estando restringidos a estructuras que siguen un comportamiento elástico-lineal.

En las décadas posteriores la Mecánica de Fractura se siguió desarrollando teniendo en cuenta otros tipos de comportamiento que no seguían la Ley de Hooke (no lineales) como la plasticidad, viscoplasticidad y viscoelasticidad además de los efectos dinámicos. No obstante, todos estos resultados derivan de una teoría principal denominada Mecánica de Fractura Elástico-Lineal (MFEL), por lo tanto es fundamental comprender esta teoría para profundizar en conceptos más avanzados. Esta teoría se utiliza principalmente en materiales frágiles que presentan fisuras agudas.

Hasta 1913 se conocía que la concentración de tensiones en las grietas de los materiales era un factor importante para que el material se rompiera. Pero fue en esta fecha cuando por primera vez Inglis (1) consiguió cuantificar este efecto de forma matemática a través del estudio de una placa plana con un agujero elíptico al que se le aplica una tensión perpendicular al eje mayor de la elipse. Se asume por el Principio de Saint-Venant<sup>1</sup> que el agujero no está influenciado por las dimensiones de la placa.

---

<sup>1</sup> El Principio de Saint-Venant establece que la diferencia entre los efectos de dos sistemas de cargas estáticamente equivalentes se hace muy pequeña a distancias suficientemente grandes del punto de aplicación de dichas cargas.

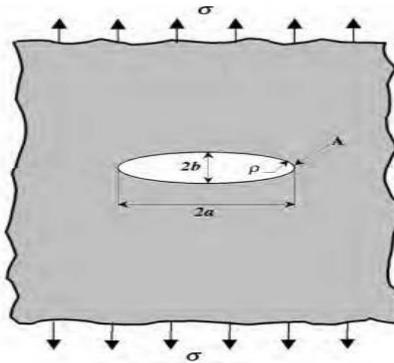


Figura 2.2: Agujero elíptico de una placa plana (4)

Al factor  $k_t = \frac{\sigma_A}{\sigma}$  se le conoce como factor de concentración de tensiones.

Para estas grietas agudas Inglis (1) descubrió la siguiente ecuación para la tensión en el punto **A**:

$$\sigma_A = \sigma \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right)$$

2.1

Donde se define el parámetro  $\rho$  como el radio de curvatura  $\rho = \frac{b^2}{a}$ , con lo cual cuando las grietas son muy agudas y se cumple  $a \gg b$  la ecuación de Inglis (1) se puede expresar como:

$$\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

2.2

Sin embargo, la teoría desarrollada por Inglis (1) basada en la concentración de tensiones presenta un claro problema. Como se puede apreciar a simple vista si el radio de curvatura es tan pequeño tal que  $\rho \rightarrow 0$  existe una clara incongruencia matemática ya que esto daría lugar a tensiones infinitas en el punto **A**. Este hecho no tiene sentido ya que no existe ningún material que pueda soportar tensiones infinitas. Parecía que este hecho invalidaba por lo menos parcialmente la teoría de Inglis (1), por lo tanto Griffith (2) empezó a desarrollar una teoría de fractura basada en la energía en vez de en la concentración de tensiones.

Griffith (2) hizo uso del primer Principio de la Termodinámica<sup>2</sup> para establecer en 1923 la teoría inicial en la que se sustenta la Mecánica de la Fractura. En palabras de Griffith (2): “*Se puede formar una grieta (o una grieta existente puede crecer) solamente si el proceso origina una disminución de la energía total o esta permanece constante*”

Griffith (2) establece que para una grieta aumente de tamaño y se produzca la fractura, la energía requerida, que a su vez se corresponde por la suma del trabajo desarrollado por la tensión aplicada y la energía elástica liberada al extenderse la grieta, puede ser suministrada por el sistema. Trabajando con estas hipótesis y basándose en sus ensayos con probetas de vidrio, Griffith (2) estableció que la tensión de rotura de un sólido agrietado era la siguiente:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}$$

2.3

Donde  $E$  y  $\gamma_s$  representan el modulo de elasticidad y la energía superficial del material respectivamente.

La fuerza que adquirieron las hipótesis de Griffith (2) se deben en gran parte a la concordancia que tenían estas con otros trabajos a nivel atómico en las que se calculan las fuerzas de rotura del enlace interatómico. Se necesita una fuerza mayor que la cohesiva para incrementar la distancia de separación de los átomos desde el punto de equilibrio produciéndose la rotura del enlace. Se realizaron análisis a escala atómica en 1970 con los que se llegó a una expresión para la tensión a la rotura muy parecida a la obtenida por Griffith (2) lo que demuestra la coherencia de su trabajo.

$$\sigma_f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E\gamma_s}{a}}$$

2.4

La ecuación de Griffith (2) es válida para materiales frágiles como vidrios o cerámicas, sin embargo, no predice bien la rotura para materiales metálicos. La energía real necesaria para que se produjera la rotura en estos materiales resultaba varios órdenes de magnitud mayor de la que precedía esta ecuación. Esto se debe a que en estos materiales se crea una zona plástica en los frentes de grieta debido a la concentración de tensiones de forma que para tener en cuenta los términos de deformación plástica se debe corregir su ecuación.

---

<sup>2</sup> El primer Principio de la Termodinámica establece que en cualquier sistema cerrado adiabático que sufre un cambio de estado el trabajo no depende del camino recorrido

En 1948 Irwin y Orowan (3) modificaron la expresión porque se percataron de que el movimiento de las dislocaciones en metales provocaba deformación plástica que había que tener en cuenta.

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}}$$

2.5

Donde  $\gamma_p$  es el trabajo plástico por unidad de área que suele ser bastante grande en comparación con  $\gamma_s$ , el trabajo que se produce al romper enlaces interatómicos por unidad de área.

Para poder utilizar estas ecuaciones, tanto la original de Griffith (2) como la modificada hay que asumir la hipótesis de que no existen defectos no lineales como la plasticidad excepto estrictamente en la región de la fisura. Los modelos no son válidos si no se cumplen estas premisas.

En 1956 Irwin (3) propuso una solución a las limitaciones que presentaban las teorías anteriores introduciendo el concepto de tasa de liberación de energía  $G$ . Esta solución se basa en un balance de energía disponible y energía requerida para la propagación.  $G$  es la medida de la energía disponible para la propagación de un elemento diferencial de grieta  $da$ . En los siguientes apartados se ampliarán estos conceptos.

### 2.1.1.1 Planteamiento local de la fractura

La Mecánica de Fractura se basa en suponer que el fenómeno de la fractura ocurre solo en una zona próxima a la fisura. Por el Principio de Saint-Venant se puede considerar que el resto del sólido mantiene un comportamiento elástico lineal como si la grieta no existiera. Se puede simplificar el problema a un caso plano para hacer uso de las ecuaciones de elasticidad para obtener el estado tensional de un elemento diferencial justo en el borde de la grieta en coordenadas polares (ver Figura 2.3).

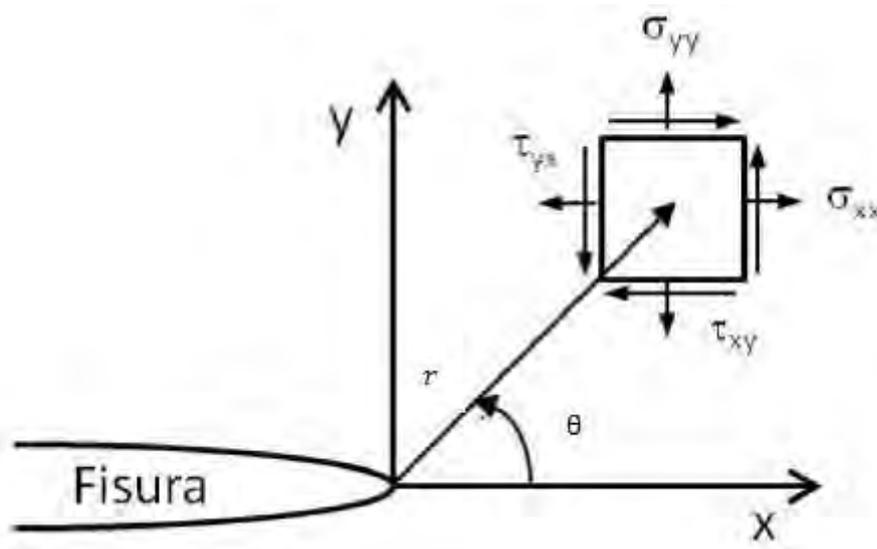


Figura 2.3: Definición del sistema de coordenadas en el extremo de la fisura (4)

Según la dirección de la carga y del desplazamiento de la fisura, los modos de fractura se pueden clasificar en (ver Figura 2.4):

- 1) Apertura: El plano en el que se produce la fisura es el plano de simetría de las tensiones de los labios de la fisura, que también son normales a dicho plano. Los desplazamientos son perpendiculares a la fisura.
- 2) Cortadura: La dirección de propagación es la dirección de la tensión. Tanto las tensiones como los desplazamientos de los labios de la fisura pertenecen al plano de la misma.
- 3) Cizalladura: Las tensiones y desplazamientos de los labios de la fisura pertenecen al plano de la misma, sin embargo, la dirección de propagación es perpendicular a la sollicitación mecánica. Suelen producirse en barras con grietas que están sometidas a torsión.

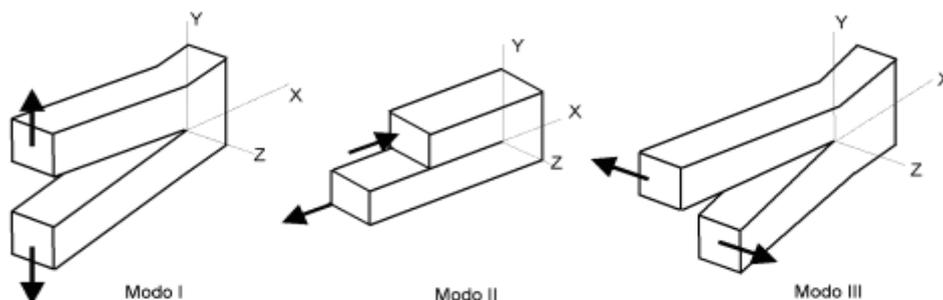


Figura 2.4: Modos básicos de fractura: Modo I (apertura), Modo II (cortadura), Modo III (cizalladura) (4)

Cabe señalar que estos tres modelos de propagación se pueden apreciar individualmente (modos puros) o de forma combinada (modos mixtos). Cualquier modelo de carga y de propagación se puede obtener como superposición de estos tres modelos siendo el I el más usual.

Asumiendo la hipótesis de que los procesos de fractura tienen lugar exclusivamente en una pequeña zona alrededor de la fisura, el campo de tensiones y de desplazamientos de un sólido homogéneo, bidimensional e isótropo viene definido por el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT).

A partir de ahora toda la formulación está referida al modo de propagación I por ser el más frecuente.

$$\sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sigma_{ij}^I(\theta) \tag{2.6}$$

$$u_i^I = \frac{K_I}{2\nu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} u_i^I(\theta, \nu) \tag{2.7}$$

En estas expresiones  $\sigma_{ij}$  y  $u_{ij}$  son las componentes del tensor de tensiones y el tensor de deformaciones respectivamente referidos a un sistema de coordenadas móvil ( $\mathbf{x-y}$ ) centrado en el extremo de la fisura. Donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson del material,  $\theta$  y  $r$  son las coordenadas polares de un punto referidos al mismo sistema móvil,  $K_I$  es el Factor de Intensidad de Tensiones del Modo I y  $\sigma_{ij}^I$  y  $u_i^I$  son funciones que dependen de  $\theta$  y  $\nu$ .

Para poder determinar la distribución de tensiones en los alrededores de la punta de la grieta en una placa como la de la Figura 2.2, Irwin (3) en 1951 recurrió a la función de tensión de Airy ( $\psi$ ). Dicha función debía satisfacer simultáneamente las condiciones particulares de tensiones, deformaciones y ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos. Para la solución de la función de Airy se pueden usar varias funciones, como el agrietamiento es del tipo I Irwin (3) empleó las siguientes:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \tag{2.8}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad 2.9$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad 2.10$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xy} = 0 \quad 2.11$$

La componente  $\sigma_{zz}$  depende de si se considera un estado de tensión plana o si por el contrario se considera un estado de deformación plana.

Si el estado es de tensión plana, es decir, el espesor de la placa es mucho menor que sus otras dos dimensiones, las dos caras del sólido se encuentran libres de fuerzas y las fuerzas interiores por unidad de volumen y las aplicadas en el perímetro del sólido no dependen de  $z$  entonces:

$$\sigma_{zz} = 0 \quad 2.12$$

Si el estado es de deformación plana, es decir, las caras del sólido no sufren desplazamientos según  $z$ , las fuerzas interiores por unidad de volumen y las aplicadas en el perímetro del sólido no dependen de la coordenada  $z$ :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad 2.13$$

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad 2.14$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad 2.15$$

Siendo  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  el modulo de cortadura,  $\kappa = 3 - 4\nu$  si es un estado de deformación plana y  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  si es un estado de tensión plana.

Si hubiera tensiones del modelo II y III se podría hacer un análisis análogo al descrito anteriormente obteniendo por superposición la tensión total.

$$\sigma_{ij}^{TOTAL} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}$$

2.16

Si se representan  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{yy}$  para  $\theta = 0$  en el sistema de referencia descrito anteriormente se aprecia que ambas descienden cuando aumenta el radio y que  $\sigma_{yy} > \sigma_{xx}$ . Para  $r = 0$  hay un punto singular que no tiene sentido matemático pero que se puede interpretar como que al superar el límite elástico del material se produce plastificación en ese punto.

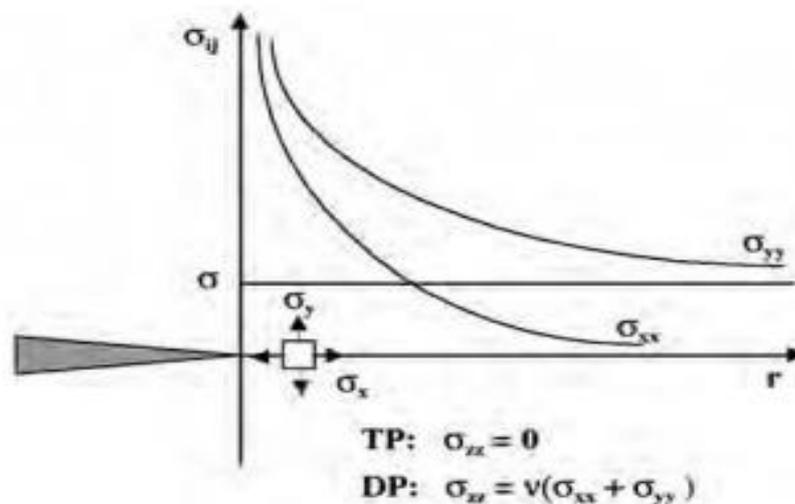


Figura 2.5: Distribución de tensiones en el frente de grieta junto con la solución singular en el origen (4)

Se puede apreciar que cada componente de la tensión es proporcional a un parámetro  $K_I$ . Este parámetro se denomina Factor de Intensidad de Tensiones (FIT). Este factor sirve para definir completamente las condiciones tensionales y deformacionales del fondo de la grieta en un material elástico-lineal.

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a}$$

2.17

Donde  $a$  es la longitud de la grieta,  $\sigma$  es la tensión de referencia que es una función de la sollicitación externa y  $F_I$  es un parámetro corrector que tiene en cuenta la geometría de la fisura.

Más tarde se demostró que todas estas expresiones obtenidas para placas infinitas con grieta pasante eran generalizables a otras geometrías. Asumiendo que se produce un fallo en el material localmente significa que la fractura se producirá para un valor crítico de intensidad de tensiones. Esto se puede ver como una medida alternativa de la tenacidad a la fractura del material.

La propagación de la fisura se produce cuando el FIT alcanza un valor crítico  $K_{IC}$  que depende del material y se conoce como tenacidad a la fractura. Por tanto el criterio de fractura queda como:

$$K_I \geq K_{IC}$$

2.18

El análisis elástico-lineal realizado anteriormente preside tensiones infinitas en el frente de la grieta pero esto no es totalmente cierto. Todos los materiales, incluso cerámicos y vidrios son capaces de desarrollar un cierto grado de plasticidad en dicho frente. Así se mejora el valor extremo de tensión en el frente de grieta y se mejora la resistencia frente a la fractura frágil. No hay por tanto una zona singular en la grieta, conociéndose la región plástica como la zona plástica del frente de grieta.

Se pueden encontrar correcciones simples de la MFEL para plasticidades moderadas del frente de grieta, sin embargo, no pueden hacerse estas correcciones para plasticidades más agudas ya que hay que tener en cuenta otros parámetros como el comportamiento no lineal de los materiales.

Se puede aproximar la zona plástica de una forma sencilla. Si se representa la tensión  $\sigma_{yy}$  en el plano para  $\theta = 0$  hasta una distancia  $r_p$  desde el frente de grieta en la que la tensión es superior a la tensión del límite elástico  $\sigma_{ys}$ . Por tanto la primera aproximación se obtiene sustituyendo  $\sigma_{ys}$  en la ecuación 2.9 por  $\sigma_{yy}$ . En este caso en particular la tensión tangencial de cortadura que se obtiene por el criterio de Tresca es la misma que la octaédrica de Von Mises, por lo que  $r_p$  se puede calcular para condiciones de tensión plana como:

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

2.19

Para el caso de deformación plana se obtiene una expresión parecida:

$$r_p = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

2.20

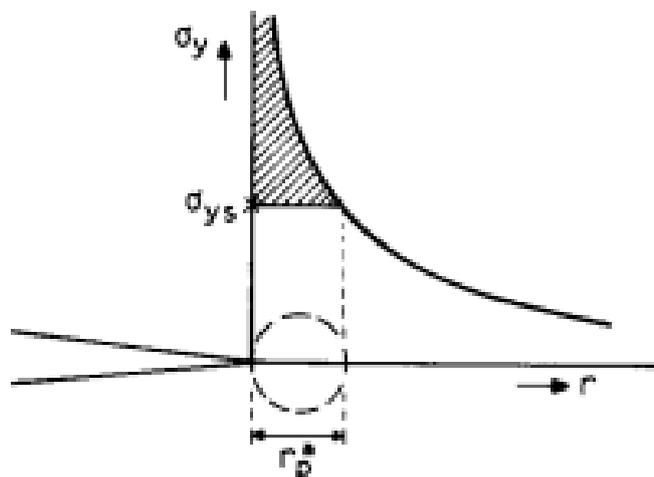


Figura 2.6: Primera aproximación del tamaño de la zona plástica en las cercanías del frente de grieta (4)

Estas ecuaciones son estimaciones simples pero acertadas para el caso de metales. Irwin (3) en 1960 realizó modificaciones de las fórmulas anteriores basándose en el hecho de que la grieta se comporta como si fuera más larga de lo que realmente es. Como consecuencia de esto los desplazamientos son mayores y la rigidez es menor que en el caso elástico. Las modificaciones se realizan modificando el tamaño efectivo de la grieta, mediante un factor de corrección  $\delta$ :

$$a_{eff} = a + \delta$$

2.21

Representando estas aproximaciones para  $r_p$  se obtiene una zona plástica circular. También se desarrollaron otros modelos a parte de la modificación de Irwin (3) como el de Dugdale (5) que presentaron modelos más elaborados en la década de los 60.

### 2.1.1.2 Planteamiento global de la fractura

El criterio de extensión de grietas planteado por Griffith (2) puede generalizarse como un balance entre energía disponible (de las fuerza externas) y energía requerida para que se propague la grieta.

$$U_{propagacion} = U_{fext} - U_{elastica}$$

2.22

La energía disponible para que la grieta se extienda se conoce como tasa de liberación de energía  $G$  y tal como expreso Griffith (2):

$$\frac{dU}{da} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} = G$$

2.23

Donde  $a$  es la longitud de la grieta,  $E$  el módulo elástico del material y  $\sigma$  una tensión de referencia, por lo que  $G$  depende de la profundidad de la fisura, de la tensión y de la geometría del sólido.

En la Figura 2.7 están representadas de forma aproximada las curvas de fuerza motriz  $G$  y tenacidad  $R$  para dos materiales con comportamiento diferente, con una longitud de grieta inicial  $a_0$ .

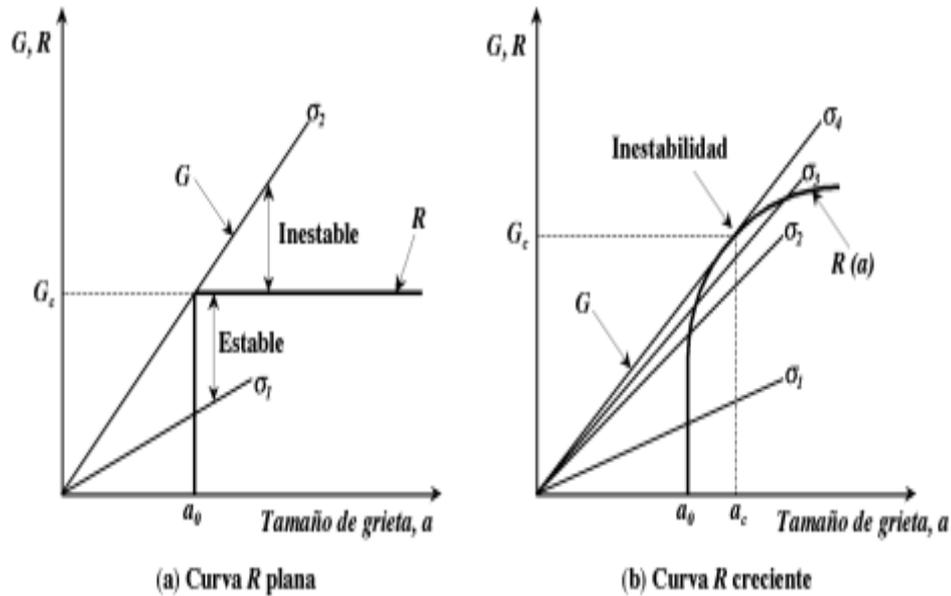


Figura 2.7: Diagramas esquemáticos de las curvas de la fuerza motriz  $G$  y de la tenacidad  $R$  para dos materiales con comportamientos diferentes (4)

$G$  también se puede definir en función de las fuerzas exteriores  $F$  y de la energía de deformación  $U$ .

$$G = \frac{dF}{da} - \frac{dU}{da}$$

2.24

El valor de la resistencia del material  $R$  por el contrario ha de determinarse experimentalmente ya que es una propiedad del material. A través de este enfoque energético se puede decir que la fisura se propagará si la fuerza impulsora supera en algún momento la resistencia del material.

$$G \geq R$$

2.25

Se puede relacionar la tasa de liberación de energía  $G$  con el FIT descrito en el anterior apartado de la siguiente manera:

$$G = \frac{K_I^2}{E'}$$

2.26

Donde  $E'$  es un valor que depende de si el estado es de tensión plana  $E' = E$ , o si por el contrario el estado es de deformación plana  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ .

### 2.1.2 Mecánica de Fractura Elasto-Plástica

El principal problema de la Mecánica de Fractura Elástica Lineal (MFEL) es que su validez está muy limitada. Solo se puede hacer uso de ella en los casos en los que la región de deformación plástica sea muy reducida. Por este motivo en muchos materiales se aplica la Mecánica de Fractura Elasto-Plástica (MFEP) que se caracteriza por admitir grandes deformaciones antes de la fractura, en el frente de grieta principalmente. Los parámetros fundamentales de esta teoría son la apertura del frente de grieta **CTOD** y la integral de contorno **J** que se usan como criterios de fractura por su capacidad para describir la situación en el frente de grieta. Los valores críticos de **CTOD<sub>c</sub>** y **J<sub>c</sub>** son menos restrictivos que el de su análogo **K<sub>IC</sub>** en elasto-plasticidad.

- 1) El desplazamiento de la apertura del frente de grieta:

En 1961 Wells (6) realizó ensayos para caracterizar aceros estructurales y determinar **K<sub>IC</sub>**. Se percató de que en estos materiales de alta tenacidad a la fractura la grieta se enromaba en su frente. Cuanto mayor era el enromamiento la tenacidad a la fractura era menor. De esta forma Wells (6) propone que la grieta se susceptible de propagarse cuando el desplazamiento en el frente de la grieta alcanza un valor crítico. Debido al efecto de plastificación se produce este enromamiento del frente de grieta como se puede ver en la Figura 2.8.

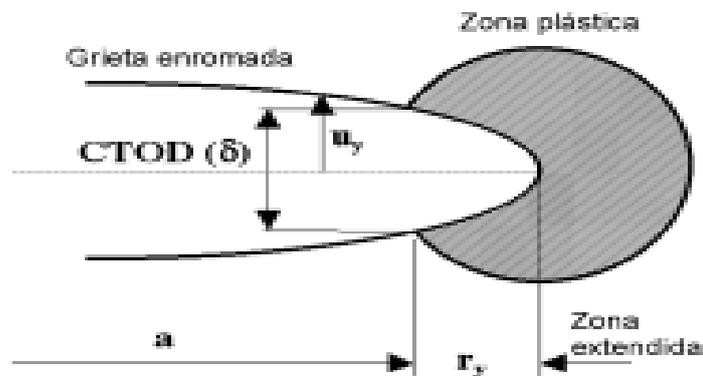


Figura 2.8: Embotamiento del frente de grieta en un material dúctil (4)

El análisis que propone Wells (6) establece que el parámetro **CTOD** (*Crack Tip Opening Displacement* o *Apertura del Frente de Grieta*) se relacione con el FIT si se considera la plastificación en el frente de grieta. Para ello hay que tener en cuenta que en los desplazamientos se hace la hipótesis de que la longitud efectiva de la grieta es  $a + r_y$  al igual que en la solución de Irwin (3). El valor del desplazamiento considerando deformación plana como ya se ha estudiado en el apartado anterior es el siguiente:

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad 2.27$$

Que para las condiciones de las que se habla  $r = r_y$  y  $\theta = \pi$  se simplifica a la siguiente, relacionándose con el FIT:

$$u_y = \frac{\kappa + 1}{2\mu} K_I \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}} = \frac{\delta}{2} \quad 2.28$$

Y con la corrección de Irwin (3) para  $r_y$  de la zona plástica para condiciones de tensión plana se puede calcular el parámetro **CTOD** con la tasa de liberación de energía **G**:

$$\delta = CTOD = \frac{4K_I^2}{\pi E \sigma_{ys}} = \frac{4G}{\pi \sigma_{ys}}$$

2.29

Wells (6) establece que el **CTOD** es un parámetro adecuado para cuando la MFEL no lo es. Posteriormente se demostró que esta afirmación era correcta cuando se encontró una relación entre el **CTOD** y la integral **J** que se trata en el apartado siguiente.

En estudios posteriores Burdekin y Dawes (7) se basaron en la relación entre la fuerza motriz elasto-plástica de Wells (6) y la correlación empírica entre los ensayos de **CTOD** a pequeña escala y los de grandes placas con el mismo material. Como resultado apareció la curva de diseño en **CTOD** que diferencia entre una zona segura e insegura a partir de datos obtenidos experimentalmente.

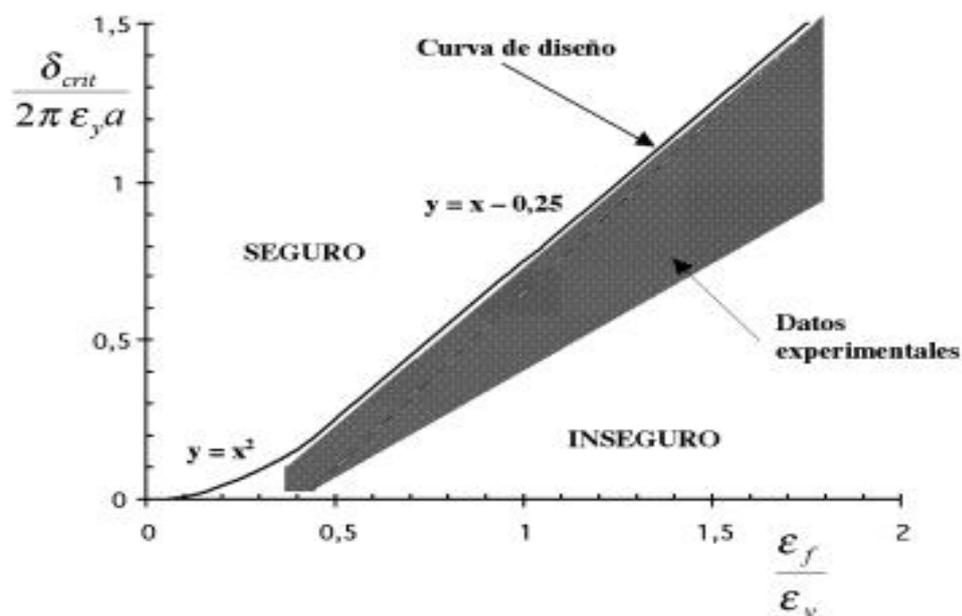


Figura 2.9: Curva de diseño basada en el **CTOD** (4)

Donde **a** es la longitud de la fisura,  $\delta_{crit}$  el desplazamiento crítico,  $\epsilon_y$  la deformación en el límite elástico y  $\epsilon_f$  es la deformación que presenta la placa.

2) La integral de contorno  $J$ :

Esta integral surgió a principios del Siglo XX con el objetivo de parametrizar el comportamiento de materiales elásticos no lineales. De esta forma se subsanó la necesidad de tener disponible un criterio de fractura aplicable a situaciones donde ocurran procesos de plastificación importantes. Representa la variación energética (integral curvilínea) que bajo un estado tensional acompañaría a la propagación de la grieta una fracción  $da$ , aun cuando la plasticidad en el frente de grieta fuera apreciable. La integral  $J$  es la sustituta de la  $G$  de Griffith (2) para materiales elasto-plásticos.

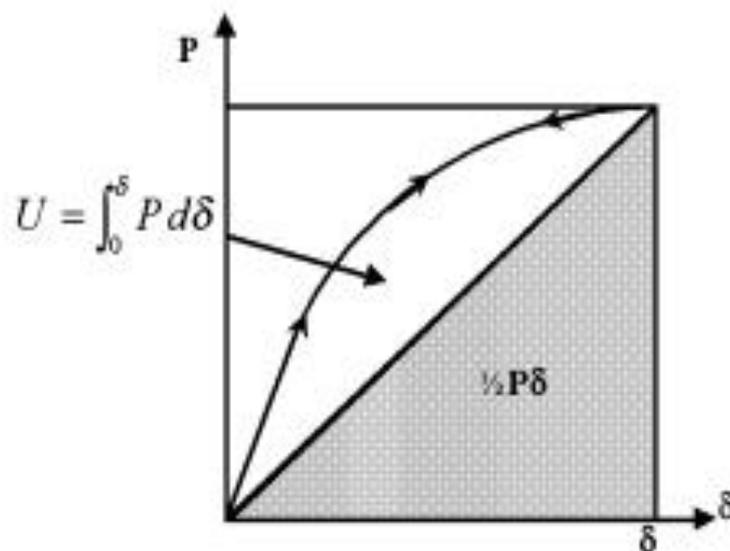


Figura 2.10: Representación esquemática de la curva tensión-deformación de un material con comportamiento lineal y otro no lineal (4)

En la Figura 2.10 se puede apreciar que la energía elástica absorbida por un material elasto-elástico es menor que la absorbida por un material elasto-plástico. La almacenada por el material no lineal es mayor y esto tiene una consecuencia directa en la energía susceptible de ser empleada en la propagación de la grieta. Esto puede apreciarse echando un vistazo al balance de energía de Griffith (ecuación 2.22), la energía de propagación de la grieta será menor al ser mayor la energía elástica almacenada.

## 2.2 Modelos de Zona Cohesiva

El uso de la MFEL para el estudio de la propagación de grietas implica una solución singular en el frente de grieta (origen). Esto es debido a que cuanto más disminuye el radio de

una fisura aguda, más grande se hace la tensión. Sin embargo, el hecho de que esta formulación no es exacta es una obviedad ya que ninguna tensión puede ser infinita. Es por ello que comenzaron a desarrollarse otros modelos para solventar el problema que planteaba la singularidad en el frente de grieta.

Un modelo completo de fractura debe especificar:

- 1) El comportamiento del material fuera de la zona de fractura. En general se producirá irreversibilidad y disipación de energía (Figura 2.11 A-a). Este comportamiento es el denominado daño general que incluye el ablandamiento plástico. Muchos de los modelos propuestos con ablandamiento presenta una descarga al origen (Figura 2.11 A-b), esto se denomina degradación de la rigidez. Existe otro conjunto de modelos muy utilizados que suponen que no hay disipación fuera de la zona de fractura, es decir, suponen comportamiento elástico (Figura 2.11 A-c).
- 2) Comportamiento en la zona de fractura. Este comportamiento puede clasificarse en: daño general (Figura 2.11 B-a), degradación solo de la rigidez (Figura 2.11 B-b), o degradación únicamente del límite elástico (Figura 2.11 B-c). Cabe destacar que en el caso de deformaciones monótonas crecientes los tres modelos son prácticamente indistinguibles.
- 3) Criterio de localización. Existen criterios muy generales de localización (Figura 2.11 C-a), los más usuales son los de localización en una banda - Modelos de Banda Cohesiva – (Figura 2.11 C-b), o de localización en una fisura – Modelo de Fisura Cohesiva – (Figura 2.11 C-c).

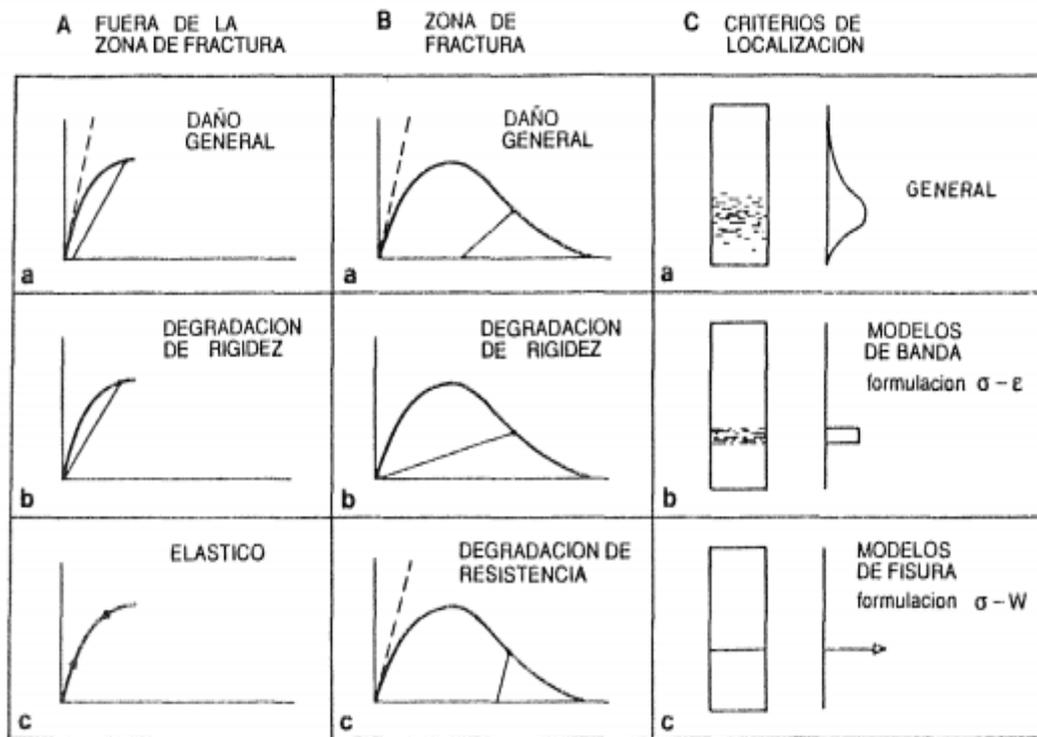


Figura 2.11: Representación esquemática del comportamiento del material, comportamiento en la zona de fractura y criterio de localización (8)

Versiones especiales de estos modelos que surgieron por diversos motivos físicos se han usado desde hace décadas. En 1960, Dugdale (5) fue uno de los pioneros en el desarrollo y utilización de los Modelos de Zona Cohesiva (CZM, de las siglas en inglés *Cohesive Zone Model*). Dugdale (5) propuso un modelo matemático en el extremo de la grieta para mantener finitas las tensiones en el borde de la fisura, con valor igual al límite de fluencia del material. Más tarde, en 1962, Baremlatt (9) se basó en el concepto de la atracción atómica en una pequeña región cerca del borde de la fisura y utilizó la hipótesis de la capacidad de transmisión de esfuerzos por parte del material aunque éste se encuentre dañado. También consideró que las tensiones en esa zona siguen una función dependiente de la coordenada que tiene origen en el extremo de la grieta como se puede apreciar en la Figura 2.12.

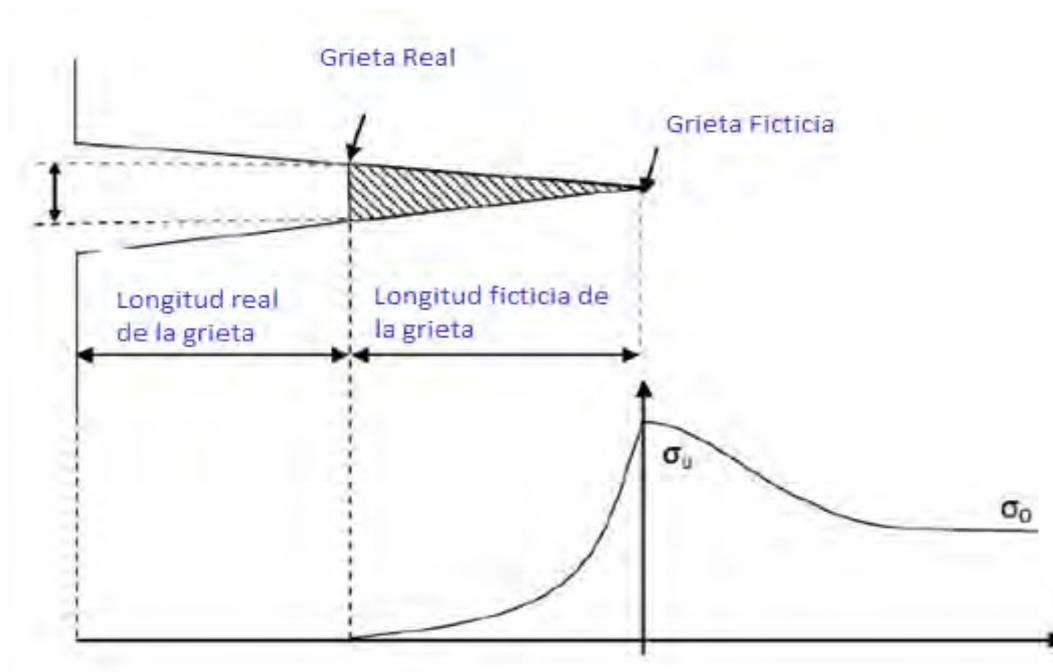


Figura 2.12: División de la grieta en real y ficticia y valores de tensión en las proximidades del frente de grieta (69)

Como se puede ver en la Figura 2.12 la grieta está dividida en dos zonas. Tanto Dugdale (5) como Barenblatt (9) adoptaron esta división en sus estudios. Las dos superficies convergentes del frente de grieta solo pueden transmitir esfuerzos cuando se encuentran en contacto, esta idea surge de la idea de fisura introducida con la MFEL. Por otro lado la presencia de microgrietas es debida a los elevados valores de tensión en el frente de grieta. Por consiguiente el material se va degradando con la consiguiente disminución de su rigidez y de su capacidad para transmitir esfuerzos. Cuando se alcanza un valor límite de la tensión se produce la fractura del material con el consiguiente avance de la fisura sin oposición. Este proceso será explicado en el apartado siguiente haciendo uso de la Ley de Tracción-Separación.



Figura 2.13: Representación de las dos partes de la grieta a escala atómica (69)

Por lo tanto el problema de la singularidad de la solución obtenida mediante el MFEL se soluciona con los CZM. Además de conocer el estado tensional del frente de grieta, este método

permite determinar con exactitud el origen de la grieta (que no puede realizarse aplicando los conceptos de la MFEL ya que esta presupone la existencia de la misma) y el proceso completo de fractura. Mi et al. (10), Hu y Gonçalves et al. (11) y Gao y Bower (12) analizan la inestabilidad de los resultados numéricos. Gonçalves et al. (11) detectaron una diferencia significativa entre el máximo de carga en la gráfica tensión-deformación y los valores experimentales.

Estas diferencias con los resultados experimentales no afectan demasiado a la validez de los estudios de inicio y desarrollo de grietas ya que se han analizado minuciosamente los distintos tipos de medios y materiales como aceros, materiales compuestos, polímeros, etc.

## 2.2.1 Ley de Tracción-Separación

El proceso por el cual el material se degrada en el frente de grieta puede ser analizado a través de la Ley de Tracción-Separación (*TSL* del inglés *Traction-Separation Law*). En la Figura 2.14 se muestran las tres leyes de tracción-separación disponibles en Abaqus. En los tres casos se puede apreciar que la fisura sigue un comportamiento lineal previo al daño hasta un valor crítico de la tensión que se alcanza para el desplazamiento  $\delta_0$ . A partir de esa tensión que determina el inicio del daño comienza el proceso de degradación con la consiguiente disminución de la rigidez progresivamente hasta que se hace nula, se produce la fractura del material y la fisura avanza (evolución del daño). Como se puede apreciar en la Figura 2.14 la zona de evolución del daño no necesariamente tiene que ser lineal.

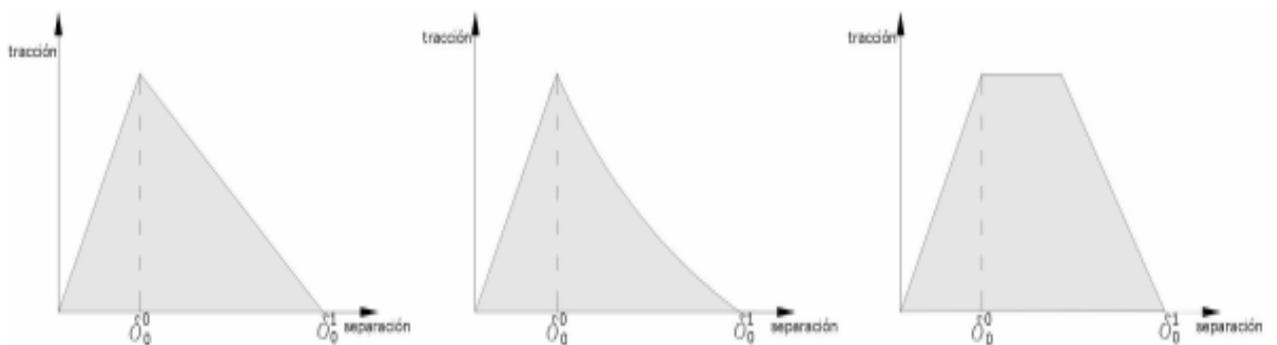


Figura 2.14: Leyes de tracción-separación disponibles en el programa Abaqus (69)

Se presenta ahora en la Figura 2.15 una gráfica general para poder explicar los puntos más importantes y conceptos básicos.

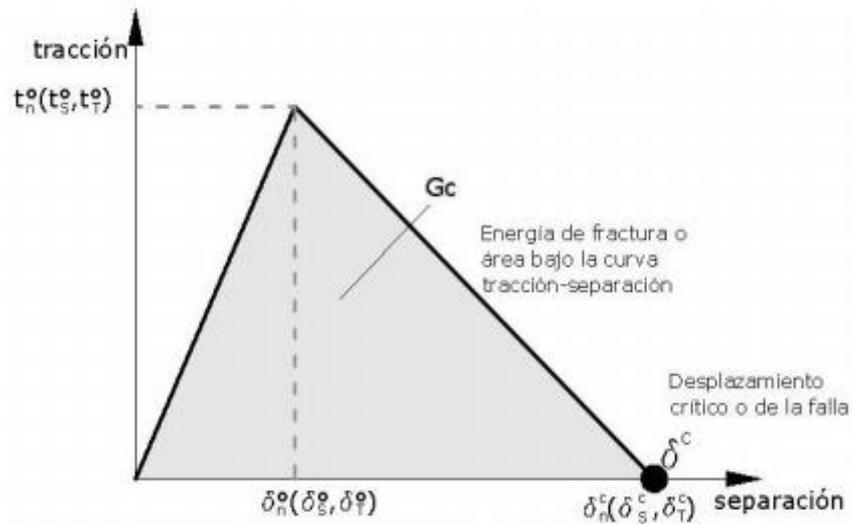
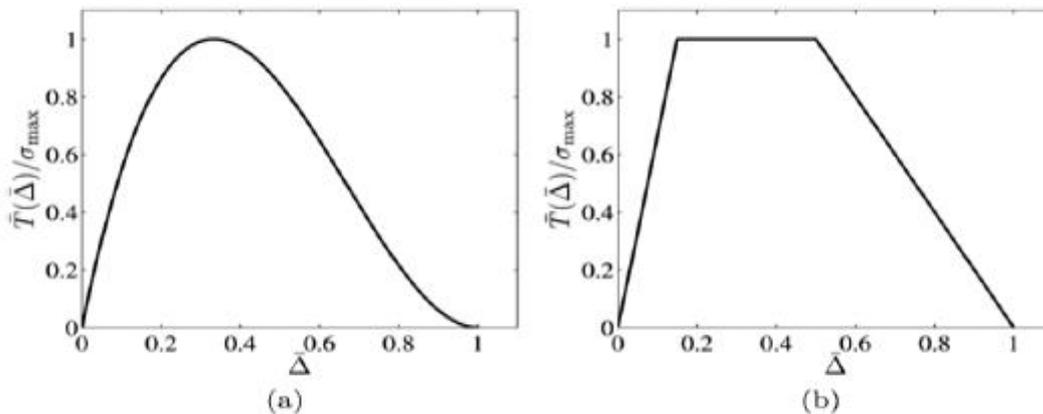


Figura 2.15: Gráfica Tracción-Separación indicando las etapas de la evolución del daño y otros parámetros característicos (8)

En el eje de ordenadas se representan las tensiones de tracción  $T_n$  y en el de abscisas el desplazamiento entre ambas caras de la fisura  $\delta_n$ . La resistencia máxima a fractura,  $\delta_n \cdot T_n^{max}$ , también conocida como resistencia cohesiva se encuentra referida al límite elástico del material y coincide con el valor máximo de la gráfica. El valor de la separación correspondiente a la resistencia cohesiva que marca el inicio del daño viene dado por  $\delta_n^*$ . El valor crítico de la separación que supone la separación degradación completa del material y como consecuencia su fractura viene dado por  $\delta_n^c$ . Durante la separación del material se produce una disipación de energía denominada energía cohesiva y que coincide con el área bajo la curva  $G_c$ .

La respuesta mecánica del modelo desde un punto de vista macroscópico depende en gran parte de la morfología de la curva. En la Figura 2.16 se muestran diferentes modelos en los que  $\bar{T}$  y  $\bar{\Delta}$  representan las tracciones y separaciones efectivas.



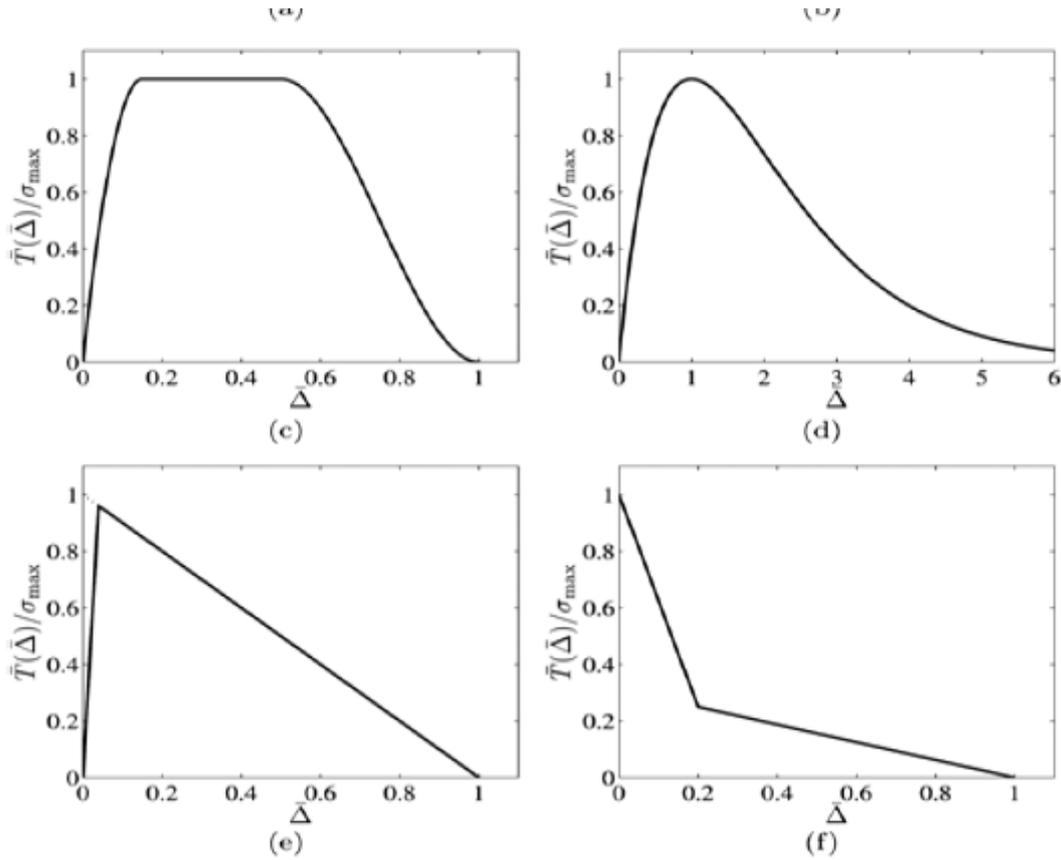


Figura 2.16: Modelos de Tracción-Separación (a) polinómico de grado 3, (b) trapezoidal, (c) trapezoidal suavizado, (d) exponencial, (e) lineal, (f) bilineal (13) (69)

Algunos autores utilizaron el modelo exponencial para evitar discontinuidades de otros modelos como el bilineal o el trapezoidal. Needleman y Xu (14) utilizaron este modelo en su trabajo. La función potencial que propusieron fue la siguiente:

$$\Phi(\Delta_n, \Delta_t) = \Phi_n + \Phi_t \cdot e^{\left(\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left[ 1 - r + \frac{\Delta_n}{\delta_n} \frac{1-q}{r-1} \left[ q + \frac{(r-q)\Delta_n}{(r-1)\delta_n} \right] e^{\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right)} \right]} \quad 2.30$$

Donde  $\Delta_n$  y  $\Delta_t$  son las componentes normal y tangencial del desplazamiento en la fisura,  $\Phi_n$  y  $\Phi_t$  son el trabajo de separación normal y tangencial respectivamente,  $q = \frac{\Phi_t}{\Phi_n}$ ,  $r = \frac{\Delta_n^*}{\delta_n}$ , donde  $\Delta_n^*$  es el valor de  $\Delta_n$  en el momento de la separación tangencial en condiciones de tensión normal nula  $T_n = \mathbf{0}$ . Los parámetros del modelos vienen dados por  $\delta_n$  y  $\delta_t$ .

Se pueden definir las tensiones normales  $T_n$ , y tangenciales  $T_t$  si se escriben en función de  $\Delta_n$  y  $\Delta_t$  y de  $\Phi$ , que es la función potencial en la fisura. Se llega a las siguientes expresiones:

$$T_n = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_n} = \frac{\Phi_n}{\delta_n} \cdot e^{\left(\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left\{ \left(\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) e^{\left(-\frac{\Delta_n^2}{\delta_n^2}\right)} + \left(\frac{1-q}{r-1}\right) \left[ 1 - e^{\left(-\frac{\Delta_n^2}{\delta_n^2}\right)} \right] \left(r - \frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \right\}}$$

2.31

$$T_t = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_t} = \frac{2\Phi_n \Delta_t}{\delta_t^2} \left[ q + \left(\frac{r-q}{r-1}\right) \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] e^{\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right)} e^{\left(\frac{\Delta_n^2}{\delta_n^2}\right)}$$

2.32

En la Figura 2.17 se hace uso de la tensión máxima  $\sigma_{max}$  para representar las ecuaciones adimensionalizadas:

$$\sigma_{max} = T_n \delta_n \tau_{max} = T_t \frac{\delta_t}{\sqrt{2}}$$

2.33

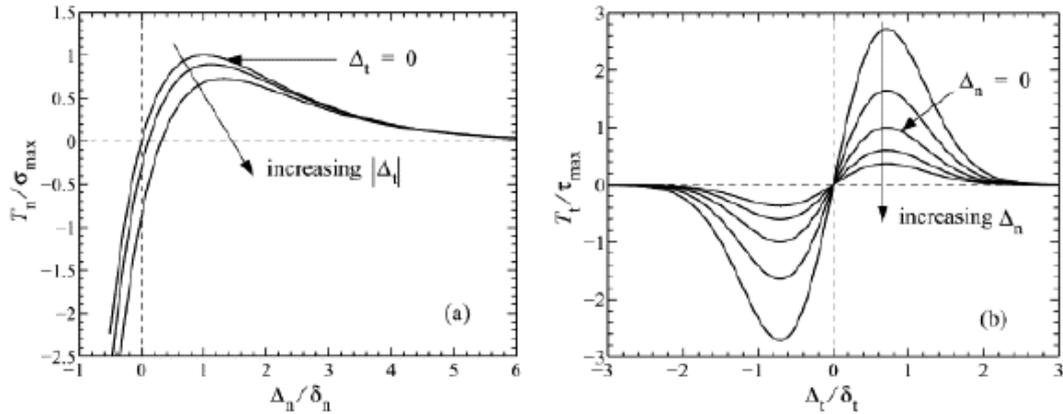


Figura 2.17: Representación de las ecuaciones 2.31 y 2.32 adimensionalizadas (69)



# 3

# FATIGA

## 3.1 Antecedentes Históricos

La fatiga de materiales consiste fundamentalmente en la ruptura de elementos mecánicos creados por el ser humano como consecuencia del desgaste de estos. Está asociada a objetos que están sometidos a cargas cíclicas o repetitivas y que normalmente han sido diseñados para soportar peso. Estas cargas crean pequeñas grietas que pueden producir la rotura del material. El estudio de la fatiga es muy importante ya que en la actualidad pueden llegar a acaparar el 90% de las roturas de materiales metálicos que es mucho mayor que el número de elementos que fallan por resistencia estática.

La característica principal de los elementos que fallan por fatiga es la rotura repentina sin deformación. La aparición de esta rotura se produce con cargas aplicadas muy por debajo de la resistencia del material. El principal problema de que la rotura se produzca sin deformación previa es la peligrosidad que es mucho mayor que en las roturas estáticas. Por ejemplo en los materiales dúctiles la rotura estática se alcanza una vez sobrepasada la fluencia, existiendo una deformación permanente que prevé su inminente rotura, lo que hace que podamos sustituir el elemento antes de que se produzca esta, no como en el caso de la rotura por fatiga.

A lo largo de toda la historia la fatiga de materiales era un campo del que no se tenía demasiada información ya que los entendidos en la materia o no lo conocían o bien no lo consideraban importante. Esto era debido a que la sociedad era principalmente agraria y las cargas que soportaban las maquinas existentes no eran muy importantes. Pero a finales del Siglo XVIII surgió en Gran Bretaña la Revolución Industrial con el consiguiente desarrollo de los sistemas productivos y de la industria. La Revolución Industrial se extendió al resto de Europa hasta finales del Siglo XIX, aparecieron entonces la locomotora y el ferrocarril. Debido a las elevadas cargas que transportaban estas nuevas máquinas se produjeron los primeros casos de rotura por fatiga de materiales (en las ruedas de las locomotoras y posteriormente en los ferrocarriles) que llamó la atención de los expertos instando a estos a comenzar investigaciones sobre el tema.

El primer estudio documentado sobre fatiga fue llevado a cabo por Albert (15) en Alemania y data de 1829, este investigador fue el primero en documentar la falla por cargas repetidas. Muy seguidamente Rankine (16) en Gran Bretaña analizó la teoría de la cristalización en la fatiga intentando dar explicación a los fallos en los ejes de locomotoras y ferrocarriles. El primer investigador que utilizó el término “fatiga” fue Braithwaite (17) en una publicación sobre la teoría de la cristalización. En 1871 Wöhler (18) publicó sus resultados de más de 20 años de investigación sobre las fallas de los ejes, perfeccionó el ensayo por flexión rotativa, las curvas S-N y definió el límite de resistencia a la fatiga.

A lo largo del final del Siglo XVIII y principio del Siglo XIX siguieron surgiendo investigadores que ayudaron a descubrir con mayor claridad los entresijos de este fenómeno como Soderberg, Goodman, Paris, etc. Trataremos estos últimos con más detalle en los siguientes apartados.

## 3.2 Ensayos de Fatiga

Así como para caracterizar el comportamiento elástico de los materiales se utiliza el ensayo de tracción uniaxial para estudiar el comportamiento a fatiga se suele utilizar la prueba de la viga de rotación.

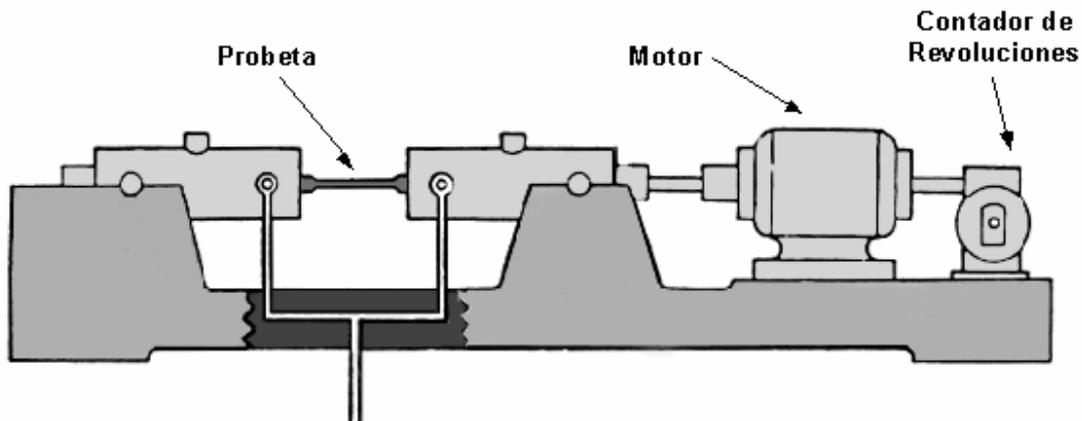


Figura 3.1: Máquina de Moore para ensayos de probeta rotatoria

Dicha prueba consiste en aplicar un momento flector puro a la viga mostrada en la figura (sección circular). Conforme la viga gira, se fluctúa entre una tensión con tracción máxima a una tensión con compresión máxima la cual se representa en los ejes espacio-tiempo de la Figura 3.2. El esfuerzo en el límite de fatiga suele definirse como el valor máximo del esfuerzo de flexión completamente invertido que una probeta simple puede soportar durante como mínimo 10 millones de ciclos de carga sin fallar. En el caso de que el material de la probeta sea ferroso y dura este número de ciclos puede suponerse que durará para siempre (vida infinita).

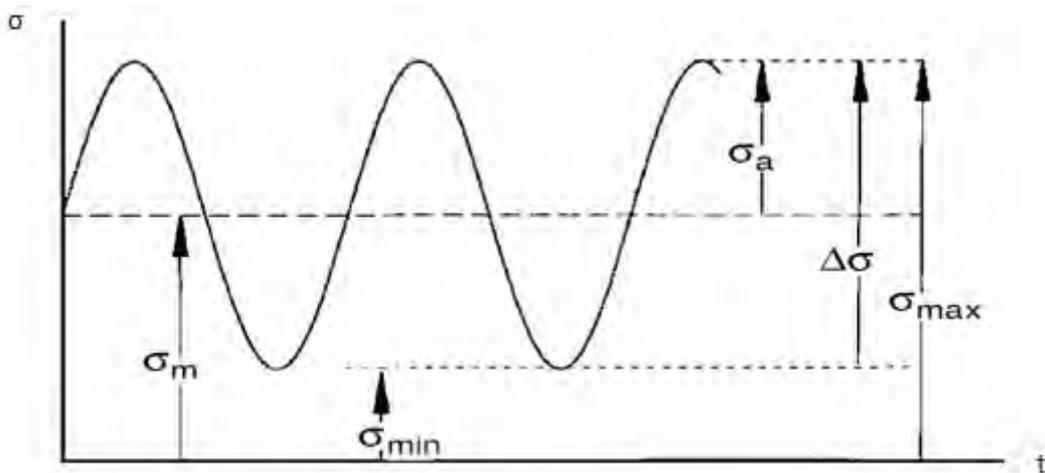


Figura 3.2: Tensión cíclica alternante (tensión media nula)

Los ciclos de sollicitación quedan completamente determinados a partir de la tensión media y la tensión alternante:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{m\acute{i}n}}{2} \quad 3.1$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}}{2} \quad 3.2$$

Las tensiones máximas y mínimas que se alcanzan a lo largo de un ciclo respectivamente se representan por  $\sigma_{m\acute{a}x}$  y  $\sigma_{m\acute{i}n}$ . Como se puede apreciar no se tiene en cuenta la influencia del tiempo en ningún momento.

También se realizan ensayos para tipos de esfuerzos diferentes al de flexión completamente invertido. Muchos de ellos se obtienen por superposición de una componente variable o fluctuante sobre un esfuerzo estático permanente.

Cuando se realizan todos estos ensayos las fallas por fatiga provocada por la flexión son las más frecuentes, después las de torsión y en muy pocos casos se producen fallas por cargas axiales. Una vez empezada, la grieta provocada por la fatiga se suele propagar en una dirección perpendicular al esfuerzo de tensión.

### 3.2.1 Diagramas de fatiga: Curvas S-N

Para poder conocer la resistencia y el límite a fatiga de elementos mecánicos se realiza el ensayo de viga rotatoria descrito anteriormente. Si se realiza este ensayo varias veces (normalmente más de 8) modificando variables como el esfuerzo de flexión se puede obtener la vida de la probeta. Para que los ensayos sean válidos hay que normalizar las características que puedan modificar los resultados de los mismos (características geométricas, ambientales, etc.)

Así se obtiene el diagrama S-N que se representa en escala logarítmica el número de ciclos (**log N**) frente a la resistencia a la fatiga (**log S<sub>e</sub>**). En dicho diagrama se pueden encontrar tres zonas bastante diferenciadas:

- 1) Ciclo Bajo: En esta primera zona se puede apreciar que la resistencia a la rotura va disminuyendo de manera tenue según avanza el número de ciclos, la pendiente es muy poco pronunciada hasta que se alcanzan los 1000 ciclos donde aproximadamente la resistencia ha disminuido un 10%, esto se corresponde con el punto **A** ( $S_a \approx 0.9S_{ut}$ ) de la Figura 3.3. Se puede considerar que el comportamiento es muy parecido al comportamiento frente a cargas estáticas.
- 2) Ciclo Alto: Es la zona intermedia que comprende desde los 1000 hasta el millón de ciclos. La pendiente aumenta significativamente en relación al ciclo bajo, el material dura bastante menos y comienza a distanciarse del comportamiento frente a cargas estáticas.

- 3) Vida Infinita: Se puede encontrar un valor de la tensión suficientemente bajo a partir del cual la probeta no se rompe independientemente del número de ciclos al que se someta, por eso se conoce como vida infinita. Esta tensión se denomina límite de fatiga sin corregir  $S'_e$ . Cabe destacar que tanto para materiales no ferrosos como para aleaciones de estos, la línea horizontal (zona de vida infinita) tiene una ligera pendiente negativa lo que justifica que realmente estos materiales no posean un límite de fatiga.

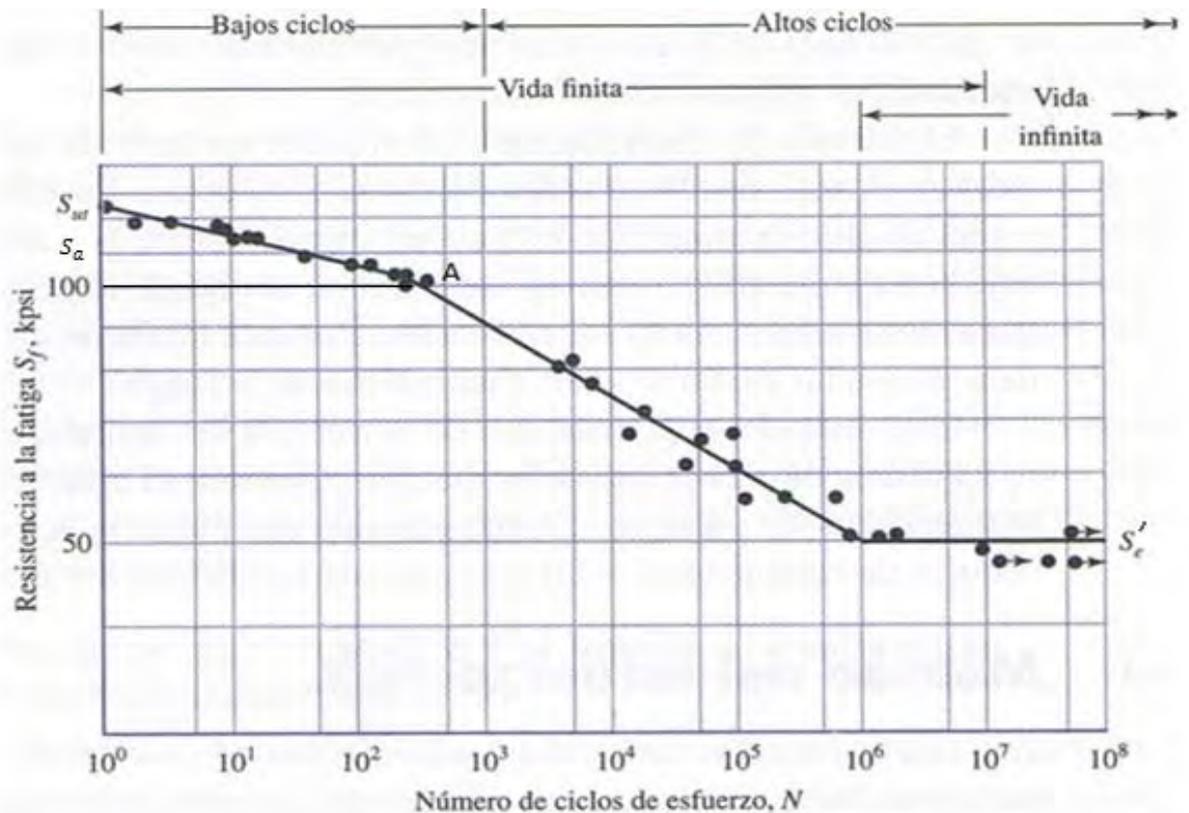


Figura 3.3: Representación aproximada de la curva S-N de un material con límite a fatiga (24)

Existen muchos criterios para cuando no existen datos experimentales disponibles. Dependen de los materiales que se estén considerando, del proceso de fabricación al que hayan sido sometidos, etc. Hay que señalar que todos estos criterios son aproximaciones. De hecho la curva S-N también es una curva que se obtiene por mínimos cuadrados mediante una nube de puntos, cada uno correspondiente a un ensayo, por lo que también es una aproximación. A continuación se proporcionan una serie de relaciones entre la resistencia última a rotura  $S_{ut}$  y el límite a fatiga  $S_e$ :

- ❖ Hierros y aceros forjados:

$$S'_e = 0.5 S_{ut} \text{ si } S_{ut} \leq 1400 \text{MPa}$$

$$S'_e = 700MPa \text{ si } S_{ut} \geq 1400MPa$$

3.4

❖ Aceros colados:

$$S'_e = 0.45 S_{ut} \text{ si } S_{ut} \leq 600MPa$$

3.5

$$S'_e = 275MPa \text{ si } S_{ut} \geq 600MPa$$

3.6

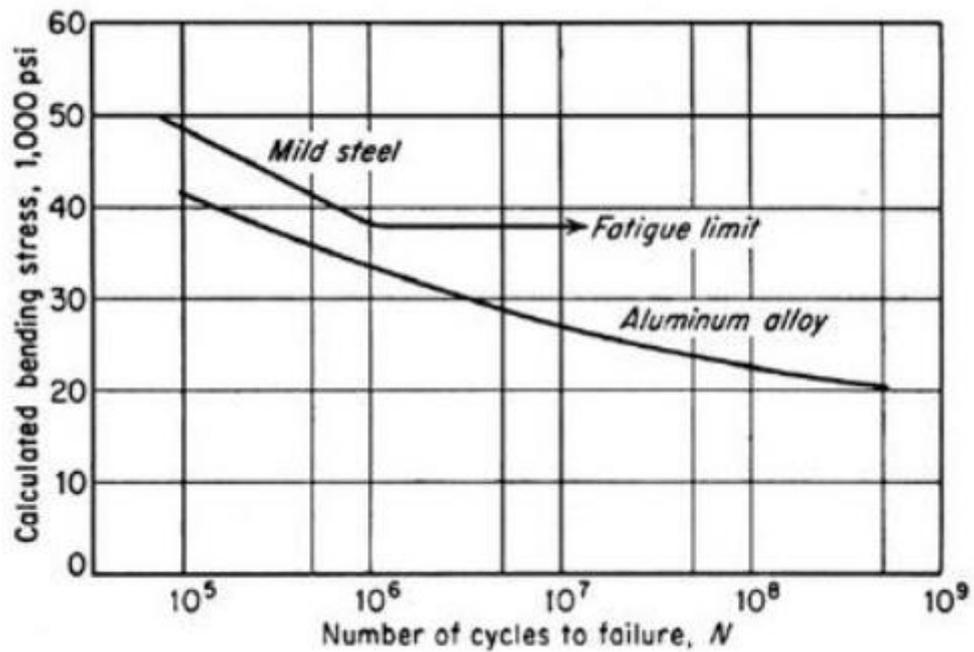


Figura 3.4: Representación de dos materiales con y sin límite a fatiga (69)

### 3.2.2 Factores correctores del límite a fatiga

La necesidad de determinar factores modificativos para las ecuaciones y gráficas propuestas anteriormente radican en el hecho de que las condiciones en las cuales se van a usar los materiales no son las mismas en las que se ha ensayado con ellos. Cuando se realiza el ensayo de viga rotatoria las condiciones del material son óptimas, es decir, la superficie ha sido pulida para mejorar el acabado superficial reduciendo así muescas e imperfecciones que pueden comportarse como concentradores de tensiones. Durante el ensayo se ha sujetado la probeta con la máxima precisión para evitar cualquier tipo de vibraciones indeseadas. Además de esto, las condiciones ambientales también han sido preparadas a conciencia (humedad, temperatura, etc.) y están normalizadas para garantizar la universalidad del ensayo.

La realidad es que los materiales que han sido ensayados se van a utilizar a temperaturas normalmente más altas, los elementos van a tener imperfecciones, en definitiva, las condiciones de trabajo no van a ser las ideales. Todo ello contribuye a agravar el fenómeno de la fatiga, ya que cuanto peor sean las condiciones estas van a afectar negativamente a la resistencia por fatiga. Es por ello que el límite a fatiga real queda corregido mediante una serie de factores que se explican a continuación. La relación que se utiliza para dicha corrección se conoce como la ecuación de Marin en la que  $S_e$  es el límite a fatiga ya corregido, se define como el valor de la tensión alternante máxima que permite obtener vida infinita del mismo para condiciones de funcionamiento real.  $K_i$  son los distintos valores modificativos que tienen en cuenta las condiciones reales. Normalmente  $K_i < 1$  porque las condiciones reales suelen ser peores que las del laboratorio lo que contribuye a disminuir la resistencia real a la fatiga:

$$S_e = K_a K_b K_c K_d K_e K_f S'_e$$

3.7

❖ Factor de acabado superficial  $K_a$ :

Se puede tomar como referencia una probeta utilizada en un ensayo de viga rotatoria con un acabado especial pulido. Este proceso es muy costoso, sin embargo, se consigue minimizar estrías e irregularidades geométricas en la superficie que actúan como concentradores de tensiones. También se eliminan las diferencias entre el interior y el exterior del material y cualquier esfuerzo residual. Como los acabados superficiales en condiciones de trabajo normales son peores se reduce el límite a fatiga y es proporcional a la resistencia última del material. Mediante una correlación estadística basada en datos experimentales se expresa  $K_a$ .

$$K_a = a S_{ut}^b$$

3.8

Donde **a** y **b** son coeficientes que vienen dados en la siguiente tabla:

Parámetros a y b para distintos materiales		
ACABADO SUPERFICIAL	$\alpha$ (MPa)	b
Pulido	1	0
Acabado fino (esmerilado, rectificando...)	1.58	-0.085
Mecanizado sin acabar o estirado en frío	4.51	-0.265
Laminado en caliente	57.7	-0.718
Forjado	272	-0.995

Tabla 3.1

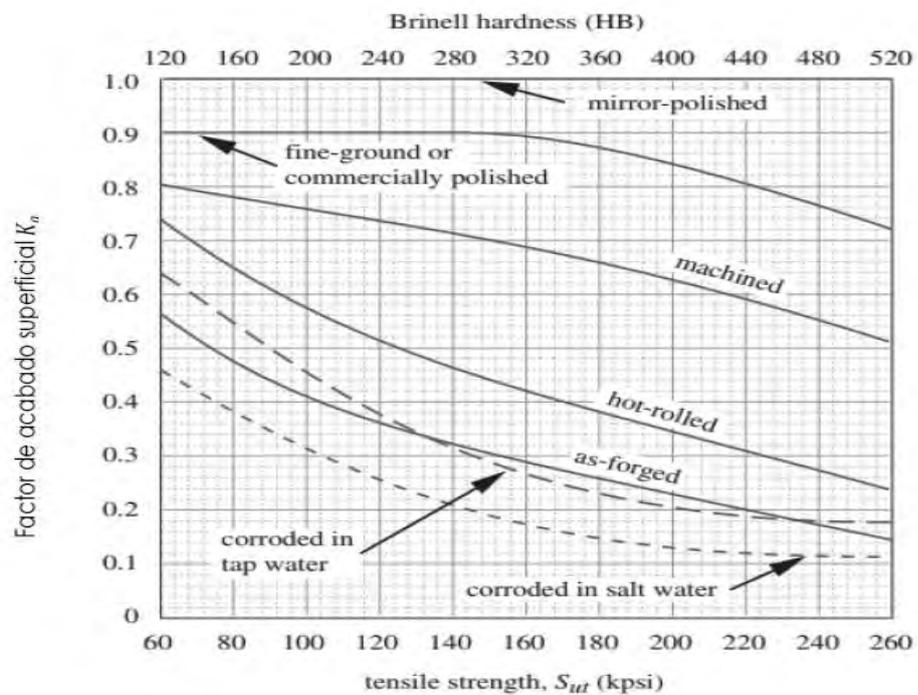


Figura 3.5: Factor de acabado superficial en función del mismo y de la resistencia última del acero o su dureza (19)

❖ Factor de tamaño  $K_b$ :

Los diámetros de las probetas que se utilizan en un ensayo de viga rotatorio están fuertemente normalizados y por lo tanto en la mayoría de las ocasiones no coinciden con el tamaño del componente que se quiere utilizar. Normalmente el diámetro es inversamente proporcional al límite de fatiga.

Para el caso en el que el elemento este sometido a cargas de presión o de torsión se tienen las siguientes expresiones que fueron propuestas por Mischke (20):

$$K_b = \left(\frac{d}{7.62}\right)^{-0.1133} \quad \text{si } 2.79 \leq d \leq 51 \quad d \text{ en mm}$$

3.9

$$K_b = 1.189d^{-0.097} \quad \text{si } 52 \leq d \leq 250 \quad d \text{ en mm}$$

3.10

En el caso de carga axial  $K_b=1$  ya que para este tipo de cargas el tamaño no tiene influencia en el límite de fatiga.

En algunas ocasiones se tienen elementos mecánicos de secciones que no son circulares, en estos casos lo que se hace es una equivalencia con el denominado diámetro efectivo. Otro parámetro que se define es el área de 95%  $A_{95}$ , de esfuerzo que es el área delimitada por los puntos de la sección que en algún momento están sometidos a una tensión mayor o igual que el 95% del máximo absoluto. El diámetro efectivo se define como el diámetro de una probeta de sección circular sometida a flexión rotatoria con un área de 95% del esfuerzo igual al área de 95% de esfuerzo de la sección considerada.

$$A_{95} = \frac{\pi}{4}(d^2 - (0.95d)^2) = 0.0766d^2$$

3.11

Para una sección rectangular quedaría:

$$A_{95} = 0.95hb$$

3.12

Igualando ambas expresiones se obtiene el diámetro efectivo para una sección rectangular:

$$d_e = 0.808\sqrt{h \cdot b}$$

3.13

❖ Factor de confiabilidad  $K_c$ :

Este factor permite diseñar un elemento sometido a fatiga de forma que tenga una vida predeterminada con la confiabilidad deseada. Para obtener los diferentes valores que aparecen en la Tabla 3.2 se han realizado estudios estadísticos con datos de numerosos ensayos. La distribución del análisis de resistencias y esfuerzos es de tipo normal o Weibull (21).

Fiabilidad	Factor de fiabilidad $K_c$
0.5	1
0.9	0.897
0.95	0.868
0.99	0.814
0.999	0.753
0.9999	0.702
0.99999	0.659
0.999999	0.620
0.9999999	0.584
0.99999999	0.551
0.999999999	0.520

Tabla 3.2

❖ Factor de temperatura  $K_d$ :

Se sabe que tanto las propiedades mecánicas de un material como parámetros como la resistencia a fluencia, última y de fatiga son una función de la temperatura. En algunas ocasiones materiales que a temperatura ambiente presentan un determinado límite a fatiga, no lo poseen a altas temperatura, es decir, siempre acaban fracturándose sometidos bajo una carga variable debido al efecto térmico. La explicación microscópica de este hecho se encuentra en las dislocaciones. Las altas temperaturas movilizan dichas dislocaciones dotando al proceso de rotura de una independencia temporal. Para obtener  $K_d$  se suelen realizar pruebas de laboratorio, aunque su obtención resulta difícil el siguiente criterio se ajusta bastante bien a la realidad:

$$K_d = 1 \quad T \leq 450C \quad 3.14$$

$$K_d = 1 - 5.8 \cdot 10^{-3}(T - 450) \quad 450C \leq T \leq 550C \quad 3.15$$

❖ Factor de concentrador de tensiones  $K_e$ :

Existen muchos elementos mecánicos que tienen geometrías que presentan concentradores de tensiones como pueden ser agujeros, ranuras, chavetas, muescas, etc. Este factor se encarga de cuantificar la influencia de estos concentradores que alteran la distribución de los esfuerzos. Siempre se han de considerar estas geometrías en materiales frágiles o cuando están sometidos a fatiga.

$K_e$  se obtiene mediante las siguientes expresiones:

$$K_e = \frac{1}{R_f} \quad 3.16$$

$$q = \frac{R_f - 1}{K_t - 1} \quad 3.17$$

Donde  $K_t$  es un factor de concentración de esfuerzos teórico que se obtiene de diferentes gráficas como las siguientes:

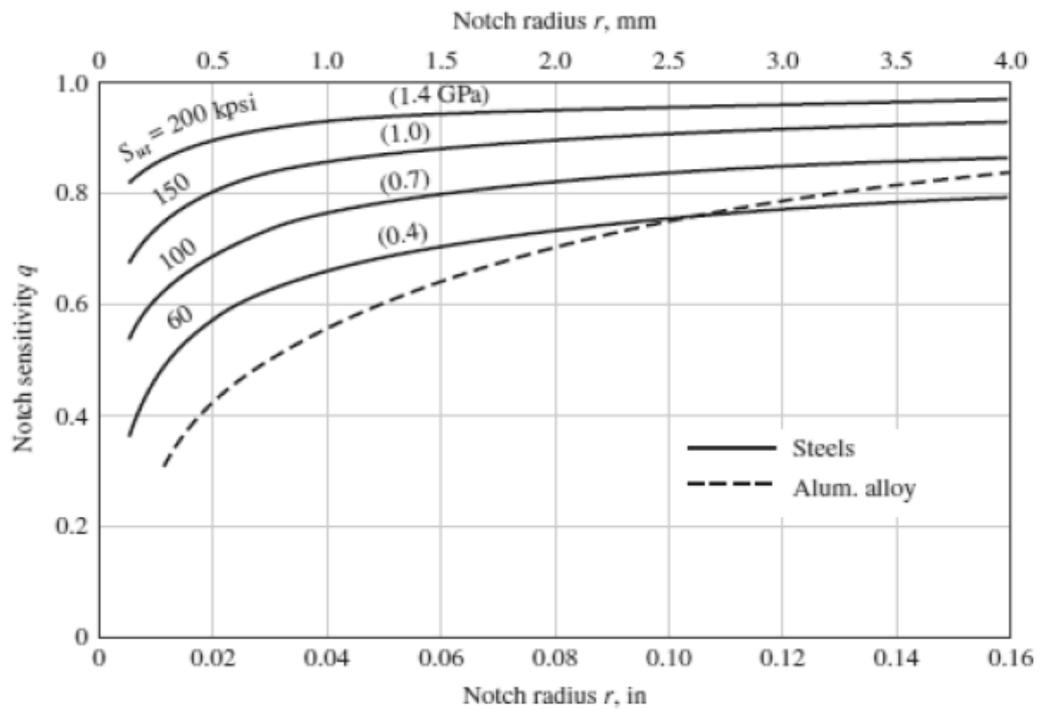


Figura 3.6: Sensibilidad a las ranuras para cargas de flexión y axiales alternantes (22)

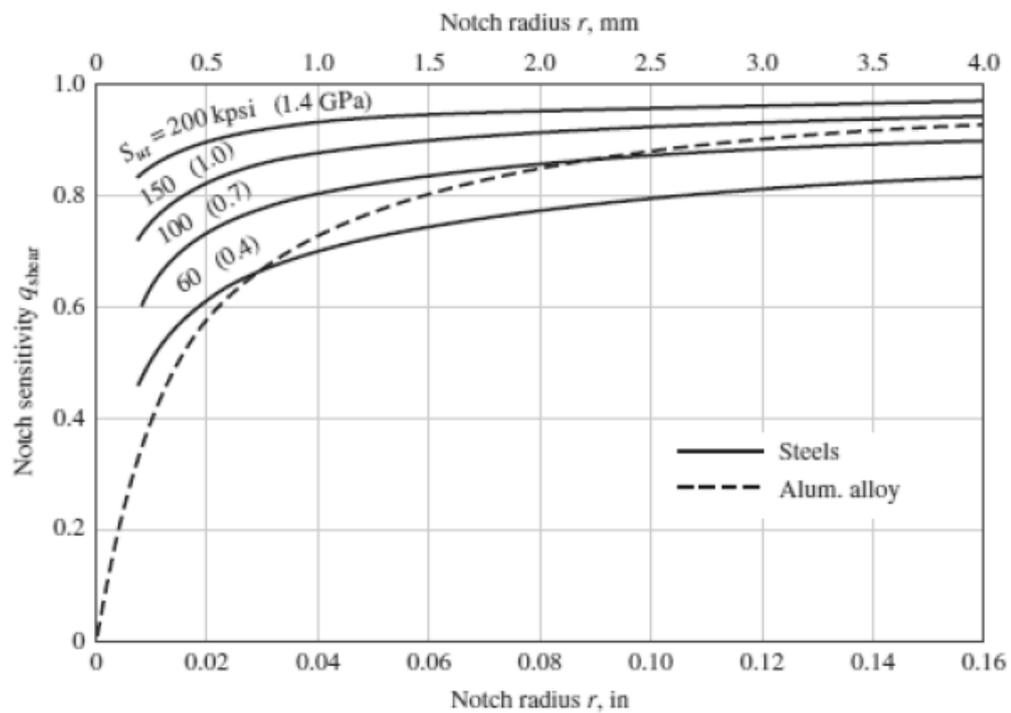


Figura 3.7: Sensibilidad a las ranuras para cargas de torsión alternantes (22)

El factor de sensibilidad a las ranuras que depende del material es  $q$  que se obtiene de las Figuras 3.8 y 3.9:

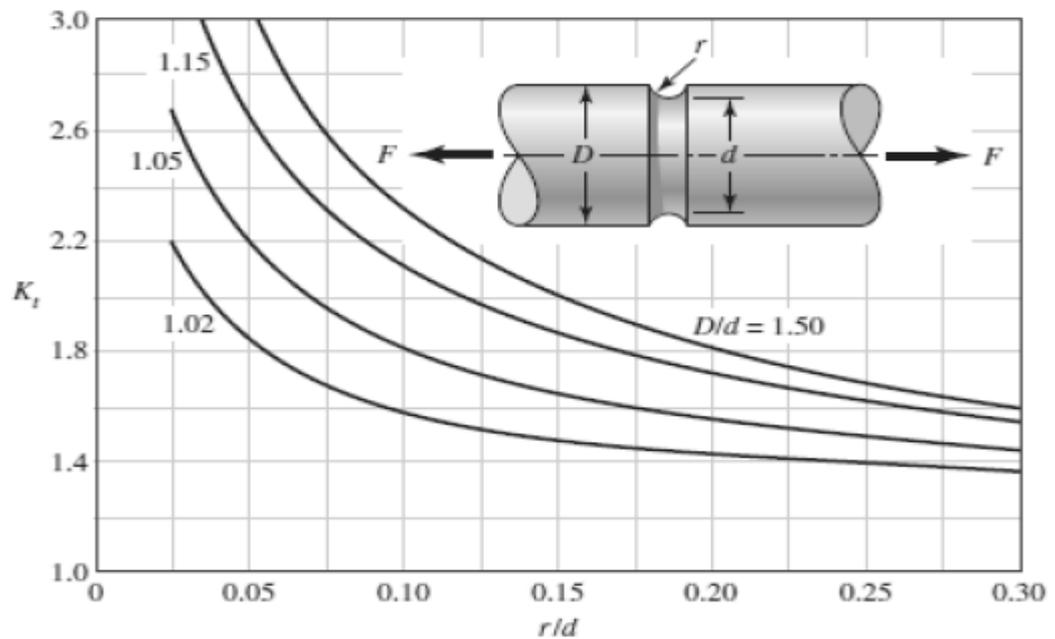


Figura 3.8: Factor  $K_t$  para esfuerzo axial en eje con entalla (22)

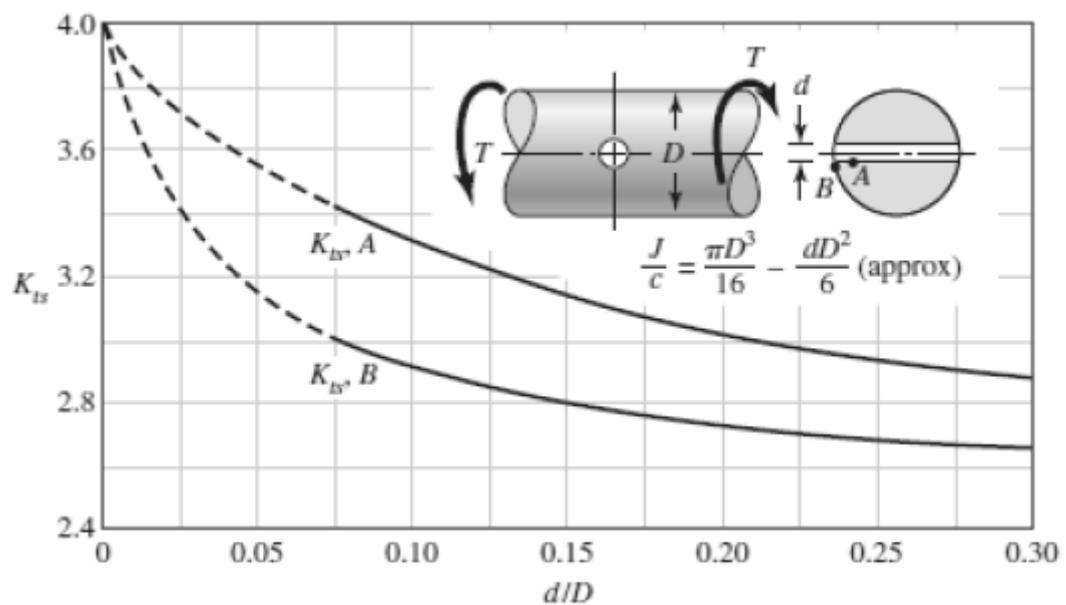


Figura 3.9: Factor  $K_t$  para esfuerzo de torsión en eje agujereado (22)

Así se obtiene  $R_f$  denominado factor de reducción de la resistencia en caso de fatiga, y por consiguiente  $K_e$ .

❖ Factor de efectos diversos  $K_f$ :

Se utiliza este factor para poder tener en cuenta todos los demás efectos que pueden afectar a la resistencia a la fatiga y que no están incluidos en los factores anteriores, los más importantes son:

- 1) Efectos residuales o remanentes: Tiene en cuenta posibles modificaciones del límite de resistencia a fatiga por procesos de manipulación como el chorreado de arena o el laminado en frío que inducen esfuerzos de compresión en la superficie de la pieza.
- 2) Características direccionales operacionales: Cuando se realizan operaciones de estirado, laminación y forja el límite a fatiga en dirección transversal es un 10-20% inferior que en dirección longitudinal.
- 3) Efectos del temple superficial: Las microestructuras de la capa superficial y del núcleo central son distintas por lo que en la zona de unión se puede sobrepasar el valor del límite a fatiga al pasar del temple al núcleo.
- 4) Efectos de corrosión: La corrosión disminuye la resistencia a la fatiga debido a la creación de puntos de concentración de esfuerzos.
- 5) Recubrimiento electrolítico: Suelen producir disminución del límite a fatiga, procesos de cromado, niquelado u oxidación anódica, sin embargo, en torsión y galvanizados no cambia el límite a fatiga.
- 6) Corrosión por apriete: La causa está debida al movimiento microscópico en la superficie de piezas mecánicas a raíz de una picadura (cambio de color en la superficie). Se suele producir en estructuras muy ajustadas como cojinetes, juntas atornilladas, etc.

Después de aplicar la ecuación de Marin la curva S-N se modifica adquiriendo la siguiente apariencia:

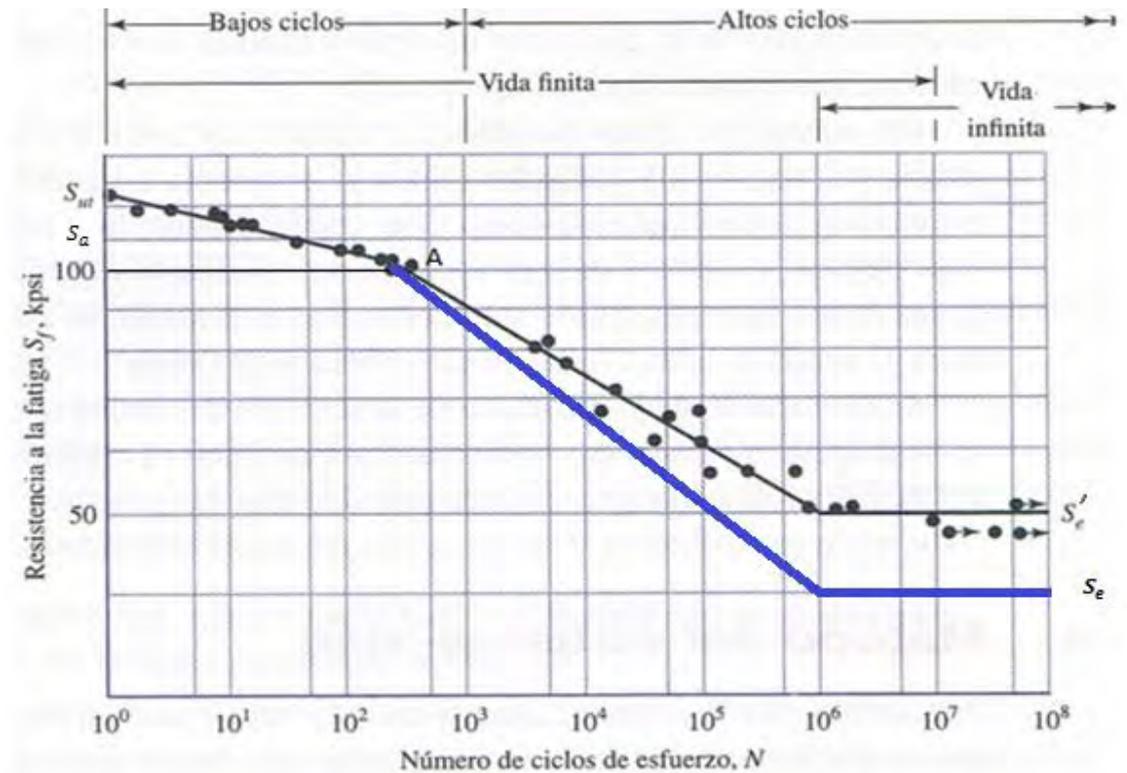


Figura 3.10: Comparación de la curva S-N inicial (negra) y la obtenida al aplicarle los coeficientes de Marin (azul)

### 3.3 Criterios para tensiones medias no nulas

En muchas ocasiones se desea conocer la resistencia de una pieza o elemento para esfuerzos que no son alternantes puros. El problema se puede abordar descomponiendo la carga aplicada en dos componentes, una componente de carácter puramente alternante y otra componente fija. Ambas se pueden sumar por superposición y así obtenerse la carga real. La filosofía sigue siendo la misma que anteriormente, se busca una relación entre la componente alternante de la tensión y la duración esperada del elemento. Pero ahora se debe tener en cuenta que la resistencia disminuirá debido a la componente fija de la tensión, pero la parte que predomina es la alternante.

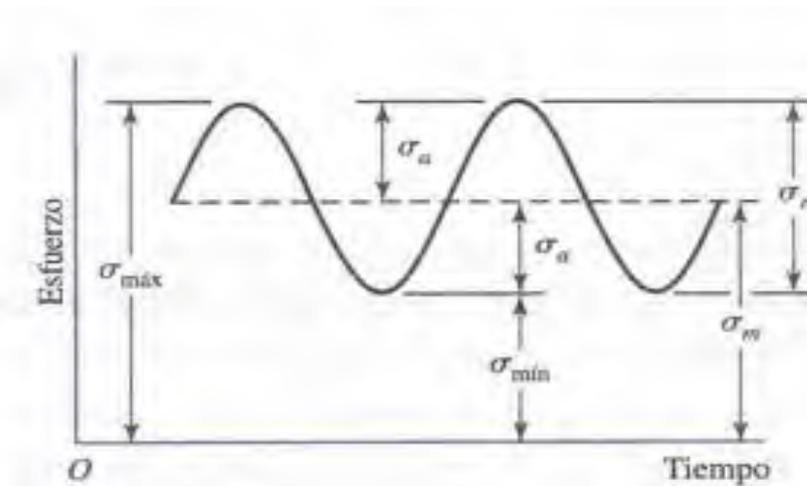


Figura 3.11: Tensión cíclica alternante con tensión media no nula (24)

A continuación se ofrecen tres criterios ampliamente utilizados, los de Soderberg, Goodman y Gerber (23):

1) Criterio de Goodman:

La variación de la resistencia alternante con la media se describe mediante una recta que pasar por  $(0, S_f)$  y  $(S_{ut}, 0)$ , de forma que la rotura se produce cuando se cumple la siguiente relación:

$$\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = 1$$

3.18

Esta relación se ajusta bastante bien a la realidad y es la más utilizada ya que también es lineal. También se puede expresar en términos de resistencias:

$$\frac{S_a}{S_f} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1$$

3.19

2) Criterio de Soderberg:

Es otra teoría lineal pero es menos utilizada que la de Goodman debido a su conservadurismo. Si no hay tensión media la rotura se produce para  $\sigma_a = S_f$  y si no hay tensión alternante y el material es dúctil se produce cuando  $\sigma_r = S_{yt}$ . Para tensiones medias la rotura se produce cuando se cumple:

$$\frac{S_a}{S_f} + \frac{S_m}{S_{yt}} = 1$$

3.20

3) Criterio de Gerber:

Es la única teoría no lineal y supone que la variación de  $\sigma_a$  con  $\sigma_m$  sigue una parábola con vértice en  $(0, S_f)$  y pasa por  $(S_{ut}, 0)$ . La rotura se producirá cuando se cumpla:

$$\frac{S_a}{S_f} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$$

3.21

Hay que destacar que el criterio de Soderberg es el único que previene contra el fallo por fluencia, es decir, en los otros dos criterios en el caso de tener una tensión media suficientemente grande el material podría romper aunque el criterio dijera lo contrario, ya que no tiene en cuenta la fluencia.

Las tensiones medias de compresión no afectan a la resistencia alternante, la rotura siempre se produce por fluencia.

En la Figura 3.12 pueden verse los tres criterios comparados:

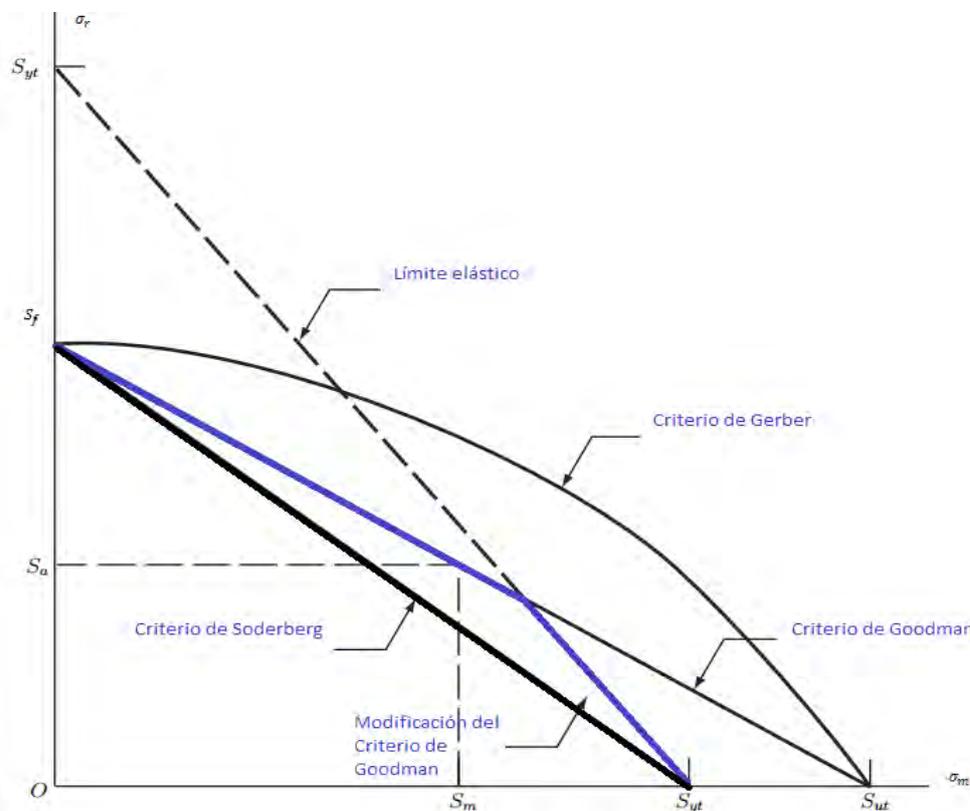


Figura 3.12: Criterios para el fallo por fatiga con tensiones medias no nulas para N ciclos (24)

## 3.4 Propagación de fisuras por fatiga. Ley de Paris

La rotura por fatiga se divide en varias etapas, el origen es un punto de concentración de tensiones en la superficie por la que comienza la rotura. Se pueden ver las tres fases con un ejemplo:

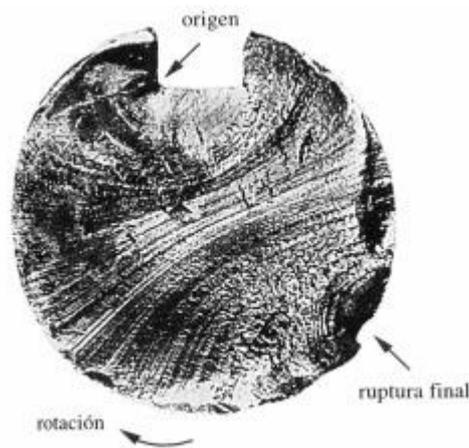


Figura 3.13: Rotura en un eje de transmisión (24)

- 1) Primera fase: Nucleación de la grieta durante  $N_i$  ciclos. Abarca más de la mitad de la sección del eje y tiene un aspecto liso, se ha iniciado en la chaveta que es este punto era el mayor concentrador de tensiones en este caso. Se ha propagado lentamente y de forma asimétrica. En la Figura 3.14 se puede apreciar que a partir de  $\Delta K$  disminuye la velocidad de crecimiento de la grieta. Esta zona está fuertemente regida por la microestructura del material, las condiciones ambientales y el cociente  $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ .
- 2) Segunda Fase: Propagación de la grieta durante  $N_p$  ciclos. La grieta crece en cada ciclo presentando marcas características en la superficie de fractura. Macroscópicamente estas marcas se conocen como marcas de playa y microscópicamente como estrías. Cuando alcanza el tamaño crítico, cambia la dirección de propagación y crece transversalmente a la tensión aplicada. La grieta crece más rápidamente, en el ejemplo cubre casi el resto de la sección del eje y presenta rugosidades.
- 3) Tercera Fase: Fractura final. Se produce cuando se alcanza el tamaño crítico, hay dos posibles casos, si la rotura tiene un aspecto cristalino el material es frágil mientras que si su aspecto es fibroso el material es dúctil. En la Figura 3.14 se puede apreciar que la

velocidad aumenta drásticamente en esta fase hasta el fallo final en  $K_c$ . En la Figura 3.13 esta zona aparece como una pequeña área oscura.

Paris (25) fue el primero que caracterizó el crecimiento de las grietas y fisuras apoyándose en la variación del FIT que está directamente relacionado con las variaciones cíclicas de carga. Paris y Erdogan (25) en 1963 propusieron una ley empírica que lleva su nombre. Para poder explicar esta ley se utilizan conceptos de mecánica de fractura que se presentan a continuación:

$$K_{m\acute{a}x} = F \sigma_{m\acute{a}x} \sqrt{\pi a} \quad 3.22$$

$$K_{m\acute{i}x} = F \sigma_{m\acute{i}x} \sqrt{\pi a} \quad 3.23$$

Son los valores máximos y mínimos del FIT durante un ciclo de carga.

$$\Delta\sigma = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}x} \quad 3.24$$

$$\Delta K = K_{m\acute{a}x} - K_{m\acute{i}x} = F \Delta\sigma \sqrt{\pi a} \quad 3.25$$

La Ley de Paris-Erdogan establece que el incremento de longitud de la grieta por cada ciclo de carga es proporcional a  $\Delta K$  con dos parámetros fijos  $m$  y  $C$  que se determinan experimentalmente, siendo una función del material y de las condiciones ambientales.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad 3.26$$

Para representar la gráfica de la Ley de Paris-Erdogan (Figura 3.14) de una manera más intuitiva y práctica se linealiza la anterior ecuación obteniendo una recta con ordenada en el origen  $\log(C)$  y con pendiente  $m$ . Si se representa de esta forma cuando se toman bastantes datos es mucho más fácil obtener los parámetros  $m$  y  $C$ .

$$\log\left(\frac{da}{dN}\right) = \log(C) + m \log(\Delta K) \quad 3.27$$

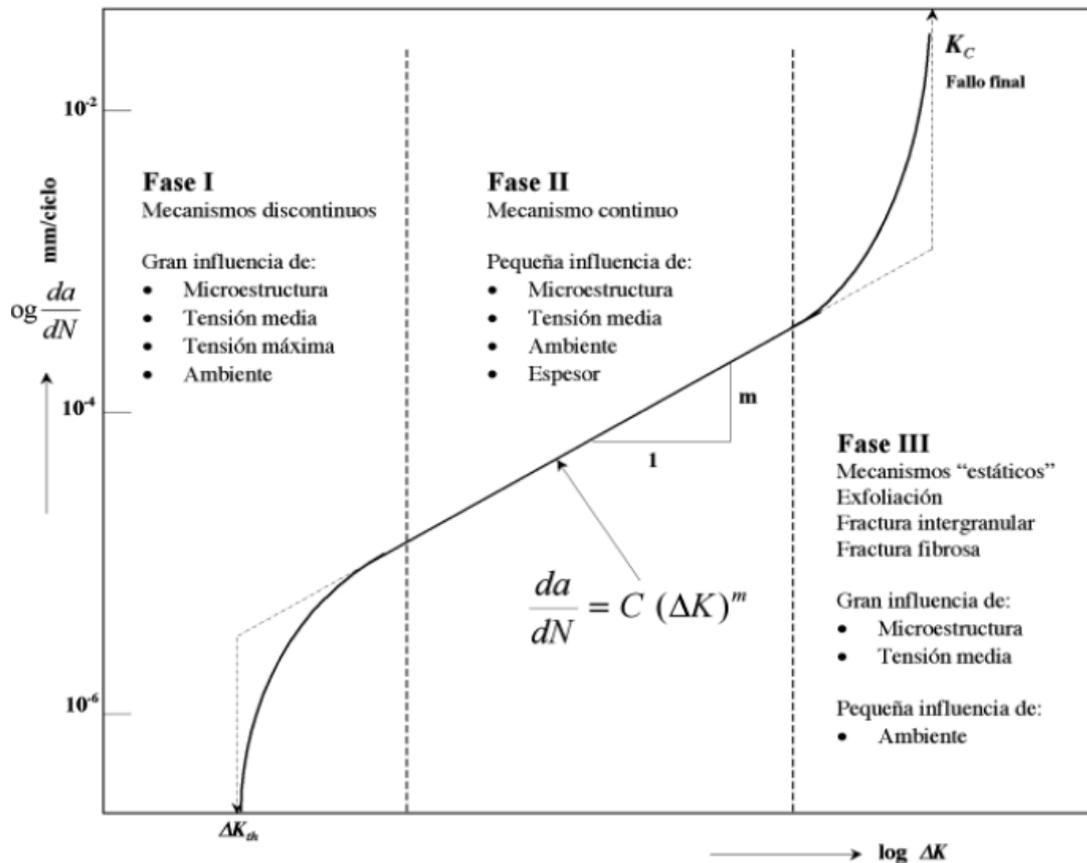


Figura 3.14: Representación gráfica de la evolución de la fisura en función de la velocidad de propagación de la misma (4)

### 3.5 Métodos para la detección de microgrietas

El proceso de rotura por fatiga es un proceso limitado en el tiempo. Existen una buena cantidad de ensayos no destructivos para la detección de microgrietas en los puntos de concentración de tensiones que son el origen de la fractura. Los principales son los siguientes:

- ❖ Pruebas ultrasónicas: Se basan en la propagación de una onda de deformación por compresión. La velocidad de propagación de esta onda depende de la densidad del material con lo cual cambiara cuando haya una fisura pudiendo detectar esta.

- ❖ Inspección con partículas magnéticas: Se induce un campo magnético produciendo líneas de flujo. En el caso de que haya alguna fisura en el interior se produce una reducción de la permeabilidad magnética del material debida a la discontinuidad. El inconveniente es que solo es aplicable a materiales ferromagnéticos.
- ❖ Inspección por líquidos penetrantes: Se detectan grietas que entran en la superficie. Se limpia el material y se rocía sobre la superficie un tinte líquido y se espera un tiempo, luego se limpia y se aplica una solución reveladora que muestra las microgrietas.

Otros métodos que también son muy utilizados son las corrientes de Eddy, la utilización de isotopos radioactivos, los métodos de resonancia, etc.

## 3.6 Geometría de la fisura

Para estudiar el comportamiento de las vigas fisuradas y su flexibilidad es importante conocer la forma de la fisura que se genera. La mayoría de los autores (70) consideran que dichas fisuras presentan un frente recto. Esta hipótesis es aceptable ya que conduce a resultados conservadores, pero no se ajusta completamente a la realidad.

En estudios posteriores se empezaron a analizar fisuras de frente no recto en vigas para el cálculo del FIT. Sin embargo, se ha comprobado que la propagación de dichas fisuras es prácticamente independiente de su forma inicial, por lo que en el presente Trabajo se utilizarán fisuras de frente de grieta recto.

A continuación se presentan en la Tabla 3.3 los parámetros geométricos más importantes que sirven para definir las fisuras de frente semielíptico.

Parámetros para fisuras semielípticas		
PARÁMETRO	EXPRESIÓN	DESCRIPCIÓN
<b>A</b>	$\frac{a}{D}$	Profundidad relativa de la fisura
<b>B</b>	$\frac{a}{b}$	Factor de forma de la fisura: ❖ $\beta = 0$ Fisura de frente recto ❖ $0 < \beta < 1$ Fisura de frente elíptico ❖ $\beta = 1$ Fisura de frente semicircular
<b><math>\gamma</math></b>	$\frac{w}{h}$	Posición relativa en el frente de fisura

Tabla 3.3

Dichos parámetros se ilustran en la Figura 3.17

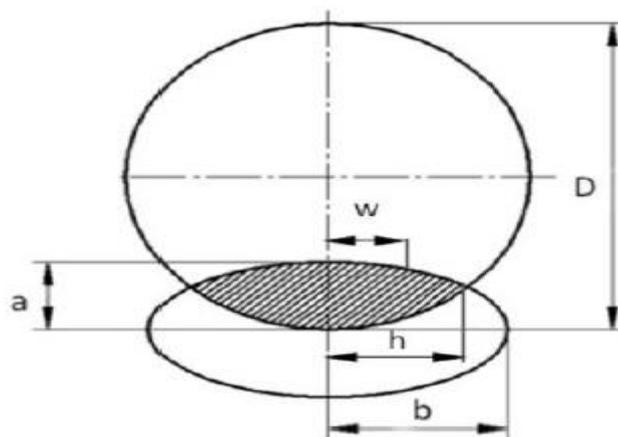


Figura 3.15: Representación de los parámetros geométricos de una fisura de frente semielíptico y de su sección correspondiente (70)

Por otro lado se debe tener en cuenta los diferentes estados tensionales por los que pasa la viga cuando está sometida a una carga cíclica. La fisura no está completamente abierta sino que va abriéndose o cerrándose según esté sometida a esfuerzos de tracción o de compresión. Por lo tanto la rigidez del eje será máxima en la posición en la que la fisura se encuentra cerrada y se comportará como una viga que no estuviera fisurada. En el caso contrario, la rigidez será mínima en la posición en la que la fisura se encuentre más abierta como puede verse en la Figura 3.18.

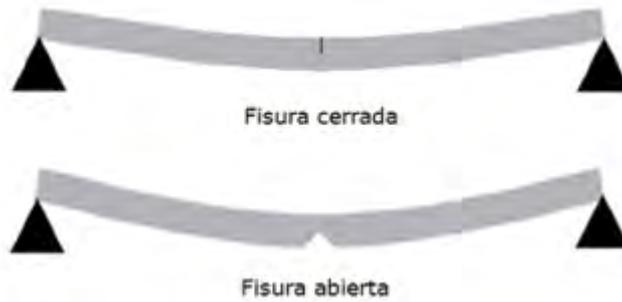


Figura 3.16: Esquemas de la fisura completamente cerrada y completamente abierta  
(70)

Para definir completamente todos los casos por los que pasa una fisura en una viga a lo largo de un período de la fuerza cíclica hay que tener en cuenta que la fisura se puede encontrar en tres estados diferentes: fisura completamente abierta, fisura parcialmente abierta o fisura completamente cerrada.



# 4

# FEM Y XFEM

## 4.1 Método de los Elementos Finitos

Una de las técnicas más usuales actualmente para analizar todo tipo de problemas de ingeniería (estructuras, elementos mecánicos, mecánica de fluidos e incluso transferencia de calor) es el conocido como Método de Elementos Finitos, MEF, o FEM (en *inglés Finite Element Method*). Dicho método es una herramienta de cálculo numérico cuya idea principal consiste en modelar un dominio mediante elementos discretos. Sin embargo, la idea principal de este método de dividir el dominio mediante elementos discretos ya se utilizaba desde la antigüedad. En el Antiguo Egipto el volumen de las pirámides se calculaba mediante técnicas de discretización. Arquímedes (287-212 a.C) también hizo uso de esta herramienta para calcular volúmenes y superficies. Lui Hui (300 d.C) aproximaba el número pi mediante polígonos regulares de más de 3000 lados llegando a aproximaciones muy buenas (3.1416).

Las ideas que finalmente condujeron a la creación de MEF comenzaron en 1909 cuando Rayleigh y Ritz implementaron un método para obtener soluciones aproximadas aplicables en la mecánica de medios continuos. Posteriormente, en 1943 Courant (44) amplió este método para poder aplicarlo también en problemas de torsión. Argyris y Kelsey (45) empezaron a desarrollar el MEF en Stuttgart en 1955. Pero fue en 1960 cuando Clough (46) partiendo de ideas distintas utilizó por primera vez el término de “*elemento finito*”. A partir de entonces con el desarrollo de la informática se produjo un crecimiento exponencial del MEF ya que los ordenadores al ser cada vez más potentes eran capaces de resolver las ecuaciones que requiere este método con mayor rapidez. Ante este progreso tan espectacular los científicos del momento empezaron a investigar la bibliografía disponible en busca de nuevas aplicaciones. Por ejemplo, en la industria aeronáutica destacaron autores como Turner, Martin, Top, Clough (47) y Oden (48) que aportó contribuciones matemáticas al método. En paralelo se empezaron a publicar aplicaciones estructurales como las de Przemieniecki (49), Zienckiewicz y Hollister (50). También se realizaron publicaciones en todos los campos ingenieriles, destacando los trabajos de Zienckiewicz y Cheung (51) o Zienckiewicz y Taylor (52).

Actualmente gran cantidad de programas utilizan esta técnica y se encuentran asociados a interfaces de diseño por ordenador, algunos de ellos permiten incluso la simulación de procesos de fabricación. Esto es conocido como CAD/CAE/CAM (*Computer Aided Design/ Computer Aided Engineering/ Computer Aided Manufacturing*) que es uno de los campos con mayor desarrollo hoy en día y cuya aplicación en la industria está muy extendida.

### 4.1.1 Ideas Básicas del MEF

El principal concepto del MEF es la división de un medio continuo en un número finito de elementos cuyo comportamiento queda determinado atribuyendo una serie de parámetros a un cierto número de puntos significativos denominados nodos. Dichos puntos se sitúan en los puntos de conexión de los elementos colindantes. Las variables de interés (tensiones, deformaciones, desplazamientos, etc.) se resuelven en estos puntos de forma aproximada. La solución de las variables para el resto de puntos se obtiene por interpolación de los resultados en los nodos mediante las funciones de forma o interpolación.

La principal ventaja del MEF es que permite transformar un problema en ecuaciones diferenciales de gran complejidad analítica en un problema matricial que proporciona resultados para los nodos e interpolando posteriormente con estos valores obtiene valores aproximados para el resto del dominio. En general este proceso puede dividirse en tres etapas:

- 1) Preproceso: Abarca aspectos como la asignación de propiedades de los materiales, generación de la geometría, especificación tanto de las cargas como de las condiciones de contorno y la generación de la malla.
- 2) Cálculo: Se genera un sistema de ecuaciones, cuya complejidad es inversamente proporcional al tamaño de la malla, a partir de los datos introducidos previamente en el paso anterior. Dicho sistema se resuelve mediante distintos algoritmos de resolución. En el caso de que el problema no se analice para un único instante de tiempo y dependa de él, es necesario la resolución consecutiva de sistemas de ecuaciones. Esto quiere decir que para la resolución de un determinado sistema se tiene en cuenta la solución obtenida para el mismo sistema en el paso anterior.
- 3) Postproceso: Haciendo uso de las funciones de forma se extiende la solución nodal del cálculo a los elementos. Una vez acabado este proceso, mediante el uso de las interfaces gráficas se pueden visualizar y manipular los resultados.

## 4.1.2 Hipótesis de discretización

En una estructura discreta, su deformación está definida por un número finito de parámetros y viene dada por una función vectorial que indica cuáles son las deformaciones en cualquier punto. Esta función es solución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema. El principal inconveniente es que estas expresiones analíticas no son fáciles de calcular ni es posible su cálculo en muchas ocasiones.

Para resolver este problema el MEF recurre a varias hipótesis de discretización:

- ❖ El medio continuo se divide en elementos finitos que tienen geometrías sencillas y normalizadas. Para dichas divisiones se utilizan líneas o superficies imaginarias.
- ❖ Los elementos finitos están unidos entre sí por puntos denominados nodos.
- ❖ Las incógnitas básicas del problema son los desplazamientos en cada uno de los nodos, estos determinan unívocamente la configuración deformada de la estructura. Son los únicos desplazamientos independientes.

- ❖ El desplazamiento de un punto cualquiera de un elemento se puede obtener gracias a los desplazamientos de los nodos que forman dicho elemento. Cada elemento lleva asociado unas funciones de interpolación que garantizan la compatibilidad de deformaciones necesaria en los contornos de unión entre los elementos. Con estas funciones se puede calcular cualquier desplazamiento interior por interpolación de los desplazamientos nodales.
- ❖ Las deformaciones unitarias en el interior del elemento se obtienen mediante las funciones de interpolación y los desplazamientos nodales. Haciendo uso de las ecuaciones constitutivas del material definen el estado tensional de todo el elemento (interior y fronteras).
- ❖ Cada elemento tiene asociado un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, que mantienen el equilibrio entre las tensiones existentes en el contorno del elemento y las fuerzas exteriores actuantes.

Las conclusiones más importantes de estas hipótesis y que hay que tener más en cuenta son las siguientes:

- ❖ La función de desplazamientos solución al problema  $\mathbf{u}$  es aproximada e independiente en cada elemento. Para una estructura o componente discretizada en varios elementos, se pueden utilizar funciones de interpolación distintas para cada uno de ellos. Pueden ser lineales, cuadráticas, cúbicas, etc. Siempre teniendo cuidado para que se cumplan las ecuaciones de compatibilidad en las fronteras de los elementos.
- ❖ La función solución es una aproximación dentro de cada elemento que depende de un número limitado de parámetros los cuales son los valores de dicha función en los nodos que conforman el elemento y en algunas ocasiones sus derivadas.

### 4.1.3 Aplicación a problemas estructurales de elasticidad tridimensional

Las variables que se tienen en cuenta para el cálculo en aplicaciones estructurales del MEF son desplazamientos, deformaciones y tensiones.

### 4.1.3.1 Desplazamientos

Cada punto del sólido posee tres desplazamientos  $u, v, w$  que dependen de forma genérica de sus coordenadas  $x, y, z$  y que están agrupadas en el vector  $u$  de desplazamientos.

$$u = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

4.1

Cada nodo de un elemento presenta unos desplazamientos  $U_i, V_i, W_i$  que se agrupan formando el vector de desplazamientos nodales de un elemento  $d^e$ .

$$d^e = \{ U_1 \ V_1 \ W_1 \ U_2 \ V_2 \ W_2 \ \dots \ U_n \ V_n \ W_n \}^T$$

4.2

Siendo  $n$  el número de nodos del elemento en cuestión.

Si se considera un elemento finito genérico, se puede aproximar el campo de deformaciones en su interior gracias a la hipótesis de interpolación a partir de las deformaciones en cada uno de los  $n$  nodos del elemento. Los factores que se utilizan para la ponderación son, evidentemente, las funciones de interpolación.

$$u = \sum N_i U_i$$

4.3

$$v = \sum N_i V_i$$

4.4

$$w = \sum N_i W_i$$

4.5

Que se pueden expresar en forma matricial como  $u = Nd^e$ .

4.6

La matriz de funciones de interpolación  $N$  posee tres filas y el mismo número de columnas que los grados de libertad que suman todos los nodos del elemento. La matriz para un elemento de  $n$  nodos es la siguiente.

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

4.7

### 4.1.3.2 Deformaciones

Al igual que cada punto del sólido tiene asociado un vector de desplazamientos  $u$ , también se le puede asociar un vector de deformaciones  $\epsilon$  compuesto por tres componentes unitarias  $\epsilon$  y tres de cortadura  $\gamma$ . Si se asume como hipótesis que las deformaciones son pequeñas se puede expresar como:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \partial u$$

4.8

En esta expresión aparece el operador matricial  $\partial$  que se utiliza para pasar las deformaciones de un punto  $u$  del elemento a las deformaciones unitarias  $\epsilon$ . El tamaño del operador viene definido por las deformaciones unitarias del problema (filas) y las componentes del campo de desplazamientos (columnas). Sustituyendo el vector de desplazamientos  $u$  por su expresión matricial en función de los desplazamientos nodales  $d^e$  el vector de deformaciones que se obtiene es:

$$\epsilon = \partial Nd^e = Bd^e$$

4.9

Esta matriz  $\mathbf{B}$  es la que se usa para relacionar las deformaciones de los nodos con las deformaciones unitarias en un punto genérico del elemento, y se define como:

$$B = \partial N = \partial \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} = [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_n]$$

4.10

Donde las distintas componentes de  $\mathbf{B}$  quedan definidas por la siguiente expresión:

$$B_i = \partial N_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

4.11

Este valor de  $\mathbf{B}$  aquí presentado se ha obtenido para el caso de elasticidad tridimensional, su valor en función de  $\mathbf{\delta}$  y  $\mathbf{N}$  se puede generalizar para problemas de flexión de placas, de revolución, etc.

### 4.1.2.3 Tensiones

El tensor de tensiones en tres dimensiones proporciona el valor de la tensión en cualquier punto del sólido.

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

4.12

Para relacionar tensiones con deformaciones se hace uso de las ecuaciones constitutivas del material. En el caso particular de un material elástico lineal esta ecuación constitutiva se escribe como:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0$$

4.13

En la ecuación aparecen los siguientes términos:

- ❖ **D** es la matriz elástica, que en el caso de un material elástico-lineal es constante y función únicamente de dos parámetros del material como son el modulo elástico **E** , y del coeficiente de Poisson **v**.
- ❖ **ε<sub>0</sub>** es el vector de deformaciones unitarias iniciales que siempre es dato del problema. Tiene diversos orígenes siendo el más habitual la temperatura.
- ❖ **σ<sub>0</sub>** las tensiones iniciales presentes en el material que normalmente son función de la historia del material (tratamientos térmicos realizados anteriormente y otros procesos) y por tanto conocidas.

A pesar de que las expresiones para **D**, **ε<sub>0</sub>** y **σ<sub>0</sub>** dependen del tipo de problema que se considere aquí se ofrecen las expresiones para el caso de un material elástico lineal constante.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

4.14

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

4.15

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

4.16

Siendo  $\lambda$  y  $\mu$  dos constantes elásticas conocidas como los parámetros de Lamé.  $\lambda$  es conocido como el primer parámetro de Lamé y  $\mu$  el modulo de elasticidad transversal o segundo parámetro de Lamé también conocido por  $G$ .

#### 4.1.3.4 Ecuación de equilibrio de un elemento

El Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) establece que el trabajo virtual realizado por las fuerzas que actúan sobre un elemento debe coincidir con el incremento de energía elástica del mismo.

$$\delta W^e = \delta U^e$$

4.17

Las fuerzas que actúan sobre un elemento finito son las fuerzas exteriores de volumen aplicadas en el interior del elemento  $\mathbf{q}_v$ , las fuerzas exteriores de superficie aplicadas en el contorno libre del elemento  $\mathbf{q}_s$ , las fuerzas interiores de superficie en la unión con elementos vecinos  $\mathbf{q}_c$  y las fuerzas puntuales sobre los nodos del elemento  $\mathbf{P}_N^e$ . En la Figura 4.1 se muestran todas estas fuerzas actuando sobre un elemento.

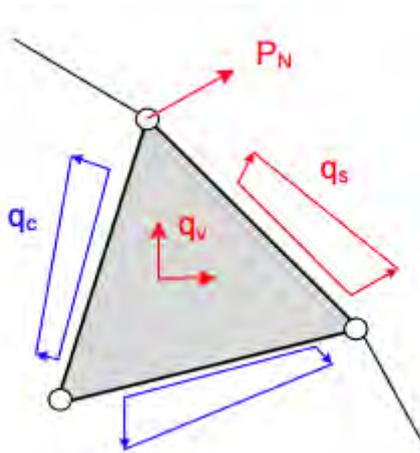


Figura 4.1: Representación de las fuerzas que actúan sobre un elemento, exteriores y puntuales (rojo) e interiores (azul) (8)

El trabajo virtual que producen estas fuerzas es el siguiente:

$$\delta W^e = \int_v \delta u^T q_v dv + \int_s \delta u^T q_s ds + \int_s \delta u^T q_c ds + \delta \delta^{eT} P_N^e \quad 4.18$$

Aplicando el PTV se obtiene la variación de energía elástica  $\delta U^e$ :

$$\delta W^e = \int_v \delta \varepsilon^T \sigma dv = \delta U^e \quad 4.19$$

Por lo tanto igualando con la anterior ecuación se obtiene:

$$\int_v \delta u^T q_v dv + \int_s \delta u^T q_s ds + \int_s \delta u^T q_c ds + \delta \delta^{eT} P_N^e = \int_v \delta \varepsilon^T \sigma dv \quad 4.20$$

Ahora se puede obtener la ecuación de equilibrio del elemento sustituyendo la ecuación constitutiva del material en función de la función  $\mathbf{B}$  y reordenando los términos al final resulta:

$$\int_v B^T DB \delta^e dv = \int_v N^T q_v dv + \int_s N^T q_s ds + \int_v B^T D \varepsilon_0 dv - \int_v B^T \sigma_0 dv + P_C^e + P_N^e$$

4.21

En esta ecuación pueden distinguirse varios términos significativos:

- ❖ Matriz de rigidez del elemento finito: Es una matriz simétrica de tamaño igual al número de grados de libertad del elemento considerado.

$$K^e = \int_v B^T DB dv$$

4.22

- ❖ Vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las fuerzas externas por unidad de volumen.

$$P_v^e = \int_v N^T q_v dv$$

4.23

- ❖ Vector de fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas superficiales exteriores.

$$P_s^e = \int_s N^T q_s ds$$

4.24

- ❖ Vector de fuerzas nodales equivalentes producidas por las deformaciones iniciales.

$$P_T^e = \int_v B^T D \varepsilon_0 dv$$

4.25

- ❖ Vector de fuerzas nodales equivalentes producidas por las tensiones iniciales.

$$P_b^e = \int_v B^T \sigma_0 dv$$

4.26

Así la ecuación de equilibrio del elemento finito puede expresarse de forma más compacta:

$$K^e \delta^e = P_v^e + P_s^e + P_T^e + P_b^e + P_C^e + P_N^e$$

4.27

El procedimiento descrito anteriormente puede extenderse desde un único elemento hasta el modelo completo. Este artificio puede realizarse mediante técnicas de concatenación de matrices de los distintos elementos hasta alcanzar la ecuación de equilibrio de todo el modelo.

## 4.2 Método de los Elementos Finitos Extendido

El Método de los Elementos Finitos (MEF) ha evolucionado notablemente durante las últimas décadas consolidándose como una de las técnicas más utilizadas para resolver gran variedad de problemas ingenieriles. Una de las aplicaciones de más interés del método es el análisis de problemas de la Mecánica de la Fractura, que facilita el estudio y la evaluación de la integridad estructural de elementos mecánicos, la fiabilidad y la detección y control de grietas.

En la Figura 4.2 se muestra la malla de elementos finitos en un cierto instante de la propagación de la una grieta aguda. Evidentemente el mallado tiene que adaptarse al contorno de la grieta y por ese motivo es necesario ir remallando todo el dominio de la grieta según esta avanza. Esto conlleva unos costes computacionales y temporales, además de que las aproximaciones son peores (se comete un error mayor).

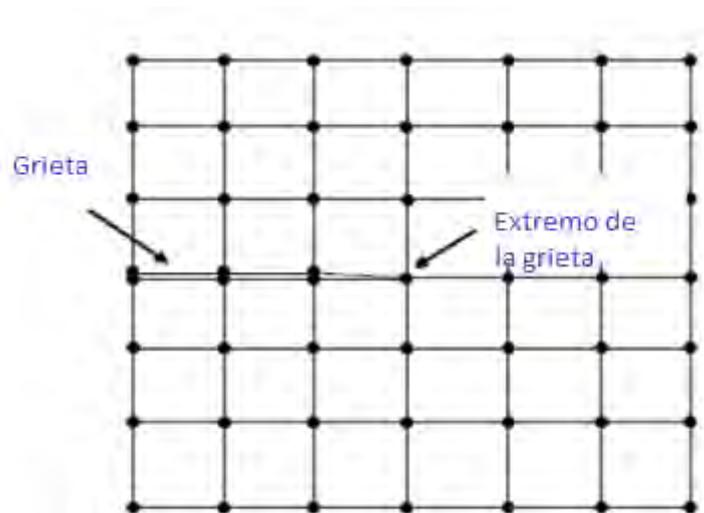


Figura 4.2: Adaptación de la malla a la topología de la fisura

Las dificultades encontradas para tratar con este tipos de tecnologías motivaron el desarrollo de nuevos métodos como el XFEM (*eXtended Finite Element Method*). Propuesto por Belytschko y Black (53) y Moes et al. (54) en 1999. La característica diferenciadora de este método es que utiliza solo una malla que no necesita un gran nivel de refinamiento ni ser estructurada. La fisura se considera como una entidad separada e independiente del resto del elemento. Las interacciones fisura-elemento se produce a través del enriquecimiento de los nodos que pertenecen a los elementos atravesados por la fisura.

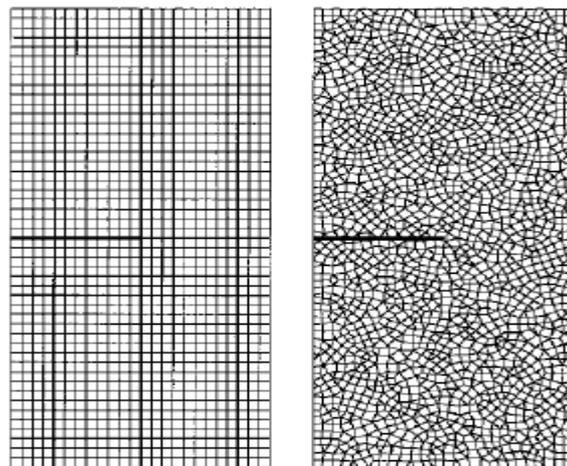


Figura 4.3: Comparación entre la fisura en una malla estructurada (izquierda) y una no estructurada (derecha) (53)



Figura 4.4: Representación en XFEM de la grieta y el elemento fisurado por separado (54)

## 4.2.1 Funciones de enriquecimiento

El modelo propuesto por Belytschko y Black (53) propone un aumento de los grados de libertad de los nodos pertenecientes a los elementos de la malla que cubren la parte del extremo de la grieta. Se modeliza mediante la siguiente formulación:

$$u(x) = \sum_i^m N_i(x)u_i + \sum_i^n \left[ N_i(x) \sum_{l=1}^4 F_l(x)b_{il} \right]$$

4.28

Donde  $m$  es el número total de nodos en la malla que se identifican con los puntos pequeños en la figura,  $n$  es el número de nodos enriquecidos con más grados de libertad (*g.d.l*) que se identifican con los puntos grandes en la figura.  $x$  es el eje de ordenadas que está orientado en la misma dirección de las caras de la grieta.  $N_i(x)$  son las funciones de interpolación mencionadas anteriormente,  $b_{il}$  los grados de libertad añadidos con este nuevo método y  $F_l(x)$  son las nuevas funciones de enriquecimiento para el extremo de grieta y que pueden obtenerse a partir del campo de desplazamientos de la MFEL.

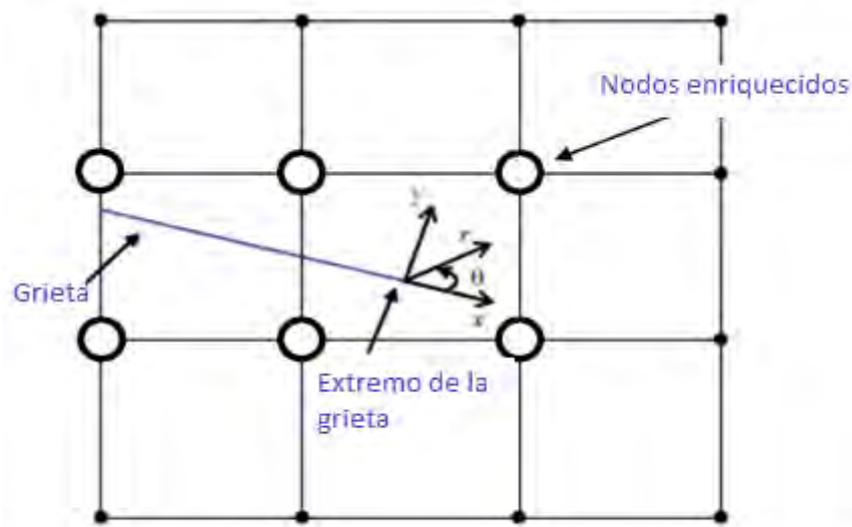


Figura 4.5: Enriquecimiento de los nodos del elemento en que se encuentra el frente de grieta (69)

## 4.2.2 Funciones de enriquecimiento de Heaviside

El modelo utilizado por Belytschko y Black (53) presenta un problema debido a que las funciones de enriquecimiento de tipo extremo de grieta no son efectivas para los elementos alejados de la grieta cuando esta aumenta o su trayectoria no es rectilínea. Para solucionar este pequeño contratiempo Moes et al. (54) desarrollo un planteamiento similar al utilizado por Belytschko y Black (53) pero enriqueciendo los nodos alejados de la grieta representados en la figura por los puntos azules. Para poder realizar esta modificación tuvo que hacer uso de la función de Heaviside.

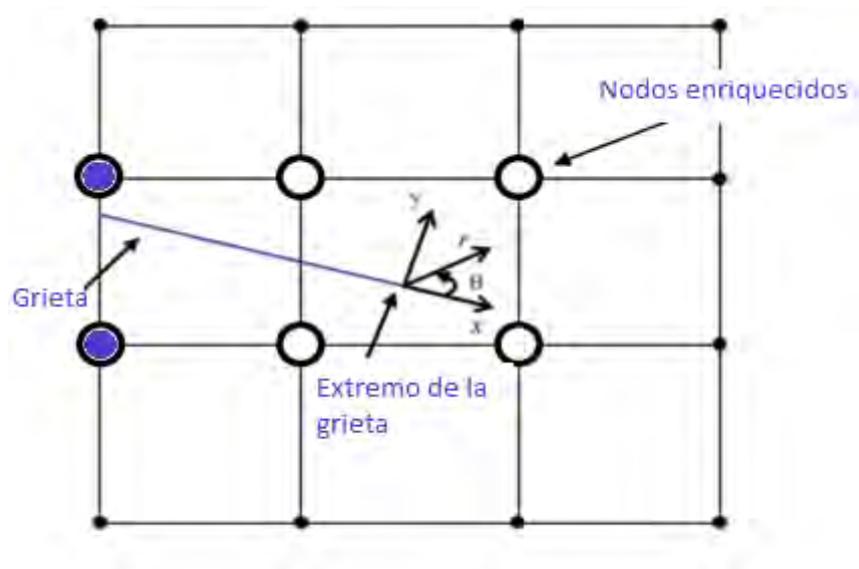


Figura 4.6: Enriquecimientos de Heaviside (nodos en azul) de los elementos alejados del frente de grieta (69)

La formulación de los desplazamientos con este nuevo matiz viene dada por la siguiente ecuación:

$$u(x) = \sum_i^m N_i(x)u_i + \sum_i^p N_i(x)H(x)a_i + \sum_i^n \left[ N_i(x) \sum_{l=1}^4 F_l(x)b_{il} \right]$$

4.29

Donde  $\mathbf{p}$  son los nodos alejados de los extremos de la grieta enriquecidos con la función de Heaviside  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ . De esta manera, se aumentan los g.d.l de 2 a 4 en el caso plano estándar gracias al enriquecimiento de dicha función, sin embargo, los g.d.l de los nodos que limitan el elemento donde se encuentra presente el extremo de la grieta experimentan un aumento mucho más significativo, de 2 a 10 g.d.l (8 adicionales).

En poco tiempo se consiguió extrapolar el caso plano al caso tridimensional gracias a Sukumar et al. (56). A partir de ese momento, el XFEM ha experimentado un desarrollo exponencial. Se han realizado trabajos utilizando distintas variantes. Uno de los más destacados es el desarrollado en 2003 por Zy y Belytschko (57) junto con Ventura et al. (58) que propone una variante conocida como “shifted” y que fue utilizada posteriormente por otros autores como Giner et al. (59) en sus trabajos.

## 4.3 Modelización de fisuras en Abaqus mediante XFEM

Como ya se ha comentado para el tratamiento del crecimiento de las fisuras se creó el XFEM que presenta ciertas ventajas respecto del FEM tradicional. Algunas de estas mejoras son: el ahorro numérico que implica no tener que remallar el modelo según la grieta se va propagando, la posibilidad del crecimiento de esta por el interior de los elementos, la separación de la grieta del resto del dominio por el que se propagará. Todo esto permite un desarrollo más fácil del presente Trabajo.

Se va a utilizar el software Abaqus para los distintos casos de estudio ya que es el más conocido por el autor, podrían usarse otros programas parecidos como ANSYS que también incorporan cálculos mediante XFEM.

### 4.3.1 Introducción Abaqus

Abaqus FEA (de las siglas en inglés *Finite Element Analysis*), también conocido como Abaqus, se define como un programa de análisis y cálculo numérico de simulaciones basado en el Método de Elementos Finitos. Es un programa que presenta muchas posibilidades al usuario, desde simular procesos de fabricación hasta evaluar diferentes alternativas en el diseño de un producto y probar este en sus condiciones de trabajo, etc. Por lo que se puede decir que abarca un amplio rango en el ámbito de análisis de procesos industriales.

El menú principal de Abaqus es el siguiente. En la Figura 4.7 se especifican los distintos bloques en los que está dividido dicho menú.

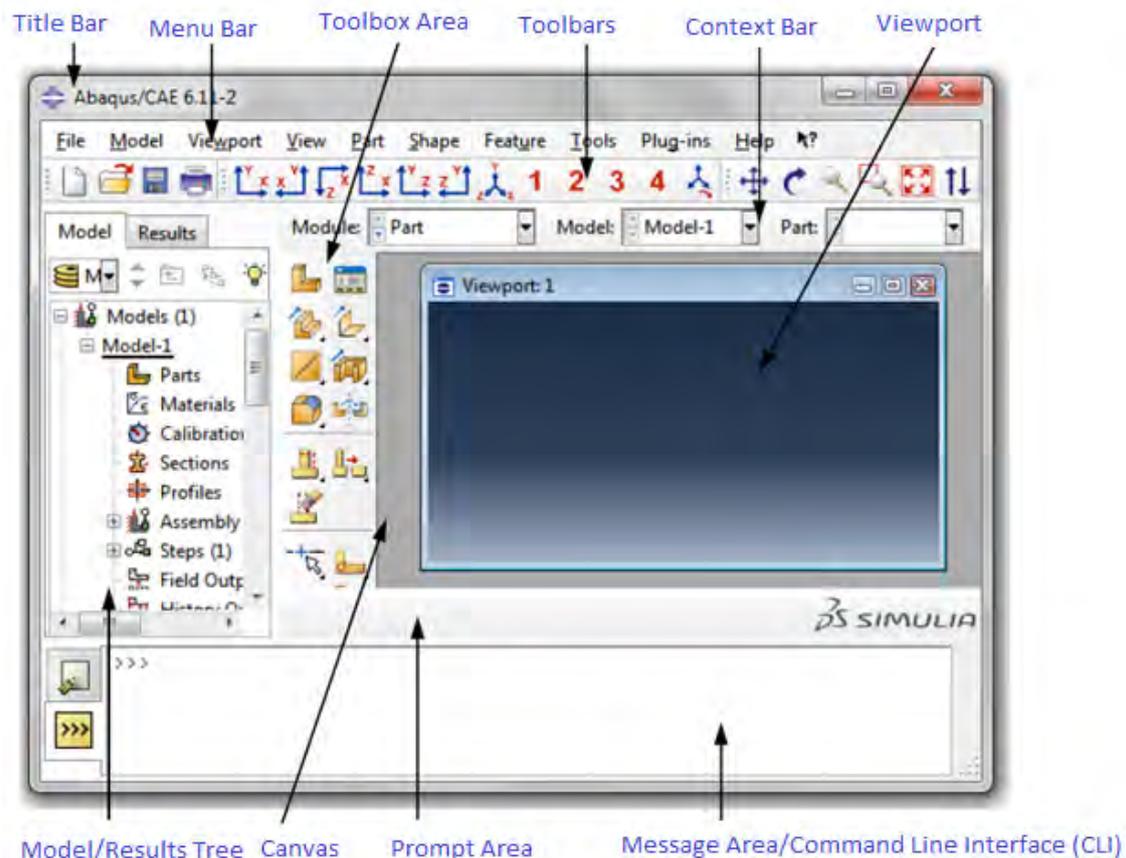


Figura 4.7: Menú principal de Abaqus/CAE (69)

Se puede describir el funcionamiento básico de Abaqus mediante las siguientes etapas:

- 1) Preprocesamiento: En esta etapa se crea el input file (con extensión *\*.inp*). En dicho archivo queda almacenada la información del modelo, es decir, la geométrica, los materiales, las cargas, las condiciones de contorno, las interacciones (si las hay), el tipo de malla, etc.
- 2) Procesamiento: El archivo generado en la etapa anterior es enviado para su resolución, generándose así el output file (*\*.odb*) que es donde se guardarán todos los resultados de la simulación.
- 3) Postprocesamiento: En esta última etapa se permite al usuario visualizar y manipular los resultados.

El proceso de funcionamiento de Abaqus puede esquematizarse de la siguiente manera:

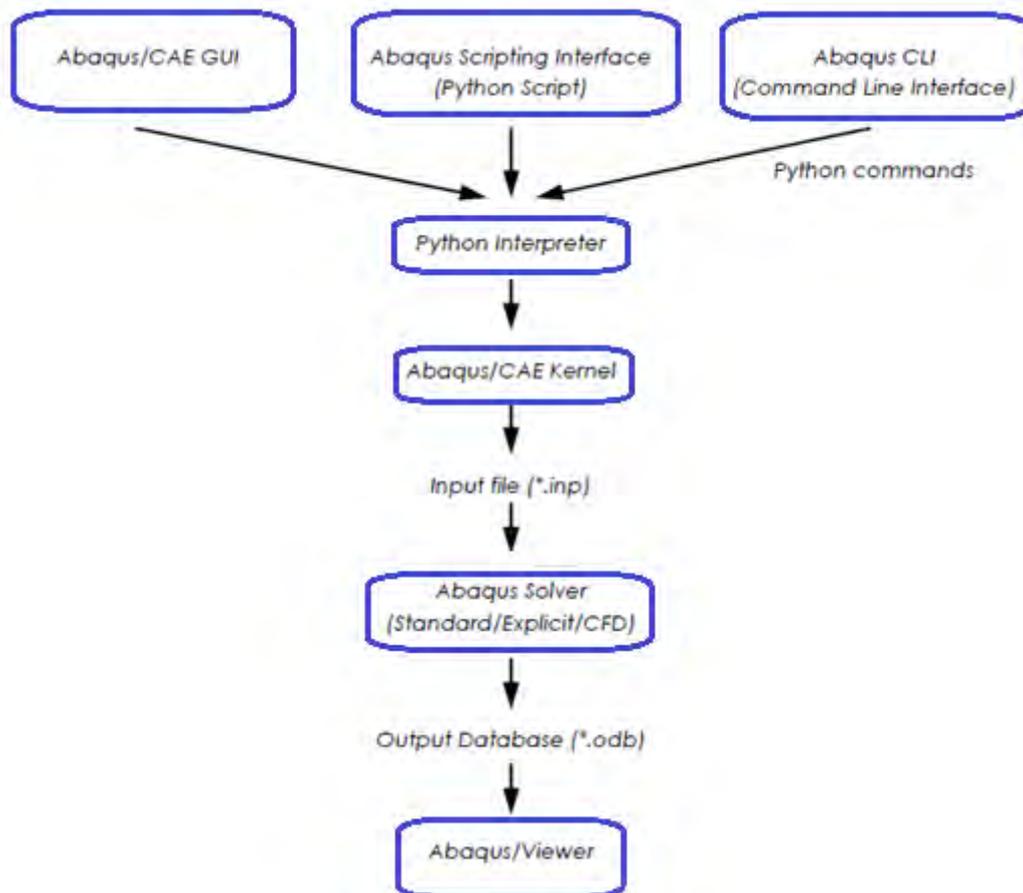


Figura 4.8: Esquema general del funcionamiento interno de Abaqus (69)

Hay que señalar que el usuario solo puede intervenir en las etapas inicial, mediante la creación del input file, y final, manipulando los resultados. Existen varias formas posibles para generar el input file en la primera etapa.

La utilización de la interfaz Abaqus/CAE es la forma más intuitiva para los usuarios. Esta interfaz se encuentra dividida en distintos módulos que permiten suministrar al programa la información necesaria que este necesita para crear el archivo \*.inp. El funcionamiento es sencillo, las acciones que el usuario realiza en la GUI (de las siglas en inglés *Graphical User Interface*) son transformadas en comandos en el lenguaje de programación Python, posteriormente pasan por un intérprete y se introducen en el núcleo del programa el cual genera el input file. Al ser muy fácil de comprender gracias a las herramientas CAD gráficas e intuitivas de las que dispone Abaqus es la alternativa más utilizada. También hay una opción para importar archivos de otros programas, como Solid Edge, por ejemplo y acabar de definir en Abaqus los pasos restantes.

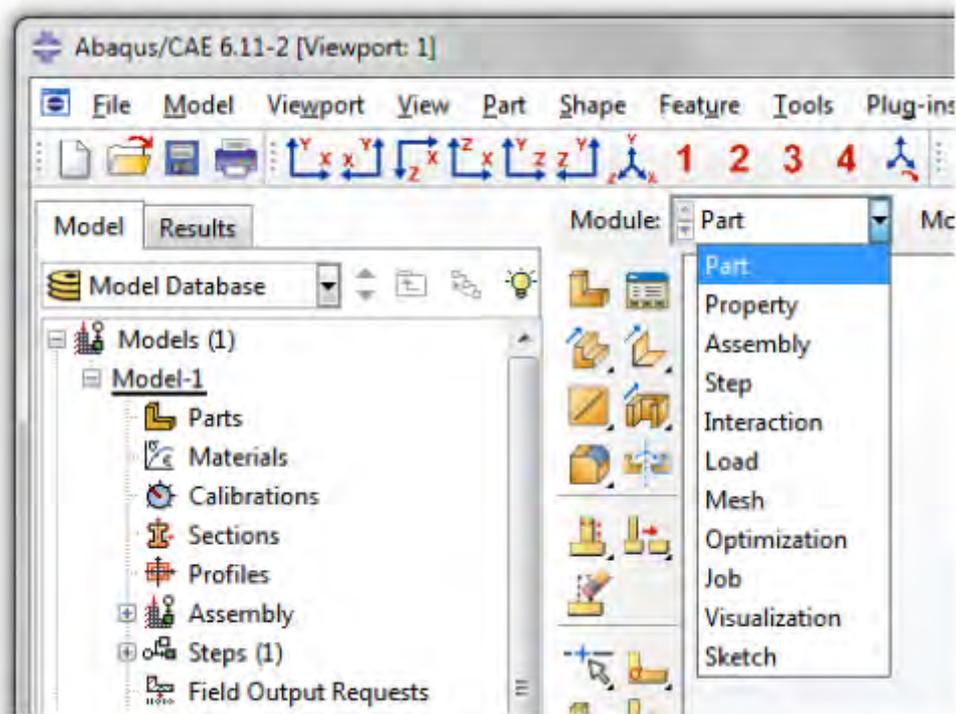


Figura 4.9: Módulos de la GUI en Abaqus/CAE

Otra manera de generar el input file consiste en escribir comandos desde la Command Line Interface o CLI como se puede apreciar en la Figura 4.7.

Por otra parte, se puede utilizar la interfaz de Abaqus Scripting. Para poder generar de esta manera el input file hay que escribir los comandos deseados en el lenguaje de programación Python, se escribe en un documento de texto con la extensión \*.py. Cuando se ejecuta el script los comandos se envían al núcleo del programa para la creación del archivo \*.inp. La ventaja de esta alternativa radica en la posible automatización y simplificación de tareas repetitivas que de otro modo consumirían más tiempo como la creación de los materiales, la parametrización de modelos o la optimización de procesos. No obstante, no es muy adecuado utilizar esta interfaz para geometrías muy complejas, en estos casos es más conveniente su creación en GUI o directamente importarlas desde otros programas más específicos para el diseño de dichas geometrías.

Una de las ventajas más destacables de Abaqus es el ahorro de tiempo que supone la automatización de procesos o de tareas repetitivas. Un ejemplo claro de esta ventaja se puede apreciar a la hora de introducir las características de los materiales a utilizar en cada modelo. Para un modelo sencillo en el que el número de materiales es reducido se pueden meter las propiedades a mano sin mayor problema. Sin embargo, cuando se realizan modelos más complejos en los que se utilizan más de una vez gran cantidad de materiales es más conveniente escribir un script con toda la información relativa a los materiales a utilizar y por consiguiente disponer en cada nuevo modelo de todos ellos al instante. Otro punto a favor de utilizar este tipo de programas es el fácil intercambio de información del código del modelo de alta

complejidad que se almacena en un espacio muy reducido (Kbytes). Además, también resulta útil para analizar modelos muy parecidos que no difieren excesivamente (diferentes cargas, una interacción más, una dimensión diferente, etc.). Esta parametrización de los modelos es otro ejemplo más de las ventajas de estos programas.

Por último, cabe destacar que Abaqus posee numerosos módulos con incontables ramificaciones, por lo tanto el aprendizaje de este programa puede llevar mucho tiempo para un usuario que no esté familiarizado con este tipo de programas. Mediante el conocimiento del lenguaje de programación Python se puede modificar la interfaz de Abaqus reduciendo así las opciones del usuario para facilitar su uso como ocurre en una aplicación vertical.

Python es el lenguaje de programación que está detrás de Abaqus. En la década de los 80 Guido van Rossum creó este lenguaje en el Centro para las Matemáticas y la Informática (CWI, *Centrum Wiskunde & Informatica*) en los Países Bajos.

La principal característica de Python que le diferencia del resto de lenguajes compilados como C o Java es que el programa se ejecuta desde el código fuente, es decir, no existen pasos intermedios de ejecución ni tampoco compilaciones separadas. Plataformas como Linux, Windows o Macintosh modificaron este lenguaje para poder incorporarlo por el hecho de que es gratuito y libre. Este lenguaje está orientado a objetos ya que se construye sobre ellos haciendo posible la combinación de datos y funcionalidad. Python también permite la posibilidad de implementar funciones o módulos al intérprete de manera sencilla para maximizar la velocidad en operaciones críticas con otro tipo de lenguajes, se dice por tanto que es un lenguaje ampliable.

Sin embargo la característica que prima por encima de todo es su simplicidad. En Python la sintaxis se realiza de forma visual ya que está basada en indentaciones de carácter obligatorio con el fin de dividir los bloques de un programa. Esta sencillez difiere de otros lenguajes como C++ o Java mucho más complejos en el que el usuario debe dedicar un tiempo al estudio de la sintaxis. En Python tampoco hace falta declarar las variables ni señalar su tipo ya que el programa realiza estas acciones automáticamente según se utilizan en el programa.

Por todo ello los códigos generados en Python son de apariencia similar y notablemente más reducidos que en otros lenguajes. En la Tabla 4.1 se puede apreciar un ejemplo comparando distintos lenguajes de programación que son muy utilizados hoy en día.

Comparación de la sintaxis de distintos lenguajes de programación				
Castellano	C	C++	Java	Python
Hola mundo	<pre>#include&lt;stdio.h&gt; int main(void) { printf("Hola, mundo.\n"); return 0; }</pre>	<pre>#include &lt;iostream&gt; int main(void) { std::cout &lt;&lt; "Hola, mundo." &lt;&lt; std::endl; }</pre>	<pre>public class HolaMundo { public static void main(String [] args) { System.out.println("Hola, mundo."); }}</pre>	<pre>print 'Hola Mundo'</pre>

Tabla 4.1

### 4.3.2 Definición e implementación de los enriquecimientos

Como se ha introducido en los apartados anteriores la principal ventaja del XFEM consiste en que permite modelar de forma sencilla distintos tipos de discontinuidades así como predecir su desarrollo. Sin embargo, es bastante complicado obtener fiabilidades buenas debido a problemas de convergencia causados por la geometría de la malla principalmente (este tema se analizará más adelante). Se va realizar un estudio detallado sobre la gran cantidad de alternativas que Abaqus pone al alcance del usuario para simular el comportamiento de fisuras. Esto tiene como objetivo por una parte facilitar la selección de la alternativa más adecuada para el presente estudio que se desarrollará en los siguientes capítulos y por otra constituir una pequeña guía para posteriores trabajos sobre el mismo tema.

Las dos teorías que Abaqus propone para el análisis de los procesos de inicio y desarrollo de fisuras han sido explicadas en el Capítulo 2 y son: los Modelos de Zona Cohesiva y la Mecánica de Fractura Elástico Lineal.

En primer lugar se encuentra la modelización de fisuras mediante el método de los segmentos cohesivos y nodos fantasmas. En dicha opción Abaqus utiliza conceptos de los CZM (ver Capítulo 2). Tiene la ventaja de que es muy versátil pudiéndose adaptar tanto a materiales dúctiles como frágiles. La mayoría de los modelos basados en conceptos cohesivos tienen la limitación al crecimiento de la fisura por las fronteras de los elementos, la diferencia que ofrece el XFEM es que permite el crecimiento y la propagación de las fisuras siguiendo caminos arbitrarios superando la limitación de los otros modelos. En este caso se elimina el problema de la singularidad de la solución analítica en el frente de grieta imponiendo que la fisura debe atravesar todo el elemento y por consiguiente es innecesario modelar esta singularidad.

Para que el comportamiento de la fisura sea independiente del de la malla se recurre a los denominados “nodos fantasma”. Existen dos posibilidades, la primera se produce cuando el elemento está intacto, en este caso los nodos fantasma están situados en la misma posición que sus homólogos reales. La segunda se produce cuando el elemento está atravesado por una fisura, en esta situación el elemento se bifurca en dos partes, cada parte está formada por una combinación de ambos tipos de nodos como se puede apreciar en la Figura 4.10. En esta última situación los nodos reales se separan de los nodos fantasma pudiéndose mover de forma independiente.

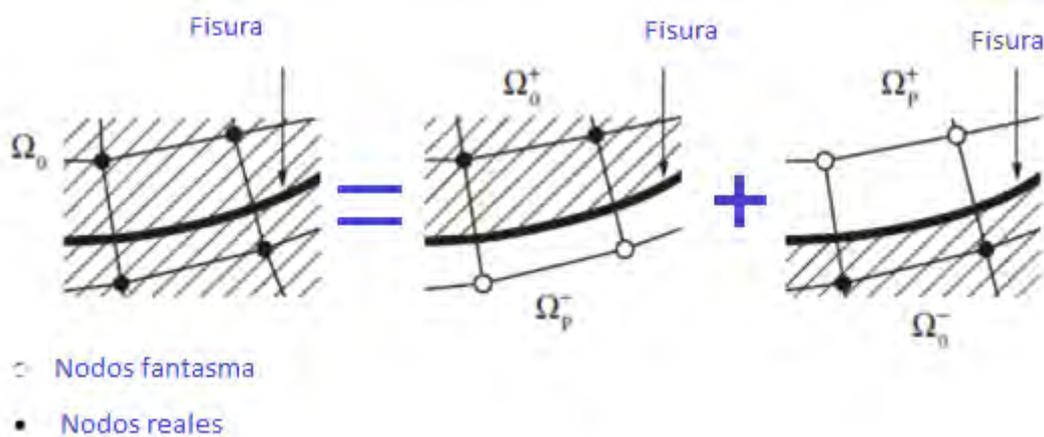


Figura 4.10: Funcionamiento de los nodos fantasma al propagarse la grieta de un elemento (59)

La solución que proporciona este método es independiente de la malla utilizada, siempre y cuando sea lo suficientemente refinada, aunque esto no es fácil de conseguir en la mayoría de las ocasiones. Algunos autores como Song y Remmers (61) han utilizado este método para simular el inicio y la propagación de grietas.

En segundo lugar se encuentra la modelización de discontinuidades mediante conceptos de la MFEL y los nodos fantasma. Esta alternativa es más apropiada para la propagación de fisuras en materiales frágiles. Al igual que en el modelo anterior no es necesario incluir la singularidad en el frente de grieta. La Técnica del Cierre Virtual de la Grieta (VCCT *Virtual Crack Closure Technique*) se utiliza para determinar la tasa de liberación de energía de deformación. Gracias a los nodos fantasma se puede representar la discontinuidad del elemento fisurado, cuando la tasa de liberación de energía de deformación supera un valor crítico los nodos fantasma pueden moverse independientemente de sus homólogos.

Los nodos fantasma se afianzan por tanto como factor común a ambas alternativas. Para que dichos nodos se puedan desplazar independientemente del desplazamiento de los nodos reales hay que dotarlos con más grados de libertad. Dichos grados de libertad solo se activan en el momento de la fractura y sus bases teóricas han sido descritas en el apartado anterior. Por tanto, el objetivo es cómo puede traducir esto a Abaqus.

A continuación, para proporcionar al lector los pasos a seguir dentro del XFEM, se presenta el recorrido para crear un enriquecimiento utilizando la interfaz Abaqus/CAE, y también utilizando el input file. Se va a utilizar un procedimiento análogo en las explicaciones posteriores para la implementación de las distintas características:

- Input file (\*.inp): \*ENRICHMENT
- Abaqus/CAE: Interaction module: Special → Crack → Create → XFEM

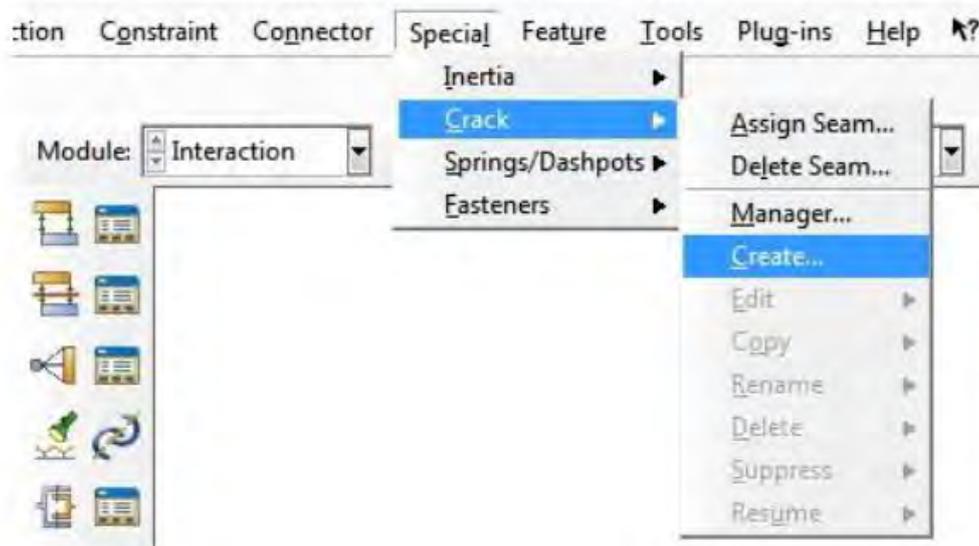


Figura 4.11: Creación del enriquecimiento en el *Módulo Interaction*

Seguidamente se debe asignar un nombre al enriquecimiento creado o bien mantener al que Abaqus ofrece por defecto:

- Input file (\*.inp): \*ENRICHMENT, NAME = *name*
- Abaqus/CAE: Interaction module: Special → Crack → Create : XFEM: Name: *name*

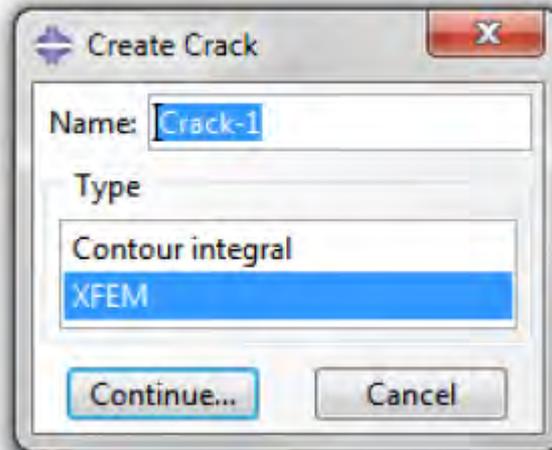


Figura 4.12: Asignación de un nombre para identificar el enriquecimiento

El siguiente paso consiste en definir el tipo de enriquecimiento a implementar. Abaqus da a elegir entre dos opciones:

- ❖ Modelización de una grieta estacionaria: Se rige por la condición de que los elementos atravesados por la fisura sean enriquecidos con la función de salto de Heaviside mediante las caras de la fisura.
- ❖ Propagación de una grieta a lo largo de un camino arbitrario que depende de la solución.

Para la implementación de grietas móviles puede usarse cualquiera de estas dos opciones.

La implementación de una grieta estacionario se realiza de la siguiente manera:

- Input file (\*.inp): \*ENRICHMENT, TYPE = STATIONARY CRACK
- Abaqus/CAE: Interaction module: Crack editor: Desactivar *Allow Crack Growth*

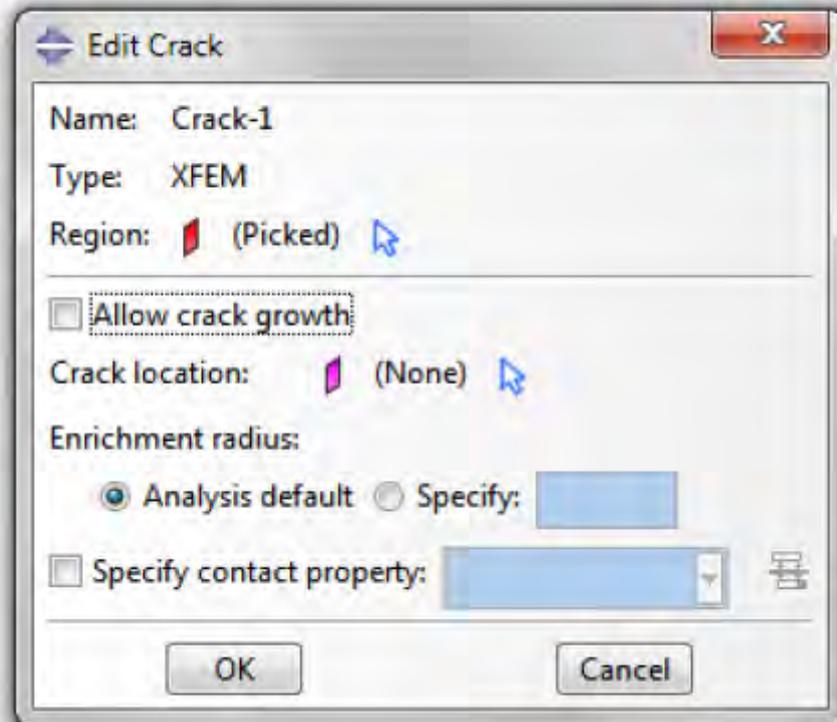


Figura 4.13: Grieta estacionaria

En el caso de modelar una grieta móvil:

- Input file (\*.inp): \*ENRICHMENT, TYPE = PROPAGATION CRACK
- Abaqus/CAE: Interaction module: Crack editor: Activar *Allow Crack Growth*

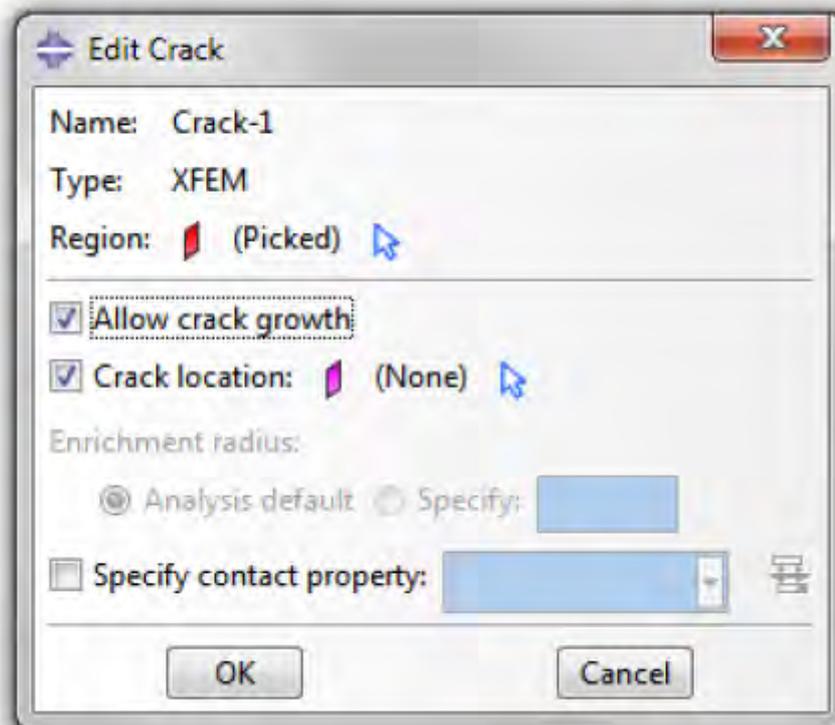


Figura 4.14: Grieta móvil

Seguidamente hay que identificar la zona enriquecida que es la que va a estar afectada por la fisura. Al seleccionar una región los grados de libertad de los nodos de dicho área serán enriquecidos con grados de libertad adicionales para el caso de propagación de una grieta. Para asegurar la correcta interpretación de Abaqus durante el análisis se deben seleccionar los elementos que ya están atravesados por la fisura pero también los elementos próximos que podrían ser atravesados durante la propagación.

- Input file (\*.inp): \*ENRICHMENT, ELSET = *element set name*
- Abaqus/CAE: Interaction module: Special → Crack → Create : XFEM: Select the crack domain: *select region*

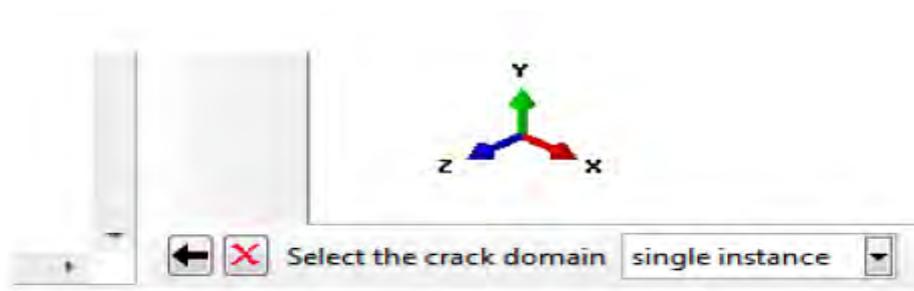


Figura 4.15: Selección del dominio susceptible de ser afectado por la grieta en su propagación

Cuando una fisura atraviesa un elemento se crean dos nuevas superficies enfrentadas las cuales tienen un comportamiento a compresión que ha de ser tenido en consideración. Para parametrizar este comportamiento se utiliza una formulación muy similar a la del contacto de pequeños deslizamientos entre superficies. El problema es que de esta forma no se considera la fricción en la dirección tangencial. Si se utilizan los conceptos de la MFEL no existe este problema ya que la resistencia cohesiva del elemento considerado se supone nula, quedando así completamente definido el comportamiento a compresión de las superficies de la grieta que entran en contacto. También se puede utilizar la opción de los segmentos cohesivos CZM, en este caso la situación se complica ya que se añaden más variables además del comportamiento a compresión del elemento fisurado. Cobra importancia el comportamiento cohesivo de tracción-separación. Sin embargo, no existen problemas de compatibilidad ya que en la dirección normal al contacto la relación *pressure-overclosure* que controla el comportamiento a compresión entre las superficies no interactúa con el comportamiento cohesivo. Cada uno controla el comportamiento en una situación diferente: cuando la fisura está cerrada la relación *pressure-overclosure* es la que rige el comportamiento, mientras que es el modelo cohesivo el que se encarga cuando la fisura está abierta.

Si la rigidez cohesiva de un elemento se encuentra inalterada en la dirección tangencial, entonces se asume que el comportamiento cohesivo está activo, con lo que cualquier se genera tensión tangencial ante cualquier deslizamiento tangencial. Esto se debe a la exigencia a la que se encuentra sometida la resistencia cohesiva. Una vez que el daño comienza en el elemento la contribución cohesiva a las tensiones tangenciales que impiden que el elemento se rompa va disminuyendo hasta alcanzar un valor nulo. Esta evolución del daño se analizará más adelante.

Con lo que se conoce hasta ahora, se puede definir esta interacción de la siguiente manera:

- Input file (\*.inp): \*ENRICHMENT, INTERACTION = *interaction property name*  
\*SURFACE INTERACTION, NAME = *interaction property name*  
\*SURFACE BEHAVIOUR
- Abaqus/CAE: Interaction module: Crack editor: Activar *Specify contact property*

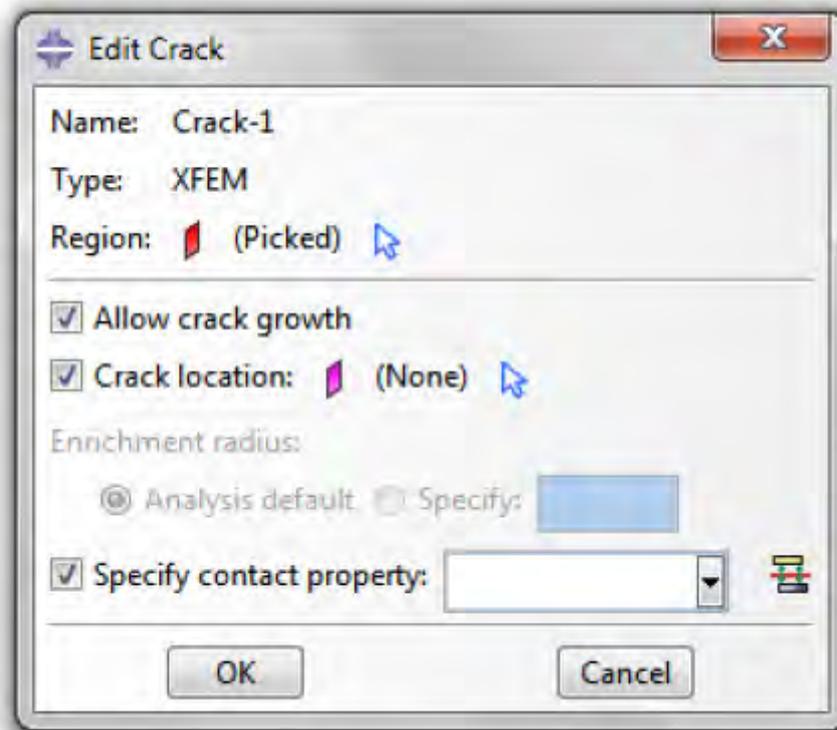


Figura 4.16: Especificación de las propiedades en el contacto

Para finalizar, como ya se ha mencionado anteriormente una de las principales ventajas del XFEM es que permite modelar la fisura de forma independiente al dominio por el que se propagará. Es necesario seleccionar la fisura en cada elemento, en el caso de una grieta estacionaria esta opción es de carácter obligatorio, sin embargo, en el caso de la propagación de una fisura es necesario activarla (Figura 4.16).

- Input file (\*.inp): \*ENRICHMENT, ELSET = *element set name*
- Abaqus/CAE: Interaction module: Crack editor: Activar Specify contact property → Select the crack location: *select region*

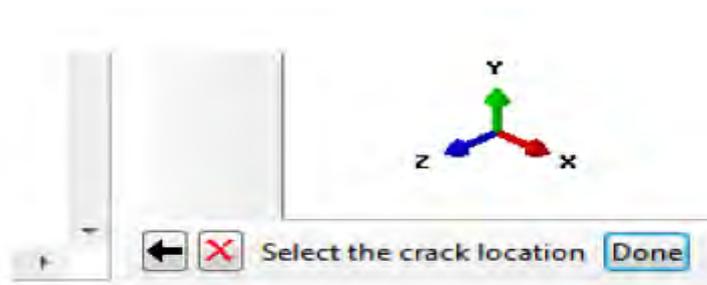


Figura 4.17: Selección del dominio que constituye la grieta

### 4.3.3 Definición e implementación de los mecanismos de daño

Así como para definir los enriquecimientos no hace falta hacer ninguna distinción, para el caso de los mecanismos de daño se pueden adoptar dos caminos diferentes. En el caso de los modelos cohesivos la diferenciación se realizará al definir las propiedades del material, sin embargo, para el caso de la MFEL la diferenciación se produce más tarde, concretamente al definir las propiedades de interacción de la grieta. A continuación se muestra un análisis detallado de las dos alternativas.

#### 4.3.3.1 XFEM basado en modelos cohesivos

El desarrollo teórico de los CZM (ver Capítulo 2) está basado en el uso de la TSL (*Ley de Tracción-Separación*, en inglés *Traction-Separation Law*). Dicha ley puede representarse gráficamente para diferenciar las distintas etapas que caracterizan el mecanismo de daño sobre los elementos cohesivos (Figura 2.15). Se va a proceder a realizar tanto un desarrollo conceptual como la puesta en práctica en Abaqus.

##### 4.3.3.1.1 Comportamiento previo al daño

Abaqus asume un comportamiento elástico lineal al comenzar. Dicho comportamiento elástico permite relacionar tensiones con deformaciones nominales por medio de la matriz constitutiva  $\mathbf{D}$ . Las tensiones nominales toman el valor de las distintas componentes de las fuerzas divididas entre el área inicial (no se consideran variaciones de área) evaluadas en los distintos puntos de integración. De la misma manera se calculan las deformaciones nominales, es decir, dividiendo los desplazamientos siempre evaluados en los puntos de integración ( $\delta_n, \delta_t, \delta_s$ ), entre el espesor original de los mismos  $e_0$ . Como es natural con esta formulación se obtienen una componente normal y dos tangenciales. Para el caso del vector de tensiones nominales  $\mathbf{t}$ , la componente normal es  $t_n$  y las tangenciales  $t_t$  y  $t_s$ . Análogamente para las deformaciones nominales  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se tienen la componente normal  $\varepsilon_n$  y las dos tangenciales  $\varepsilon_t$  y  $\varepsilon_s$ .

Esta relación se puede escribir matricialmente como:

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_n \\ t_s \\ t_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & K_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_s \\ \varepsilon_t \end{Bmatrix} = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}$$

4.30

Donde  $K_{nn}$ ,  $K_{ss}$  y  $K_{tt}$  son calculadas haciendo uso de las características elásticas del material en los elementos enriquecidos, por lo tanto, siempre y cuando el material sea elástico

e isótropo, bastará con introducir en Abaqus el modulo elástico  $E$  y el modulo de Poisson del material  $\nu$ .

- Input file (\*.inp): \*ELASTIC, TYPE = ISOTROPIC
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Elasticity → Elastic: Type: Isotropic → Rellenar tabla

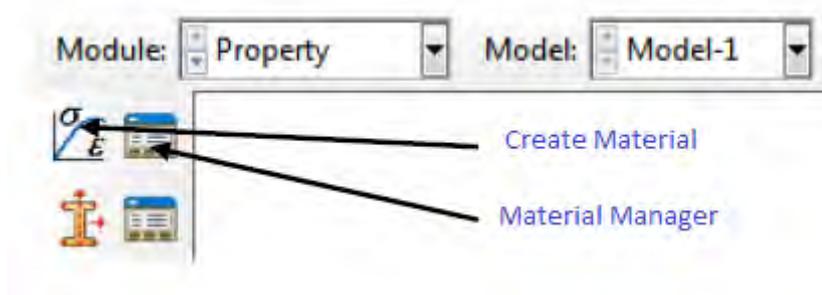


Figura 4.18: Detalle del Módulo Property. Create Material y Material Manager (69)

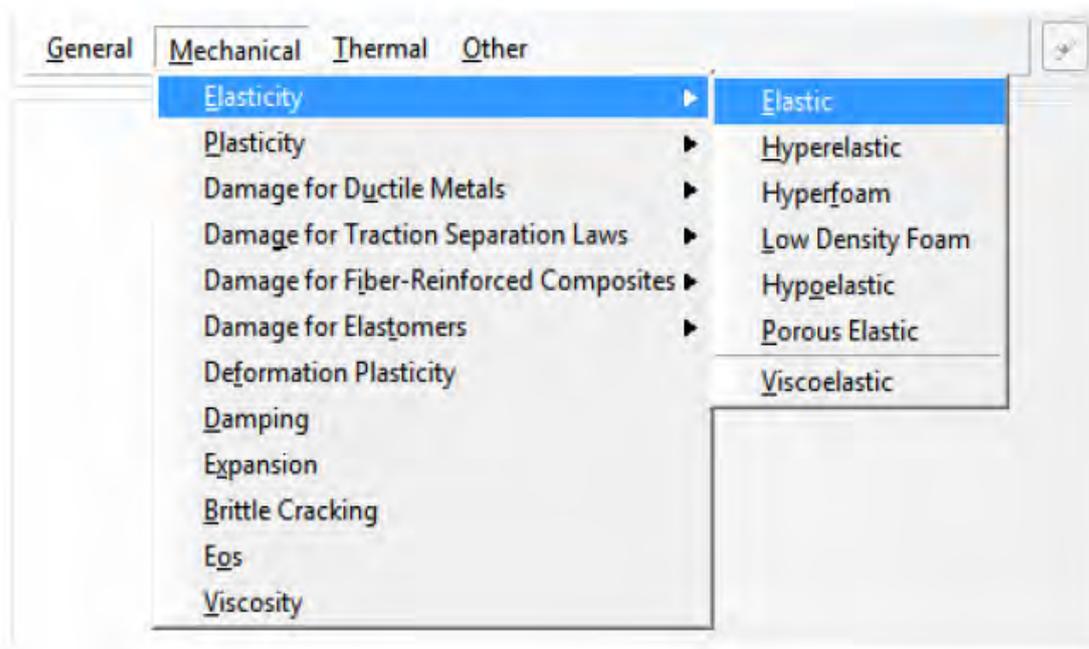


Figura 4.19: Detalle del Material editor. Selección de un material elástico

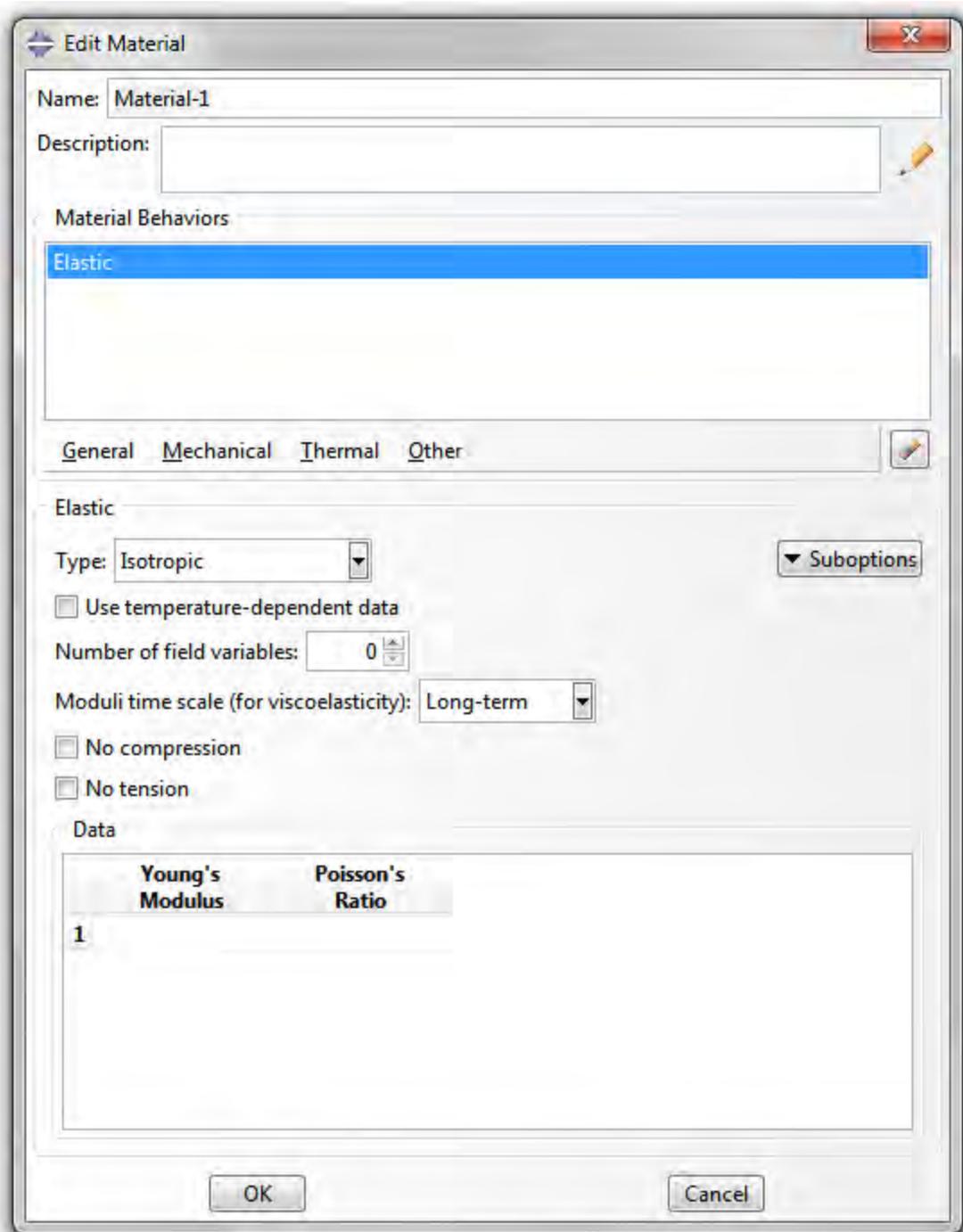


Figura 4.20: Parámetros necesarios para especificar el comportamiento de un material elástico isótropo

#### 4.3.3.1.2 Inicio del daño

El inicio del daño se produce cuando uno de los elementos enriquecidos empiezan a responder de una manera distinta a como lo hacían hasta el momento de la degradación, a partir de ese momento el comportamiento se rige por la Ley de Tracción-Separación (ver Capítulo 2).

Este proceso se inicia cuando se satisface uno de los criterios de daño que se ha elegido previamente, ya sea cuando se supera una tensión o deformación máxima.

Para definir los diferentes criterios se define una variable adimensional  $f$  de tal manera que la grieta puede nuclearse o propagarse cuando dicha variable alcanza el valor 1 dentro de una determinada tolerancia  $e_f$ .

$$1 \leq f \leq 1 + e_f$$

4.31

En el caso de que  $f > 1 + e_f$  se va reduciendo paulatinamente el incremento de tiempo del step, la condición para que esta reducción se detenga es el cumplimiento de este criterio. Esta condición suele provocar bastantes problemas de convergencia, sobre todo en modelos complicados, ya que el procesador aborta el estudio si no puede avanzar en un determinado número de intentos. Como solución Abaqus propone la posibilidad de la elección de la tolerancia por parte del usuario (por defecto es 0.05) (ver Figura 4.25)

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE INITIATION, TOLERANCE =  $e_f$
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Tolerance:  $e_f$

Como se puede observar en la Figura 4.21 Abaqus permite elegir al usuario entre 6 criterios que utilizan la Ley de Tracción-Separación para el inicio del daño. Cada uno de ellos es explicado a continuación.

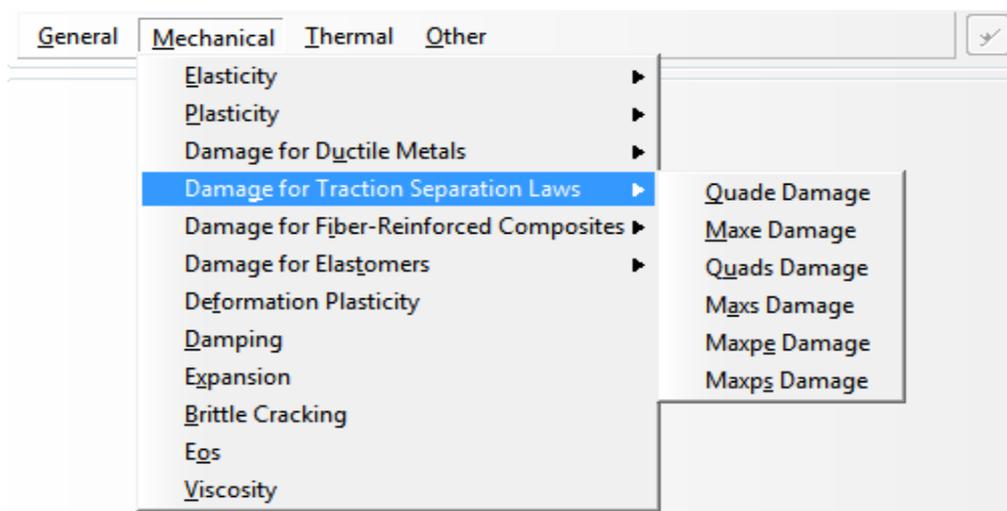


Figura 4.21: Selección del criterio de inicio del daño basándose en la TSL

1) Criterio de la Deformación Cuadrática o QUADE

El criterio corresponde matemáticamente a la siguiente igualdad:

$$f = \left\{ \frac{\langle \varepsilon_n \rangle}{\varepsilon_n^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^0} \right\}^2$$

4.32

Donde  $\varepsilon_n^0$ ,  $\varepsilon_s^0$  y  $\varepsilon_t^0$  representan los valores máximos de deformación nominal pura para la dirección normal y las dos tangenciales respectivamente. Los paréntesis de Macaulay  $\langle \dots \rangle$  representan las tensiones o deformaciones de compresión que no son capaces de iniciar el daño. Estos valores son introducidos por el usuario y se recogen en una tabla como la de la Figura 4.22. El daño se inicia en el momento en el que  $f = 1$ .

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE INITIATION, CRITERION = QUADE
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage → Rellenar tabla

Data		
Nominal Strain Normal-only Mode	Nominal Strain Shear-only mode First Direction	Nominal Strain Shear-only mode Second Direction
1		

Figura 4.22: Parámetros necesarios en el caso de seleccionar *Maxe Damage* o *Quade Damage* como criterios de inicio de daño

2) Criterio de la Máxima Deformación Nominal o MAXE

El criterio corresponde matemáticamente a la siguiente igualdad:

$$f = \max \left\{ \frac{\langle \varepsilon_n \rangle}{\varepsilon_n^0}, \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0}, \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^0} \right\}$$

4.33

Donde  $\varepsilon_n^0$ ,  $\varepsilon_s^0$  y  $\varepsilon_t^0$  representan los valores máximos de deformación nominal pura para la dirección normal y las dos tangenciales respectivamente. Estos valores son introducidos por el usuario y se recogen en una tabla como la de la Figura 4.22. El daño se inicia en el momento en el que  $f = 1$ .

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE INITIATION, CRITERION = MAXE
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Maxe Damage → Rellenar tabla

### 3) Criterio de Tensión Cuadrática o QUADS

El criterio corresponde matemáticamente a la siguiente igualdad:

$$f = \left\{ \frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{t_s}{t_s^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{t_t}{t_t^0} \right\}^2$$

4.34

Donde  $t_n^0$ ,  $t_s^0$  y  $t_t^0$  representan los valores máximos de tensión nominal pura para la dirección normal y las dos tangenciales respectivamente. Estos valores son introducidos por el usuario y se recogen en una tabla como la de la Figura 4.23. El daño se inicia en el momento en el que  $f = 1$ .

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE INITIATION, CRITERION = QUADS
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quads Damage → Rellenar tabla

	Nominal Stress Normal-only Mode	Nominal Stress First Direction	Nominal Stress Second Direction
1			

Figura 4.23: Parámetros necesarios en el caso de seleccionar *Maxs Damage* o *Quads Damage* como criterios de inicio del daño

### 4) Criterio de la Máxima Tensión Nominal MAXS

El criterio corresponde matemáticamente a la siguiente igualdad:

$$f = \max \left\{ \frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0}, \frac{t_s}{t_s^0}, \frac{t_t}{t_t^0} \right\}$$

4.35

Donde  $t_n^0$ ,  $t_s^0$  y  $t_t^0$  representan los valores máximos de tensión nominal pura para la dirección normal y las dos tangenciales respectivamente. Estos valores son introducidos por el usuario y se recogen en una tabla como la de la Figura 4.23. El daño se inicia en el momento en el que  $f = 1$ .

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE INITIATION, CRITERION = MAXS
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Maxs Damage → Rellenar tabla

#### 5) Criterio de la Máxima Deformación Principal o MAXPE

El criterio corresponde matemáticamente a la siguiente igualdad:

$$f = \left\{ \frac{\langle \varepsilon_{max} \rangle}{\varepsilon_{max}^0} \right\}$$

4.36

Donde  $\varepsilon_{max}^0$  representa la máxima deformación principal admisible que será el valor a introducir (Figura 4.24). El daño se inicia en el momento en el que  $f = 1$ .

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE INITIATION, CRITERION = MAXPE
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Maxpe Damage → Rellenar tabla



Figura 4.24: Parámetros necesarios en el caso de seleccionar *Maxpe Damage* como criterio de inicio del daño

#### 6) Criterio de la Máxima Tensión Principal o MAXPS

El criterio corresponde matemáticamente a la siguiente igualdad:

$$f = \left\{ \frac{\langle \sigma_{max} \rangle}{\sigma_{max}^0} \right\}$$

4.37

Donde  $\sigma_{max}^0$  representa la máxima tensión principal admisible que será el valor a introducir (Figura 4.25). El daño se inicia en el momento en el que  $f = 1$ .

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE INITIATION, CRITERION = MAXPS
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Maxps Damage → Rellenar tabla

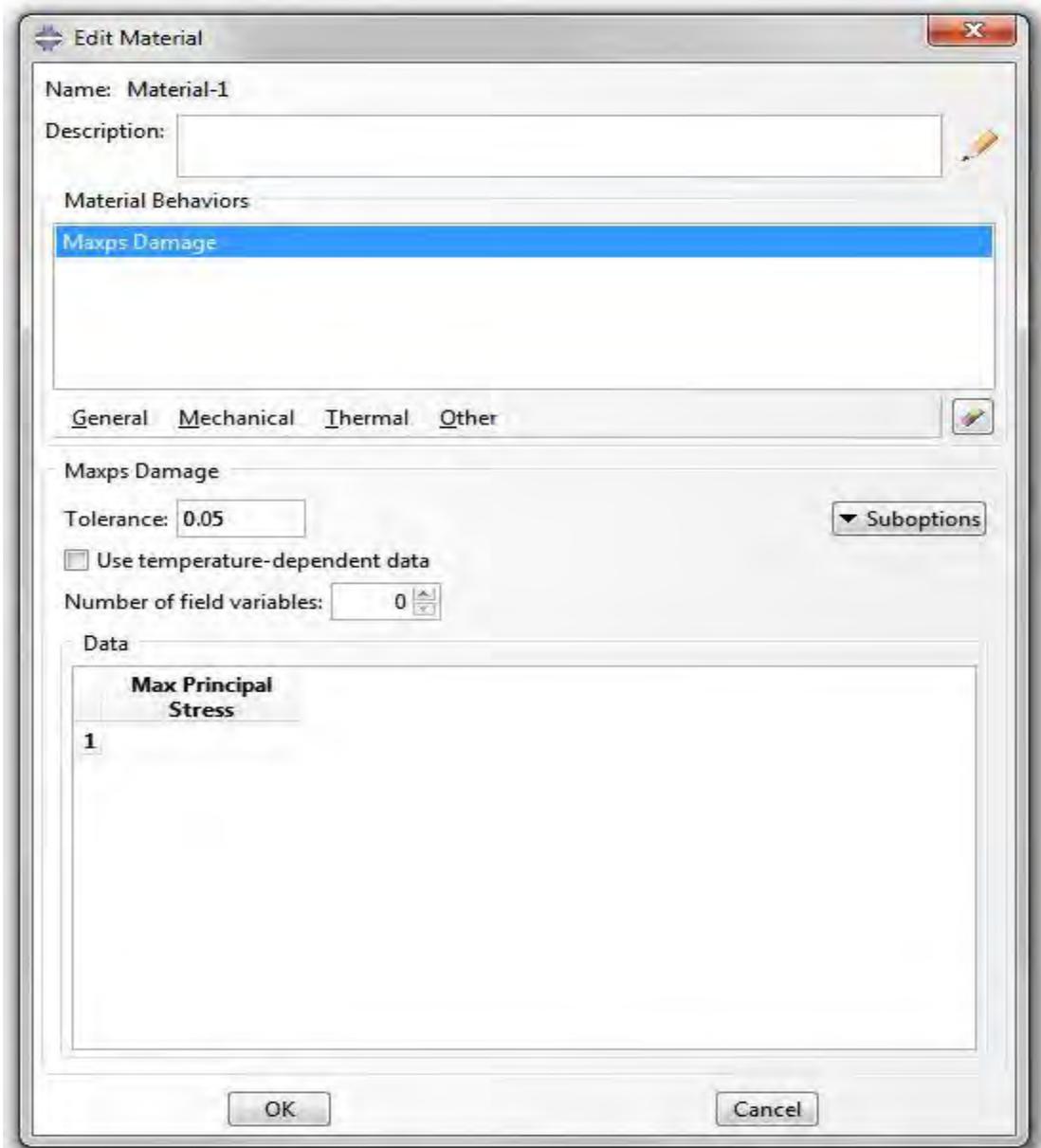


Figura 4.25: Parámetros necesarios en el caso de seleccionar *Maxps Damage* como criterio de inicio del daño

Una vez que se han analizado todas las alternativas posibles para la elección del criterio para el inicio del daño hay que definir un último aspecto relativo a la dirección de propagación de la grieta. Para el caso de los criterios de Máxima Tensión Principal (MAXPS) y Máxima Deformación Principal (MAXPE) la fisura siempre es perpendicular a la dirección de máxima tensión o deformación principal por lo que no hace falta definir ninguna dirección. Sin embargo, para el resto de criterios se debe especificar la dirección por la que se propagará la fisura: dirección local 1 (por defecto) o local 2 del elemento fisurado.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE INITIATION, NORMAL DIRECTION = 1 (Default)  
\*DAMAGE INITIATION, NORMAL DIRECTION = 2
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage o Maxs Damage: direction relative to local 1-direction (for XFEM) : Normal or Parallel

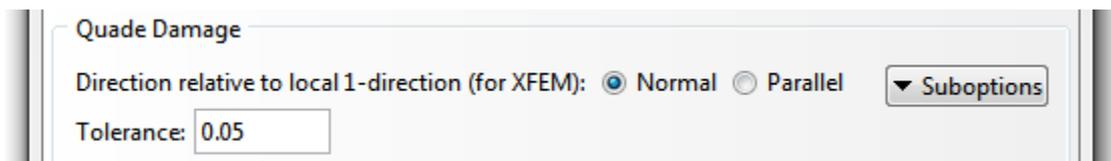


Figura 4.26: Detalle *Edit Material*: selección de la dirección de propagación de la fisura en el caso de seleccionar *Quade Damage*, *Maxe Damage*, *Quads Damage* o *Maxs Damage* como criterios de inicio del daño

#### 4.3.3.1.3 Evolución del daño

La velocidad de degradación de la rigidez cohesiva de un elemento en la que el daño se ha iniciado viene determinada por la ley de evolución del daño. Las variables que controlan este proceso son la tasa de liberación de energía  $G$  y la variable de daño  $D$ . Dicha variable de daño inicialmente es nula (lo que quiere decir que el elemento no presenta daño aunque sí que se le permite la evolución del daño). Este valor está acotado superiormente por 1, es decir, al alcanzar la unidad se considera que el elemento está completamente dañado. La variable del daño para un modelo de fractura determinado  $m$  se define matemáticamente como el cociente entre el desplazamiento del frente de grieta en un momento determinado  $\delta_m$  y el desplazamiento crítico de la misma  $\delta_m^f$  al producirse la rotura del material.

$$D_m = \frac{\delta_m}{\delta_m^f}$$

4.3

Los parámetros anteriores se pueden apreciar en la Figura 4.27 en la que se representa una curva de tracción-separación con una evolución del daño lineal.

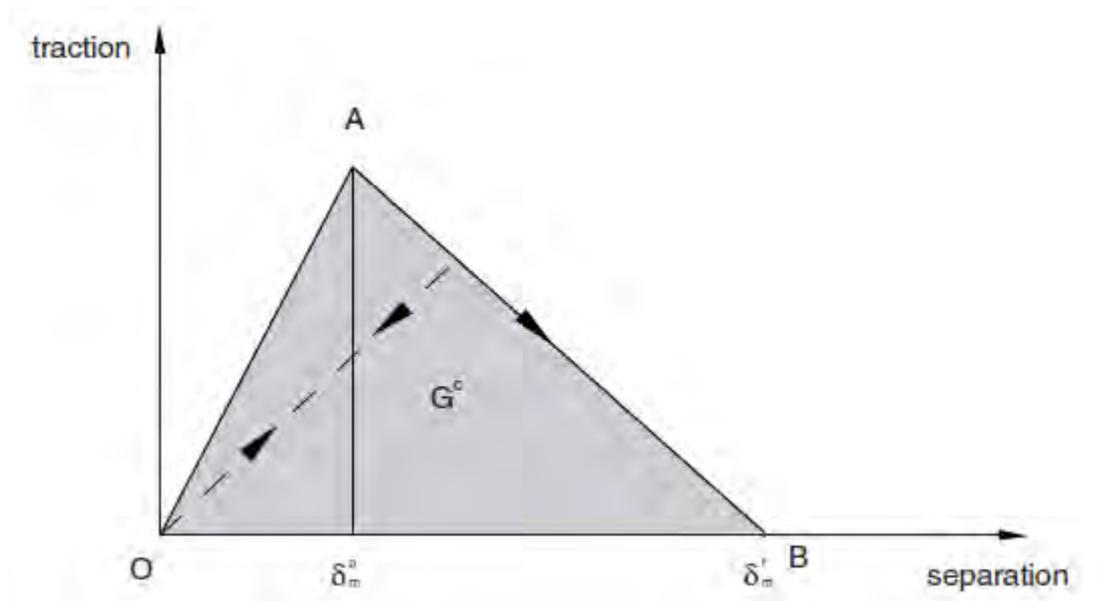


Figura 4.27: Curva Tracción-Separación para un material con comportamiento lineal en la evolución del daño (8)

El área bajo la curva también tiene una interpretación física ya que se corresponde con la tasa de liberación de energía  $G$ . El valor crítico  $G^c$  que está representado supuesta la evolución del elemento hasta el fallo se calcula como:

$$G_m^c = \int_0^{\delta_m^f} t(\delta_m) d\delta_m$$

4.39

Donde  $t(\delta_m)$  representa la tensión según el desplazamiento del frente de grieta.

Este valor de la tensión está fuertemente influenciado por la evolución del daño, es decir, por el valor de  $D$ , esto se puede apreciar en la Figura 4.27. Las siguientes ecuaciones determinan cómo afecta este parámetro al valor de la componente normal y las dos tangenciales de la tensión nominal.

$$t_n = \begin{cases} (1 - D)T_n & T_n \geq 0 \\ T_n & T_n < 0 \end{cases}$$

4.40

$$t_s = (1 - D)T_s$$

4.41

$$t_t = (1 - D)T_t$$

4.42

Donde  $T_n$  ,  $T_s$  y  $T_t$  son las componentes normal y tangencial que predice el comportamiento elástico sin tener en cuenta el daño.

Si se presentan una combinación de desplazamientos normales y tangenciales en el frente de grieta se define el siguiente desplazamiento efectivo para poder establecer la evolución del daño:

$$\delta_m = \sqrt{\langle \delta_n \rangle^2 + \delta_s^2 + \delta_t^2}$$

4.43

La evolución del daño se implementa en Abaqus de la siguiente manera.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution

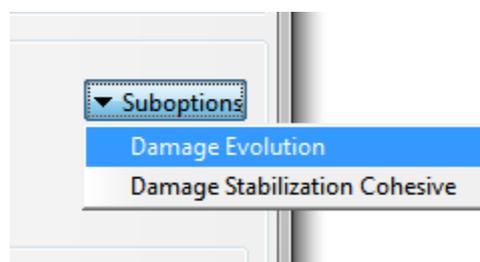


Figura 4.28: Detalle del *Material editor* para seleccionar la evolución del daño tras haber seleccionado uno de los criterios del inicio del mismo

Sin embargo, existen muchas posibilidades de modificar otros parámetros que también están relacionados con la evolución del daño. A continuación se muestran las diferentes opciones disponibles.

### 1. Evolución del daño basado en el desplazamiento efectivo

Cuando se utiliza esta alternativa para implementar la evolución del daño es necesario definir diferentes parámetros, uno de los más importantes es el valor de  $\delta_m^f - \delta_m^0$ , para los  $m$  modos de fractura presentes (ver Displacement at Failure en la Figura 4.29).

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=DISPLACEMENT
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Displacement

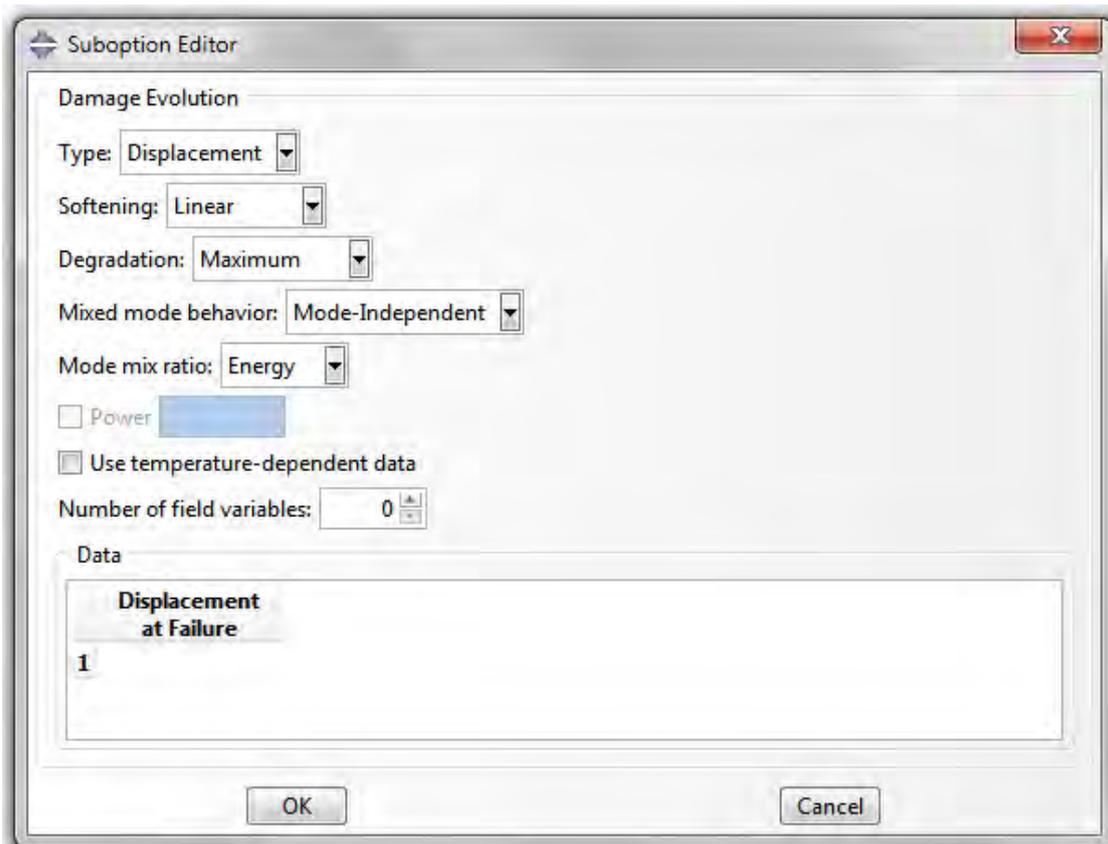


Figura 4.29: Definición de la evolución del daño basado en el desplazamiento efectivo

En primer lugar hay que seleccionar una de las leyes que ofrece Abaqus para la evolución de la variable de daño  $D$  según se degrada el elemento cohesivo. Se puede elegir entre tres alternativas.

#### 1) Evolución lineal

Para esta alternativa Abaqus utiliza la formulación desarrollada por Camanho y Dávila (63) y que se escribe de la siguiente manera:

$$D = \frac{\delta_m^f (\delta_m^{max} - \delta_m^0)}{\delta_m^{max} (\delta_m^f - \delta_m^0)}$$

4.44

Donde  $\delta_m^{max}$  a partir de ahora representa el valor máximo del desplazamiento efectivo. Este modelo puede verse reflejado en la Figura 4.30.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=DISPLACEMENT, SOFTENING = LINEAR
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Displacement: Softening: Linear

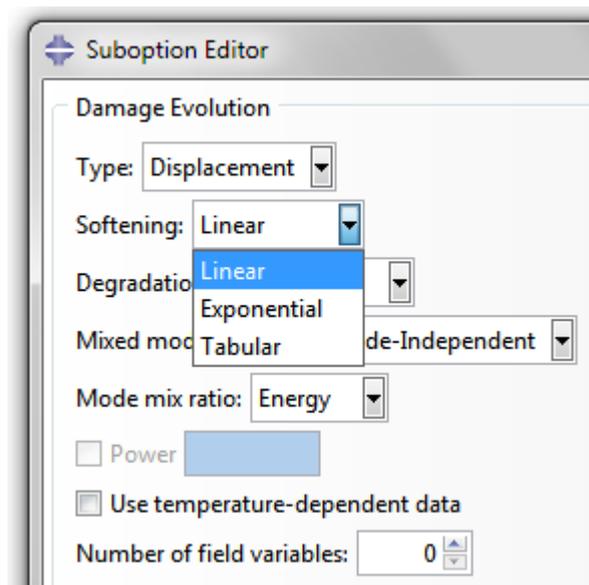


Figura 4.30: Selección del tipo de evolución del daño: lineal, exponencial o tabular

2) Evolución exponencial

Abaqus implementa este tipo de evolución mediante la siguiente expresión:

$$D = 1 - \left\{ \frac{\delta_m^0}{\delta_m^{max}} \right\} \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-\alpha \left( \frac{\delta_m^{max} - \delta_m^0}{\delta_m^f - \delta_m^0} \right)}}{1 - e^{-\alpha}} \right\}$$

4.45

Donde  $\alpha$  es un parámetro adimensional que es función del material. Este parámetro ha de proporcionarse al programa así como el valor crítico del desplazamiento, es decir, hace falta proporcionar un parámetro más que para el caso de la evolución lineal (ver Figura 4.32).

A continuación se presenta una posible curva de evolución exponencial.

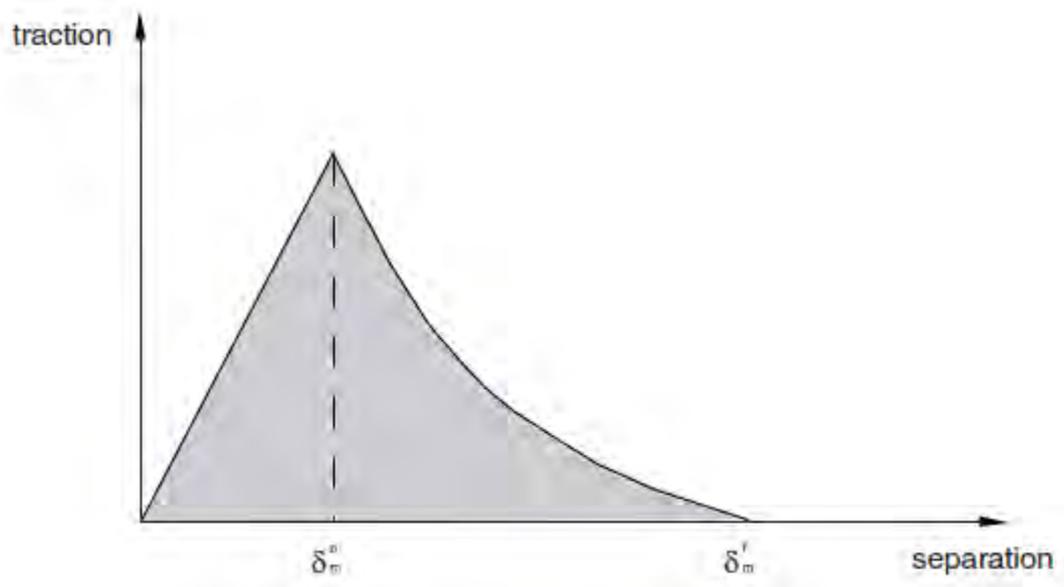


Figura 4.31: Evolución exponencial del daño de una gráfica Tracción-Separación (8)

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=DISPLACEMENT, SOFTENING = EXPONENTIAL
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage,

Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type:  
Displacement: Softening: Exponential → Rellenar tabla



Figura 4.32: Parámetros necesarios para la caracterización de la evolución exponencial del daño

### 3) Evolución tabular

Abaqus permite introducir valores en una tabla para la evolución de  $D$  en función del desplazamiento efectivo.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=DISPLACEMENT, SOFTENING = EXPONENTIAL
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Displacement: Softening: Tabla → Rellenar tabla

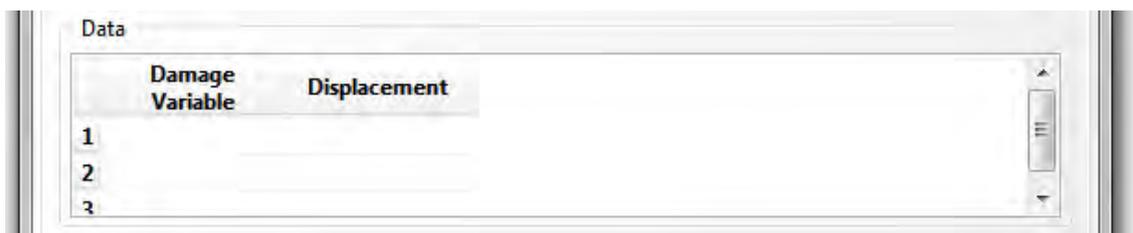


Figura 4.33: Parámetros necesarios para la definición de una evolución tabular del daño

También se permite elegir entre un comportamiento independiente del modo de fractura o uno tabular para el caso de comportamiento en modo mixto.

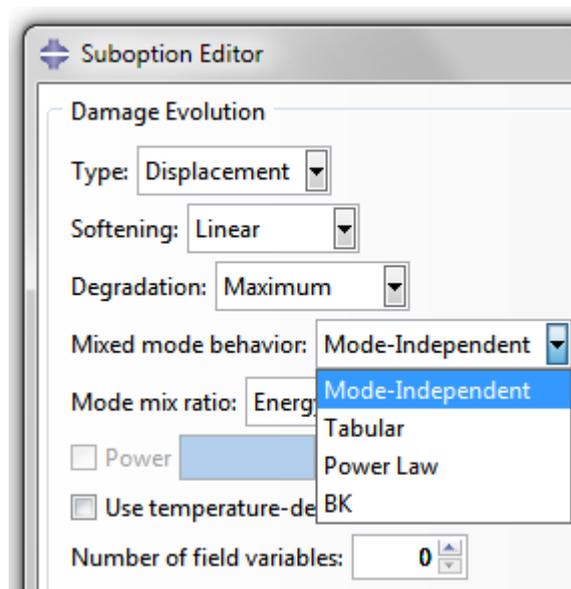


Figura 4.34: Tipos de comportamiento en modo mixto basado en desplazamientos

#### 1) Independiente del modo

Si se elige esta opción, que es la que aparece por defecto, el comportamiento no tendrá en cuenta el modo de fractura.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=DISPLACEMENT, MIXED MODE BEHAVIOUR = MODE INDEPENDIENT
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Displacement: Mixed Mode Behaviour: Mode Independent

#### 2) Tabular

La ventaja de esta selección es que permite al usuario especificar de modo mixto el comportamiento, pudiendo introducir los valores de desplazamientos o separaciones en el frente de la grieta en forma de tabla.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=DISPLACEMENT, MIXED MODE BEHAVIOUR = TABULAR
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Displacement: Mixed Mode Behaviour: Tabular → Rellenar tabla



	Displacement at Failure	Mode Mix Ratio	Mode Mix Ratio for 3D
1			

Figura 4.35: Parámetros necesarios para una descripción tabular del modo mixto de fractura

## 2. Evolución del daño basado en la energía de fractura

Esta alternativa se basa en la definición de la evolución del daño en función de la energía disipada durante el proceso o energía de fractura, que está representada por el área bajo la curva tensión-separación. En este caso en vez de introducir los desplazamientos efectivos como anteriormente es necesario proporcionar al programa el valor de la energía de fractura entre otros parámetros.

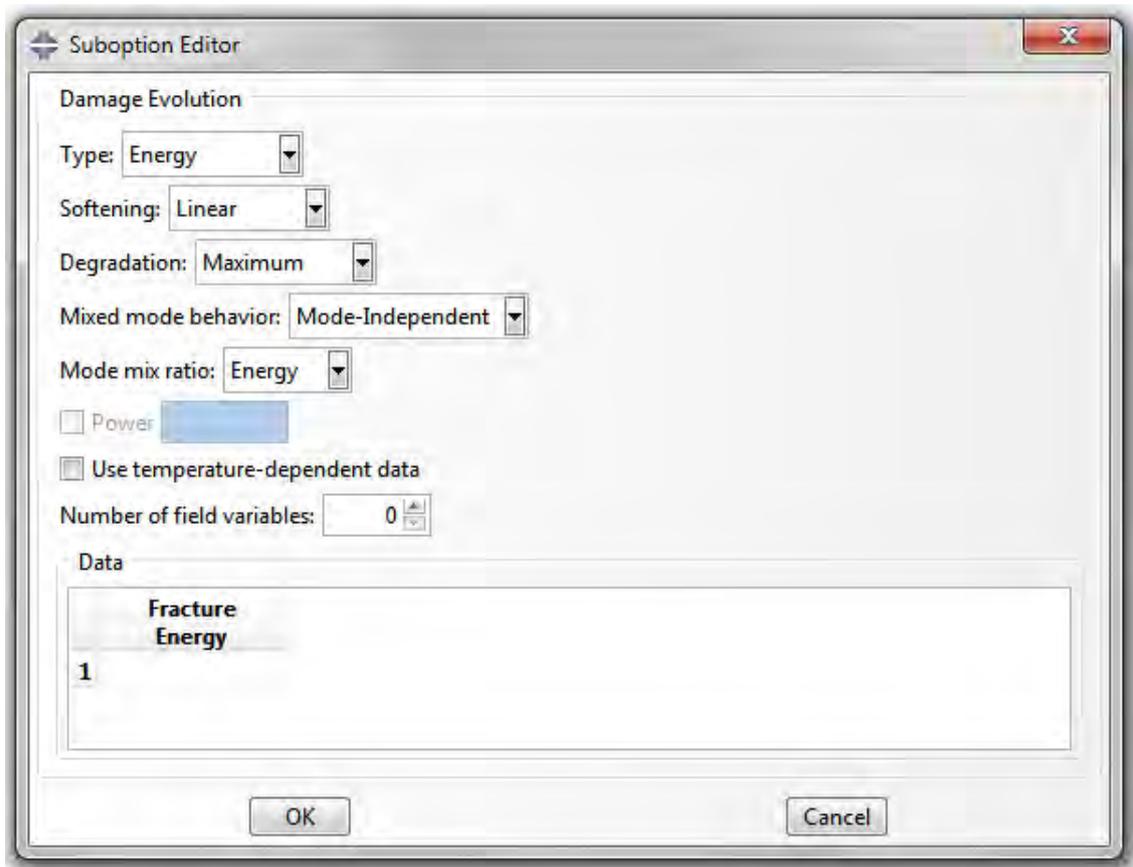


Figura 4.36: Definición de la evolución del daño basado en energías

Una vez elegida esta alternativa es imprescindible seleccionar el tipo de evolución de la variable de daño  $D$  (lineal o exponencial). Abaqus ajusta el tipo de curva seleccionada para que el área bajo esta curva coincida con la que se le ha proporcionado anteriormente.

### 1) Evolución lineal

La evolución del daño  $D$  queda descrita por la siguiente expresión:

$$D = \frac{\delta_m^f (\delta_m^{max} - \delta_m^0)}{\delta_m^{max} (\delta_m^f - \delta_m^0)}$$

4.46

Donde  $\delta_m^f = \frac{2G^c}{T_{eff}^0}$ .  $G^c$  es la energía de fractura crítica en modo mixto y  $T_{eff}^0$  representa la tracción efectiva cuando se inicia el daño.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=ENERGY, SOFTENING = LINEAR
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Softening: Linear → Rellenar tabla

### 2) Evolución exponencial

En esta opción la evolución de la variable  $D$  viene dada por la siguiente expresión:

$$D = \int_{\delta_m^0}^{\delta_m^f} \frac{T_{eff}}{G^c - G_0} d\delta$$

4.47

Donde  $T_{eff}$  y  $\delta$  son la tracción efectiva y el desplazamiento respectivamente,  $G_0$  es la energía elástica al inicio del daño. Los límites de integración son el desplazamiento del frente de la fisura desde el inicio del daño ( $\delta_m^0$ ) hasta el final del daño ( $\delta_m^f$ ).

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=ENERGY, SOFTENING = LINEAR
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage,

Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy:  
Softening: Exponential → Rellenar tabla

En cuanto al comportamiento en modo mixto existen cuatro alternativas disponibles: utilizar un comportamiento independiente del modo de fractura, introducirlo mediante una tabla de valores, optar por la formulación analítica de Ley de Potencias o la de Benzeggagh-Keane (BK).

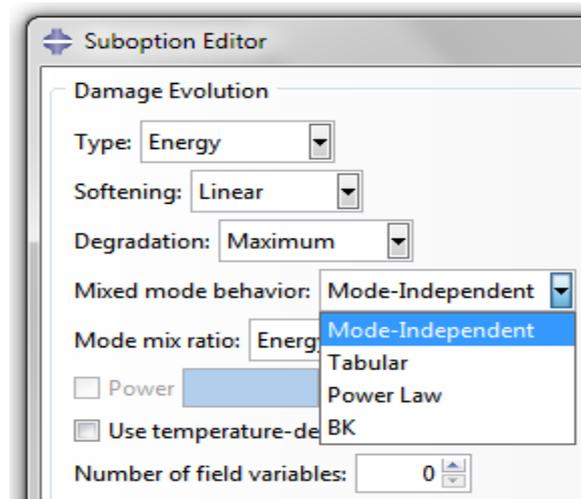


Figura 4.37: Tipos de comportamiento en modo mixto basado en energías

#### 1) Independiente del modo

Si se elige esta opción, que es la que aparece por defecto, el comportamiento no tendrá en cuenta el modo de fractura.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=ENERGY, MIXED MODE BEHAVIOUR = MODE INDEPENDIENT
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Mixed Mode Behaviour: Mode Independent → Rellenar tabla

## 2) Tabular

Una forma posible de establecer esta dependencia es proporcionando los valores de la energía de fractura en función del índice de modo mixto. Se implementa de manera muy similar al caso de desplazamientos.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=ENERGY, MIXED MODE BEHAVIOUR = TABULAR
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Mixed Mode Behaviour: Tabular → Rellenar table

## 3) Ley de Potencias (Power Law)

El criterio de fractura de la Ley de Potencias define el fallo bajo condiciones mixtas, es decir, por la interacción de las energías necesarias para causar el daño (normal y dos tangenciales). Abaqus utiliza la siguiente relación matemática para esta opción:

$$\left\{ \frac{G_n}{G_n^C} \right\}^\alpha + \left\{ \frac{G_s}{G_s^C} \right\}^\alpha + \left\{ \frac{G_t}{G_t^C} \right\}^\alpha = 1$$

4.48

Donde  $G_n$ ,  $G_s$  y  $G_t$  son variables asociadas al trabajo realizado por las tensiones y los desplazamientos según las direcciones normal, primera y segunda tangencial respectivamente. La energía de fractura en modo mixto cuando se verifica la relación de arriba se define como  $G^C = G_n + G_s + G_t$ . Las variables que son necesarias introducir en Abaqus son  $G_n^C$ ,  $G_s^C$  y  $G_t^C$  que representan las energías críticas que se pueden alcanzar en la dirección normal y las dos tangenciales respectivamente antes de que se produzca el fallo.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=ENERGY, MIXED MODE BEHAVIOUR = POWER LAW
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Mixed Mode Behaviour: Power Law → Rellenar tabla

Data		
Normal Mode Fracture Energy	Shear Mode Fracture Energy First Direction	Shear Mode Fracture Energy Second Direction
1		

Figura 4.38: Parámetros necesarios para definir el comportamiento en modo mixto de acuerdo a la Ley de Potencias

También hay que introducir un parámetro adicional,  $\alpha$ , que depende del material. En su obra, Reeder (64) proporciona algunos valores de este parámetro para distintos materiales.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=ENERGY, MIXED MODE BEHAVIOUR = POWER LAW, POWER =  $\alpha$
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Mixed Mode Behaviour: Power Law → Activar Power: introducir  $\alpha$

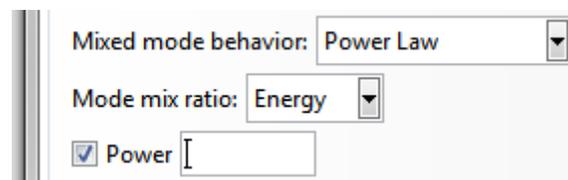


Figura 4.39: Introducción del exponente de la Ley de Potencias

#### 4) Ley de Benzeggagh-Kenane

Este modelo desarrollado por Benzeggagh y Kenane (65) es idóneo cuando el valor de las energías de fracturas coinciden en las direcciones tangenciales, es decir,  $G_s^c = G_t^c$ . Este modelo se puede describir mediante la siguiente relación:

$$G_n^c + (G_s^c - G_n^c) \left\{ \frac{G_s}{G_T} \right\}^\eta = G^c$$

4.49

Donde  $G_S = G_s + G_t$ ,  $G_T = G_s + G_n$  y  $\eta$  es un parámetro que es función del material y para el que Reeder (61) ofrece distintos valores en su obra. Los valores que el usuario debe introducir en Abaqus son  $G_s^C = G_t^C$ ,  $G_n^C$  y  $\eta$  al igual que en el caso anterior.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=ENERGY, MIXED MODE BEHAVIOUR = BK
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Mixed Mode Behaviour: BK → Rellenar tabla
- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, TYPE=ENERGY, MIXED MODE BEHAVIOUR = BK, POWER =  $\eta$
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Mixed Mode Behaviour: BK → Activar Power: introducir  $\eta$

### 3. Modo combinado o mixto

En la Figura 2.4 se presentan tres modos puros de crecimiento de una fisura pero en la realidad no siempre tiene por qué crecer de acuerdo con uno de esos tres tipos, pueden existir combinaciones. Puede haber algún estado tensional que se obtenga como superposición de los tres estados. Los índices de modo mixto se definen con el objetivo de delimitar las proporciones relativas entre las tracciones y deformaciones asociadas a cada uno de los modos puros de fractura.

Abaqus implementa dos alternativas para la medida de estos índices: una basada en energías y otra basada en tracciones. Cualquiera de ellas puede usarse indistintamente para el caso de seleccionar el comportamiento de modo mixto tabular, sin embargo, Abaqus asume directamente que los índices de modo mixto se basan en energías para el caso de formulaciones analíticas (Ley de Potencias o Benzeggagh-Kenane). Para el desarrollo de ambas alternativas se asumirá que se ha elegido un tipo de evolución de daño energético, esto no es un problema ya que se puede realizar un desarrollo similar aunque la elección haya sido de desplazamientos.

#### 1) Índice de modo mixto basado en energías

Si se denota mediante  $G_n$ ,  $G_s$  y  $G_t$  al trabajo realizado por las tracciones y sus desplazamientos asociados a la dirección normal y las dos tangenciales respectivamente, y definiendo  $G_T = G_n + G_s + G_t$  el modo mixto queda definido por las siguientes relaciones:

$$m_1 = \frac{G_n}{G_T} \tag{4.50}$$

$$m_2 = \frac{G_s}{G_T} \tag{4.51}$$

$$m_3 = \frac{G_t}{G_T} \tag{4.52}$$

En un estado de deformación tridimensional con un comportamiento anisótropo del material en las dos direcciones tangenciales, puede definirse la energía de fractura  $G^C$  en función de dos parámetros. El primero  $(m_2 + m_3) = \frac{G_s}{G_T}$ , representa la relación entre la deformación tangencial total y la deformación total, mientras que el segundo  $\frac{m_3}{(m_2+m_3)} = \frac{G_t}{G_s}$ , representa la relación entre la deformación tangencial en la dirección 2 y la deformación tangencial total.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, MODE MIX RATIO = ENERGY
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Mode mix ratio: Energy

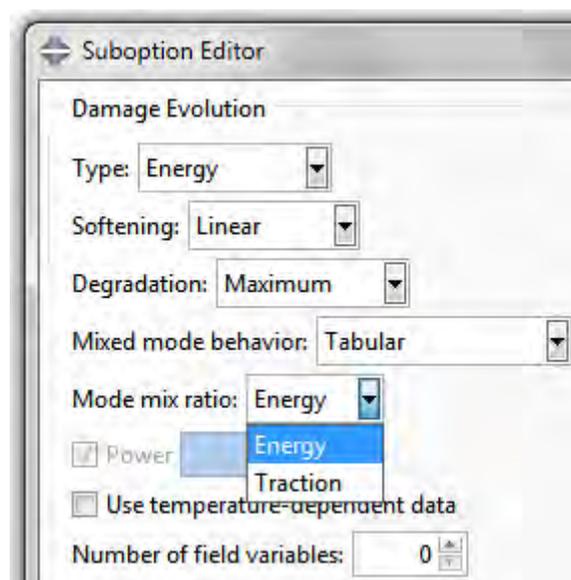


Figura 4.40: Definición del índice de modo mixto en términos de energía o de tracciones

2) Índice de modo mixto basado en tracciones

Las definiciones equivalentes para el caso de modo mixto basado en tracciones son:

$$\Phi_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right) \tan^{-1} \left(\frac{\tau}{\langle t_n \rangle}\right) \quad 4.53$$

$$\Phi_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right) \tan^{-1} \left(\frac{t_t}{t_s}\right) \quad 4.54$$

Donde la tensión tangencial efectiva viene representada por  $\tau = \sqrt{t_t^2 + t_s^2}$

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE EVOLUTION, MODE MIX RATIO = TRACTION
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution: Mode mix ratio: Traction

Hay que tener en cuenta que si se utilizara alguna de las formulaciones analíticas para la descripción del comportamiento mixto de fractura, el índice de modo mixto se asumiría, como ya se ha comentado anteriormente, en términos energéticos. Ambas opciones están disponibles en el caso de seleccionar un comportamiento tabular.

La convergencia de las ecuaciones se puede convertir en un problema en ocasiones. Si no es inmediata se puede hacer uso de un componente amortiguador a través de la regularización viscosa. Con este artificio se pueden superar ciertos problemas de convergencia sin afectar de forma significativa a los resultados obtenidos.

- Input file (\*.inp): \*DAMAGE STABILIZATION
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage stabilization cohesive

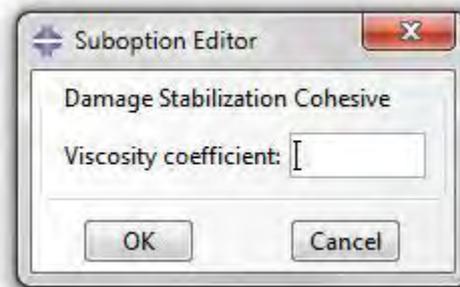


Figura 4.41: Coeficiente de amortiguación viscosa para facilitar la convergencia de las ecuaciones

### 4.3.3.2 XFEM basado en la MFEL

Para estudiar el comportamiento de las fisuras existen otros caminos alternativos al de los modelos de zona cohesiva, es el caso de la MFEL que es más indicada para el caso de fractura frágil. Cabe destacar que este método necesita de la existencia de un defecto o discontinuidad en el modelo, una vez se ha creado la grieta esta se puede propagar por caminos arbitrarios. Por lo tanto las consideraciones derivadas de esta teoría solo se aplicarán una vez que la fisura haya nucleado.

#### 4.3.3.2.1 Inicio del daño

Si Abaqus no encuentra una grieta preexistente en el elemento, utilizará para definir la nucleación de la fisura alguno de los seis criterios que se utilizaban en los modelos cohesivos, su implementación sería la misma que para el caso de modelos cohesivos.

#### 4.3.3.2.2 Evolución del daño

En este caso el daño se introduce como una de las propiedades del contacto de la grieta. Mediante el botón situado en la esquina inferior derecha de la ventana *Edit Crack* que se muestra en la Figura 4.14 se pueden definir estas propiedades de interacción. De todas formas, se pueden editar o modificar estas propiedades posteriormente con ayuda del *Interaction Property Manager*.

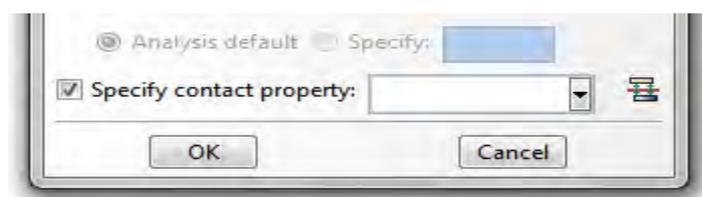


Figura 4.42: Detalle ventana *Edit Crack*. *Creation Property Interaction*

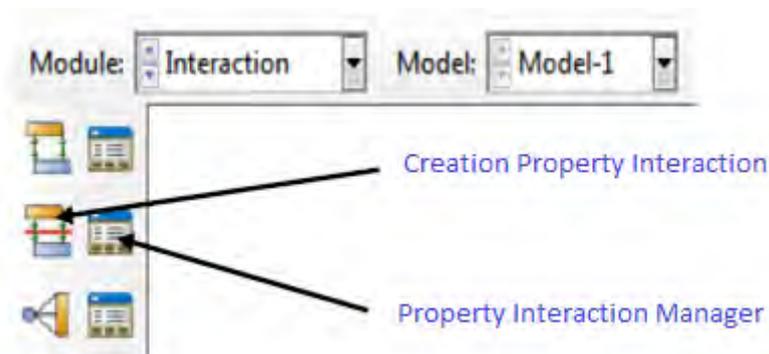


Figura 4.43: Detalle del Módulo Interaction. Creation Property Interaction y Property Interaction Manager (69)

Cuando el daño se ha iniciado el crecimiento de la fisura está restringido por la variable  $f$ , de tal forma que la fisura puede propagarse cuando esta variable alcanza el valor de la unidad con una determinada tolerancia  $e_f$ .

$$1 \leq f \leq 1 + e_f$$

4.55

En el caso de que  $f > 1 + e_f$  se va reduciendo paulatinamente el incremento de tiempo del step, la condición para que esta reducción se detenga es el cumplimiento de este criterio. Esta condición suele provocar bastantes problemas de convergencia, sobre todo en modelos complicados, ya que el procesador aborta el estudio si no puede avanzar en un determinado número de intentos. Por defecto el valor que aparece es 0.2 pero se puede modificar para intentar solventar estos inconvenientes (ver Figura 4.45).

- Input file (\*.inp): \*SURFACE BEHAVIOUR  
\*FRACTURE CRITERION, TOLERANCE =  $e_f$ , TYPE = VCCT
- Abaqus/CAE: Interaction module: Create Interaction Property → Contact → Mechanical → Fracture Criterion → Tolerance:  $e_f$

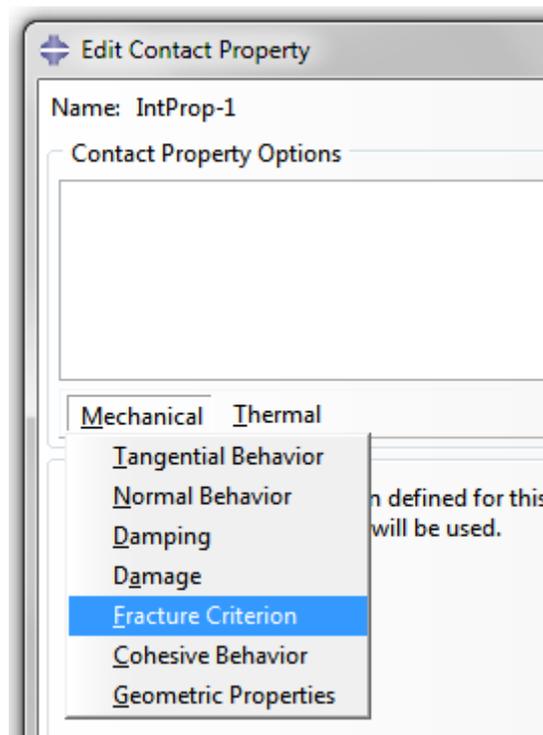


Figura 4.44: Detalle ventana *Edit Contact Property*. Seleccionar criterio de fractura

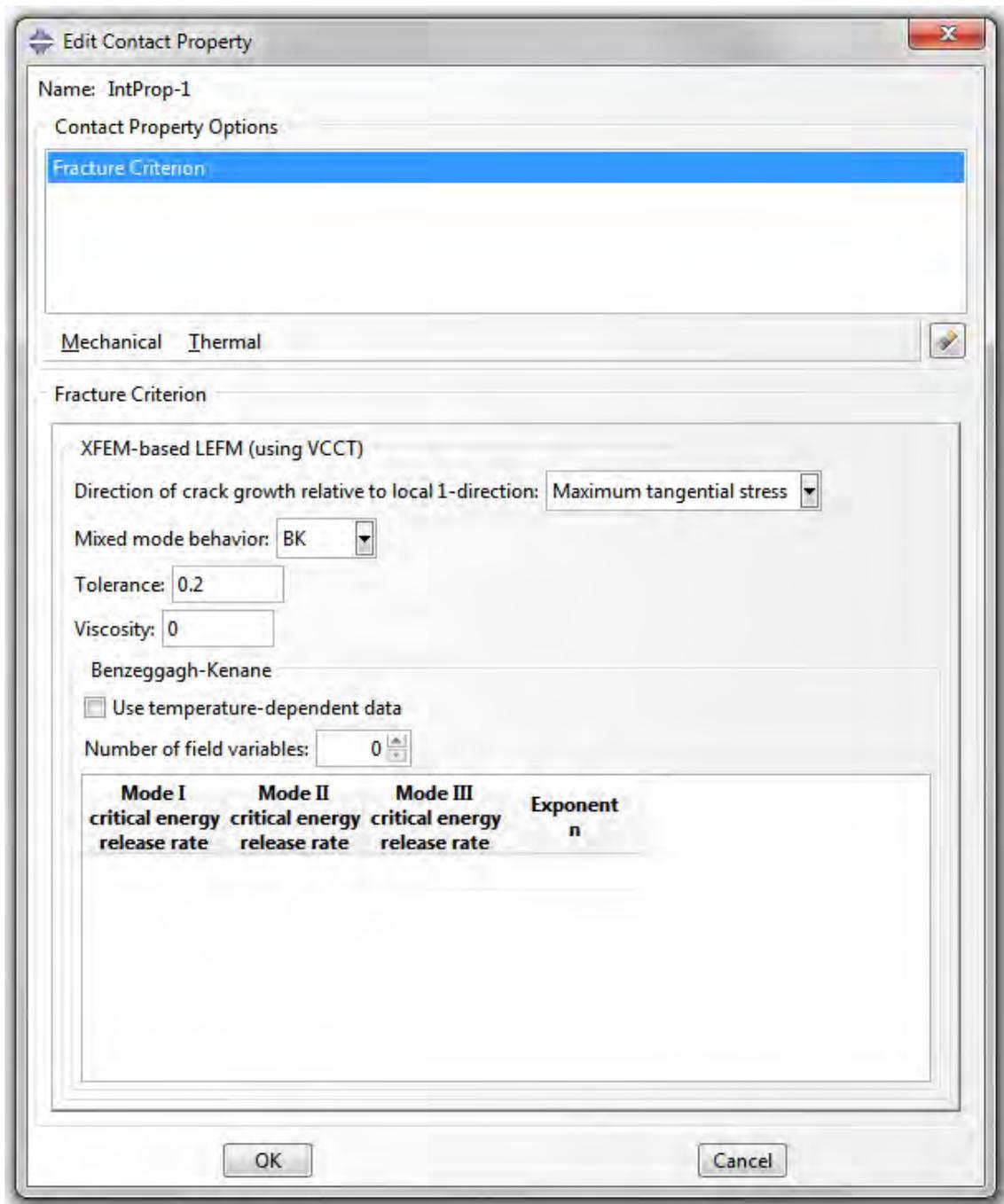


Figura 4.45: Parámetros necesarios para definir el criterio de fractura mediante XFEM basado en la MFEL y utilizando la VCCT

Además es necesario indicar la dirección de propagación de la fisura cuando el criterio de fractura se cumple. La opción que aparece por defecto es la dirección de la máxima tensión tangencial pero también se pueden elegir la dirección ortogonal a la dirección 1 del elemento o la ortogonal a la dirección 2 del mismo.

- Input file (\*.inp): \* FRACTURE CRITERION, NORMAL DIRECTION = MTS

\*FRACTURE CRITERION, NORMAL DIRECTION = 1

\*FRACTURE CRITERION, NORMAL DIRECTION = 2

- Abaqus/CAE: Interaction module: Create Interaction Property → Contact → Mechanical → Fracture Criterion → Direction of crack growth relative to local 1-direction: Maximum tangential stress, Normal or Parallel

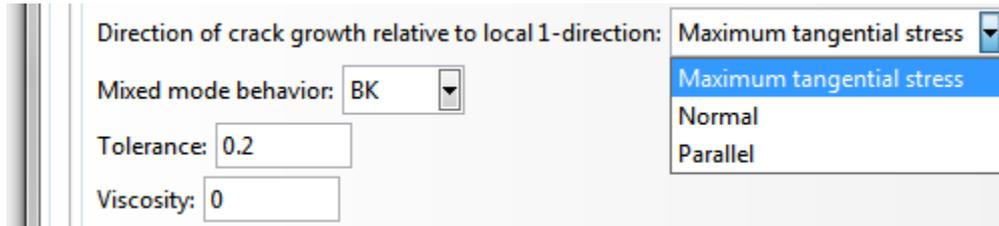


Figura 4.46: Selección de la dirección de crecimiento de la grieta

Para el modo mixto, Abaqus utiliza la VCCT (*Virtual Crack Closure Technique*) con el objetivo de calcular la tasa de liberación de energía de fractura, y permite seleccionar entre tres opciones: la Ley de Benzeggagh-Kenane, la Ley de Potencias y la Ley de Reeder.

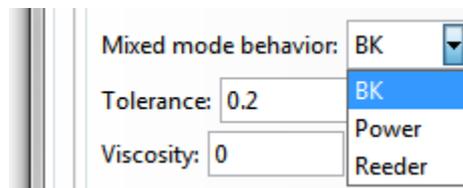


Figura 4.47: Selección del comportamiento en modo mixto de fractura

#### 1) Ley de Benzeggagh-Kenane

La expresión matemática para esta ley es la siguiente:

$$G_{eq}^C = G_{IC} + (G_{IIC} - G_{IC}) \left( \frac{G_{II} + G_{III}}{G_I + G_{II} + G_{III}} \right)^\eta$$

4.56

Donde  $G_{IC}$  y  $G_{II}$  son las tasas críticas de liberación de energía de fractura y  $\eta$  es un parámetro función del material y son los parámetros que hay que introducir en Abaqus. Reeder (61) en su obra ofrece diferentes valores para este parámetro según distintos materiales.

- Input file (\*.inp): \* FRACTURE CRITERION, TYPE = VCCT, MIXED MODE BEHAVIOUR = BK
- Abaqus/CAE: Interaction module: Contact Property Editor → Contact → Mechanical → Fracture Criterion → Mixed Mode Behaviour: BK e introducir las tasas críticas de liberación de energía en la tabla

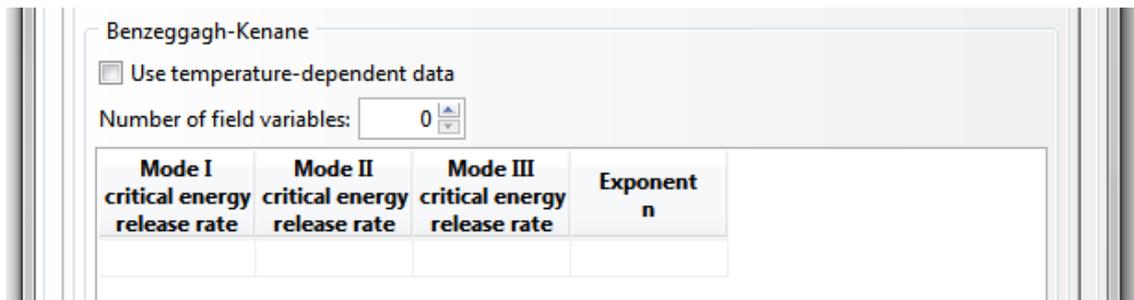


Figura 4.48: Parámetros necesarios para definir el comportamiento en modo mixto según la Ley de Benzeggagh-Kenane

## 2) Ley de Potencias

Esta ley fue enunciada por Wu y Reuter (66) en 1965 y matemáticamente se expresa como sigue:

$$\frac{G_{eq}}{G_{eq}^c} = \left(\frac{G_I}{G_{IC}}\right)^{a_m} + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}}\right)^{a_n} + \left(\frac{G_{III}}{G_{IIIC}}\right)^{a_0}$$

4.57

Para poder utilizar este modelo es necesario introducir los valores de  $G_{IC}$ ,  $G_{IIC}$ ,  $G_{IIIC}$ ,  $a_m$ ,  $a_n$  y  $a_0$ .

- Input file (\*.inp): \* FRACTURE CRITERION, TYPE = VCCT, MIXED MODE BEHAVIOUR = POWER
- Abaqus/CAE: Interaction module: Contact Property Editor → Contact → Mechanical → Fracture Criterion → Mixed Mode Behaviour: Power e introducir las tasas críticas de liberación de energía y los exponentes en la tabla

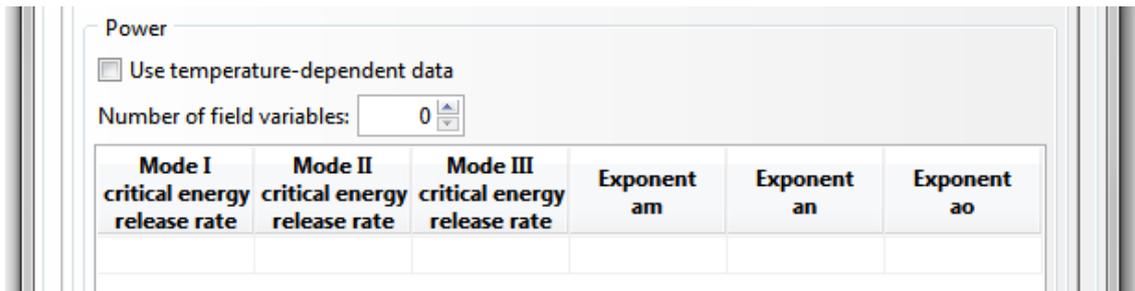


Figura 4.49: Parámetros necesarios para definir el comportamiento en modo mixto según la Ley de Potencias

### 3) Ley de Reeder

Este modelo se encuentra descrito en Reeder et al. (64) usando la siguiente expresión matemática:

$$G_{eq}^c = G_{IC} + (G_{IIC} - G_{IC}) \left( \frac{G_{II} + G_{III}}{G_I + G_{II} + G_{III}} \right)^\eta + (G_{IIIC} - G_{IIC}) \left( \frac{G_{III}}{G_{II} + G_{III}} \right) \left( \frac{G_{II} + G_{III}}{G_I + G_{II} + G_{III}} \right)^\eta$$

4.58

El uso de este modelo solo es aplicable a problemas tridimensionales y cuando se cumple  $G_{IIIC} \neq G_{IIC}$ , ya que por el contrario si la igualdad se cumple, la ecuación se simplifica a la Ley de Benzeggagh-Kenane. Para implementar el modelo hace falta introducir los valores de  $G_{IC}$ ,  $G_{IIC}$ ,  $G_{IIIC}$  y  $\eta$ .

- Input file (\*.inp): \* FRACTURE CRITERION, TYPE = VCCT, MIXED MODE BEHAVIOUR = REEDER
- Abaqus/CAE: Interaction module: Create Property Editor → Contact → Mechanical → Fracture Criterion → Mixed Mode Behaviour: Reeder e introducir las tasas críticas de liberación de energía y los exponentes en la tabla

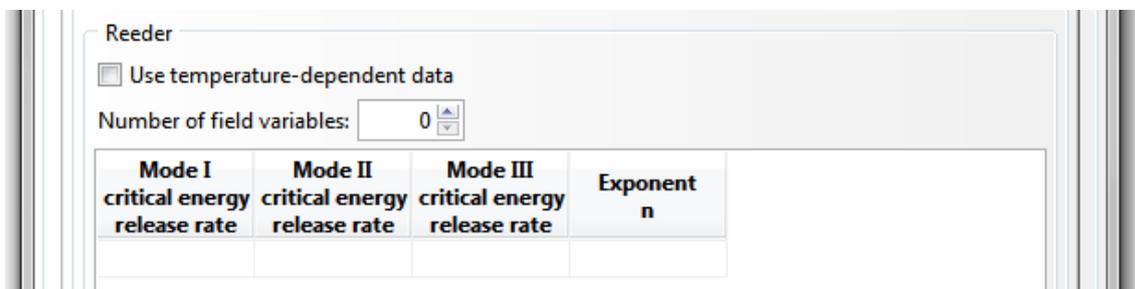


Figura 4.50: Parámetros necesarios para definir el comportamiento en modo mixto según la Ley de Reeder

En ocasiones para resolver el problema de la falta de convergencia en las ecuaciones se utiliza la técnica de regularización viscosa ya que amortigua el comportamiento no convergente en las ecuaciones (ver *Viscosity* en Figura 4.45).

- Input file (\*.inp): \* FRACTURE CRITERION, TYPE = VCCT, VISCOSITY =  $\mu$
- Abaqus/CAE: Interaction module: Contact Property Editor → Contact→ Mechanical → Fracture Criterion → Viscosity:  $\mu$

#### 4.3.4 Visualización de resultados

Una vez que Abaqus haya terminado de analizar el modelo se pueden visualizar los resultados. Para la visualización del inicio y el desarrollo de la fisura es necesario seleccionar en las variables de salida del módulo step PHILSM y STATUSXFEM.

La variable PHILSM permite visualizar el crecimiento de la fisura a partir del momento de su nucleación. Con las opciones de animación que Abaqus ofrece se puede visualizar de forma dinámica todo el proceso. También se pueden utilizar o modificar el modelo para hacerlo transparente pudiendo así visualizar el desarrollo de la fisura desde el interior.

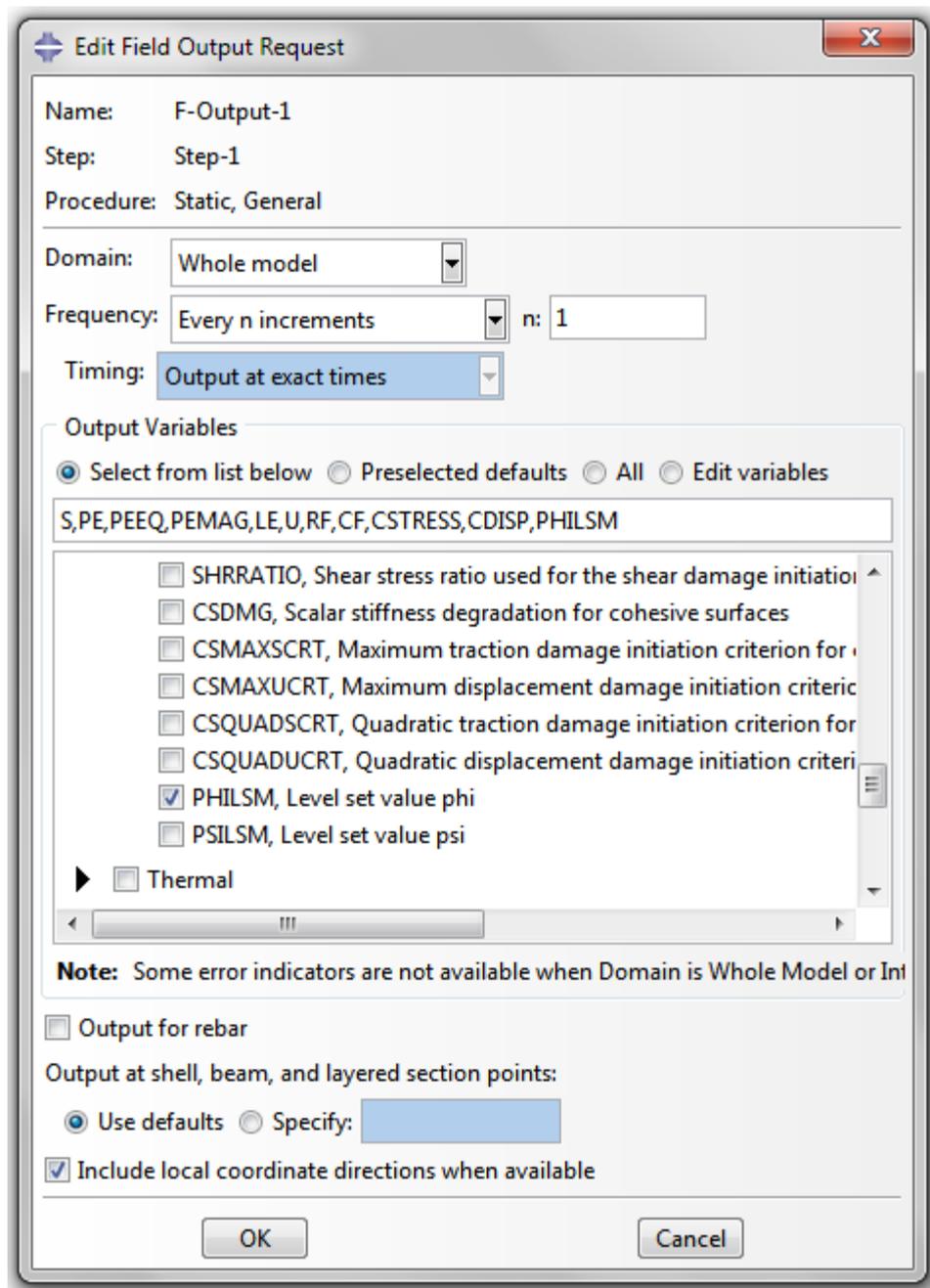


Figura 4.51: Selección PHILSM en la ventana *Edit Field Output Request*

La variable STATUSXFEM sirve para identificar el estado de los elementos que se han enriquecido. Dicha variable asigna un valor comprendido entre 0 y 1 a cada elemento. Los elementos con valor 0 están intactos, no así los que tienen valor 1 los cuales se encuentran totalmente degradados. Los elementos que presentan valores intermedios entre estos dos indican que están parcialmente dañados, cuanto más se acerquen a la unidad significará que están más afectados.

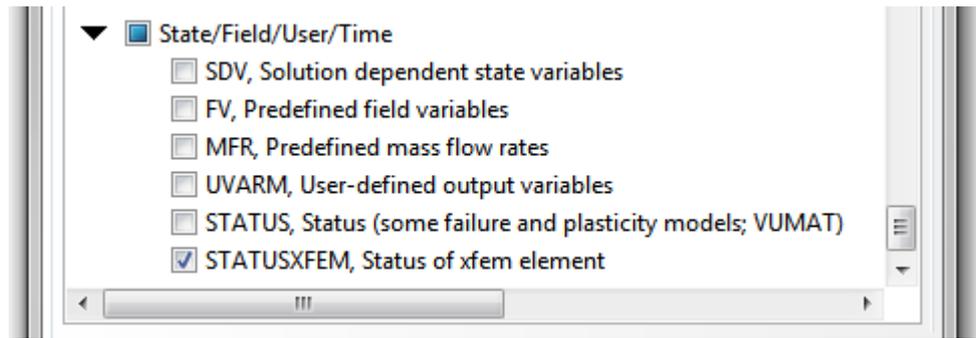


Figura 4.52: Detalle *Edit Field Output Request*. Selección STATUSXFEM

Para la realización de toda la guía de este Capítulo se ha realizado una extensa revisión bibliográfica proporcionada por autores que habían realizados estudios sobre el mismo tema anteriormente (69).



5

# PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 5.1 Explicación del problema tratado

Para el desarrollo del presente Trabajo se partirá de una viga cilíndrica biapoyada de 900 mm de longitud y 20 mm de diámetro y sometida a dos cargas puntuales de 20000 N de magnitud. Dichas cargas estarán situadas a un cuarto de la longitud de la viga desde cada uno de los extremos. Las características que se consiguen con esta disposición son un momento flector constante (en la zona central de la viga) y un esfuerzo cortante nulo. Estas condiciones han sido utilizadas en estudios anteriores no sólo de vigas sino también de ejes rotativos por el Área de Ingeniería Mecánica (69). Como ya se mencionó en el Capítulo 3 sólo se considerarán fisuras con frente recto ( $a/b = 0$ ). Para el tamaño inicial de las fisuras se van a emplear valores de  $a/D$  de 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5. Con el objetivo de evitar posibles distorsiones las cargas puntuales serán aplicadas en el centro de la sección circular para todos los tamaños iniciales.

La viga utilizada está hecha de aluminio con un Módulo de Young de 72 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.33. En cuanto a la modelización del daño Abaqus propone dos alternativas: la de los modelos cohesivos CZM y la que se basa en la Mecánica de Fractura Elástico-Lineal. Como el material utilizado es un metal dúctil la alternativa que mejor que ajusta a la realidad es la de los modelos cohesivos CZM ya que son los que consideran deformación plástica en las inmediaciones de la fisura, por esta razón la alternativa elegida ha sido la de los CZM. En todos los casos estudiados se utiliza MAXPS como criterio de inicio de daño introduciendo un valor de 5 MPa. Cabe destacar que el valor real de esta tensión para un material como el aluminio ronda los 500 MPa pero se ha tenido que reducir esta cantidad en dos órdenes de magnitud debido a que las fisuras de los primeros modelos que se intentaron analizar con 500 MPa tardaban días en empezar a propagarse y el tiempo es una restricción muy importante. En principio, este cambio no debería afectar a los resultados ya que lo que se pretende analizar es la influencia del mallado y en segundo lugar un análisis cualitativo de la forma y el comportamiento de la fisura durante su crecimiento. Lo único que producirá este cambio es un inicio más rápido del crecimiento ya que las características inherentes al material como el Módulo de Young y el coeficiente de Poisson permanecen inalterables. En cuanto a la evolución del daño se ha optado por la Ley de Benzeggagh-Kenane cuyo exponente toma el valor 1.

Otro parámetro crucial para el análisis de los resultados son las energías de fractura. Para poder observar el crecimiento de las fisuras es necesario utilizar valores que no se ajustan completamente al material. Para facilitar el crecimiento de la fisura en las inmediaciones de la sección central de la viga se utilizarán unos valores al menos dos órdenes de magnitud superior en los modos II y I respecto al valor otorgado en el modo I. Esto se hace con el objetivo de que la fisura siga un camino lo más recto posible durante su crecimiento y no se propague en la dirección axial.

Todos los casos que se realicen van a ser analizados dos veces, uno con cada tipo de malla, los dos mallados que se utilizan se expondrán en el siguiente apartado. Por tanto se van a realizar un total de 10 casos. Además se van a realizar otros 4 casos adicionales pero con diferentes condiciones a las descritas anteriormente. En estos 4 casos las cargas serán fluctuantes y oscilarán entre 200 N y -200 N con un período de 0.000001 s para poder observar el fenómeno de fatiga. Para estos últimos casos los tamaños de las fisuras que se van a utilizar

$a/D$  son 0.4 y 0.5, una vez cada uno con cada mallado. De este modo se podrá analizar el comportamiento de las fisuras ante cargas estáticas y cargas variables así como la influencia del mallado en los resultados.

Para poder alcanzar los resultados finales han sido innumerables los modelos de prueba analizados, cambiando parámetros desde las condiciones de contorno hasta las energías de fractura. Por tanto el tiempo que se ha tardado para obtener los resultados finales ha sido considerable.

## 5.2 Mallado

Cualquier análisis realizado mediante un programa de elementos finitos como Abaqus o ANSYS requiere del mallado de los elementos sometidos a estudio. El mallado consiste en dividir el medio continuo de los elementos a analizar en elementos discretos a través de la malla deseada. De esta forma el programa es capaz de resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes para obtener la solución del problema, evidentemente a medida que la malla sea más pequeña el número de elementos será mayor y se requerirá resolver un mayor número de ecuaciones. Esto conlleva un mayor coste computacional y un aumento del tiempo de cálculo pudiendo llegar incluso a días o semanas. Por este motivo los resultados que se van a obtener en este Trabajo tienen una precisión limitada ya que el tiempo es una restricción importante a la hora de analizar modelos. En la Figura 5.1 se muestran los iconos más útiles dentro del *Módulo Mesh*.

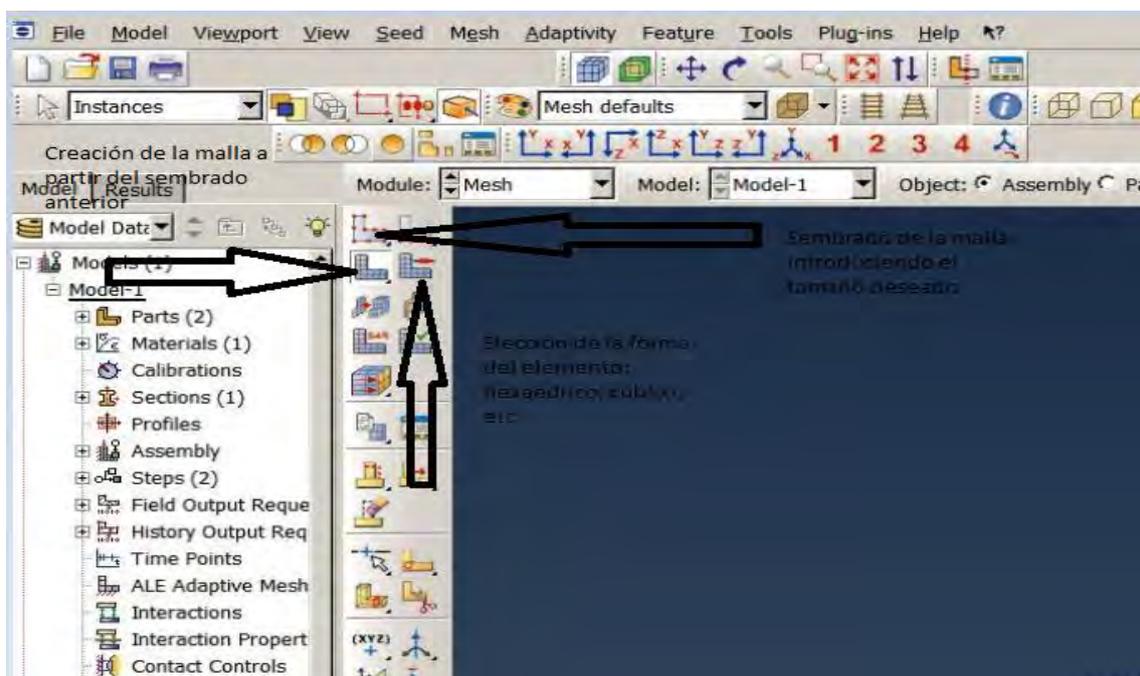


Figura 5.1: Iconos más útiles del *Módulo Mesh*

Abaqus permite muchos tipos de mallado, pero todos ellos pueden dividirse en dos grandes grupos:

- 1) Mallado global por tamaño: El usuario puede seleccionar el elemento completo o una parte de un elemento y asignar un tamaño de malla. En la parte que haya sido seleccionada se creará una malla formada por elementos del tamaño que corresponda con el tamaño introducido. Los elementos serán más pequeños a medida que el tamaño introducido disminuya por lo que es muy intuitivo, hay que pinchar en el primer icono de la izquierda. En la Figura 5.2 se está mallando un eje globalmente.

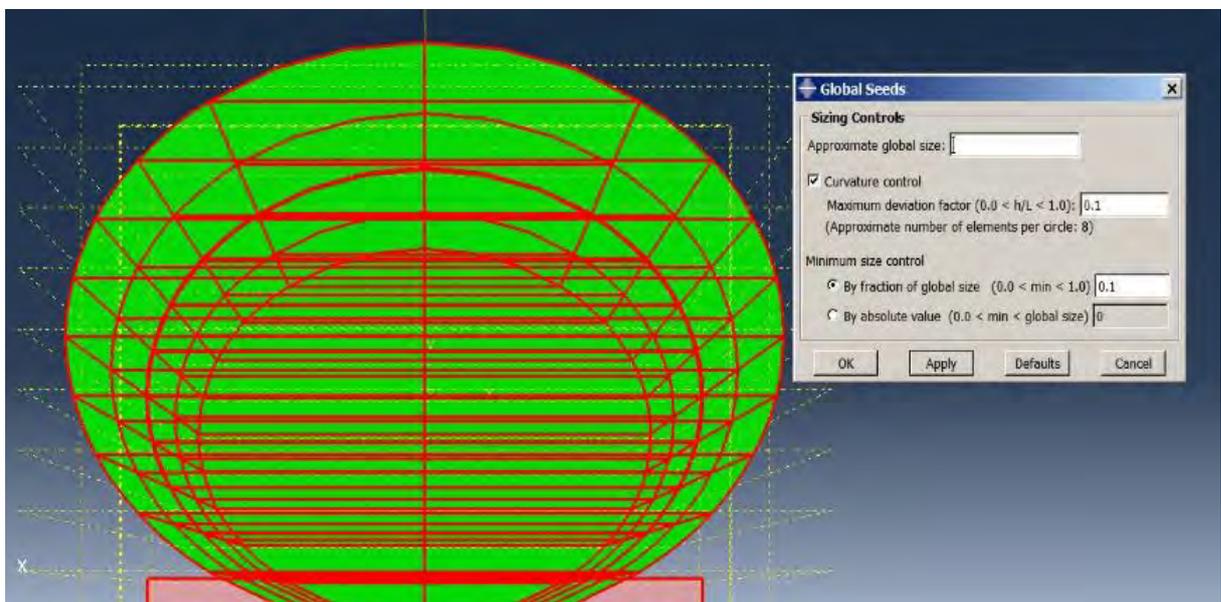


Figura 5.2: Asignación de las semillas para el mallado global por tamaño del elemento

- 2) Mallado por número de elementos o por partes: Es la otra opción disponible y consiste en seleccionar el elemento completo o particiones de este e introducir el número de elementos en que se quiere dividir la parte seleccionada. Es decir si se selecciona una parte del modelo y se introduce 1000, cuando se malle esa parte estará dividido en 1000 elementos. También es posible seleccionar una línea como en la Figura 5.4 o un elemento tipo cell, face, etc e ir asignando tamaños diferentes a cada elemento seleccionado.

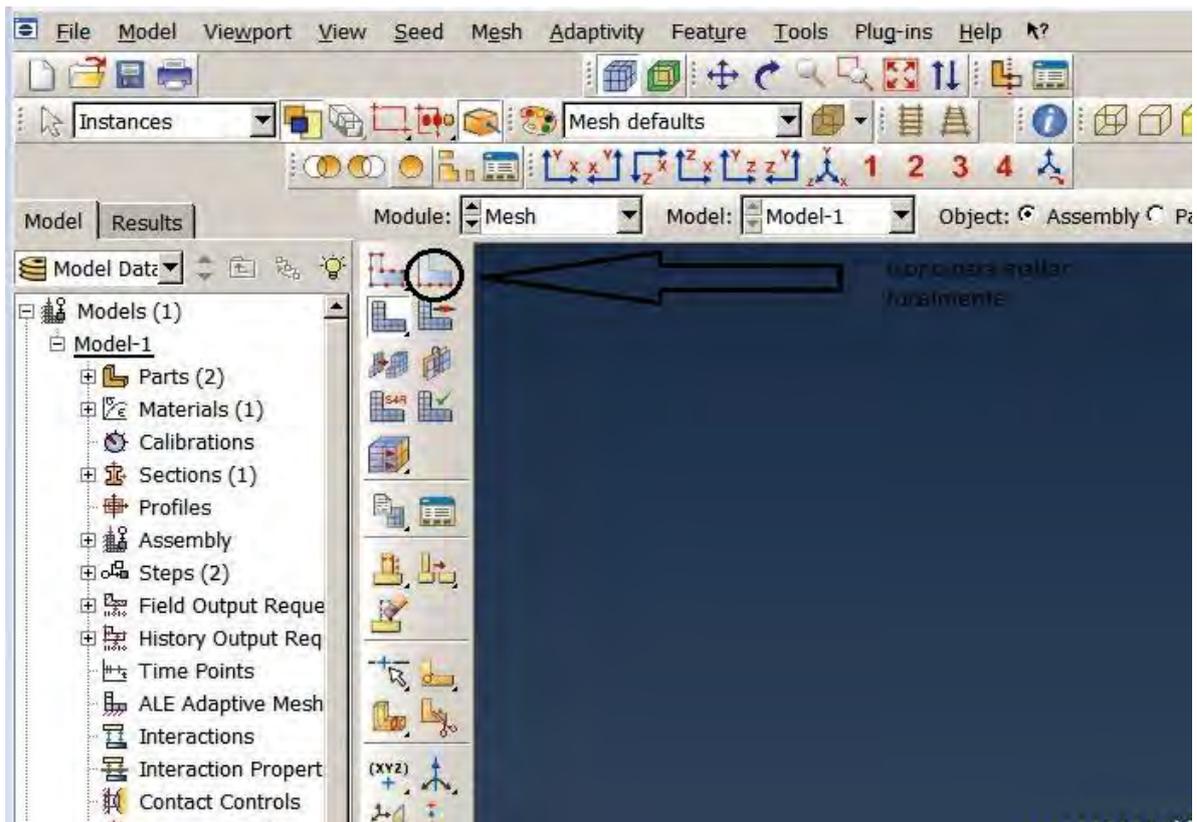


Figura 5.3: Selección del mallado de forma local

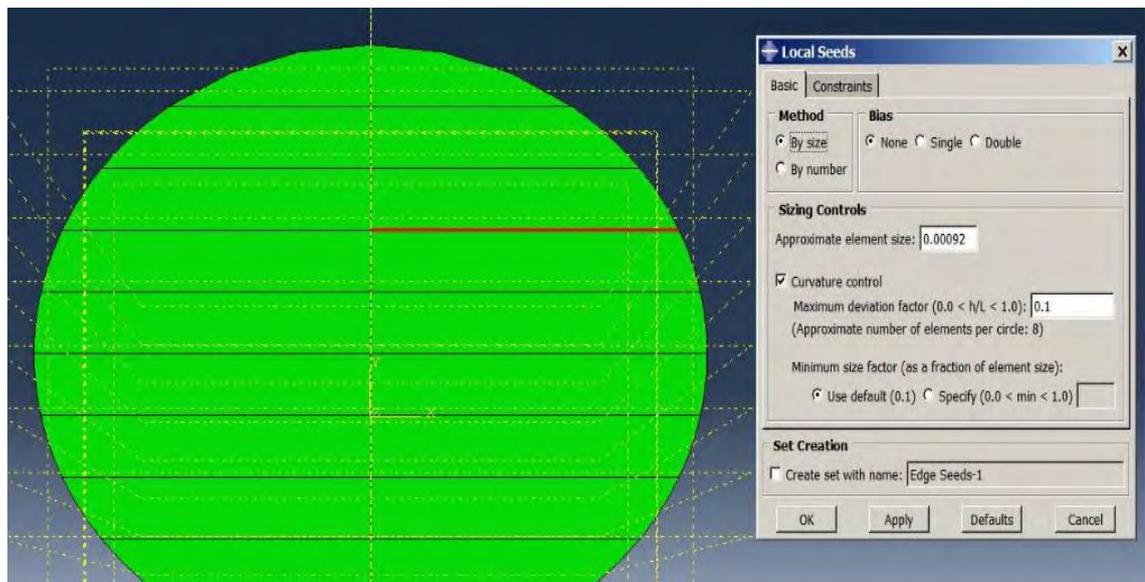


Figura 5.4: Sembrado de las semillas de la malla para la línea roja

Hay que añadir que los elementos con los que se mallan los modelos pueden ser hexaédricos (lo más deseable ya que se obtienen resultados más precisos), cúbicos o tetraédricos. Por defecto Abaqus siempre seleccionará los elementos de tipo hexaédrico. De todas formas, si por alguna razón se desea cambiar el tipo de elemento se puede hacer en el correspondiente icono (ver Figura 5.1). Se puede elegir el tipo de elemento deseado como se muestra en la Figura 5.5.

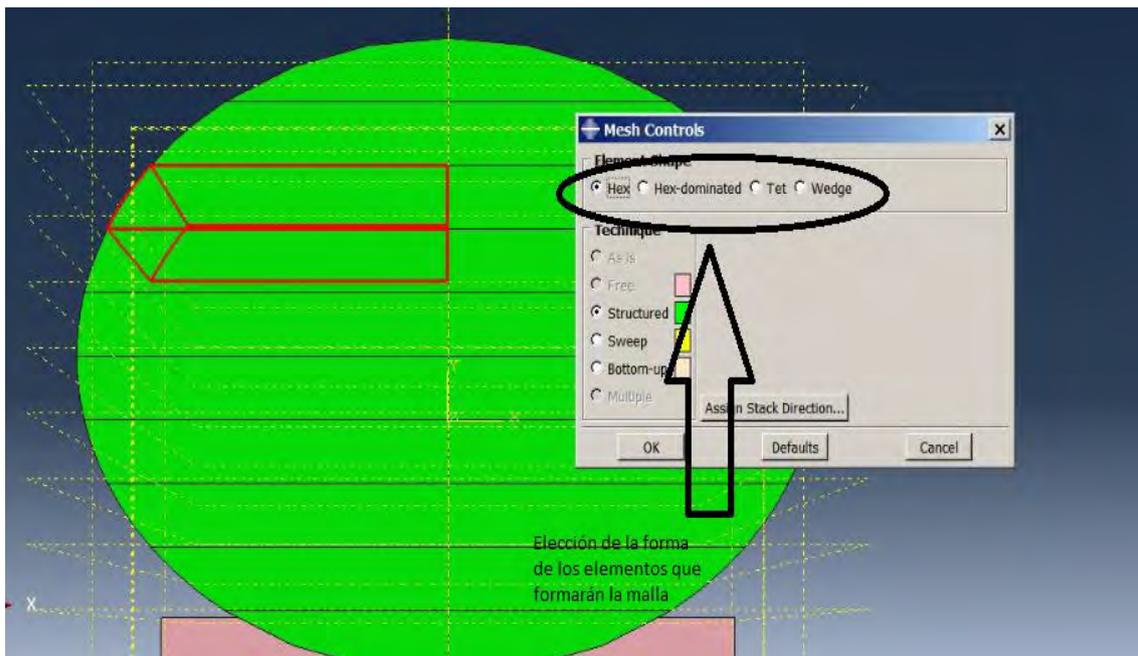


Figura 5.5: Selección de la forma de los elementos que se crearán en el elemento en rojo

## 5.2.1 Selección del mallado

Para mallar el eje descrito en el apartado anterior se va a utilizar el segundo tipo de mallado ya que es más cómodo para utilizar diferentes tamaños en la sección transversal del eje. Como ya se ha comentado los elementos con los que se mallan los modelos pueden ser hexaédricos (lo más deseable ya que se obtienen resultados más precisos), cúbicos o tetraédricos. Se van a utilizar elementos de forma hexaédrica.

Se debe tener en cuenta que no todas las partes del eje necesitan el mismo refinamiento, las partes más alejadas de la fisura no necesitan gran precisión por lo que el tamaño de la malla en estas zonas puede ser mayor. Sin embargo la zona afectada por la fisura necesita unos resultados más precisos porque es la zona donde se va a producir el crecimiento de esta por lo que en esta zona la malla deberá ser menor.

Lo primero que se va a realizar es el mallado según la dirección longitudinal. Se ha decidido poner una distancia  $l = 75mm$  para los elementos en esta dirección por las razones expuestas anteriormente. No obstante, el hecho de que los elementos tengan una relación tan grande entre su tamaño transversal y su longitudinal presenta algunos problemas ya que los elementos se distorsionan en exceso durante la simulación y en ocasiones Abaqus presenta errores, se analizará con detalle en el Capítulo 6. Sin embargo, en la zona cercana a la fisura se ha reducido notablemente el tamaño de estos elementos  $l = 1mm$  para dotar al análisis de una mayor precisión.

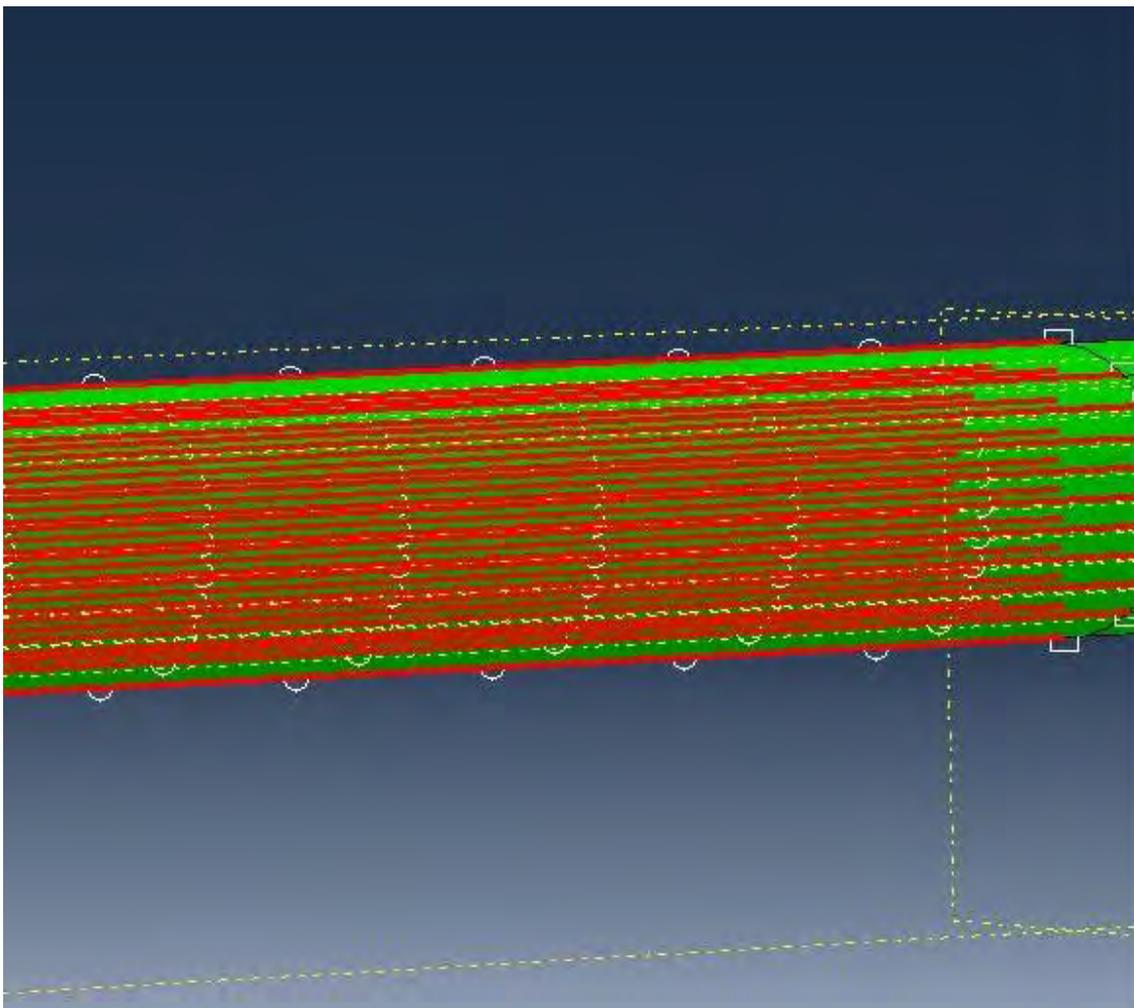


Figura 5.6: Asignación de las semillas para el mallado en la dirección longitudinal en las zonas alejadas de la fisura

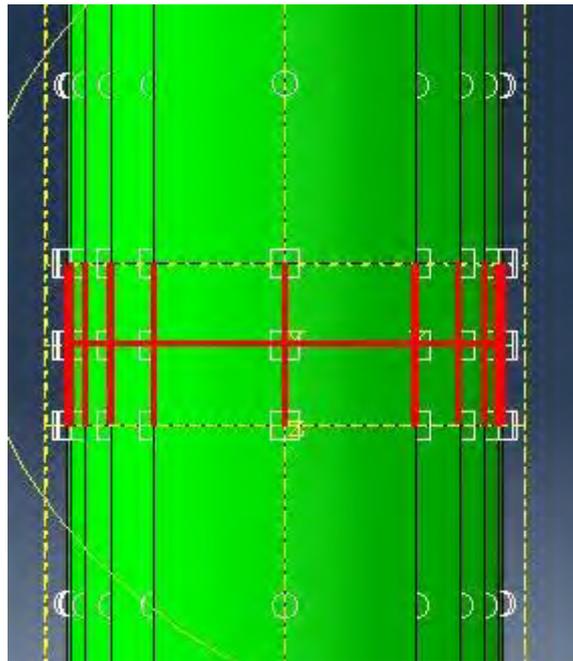


Figura 5.7: Asignación de las semillas para el mallado en la dirección longitudinal en la fisura

Después de realizar este paso se ha procedido al mallado de la sección transversal del eje. Como uno de los objetivos del Trabajo es cuantificar al menos cualitativamente la influencia del tipo de malla utilizada en los resultados se van a realizar dos tipologías de mallados. No obstante en la dirección longitudinal el mallado será el mismo con las mismas distancias para los dos casos como puede verse en las Figuras 5.8 y 5.9.

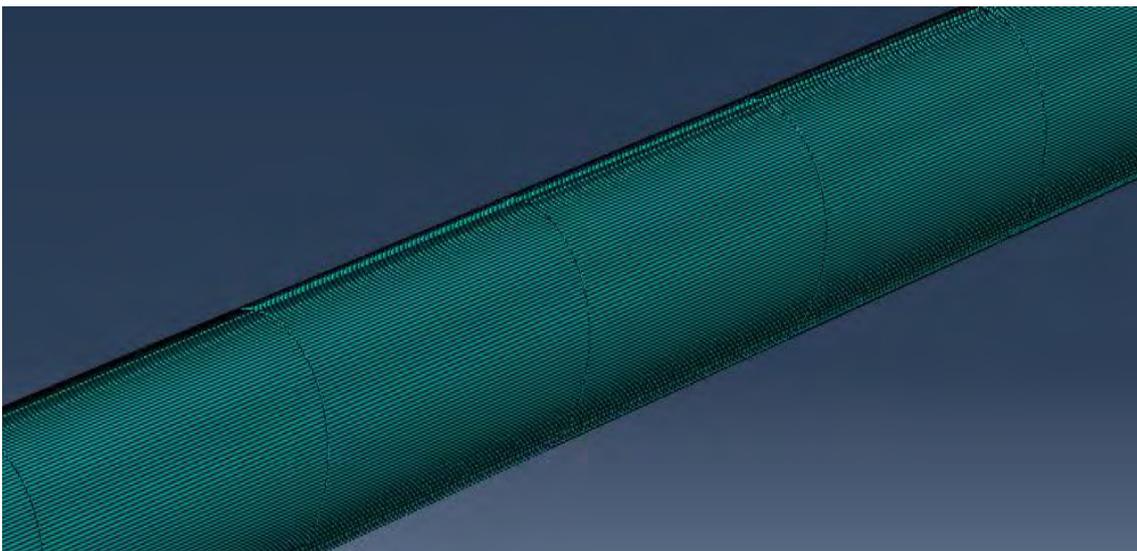


Figura 5.8: Mallado final lejos de la fisura

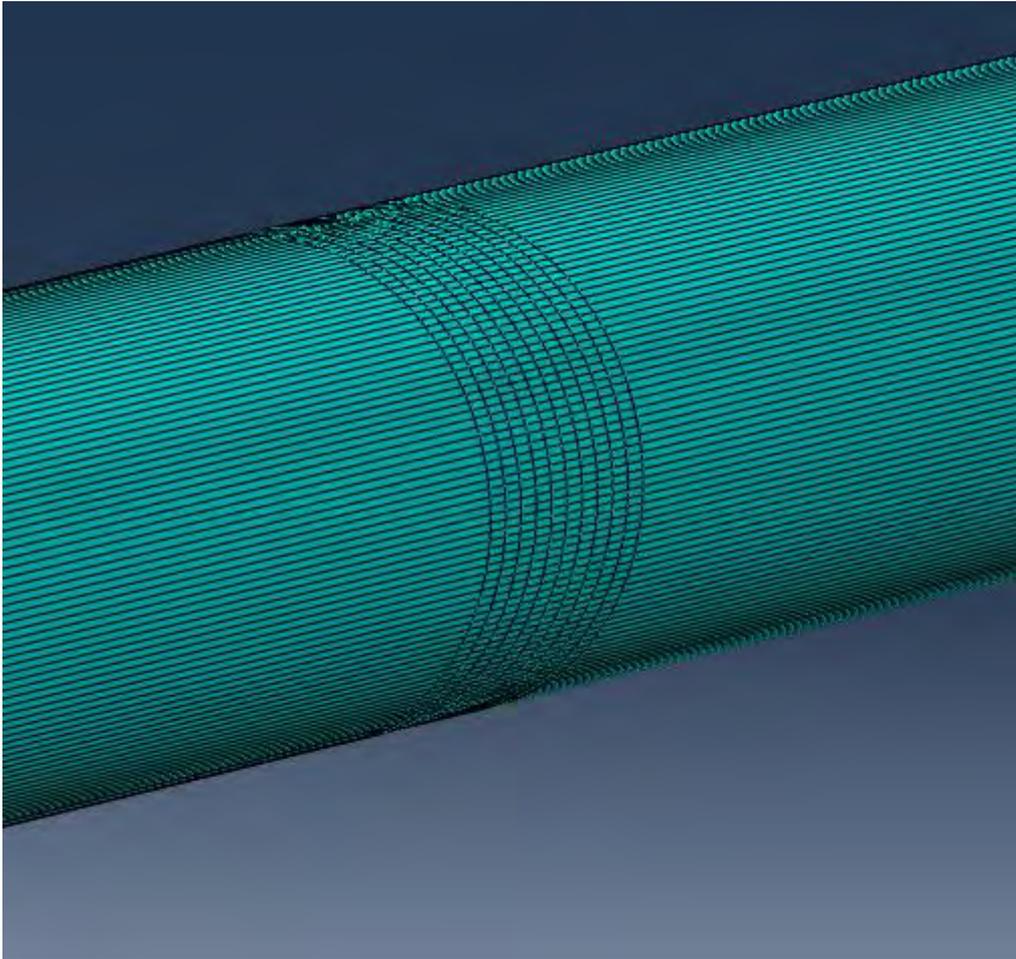


Figura 5.9: Mallado final en la fisura

#### 5.2.1.1 Tipo de malla 1

La primera malla se va a realizar aprovechando las numerosas particiones de las que dispone el modelo (para poder mover la grieta rápidamente para los diferentes  $\alpha$  en los distintos modelos). Se define un tamaño de malla en cada línea para, en una primera aproximación, obtener una malla lo más regular posible, sin ángulos demasiado agudos en los elementos que podrían complicar la convergencia.

En la Figura 5.10 vienen detallados los distintos tamaños utilizados mediante un código de colores.

En la Figura 5.11 se aprecia la forma final del mallado en la sección transversal.

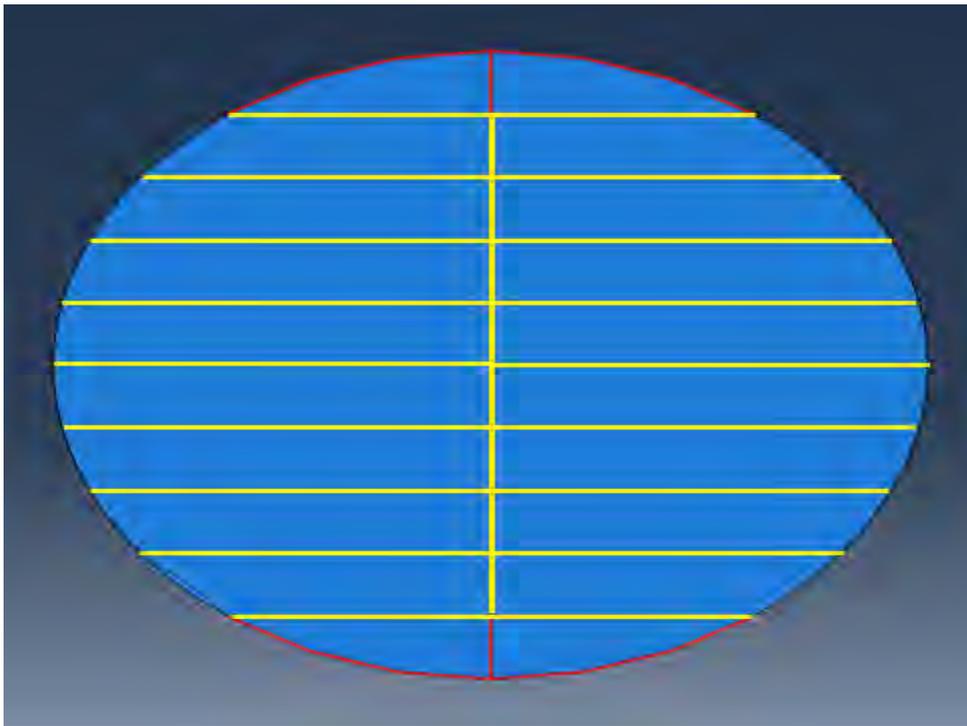


Figura 5.10: Tamaños de malla, en amarillo 0.5 mm y en rojo 1 mm

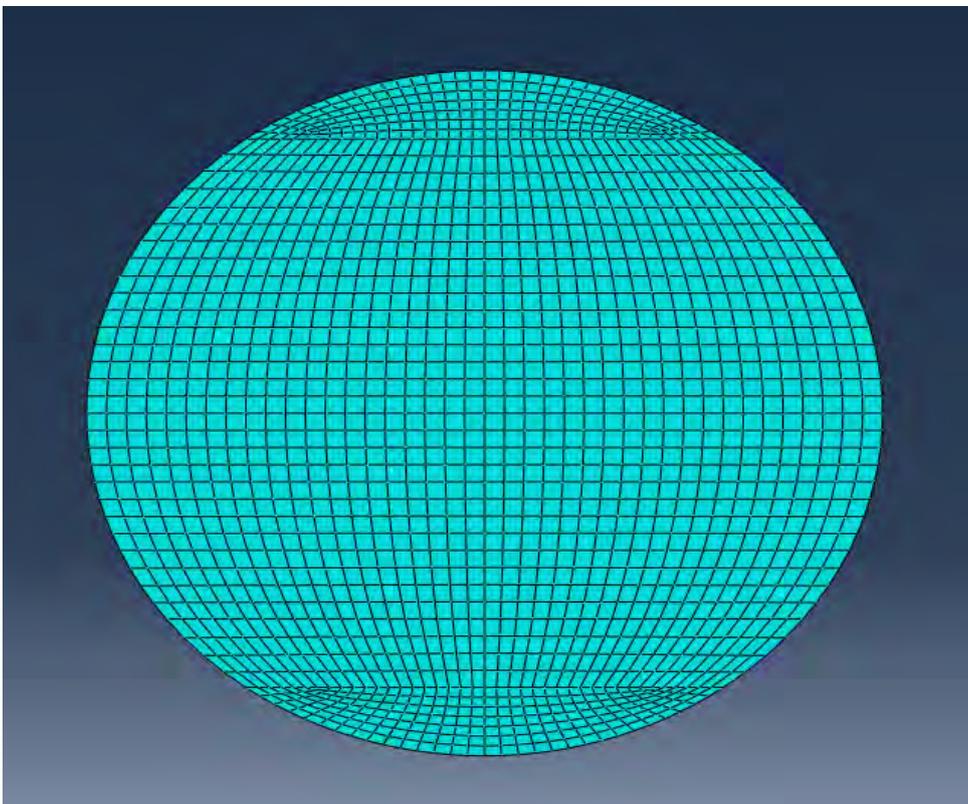


Figura 5.11: Mallado final 1 en la sección transversal

Con este tipo de disposición se obtiene una malla muy regular en el centro con elementos prácticamente de sección cuadrada por lo que es de esperar que los resultados en las zonas centrales sean fiables. Sin embargo en los extremos los elementos están más distorsionados y son más pequeños por lo que puede ser que se produzcan problemas en la convergencia.

### 5.2.1.2 Tipo de malla 2

La segunda malla se va a utilizar asignando un tamaño a la circunferencia exterior del eje por lo que en este caso no se va a hacer uso de las particiones. En la figura 5.12 se puede ver gráficamente.

En la Figura 5.13 se aprecia la forma final del mallado en la sección transversal.

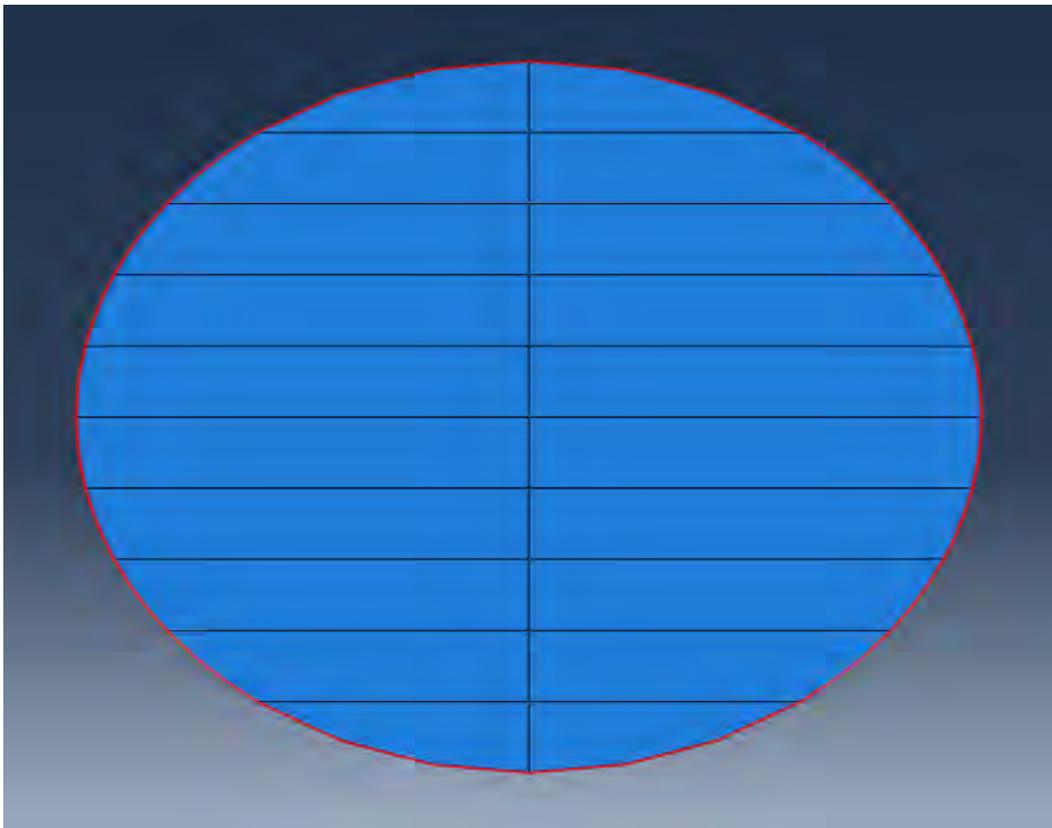


Figura 5.12: Tamaño de malla, en rojo 0.35 mm

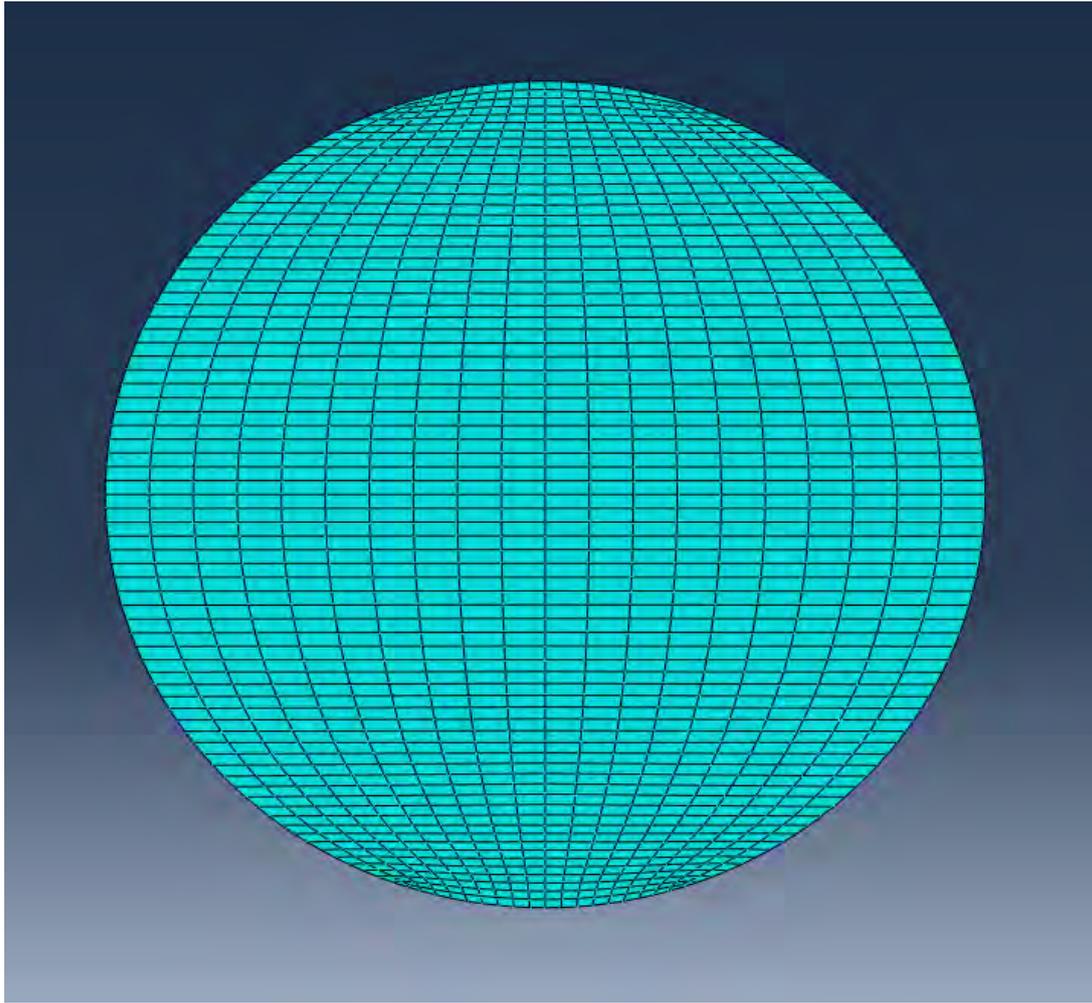


Figura 5.13: Mallado final 2 en la sección transversal

Con este tipo de disposición los elementos que se forman en el centro no son tan cuadrados sino más bien de sección rectangular. A cambio de esto en los extremos se obtiene una malla más regular y no se nota tanto el cambio, los elementos no tienen unos ángulos tan extremos como los del mallado 1. Es de esperar por lo tanto que los resultados sean más regulares en los extremos y menos precisos en el centro.



# 6

# RESULTADOS Y DISCUSIÓN

## 6.1 Análisis con cargas estáticas

Para poder alcanzar los resultados finales han sido innumerables los modelos de prueba analizados, cambiando parámetros desde las condiciones de contorno hasta las energías de fractura. Por tanto el tiempo que se ha tardado para obtener los resultados finales ha sido considerable.

Las variables internas de Abaqus que permiten monitorizar el crecimiento de la fisura están explicadas en el Capítulo 4: PHILSM y STATUSXFEM. La variable PHILSM permite visualizar el crecimiento de la fisura a partir del momento de su nucleación. La variable STATUSXFEM es similar pero se basa en los nodos fantasma, cuando el elemento está intacto su valor es 0 y evoluciona conforme el elemento se va degradando hasta un valor máximo de 1.

A parte de estas dos variables también se va a incluir la variable S33. Esta variable representa la tensión normal en un elemento indicando el nivel de tracción o compresión en cada instante. Para el caso de cargas estáticas que se analiza en este apartado la tensión normal siempre será a tracción en la fisura y a compresión en la parte de la sección que permanece intacta. En el caso de las cargas variables es de esperar que las tensiones aumenten y disminuyan a lo largo del proceso de propagación ya que la fuerza aplicada cambiará de sentido.

### 6.1.1 Tamaño de fisura $\frac{a}{D} = 0.1$

Con el objetivo de ahorrar tiempo se detalla el procedimiento estándar que se va a utilizar para la exposición de los resultados de todos los casos estudiados.

Los resultados se presentan por filas, las filas impares representan los resultados obtenidos utilizando el primer mallado y, por el contrario, las filas pares representan los resultados obtenidos utilizando el segundo mallado. La primera fila de cada mallado corresponde con el primer incremento de tiempo y las siguientes con los sucesivos incrementos de tiempo más significativos (siempre los mismos para los dos mallados para poderlos comparar) de tal manera que el primer incremento corresponde con el estado inicial de la fisura y el último con el último instante antes de que se parase el modelo. Las tres secciones que aparecen de izquierda a derecha están referidas a las variables PHILSM, STATUSXFEM y S33 respectivamente. Al ser la variable S33 una tensión se prevé que puedan aparecer valores extremos en ciertos elementos distorsionados que no se ajustan a la tensión que aparece realmente. Por este motivo se impone una cota inferior y otra superior para acotar los valores más representativos durante el proceso. De todas formas en cada caso aparece especificada la leyenda utilizada tanto para el primer como para el segundo mallado (ver Figura 6.1).

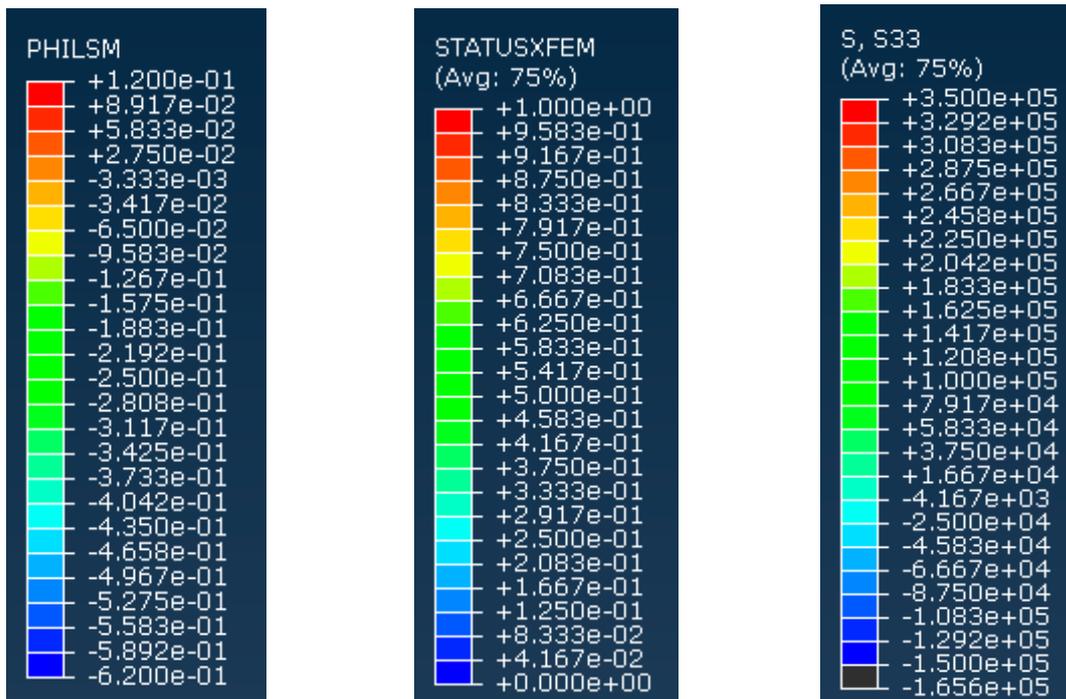


Figura 6.1: Leyendas de izquierda a derecha: PHILSM, STATUSXFEM y S33 en Pascales

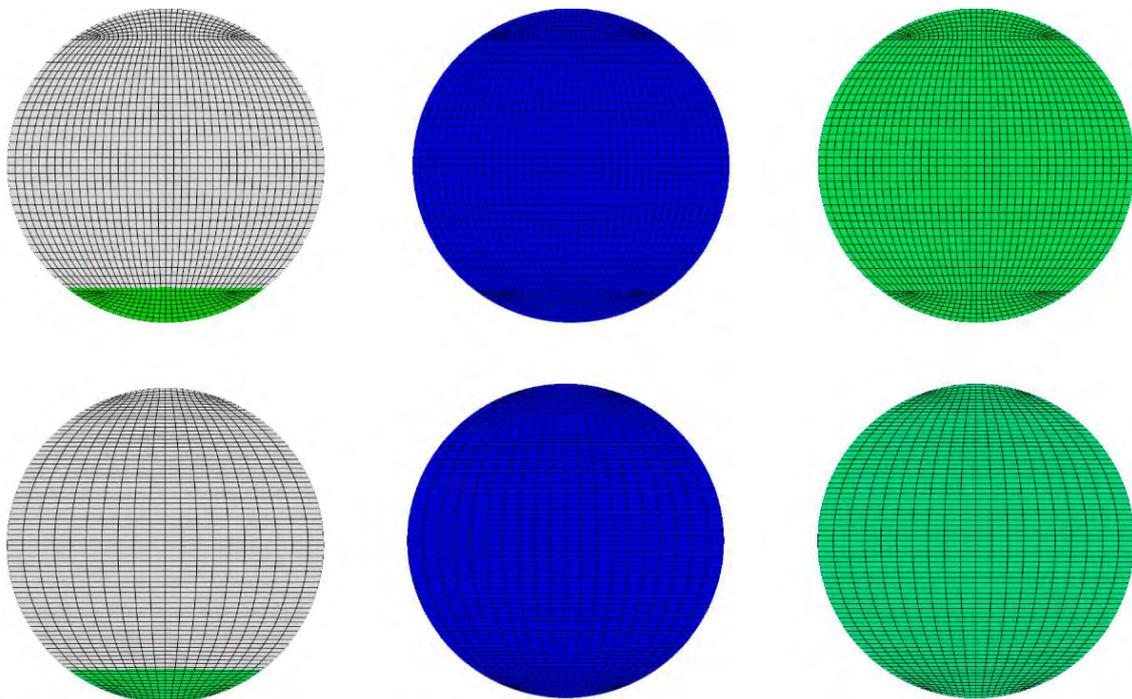


Figura 6.2: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.1$  incremento 1

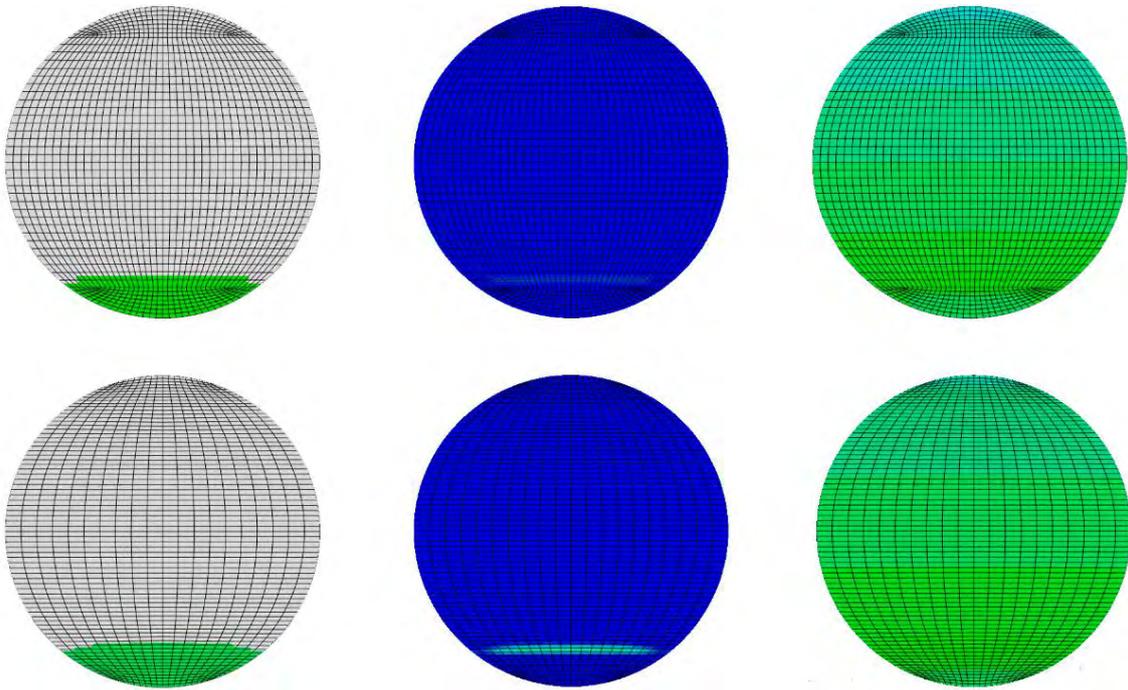


Figura 6.3: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.1$  incremento 2

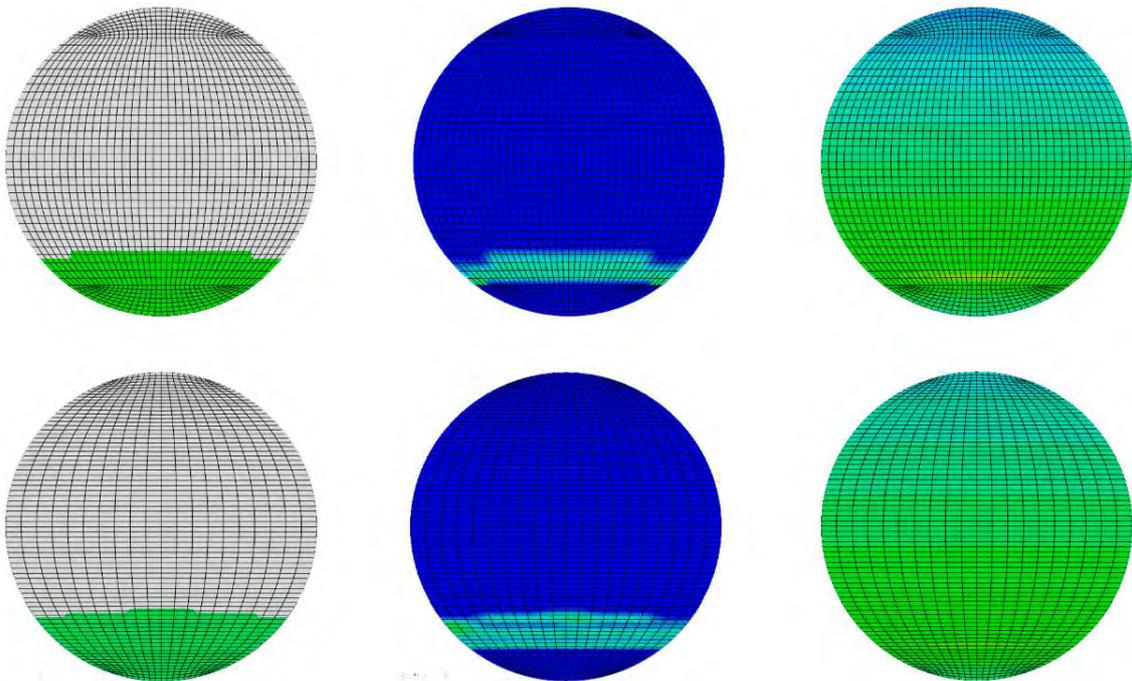


Figura 6.4: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.1$  incremento 3

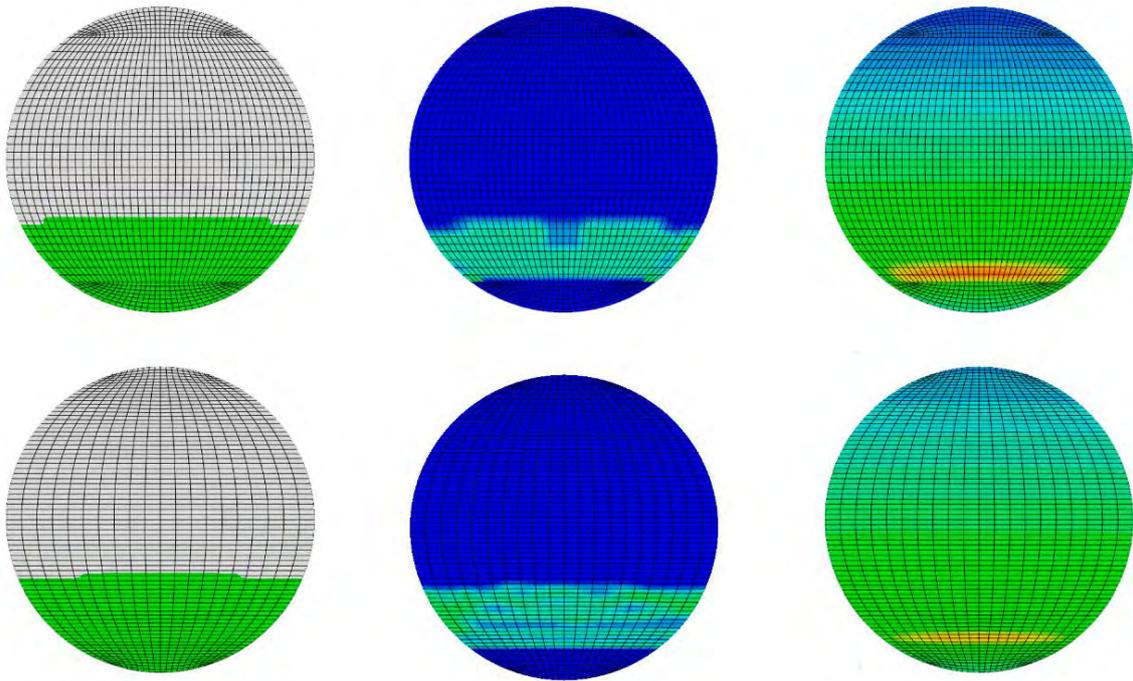


Figura 6.5: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.1$  incremento 4

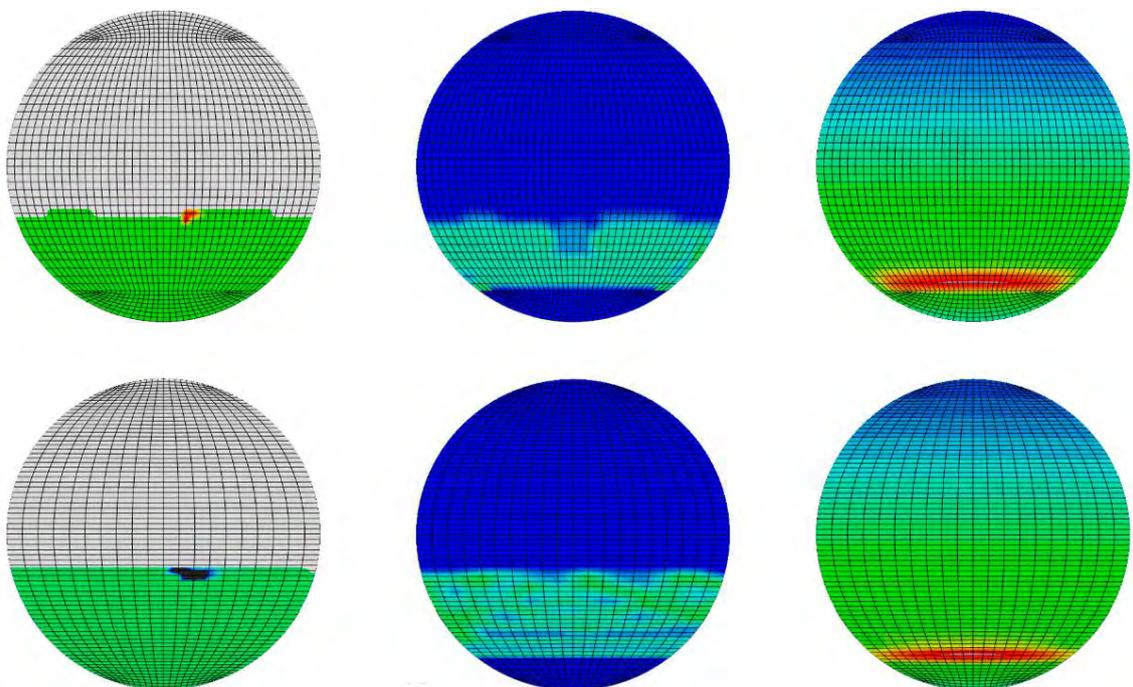


Figura 6.6: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.1$  incremento 5

Una primera observación es el hecho de que la fisura se propaga de forma más regular en el primer tipo de malla, se aprecia cómo el crecimiento por el centro va siempre un poco más adelantado al crecimiento en los laterales excepto en el último incremento cuando el modelo se detiene. Se produce una mayor degradación de los elementos en el segundo mallado, además dichos elementos se degradan más rápido como se puede ver en la Figura 6.3.

En cuanto a las tensiones normales se puede ver cómo en la parte superior la viga está sometida a tensiones de compresión como es lógico y van creciendo a lo largo del tiempo, las máximas tensiones de tracción se alcanzan en el inicio del frente de grieta siendo mayores las del primer mallado, más adelante se explicará en detalle el motivo de este suceso.

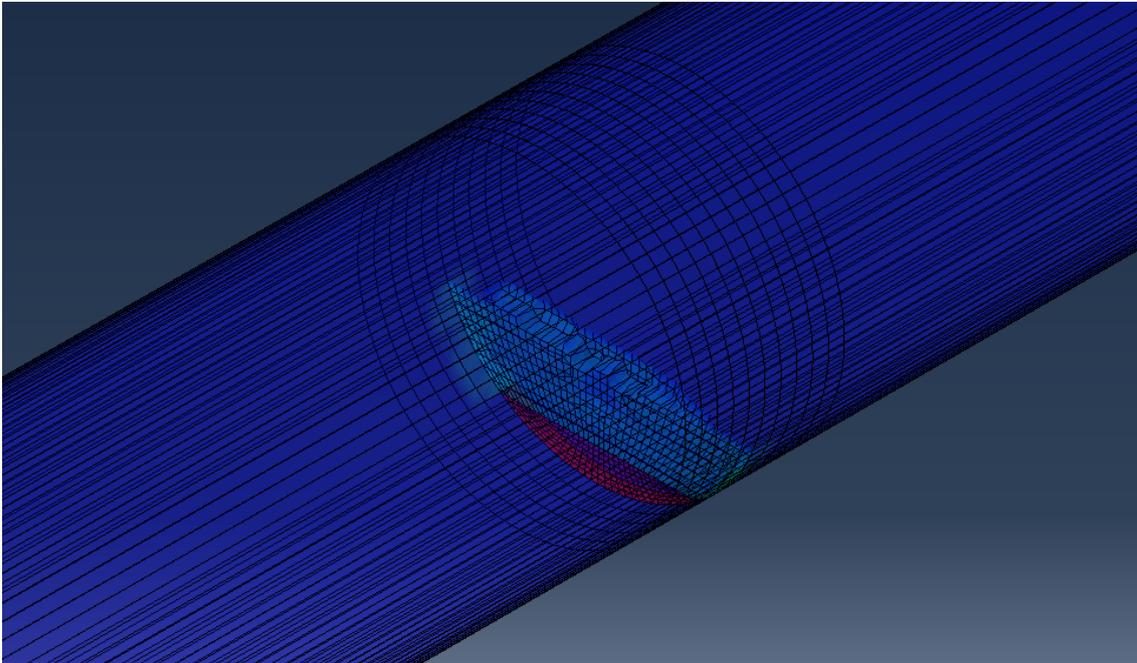


Figura 6.7: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.1$  para el mallado 1

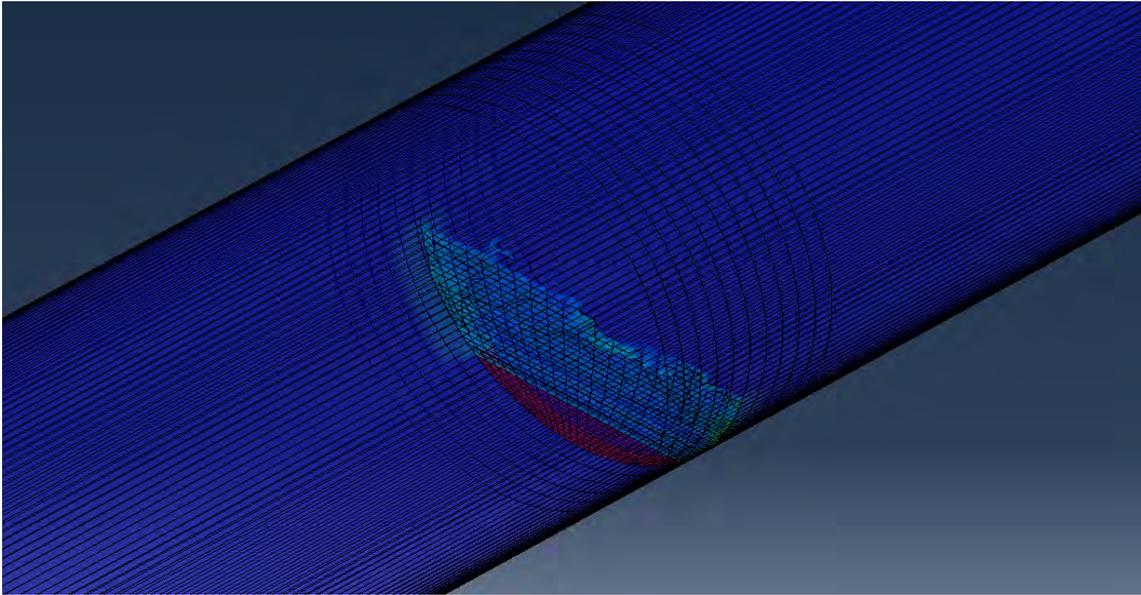


Figura 6.8: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.1$  para el mallado 2

Por otra parte la superficie de fractura que se forma es similar en ambos mallados, al principio es recta y bastante regular pero llega un punto donde la fisura empieza a propagarse en la dirección axial, es decir, perpendicularmente al camino inicial. Esto puede ser consecuencia de la elección del modo de fractura en el que se consideró que la dirección de propagación fuera aquella en la cual las tensiones tangenciales fueran máximas. En el primer mallado la dirección de propagación vuelve a cambiar y a subir de forma recta como inicialmente aunque rápidamente se detiene, mientras que en el segundo mallado se propaga en los dos sentidos de la dirección axial hasta detenerse.

Además como ya se comentó en el Capítulo 5 para que la fisura se propagase con mayor rapidez se tuvo que reducir en dos órdenes de magnitud la tensión de inicio de daño (5 MPa). A pesar de esta modificación la fisura no se ha propagado todo lo que hubiera sido deseable y después de un número de incrementos considerable (el mayor de los 5 casos) ha terminado por detenerse. Por lo que el crecimiento de fisura es bastante limitado en los casos en los que la grieta inicial es relativamente pequeña (0.1 y 0.2).

6.1.2 Tamaño de fisura  $\frac{a}{D} = 0.2$

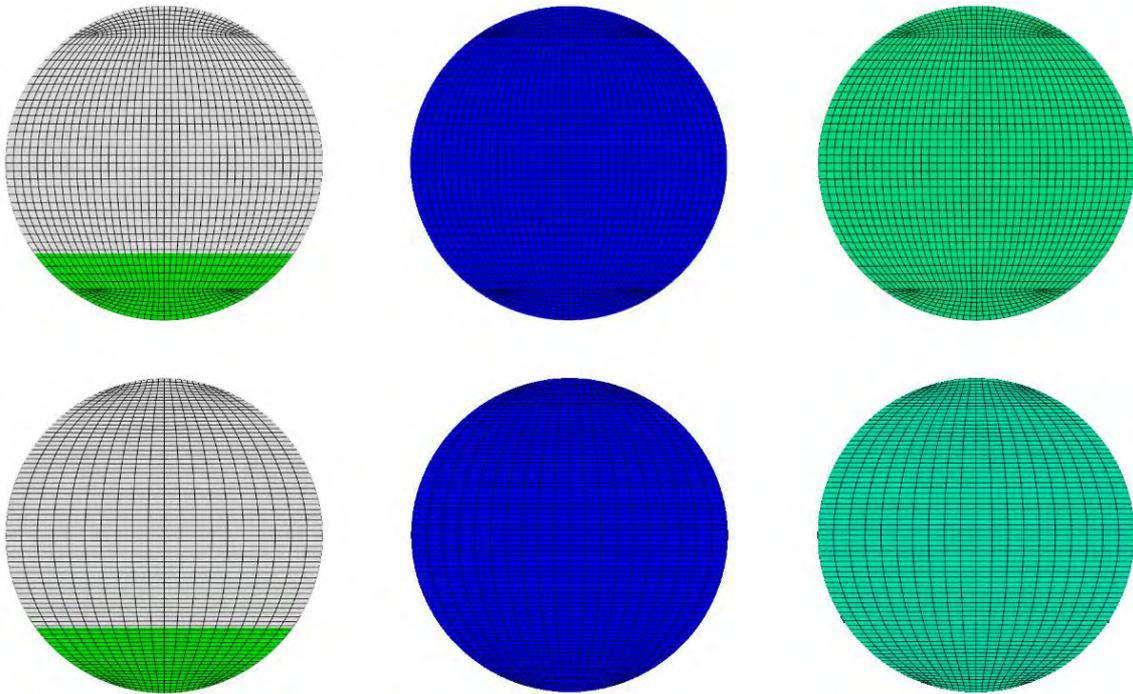


Figura 6.9: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.2$  incremento 1

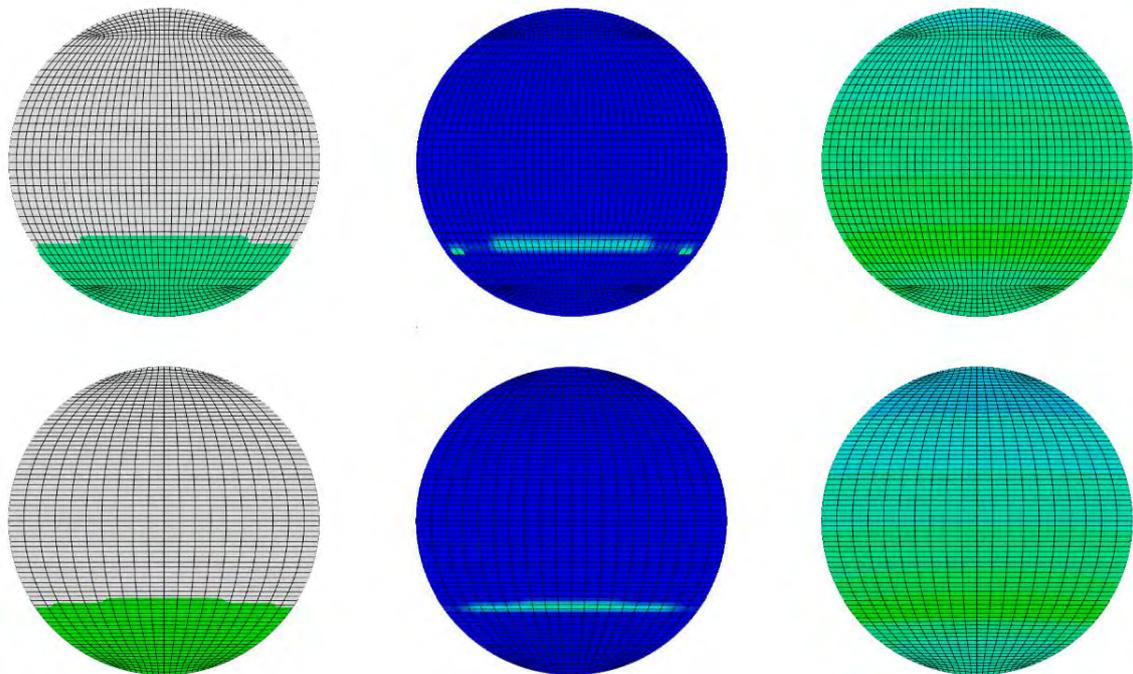


Figura 6.10: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.2$  incremento 2

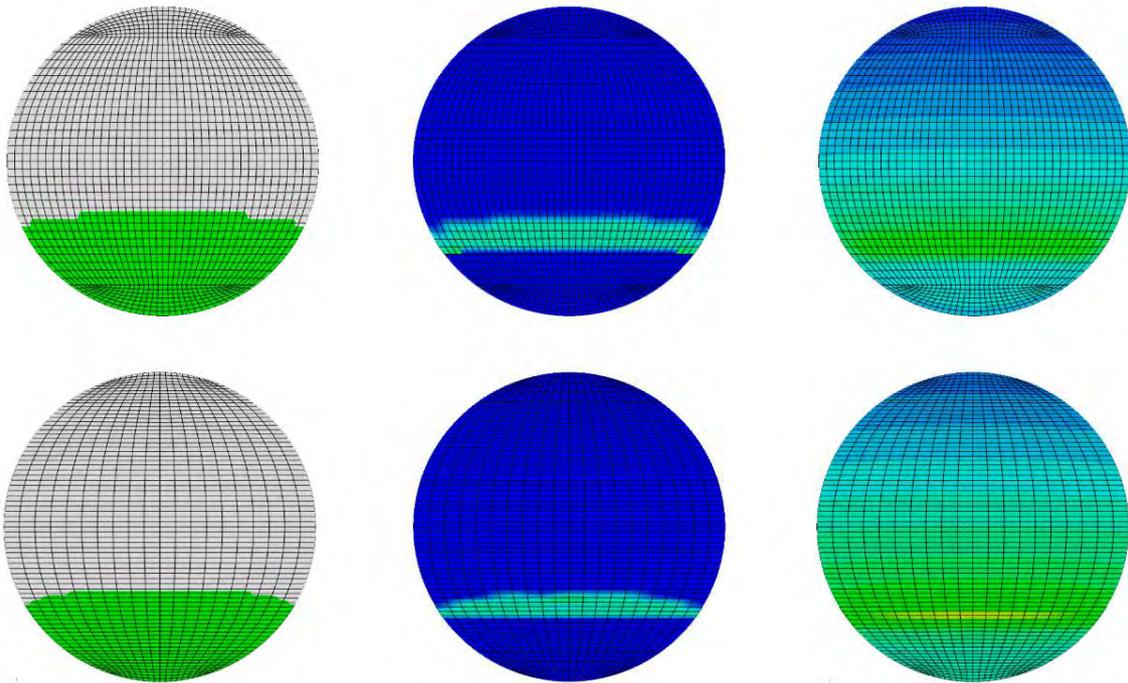


Figura 6.11: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.2$  incremento 3

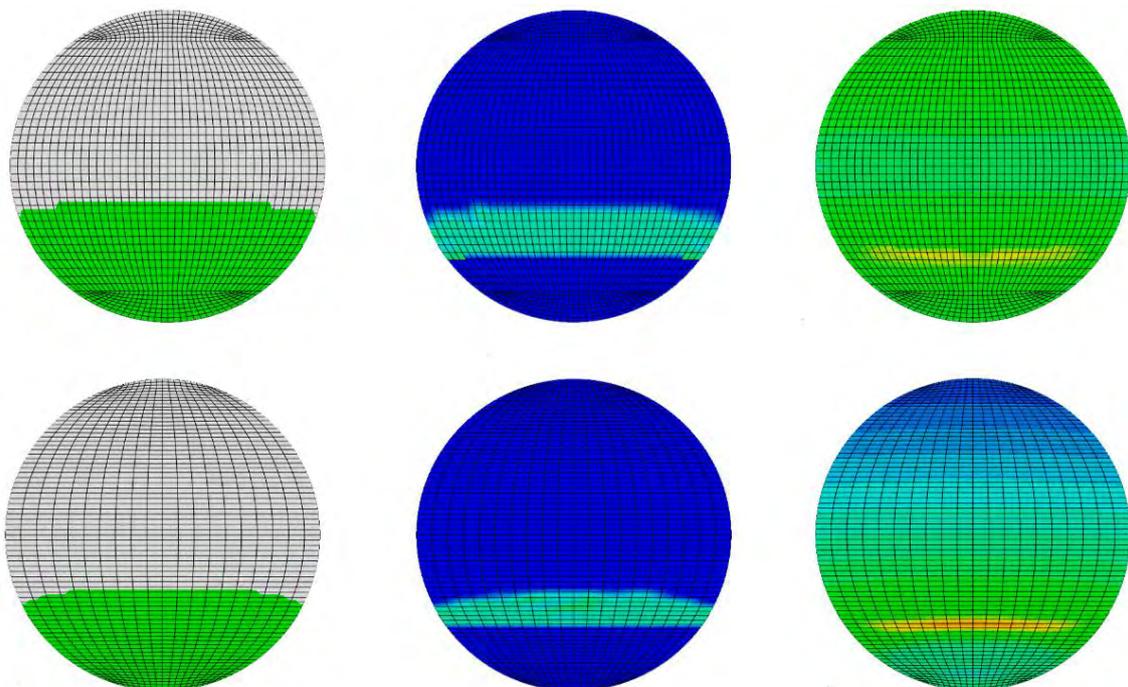


Figura 6.12: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.2$  incremento 4

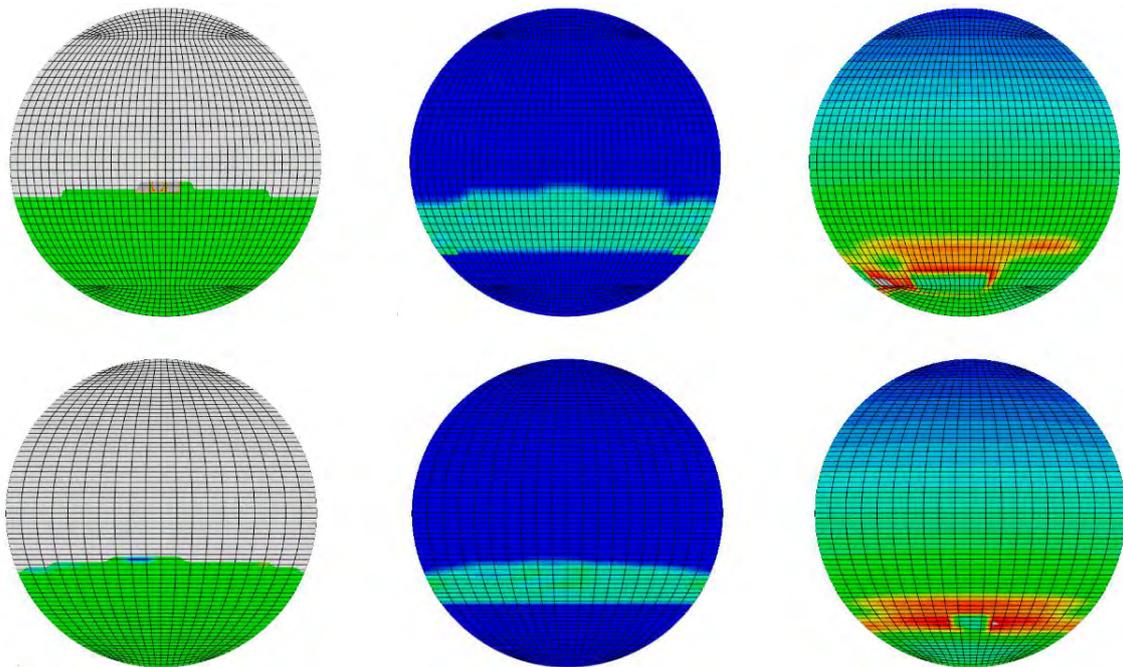


Figura 6.13: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.2$  incremento 5

En este caso el tamaño de la fisura es algo mayor, pero aun así, sigue siendo pequeño por lo que en ninguno de los dos casos la fisura se propaga demasiado. En líneas generales el comportamiento es el mismo que en el caso anterior. En el modelo con el primer mallado la grieta se sigue propagando desde el centro hacia los lados, sin embargo, en este caso con el primer mallado se degradan más los elementos.

En cuanto a las tensiones normales, el hecho más destacable es que con el segundo mallado se distribuyen de forma simétrica (ver Figura 6.13) mientras que con el primer mallado no se distribuyen de manera uniforme sino que en el lado izquierdo es donde se registran los valores más altos para la tensión.

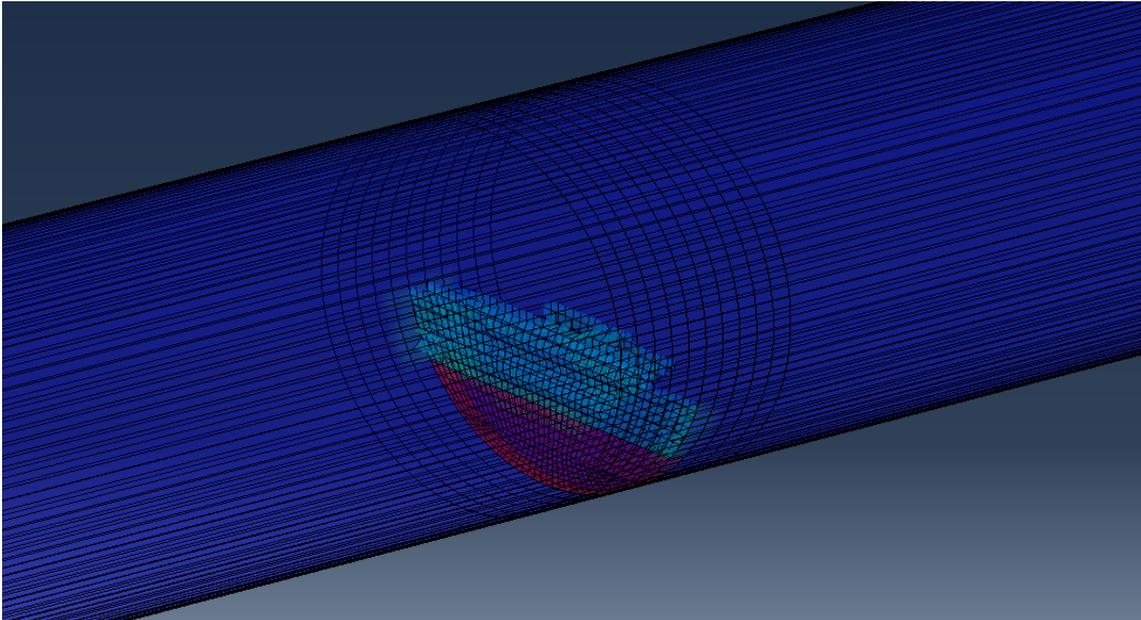


Figura 6.14: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.2$  para el mallado 1

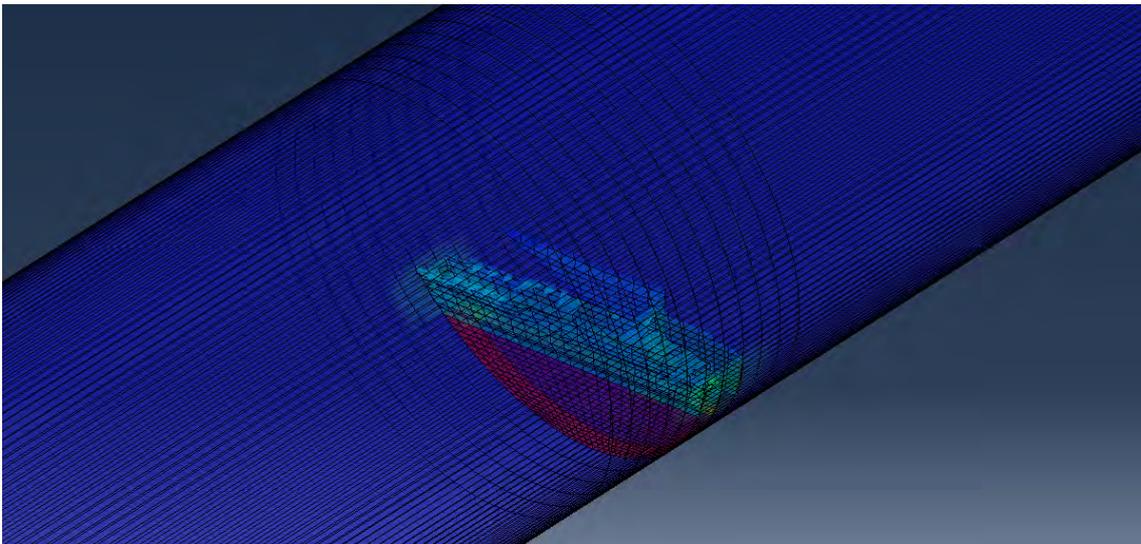


Figura 6.15: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.2$  para el mallado 2

La tipología de la fisura es bastante diferente que en el caso anterior. Se puede apreciar cómo desde el inicio es bastante rugosa y en vez de continuar propagándose en la dirección inicial, nuclean nuevas grietas que crecen de arriba abajo en un plano paralelo al de propagación inicial. Este tipo de comportamiento es un indicador de la capacidad que posee el XFEM para la nucleación de nuevas fisuras así como para la propagación de estas. Para ello únicamente deben cumplirse dos requisitos esenciales: que se supere el criterio de inicio del daño (en este caso la

tensión de inicio del daño) en algún punto y que dicho punto esté situado en una zona próxima a la inicial enriquecida con los nodos fantasma.

### 6.1.3 Tamaño de fisura $\frac{a}{D} = 0.3$

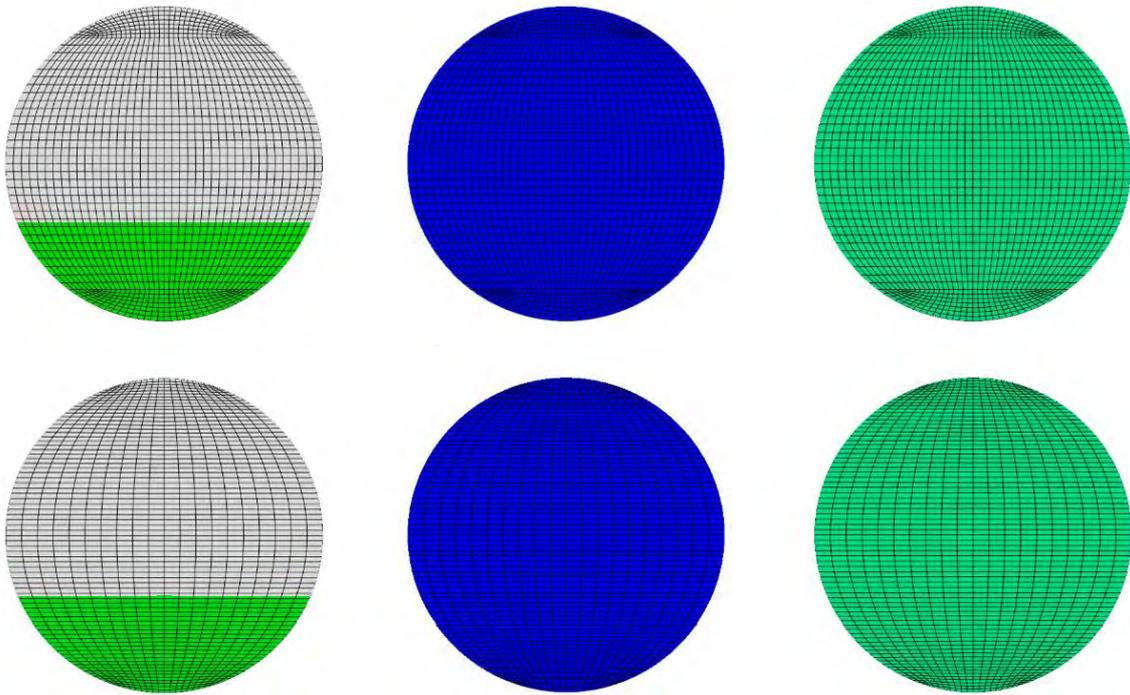


Figura 6.16: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.3$  incremento 1

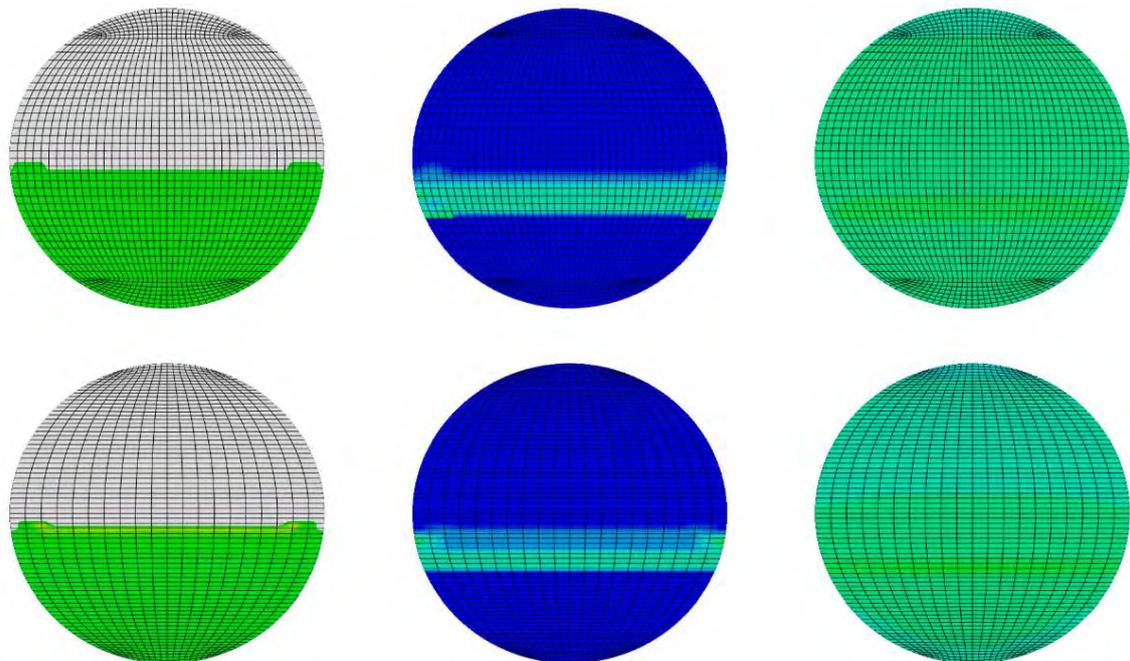


Figura 6.17: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.3$  incremento 2

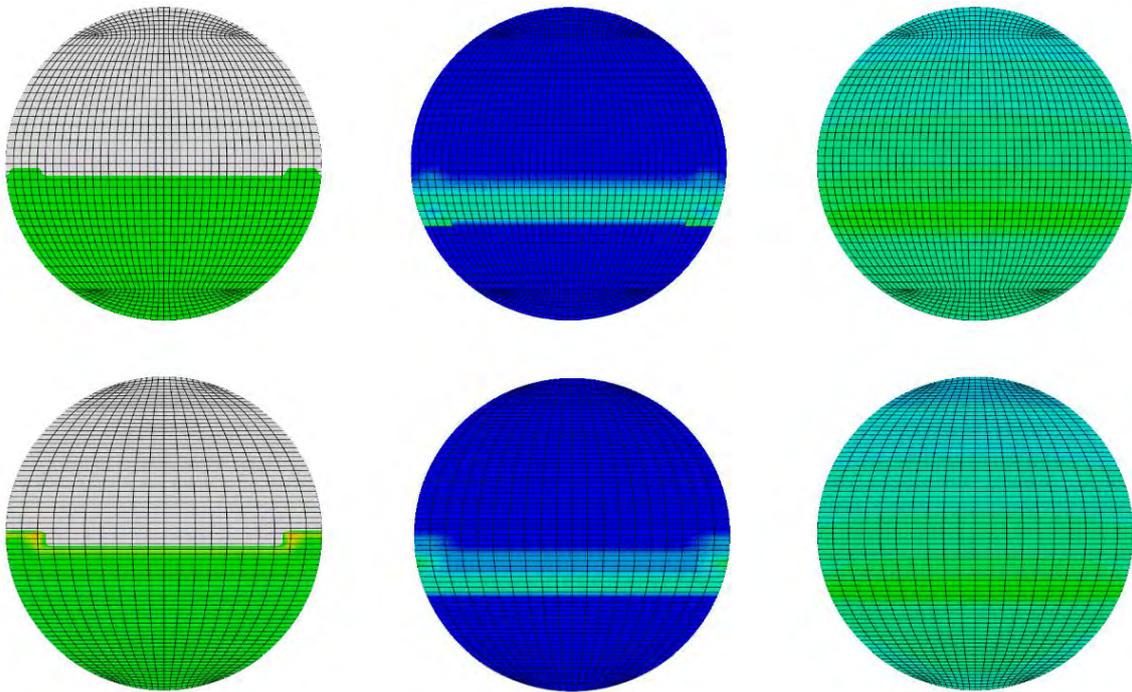


Figura 6.18: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.3$  incremento 3

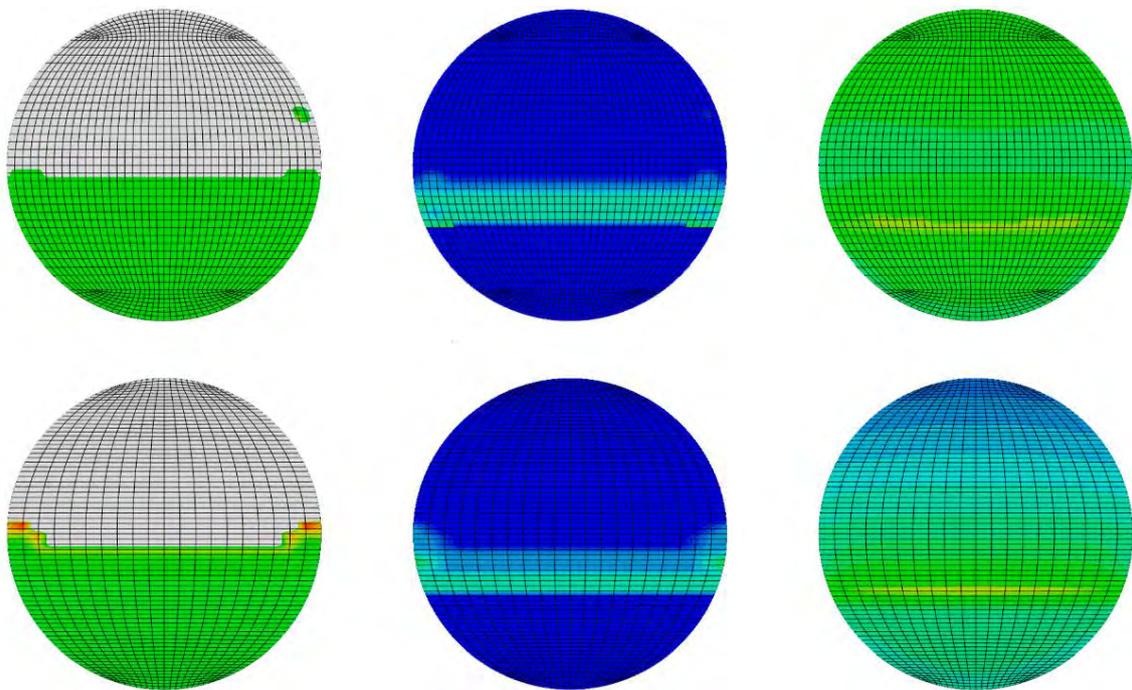


Figura 6.19: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.3$  incremento 4

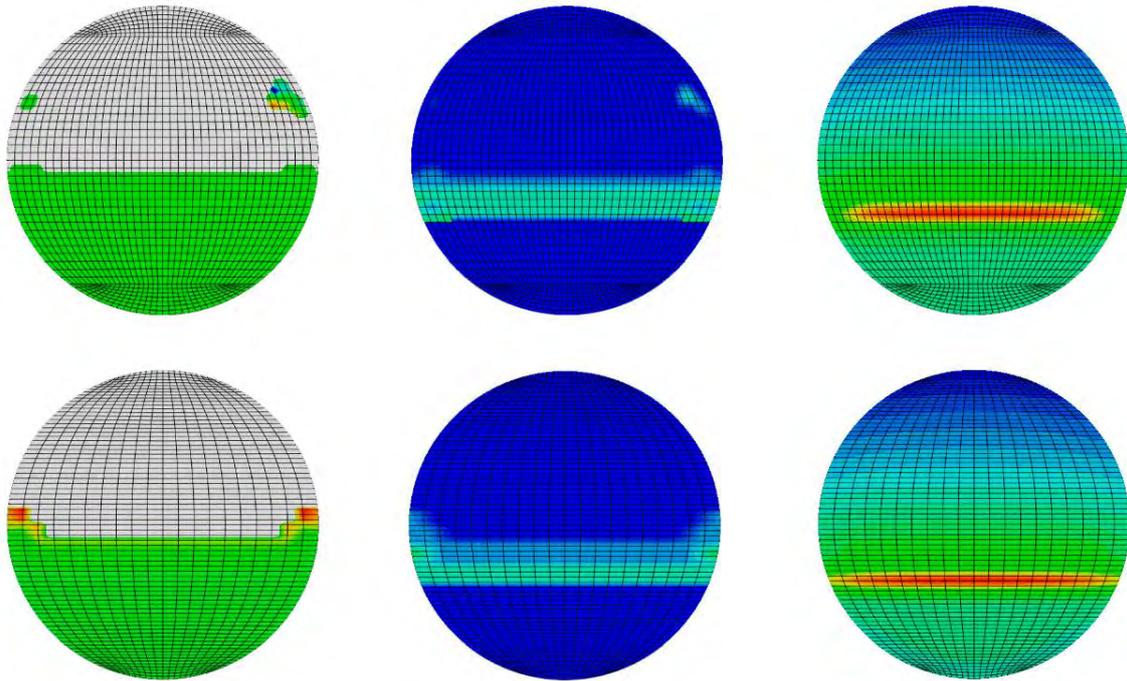


Figura 6.20: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.3$  incremento 5

Debido a que el tamaño inicial de grieta es mayor este modelo necesita muchos menos incrementos para empezar a propagarse, es decir, el crecimiento es mucho más rápido que en los casos anteriores. Es significativo el hecho de que en este caso la fisura crece más rápido en los laterales que en el centro, además esto se cumple para los dos mallados. La degradación de los elementos también es bastante similar.

En cuanto a las tensiones parece que son mayores ligeramente en el primer mallado. Las tensiones máximas se encuentran en el inicio del frente de grieta por ser la zona de mayor concentración de tensiones como viene siendo habitual y aparecen más concentradas con el primer mallado.

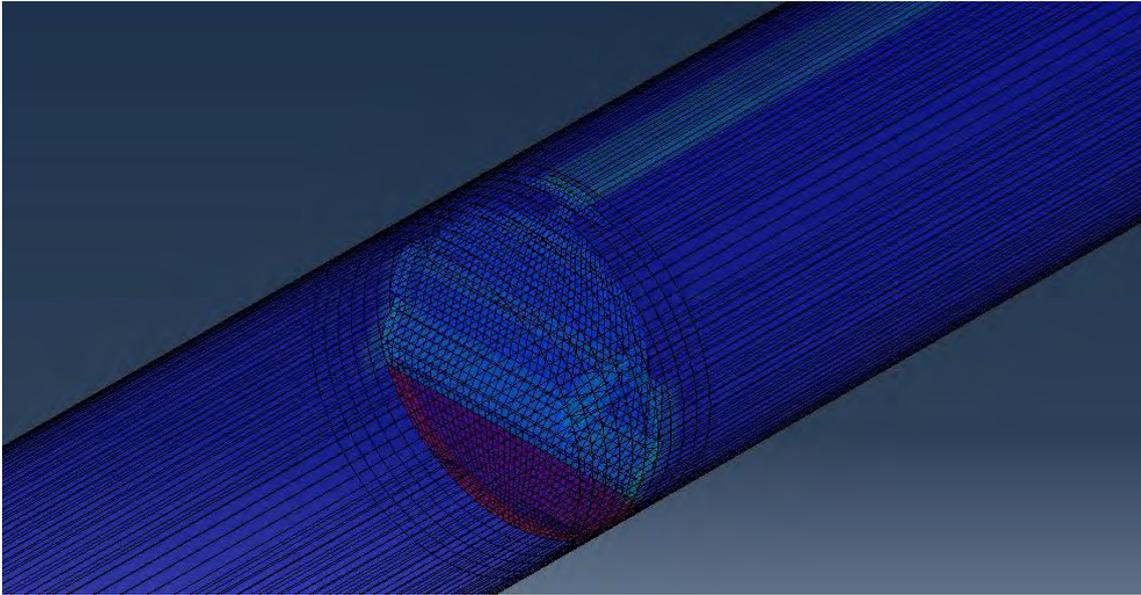


Figura 6.21: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.3$  para el mallado 1

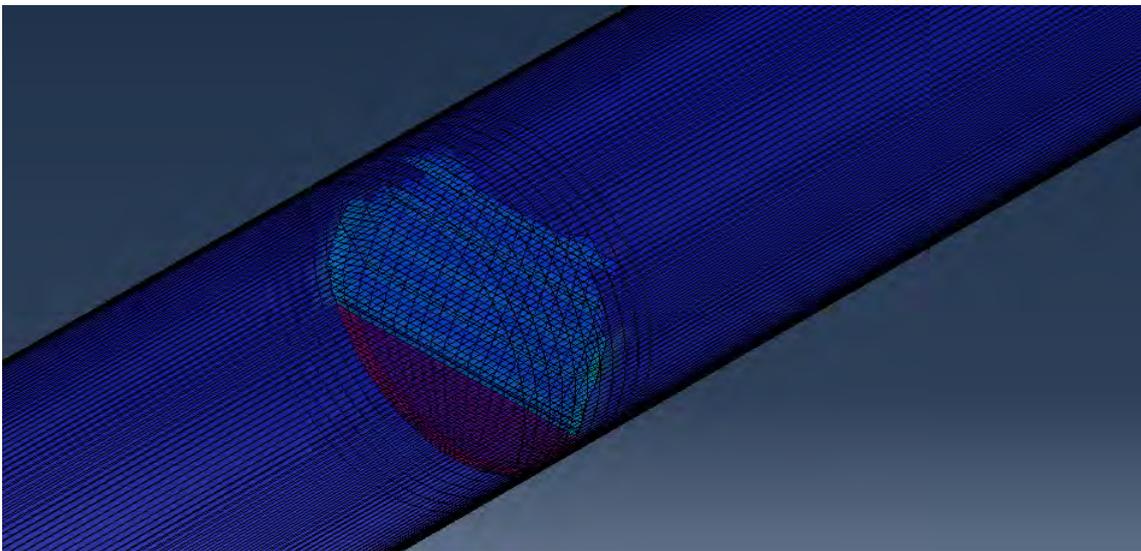


Figura 6.22: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.3$  para el mallado 2

La fisura se propaga de forma rugosa en el caso del primer mallado, además de eso, no crece de forma recta sino que va alternando tramos rectos e inclinados hacia la derecha. Este hecho se discutirá más adelante ya que como las condiciones de contorno son simétricas en principio no cabe esperar la fisura tenga cierta tendencia a propagarse en una dirección que no sea la inicial. Cuando la fisura llega hasta prácticamente el final del eje existe un pequeño

crecimiento en la dirección axial antes de detenerse. Con el segundo tipo de mallado se obtiene un crecimiento que no es recto en ningún momento sino inclinado hacia la derecha. En ambos casos inicialmente la grieta crece más por los lados que por el centro, sin embargo, llega un momento donde el crecimiento lateral se estanca y la fisura sigue propagándose por el centro, es decir, aunque las marcas sólo lleguen hasta la mitad del eje por dentro de este la fisura sigue creciendo hasta el final.

#### 6.1.4 Tamaño de fisura $\frac{a}{D} = 0.4$

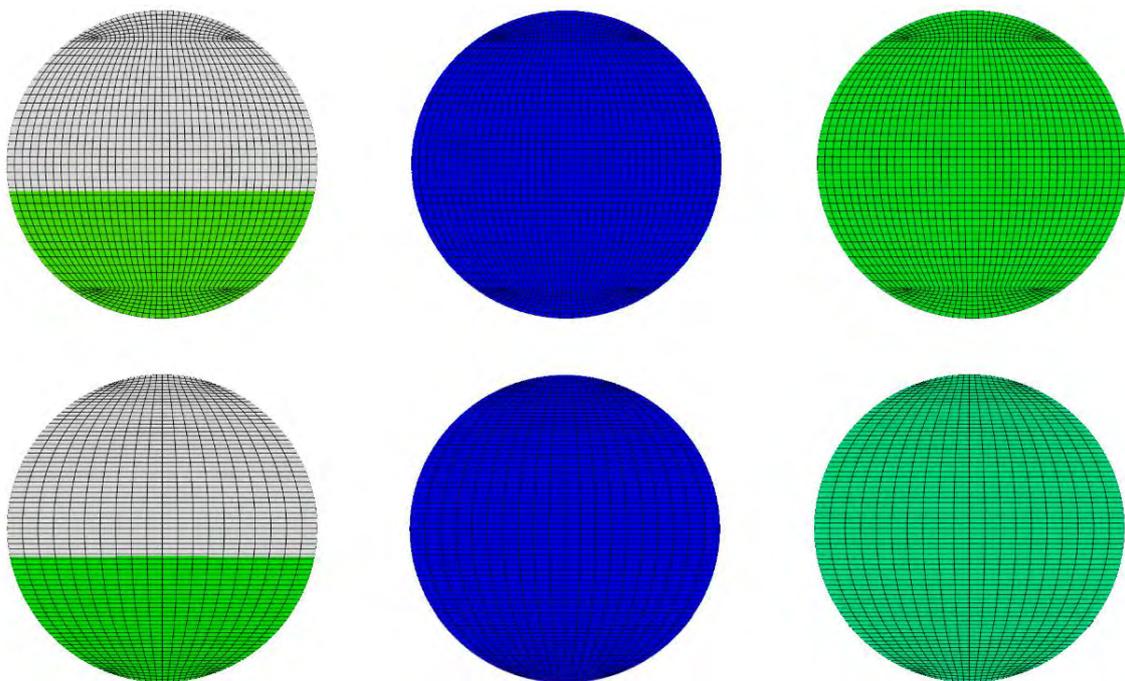


Figura 6.23: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 1

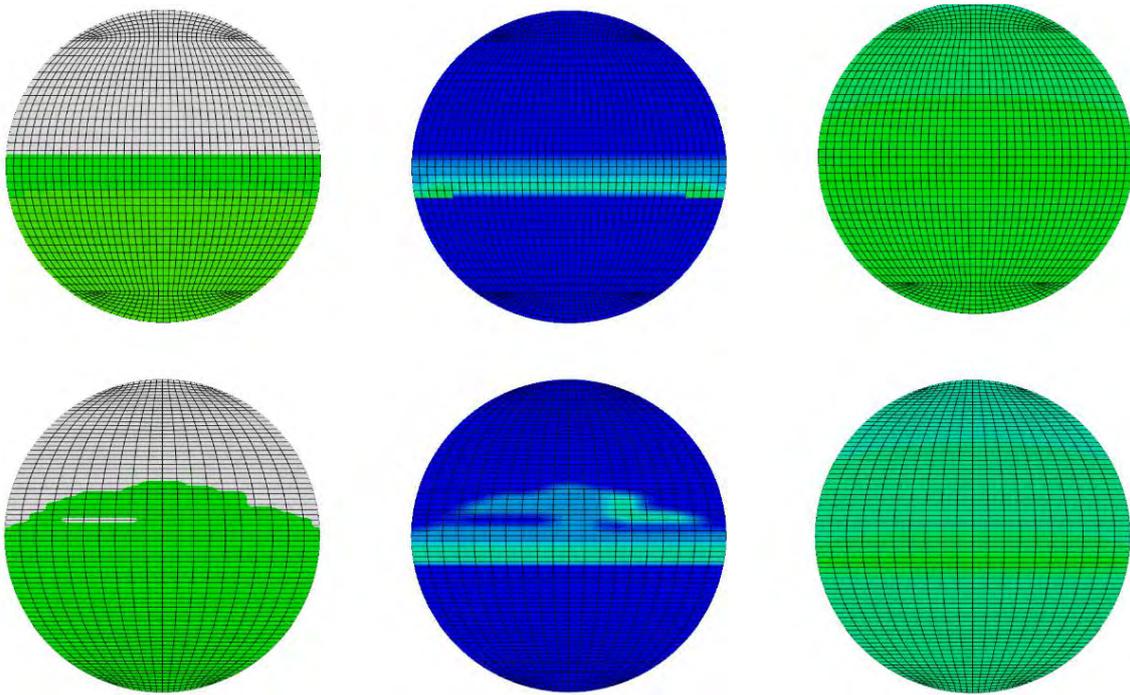


Figura 6.24: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 2

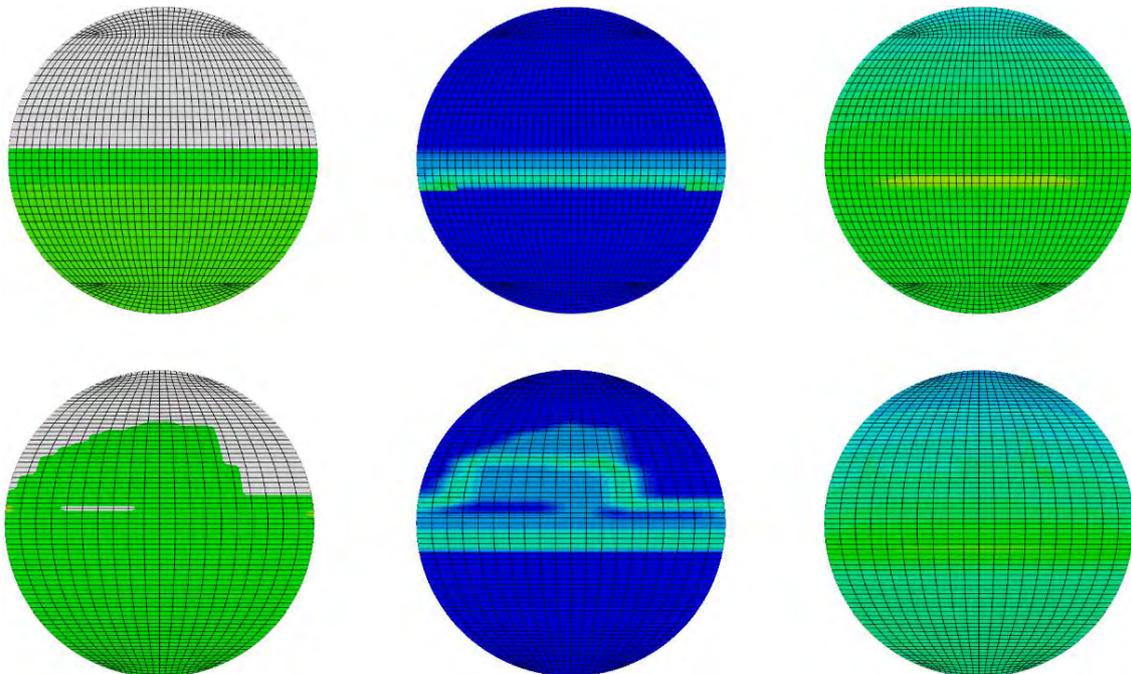


Figura 6.25: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 3

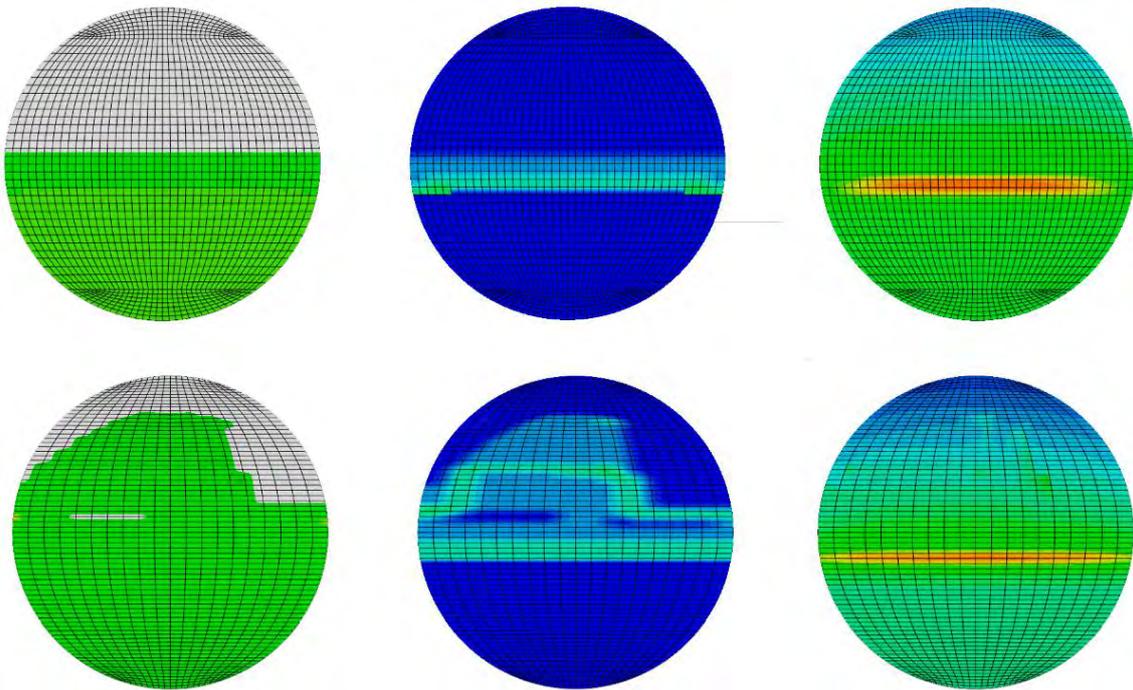


Figura 6.26: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 4

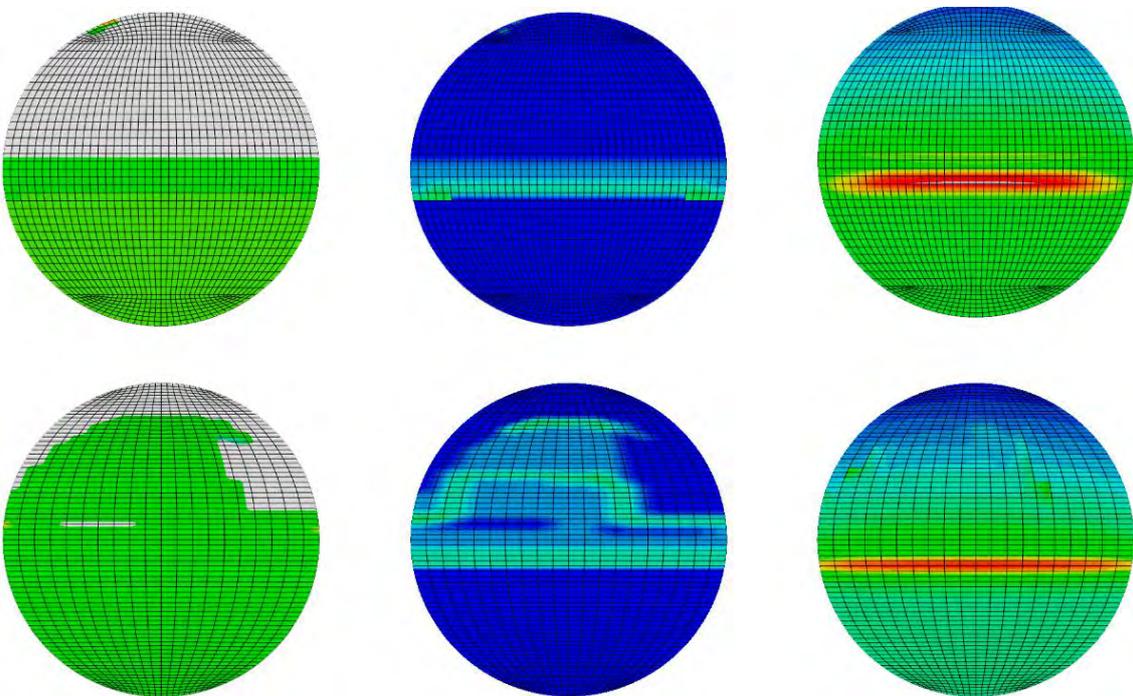


Figura 6.27: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 5

El crecimiento de la fisura es bastante regular en el modelo con el primer mallado, la razón por la que solo se aprecia hasta la mitad de la viga en las variables PHILSM y STATUSXFEM es que la fisura crece en un plano inclinado respecto al inicial. Sin embargo, en el modelo con el segundo mallado dichas variables se aprecian hasta el final ya que la fisura crece aproximadamente en el plano inicial aunque, por ejemplo, se aprecian algunos elementos que no están dañados en mitad de elementos completamente degradados.

La distribución de tensiones sigue la tónica habitual, es algo mayor en el mallado uno y se alcanza el máximo en el inicio del frente de grieta.

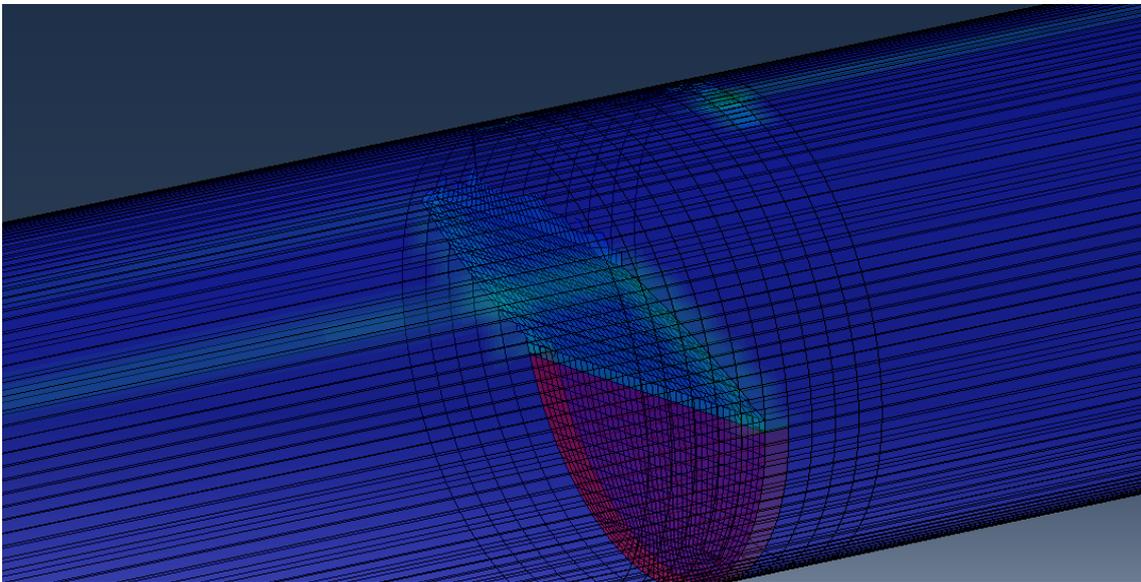


Figura 6.28: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  para el mallado 1

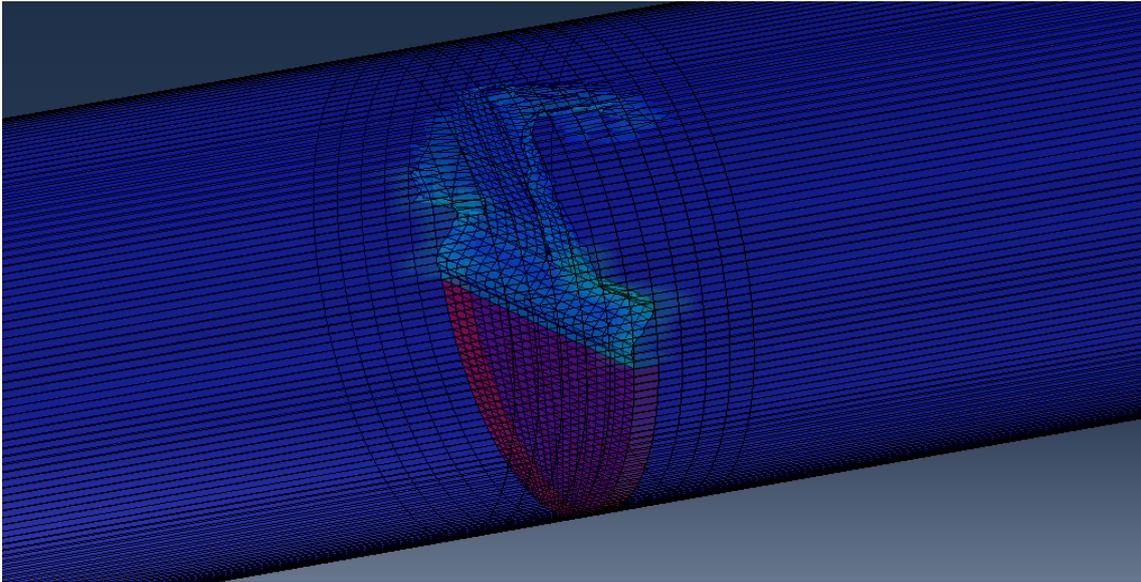


Figura 6.29: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  para el mallado 2

En este modelo se alcanzan las diferencias más significativas hasta ahora en cuanto a la morfología de la fisura. En el modelo con el primer mallado la fisura que se crea es prácticamente lisa y crece siempre en un plano inclinado hacia la izquierda. Por el contrario con el segundo mallado se obtiene una fisura que realiza un pequeño zig-zag y luego se propaga a través del plano inicial con una morfología muy rugosa. Además al llegar a la parte de arriba se propaga en la dirección axial hacia la derecha de forma muy irregular.

6.1.5 Tamaño de fisura  $\frac{a}{D} = 0.5$

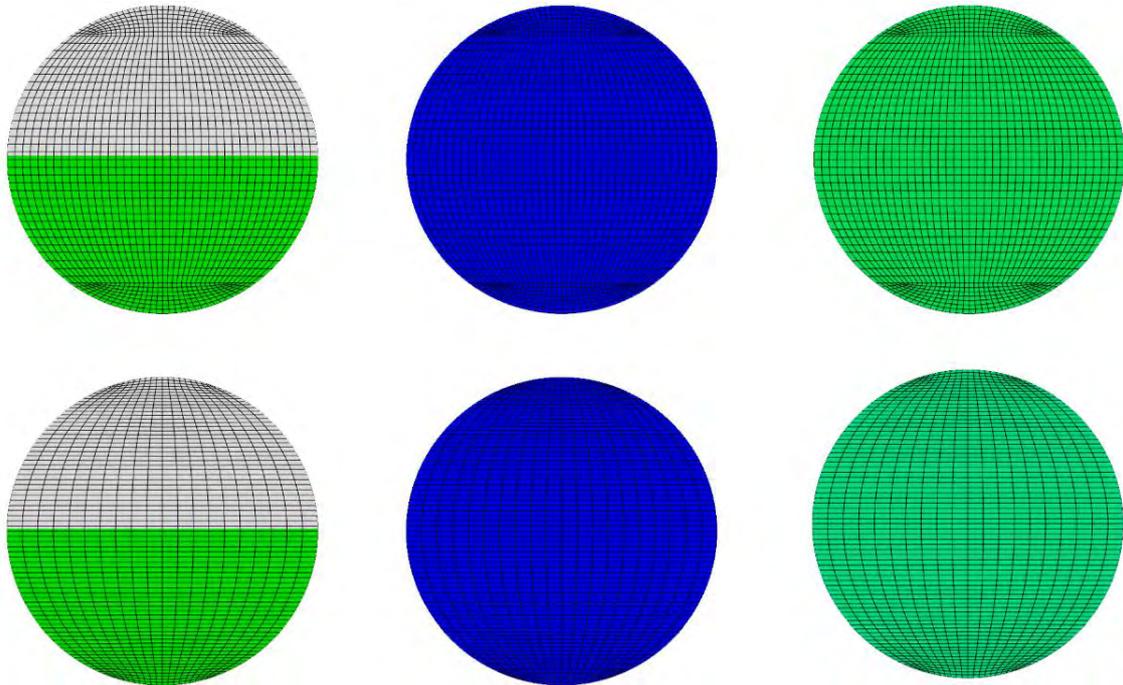


Figura 6.30: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 1

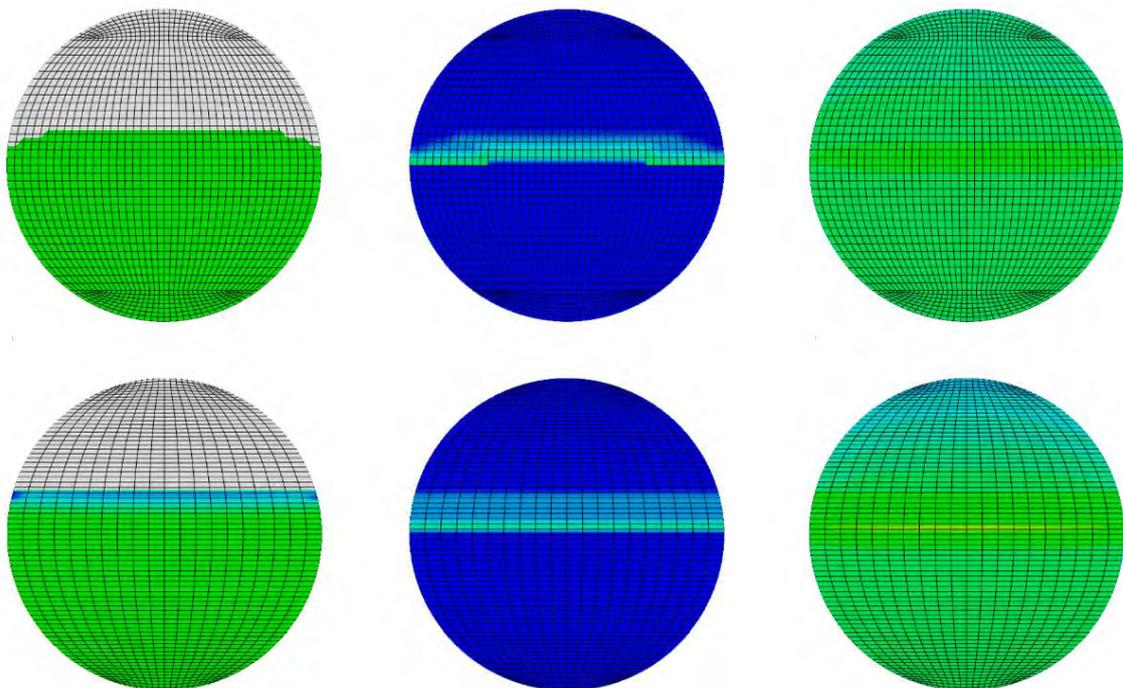


Figura 6.31: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 2

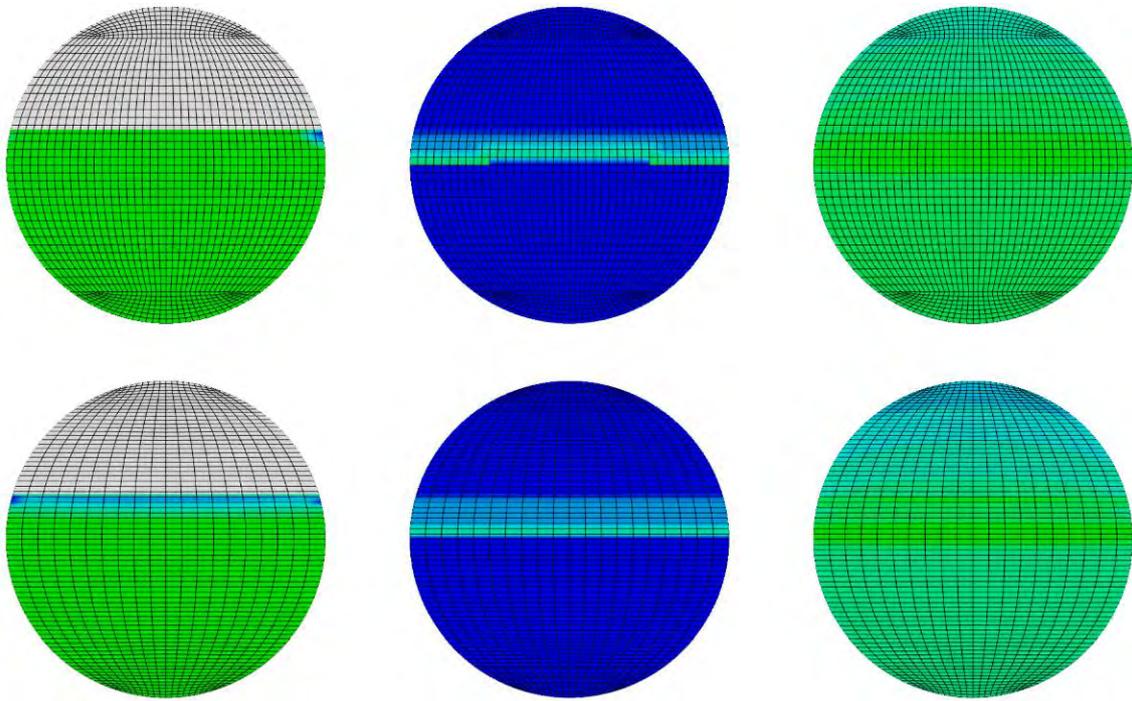


Figura 6.32: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 3

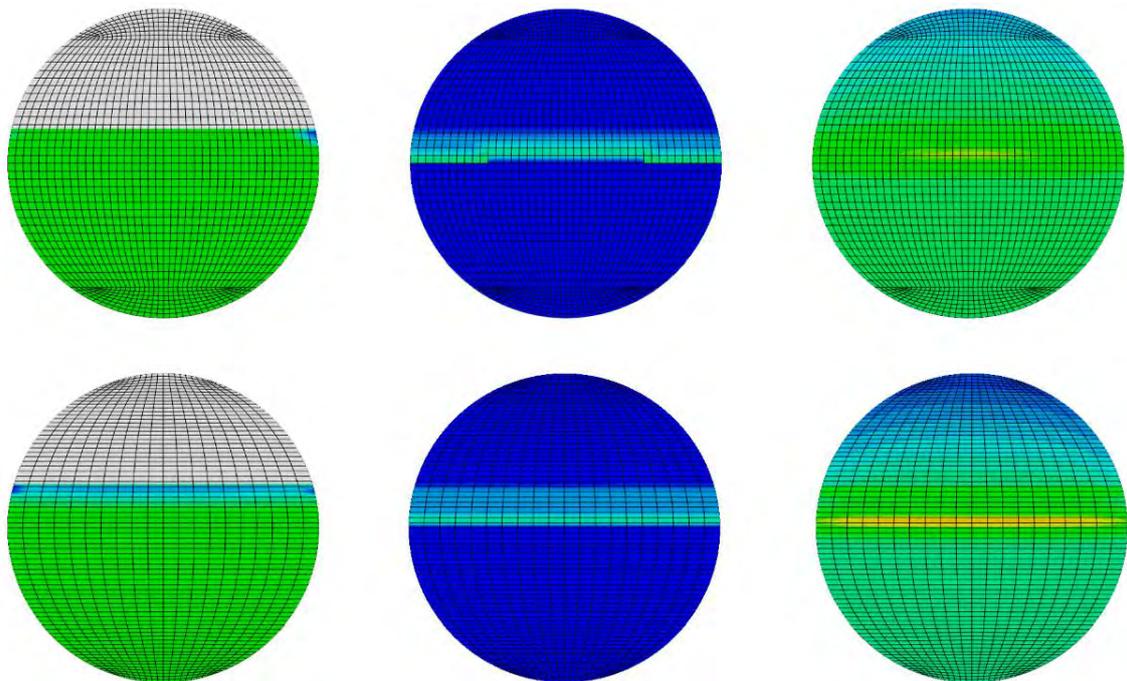


Figura 6.33: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 4

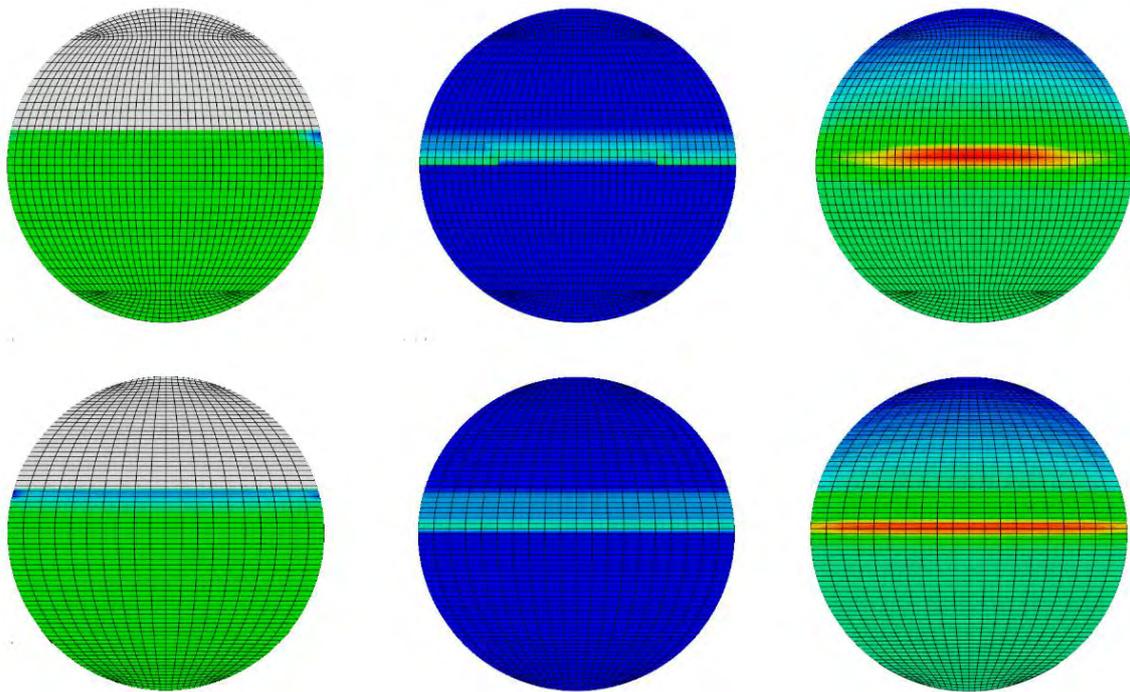


Figura 6.34: Resultados PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 5

Con una fisura inicial hasta la mitad de la viga se consigue un rápido desarrollo de esta, de hecho, es el caso más rápido de todos los analizados. Como la fisura inicial es muy grande el efecto concentrador de tensiones en el frente de grieta es muy elevado, además se añade el hecho de que la sección efectiva es menor. Por ello se produce un crecimiento inicial muy rápido en los primeros incrementos y como se puede ver en las Figuras 6.32, 6.33 y 6.34 no se producen prácticamente cambios en cuanto al crecimiento de la grieta. Hay que añadir que el crecimiento sigue la misma morfología que en los dos primeros casos, con el primer mallado la grieta crece desde el centro a los laterales y con el segundo mallado crece por igual. La distribución de tensiones, sin embargo, sí presenta cambios, las tensiones de tracción crece en las fibras centrales a medida que los incrementos aumentan y las tensiones de compresión crecen en la parte superior de la viga.

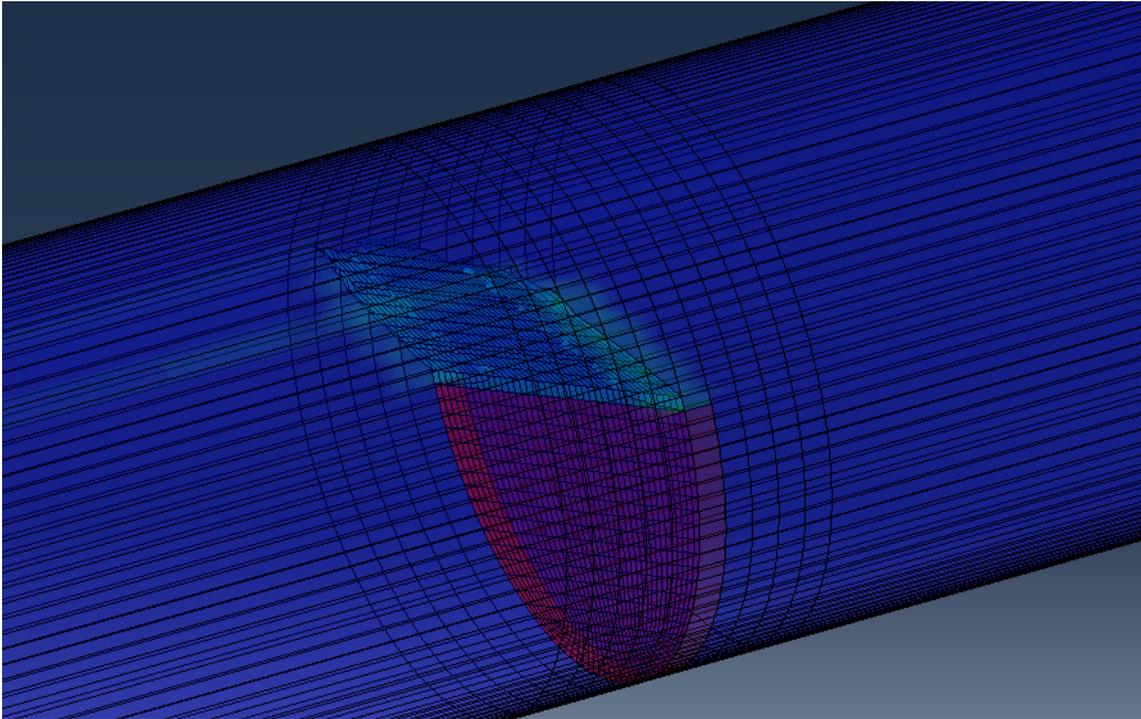


Figura 6.35: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  para el mallado 1

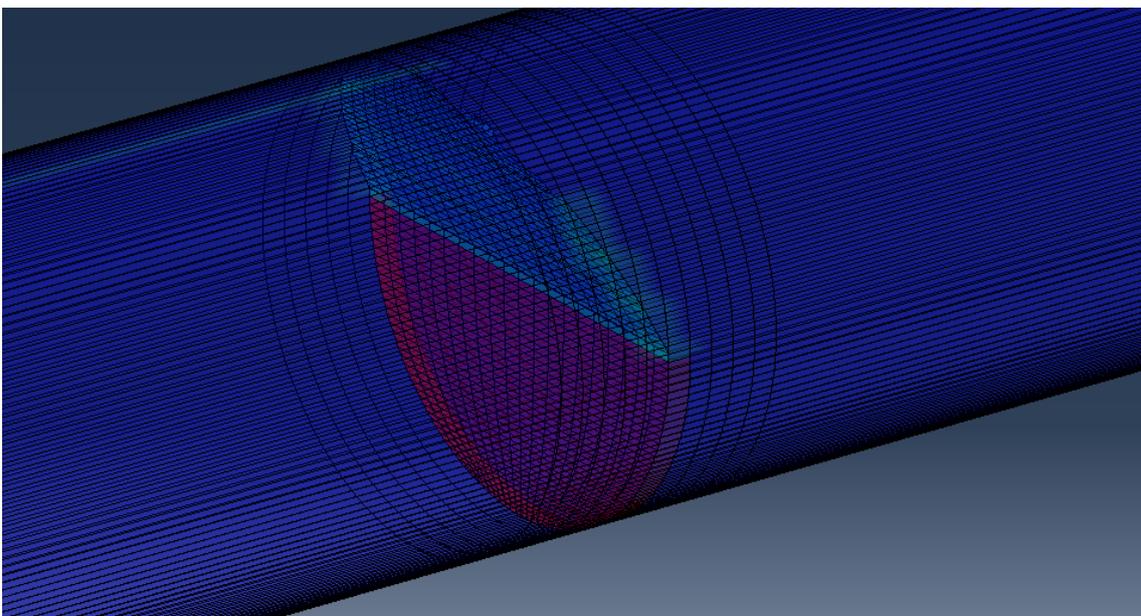


Figura 6.36: Vista interior de la sección fisurada para fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  para el mallado 2

El camino de propagación que siguen ambos modelos es similar, un plano inclinado hacia la izquierda. Cabe destacar que el plano por el que se propaga el modelo con el primer mallado es más inclinado y el análisis no llega hasta el final, mientras que con el segundo mallado la inclinación de dicho plano es menor y la fisura llega hasta prácticamente el final de la viga.

## 6.2 Análisis con cargas alternantes

A continuación se van a analizar cuatro casos distintos, dos con cada tipo de mallado, pero esta vez con cargas fluctuantes que tienen un módulo dos órdenes de magnitud menor que las estáticas. Se ha decidido reducir la carga en esta cantidad debido a que al ser un análisis por fatiga se espera que la fisura se propague mucho antes ante la misma carga. Sin embargo el objetivo principal sigue siendo el mismo, apreciar las diferencias que se obtienen con los dos tipos de mallado. En la Figura 6.37 se especifica la leyenda utilizada para el caso de cargas alternantes.

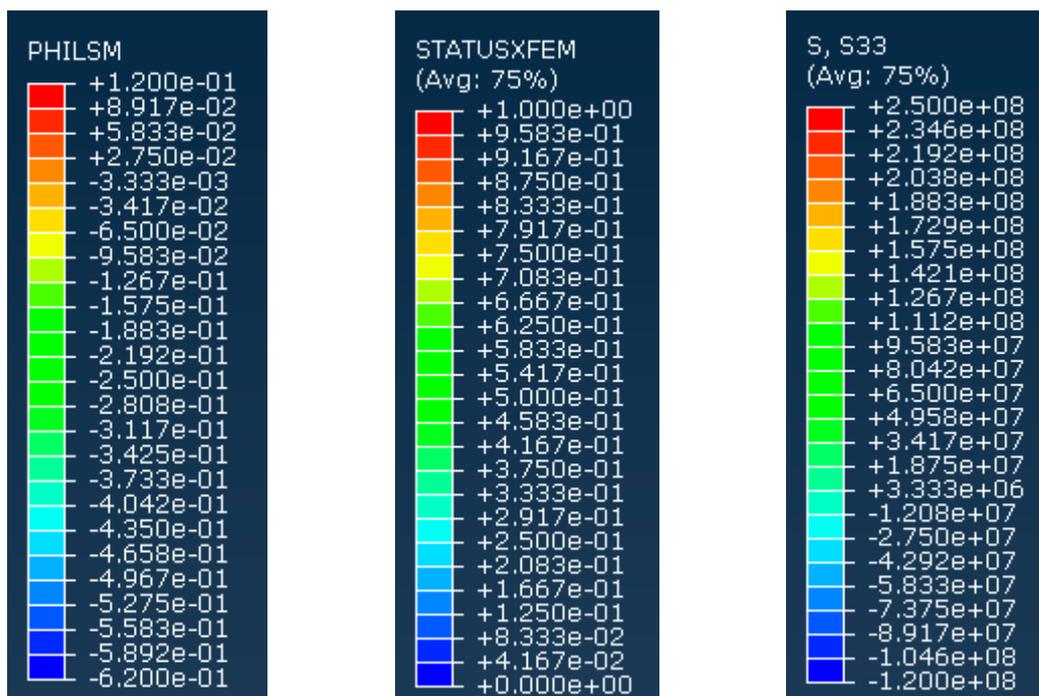


Figura 6.37: Leyendas de izquierda a derecha: PHILSM, STATUSXFEM y S33 en Pascales para cargas alternantes

### 6.2.1 Tamaño de fisura $\frac{a}{D} = 0.4$

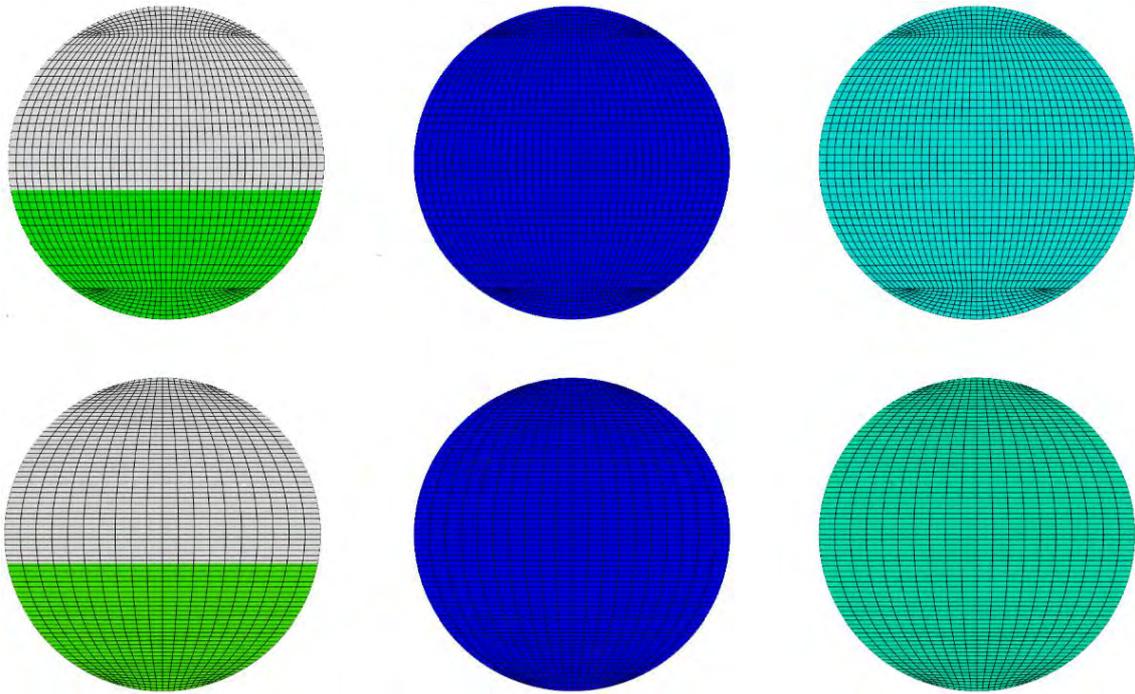


Figura 6.38: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 1

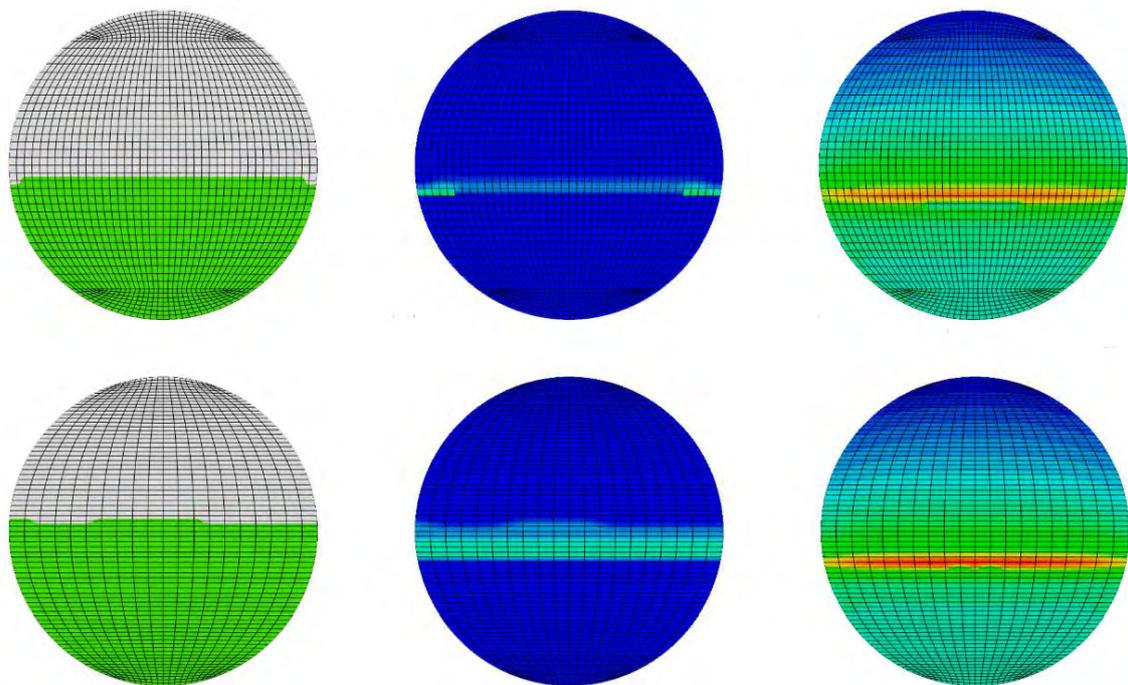


Figura 6.39: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 2

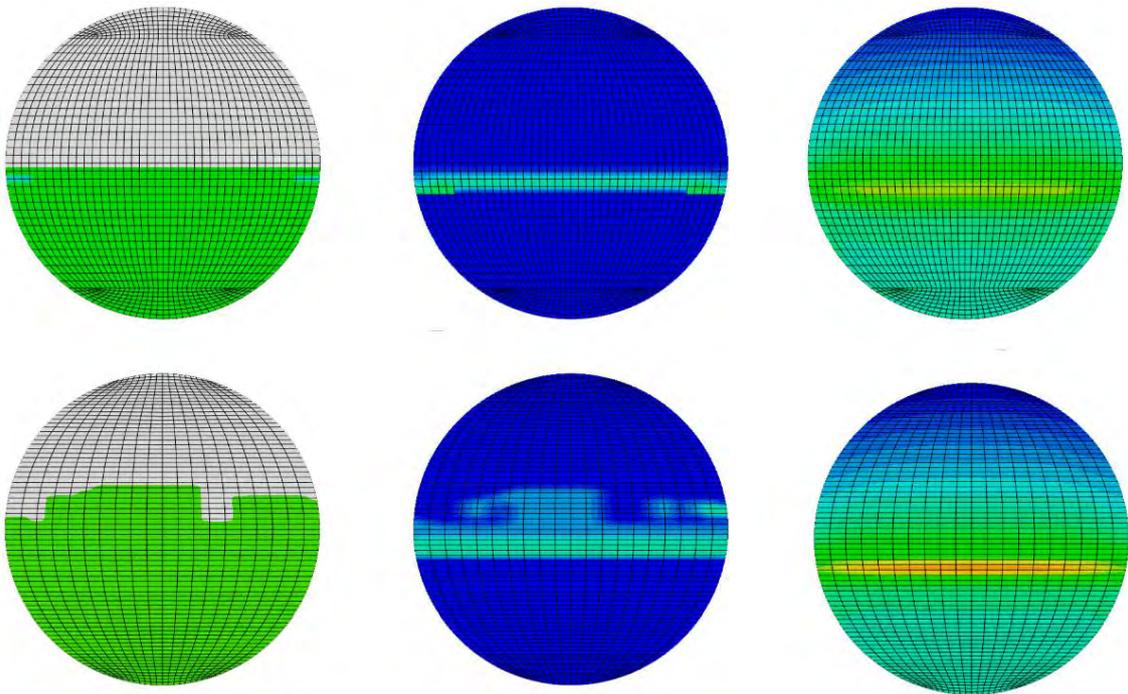


Figura 6.40: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 3

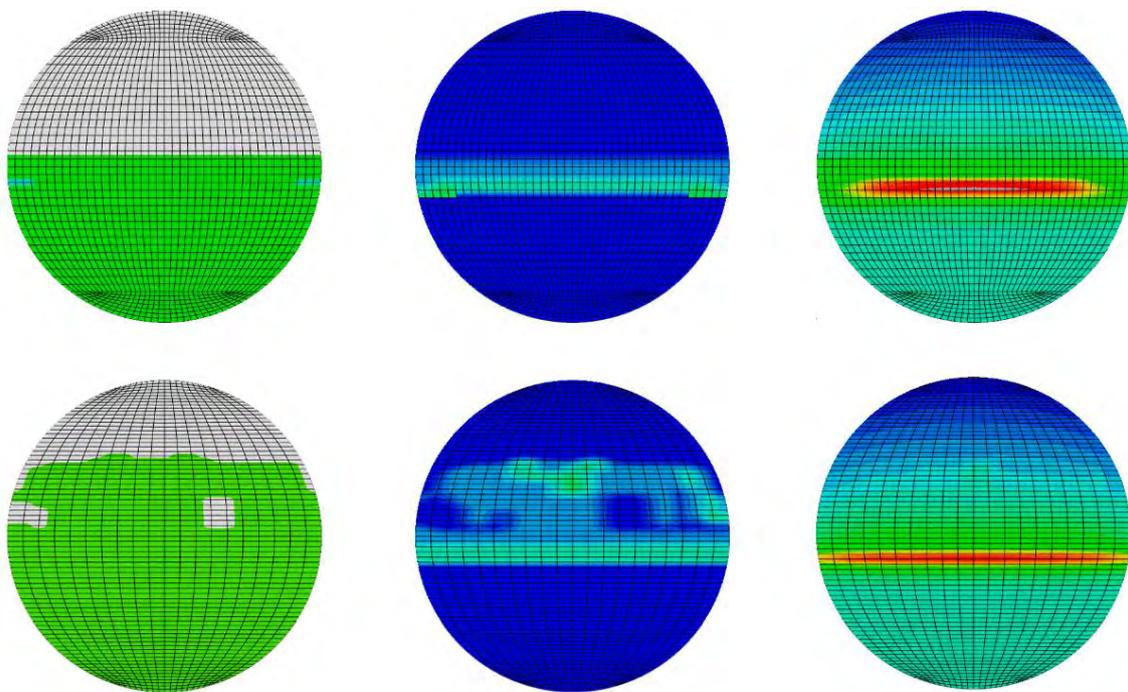


Figura 6.41: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  incremento 4

En este primer caso se aprecia una propagación muy rápida de la fisura, más incluso que en los casos de fisura inicial más grande para el caso de cargas estáticas (0.4 y 0.5). Esto demuestra la importancia de las cargas a fatiga ya que aun con una carga 100 veces más pequeña la fisura crece con mayor rapidez. En cuanto a la tipología de propagación es mucho más irregular en el segundo mallado ya que incluso existen elementos que no están degradados rodeados de elementos que están completamente dañados como se puede ver en la Figura 6.40.

La distribución de tensiones al igual que en el caso de las cargas estáticas son más elevadas en el primer tipo de mallado. Además se produce un hecho previsible en el caso de elementos sometidos a fatiga y es que las tensiones aumentan y disminuyen. En la Figura 6.39 se ve como la tensión crece en el frente de grieta ya que corresponde a un incremento donde la fuerza alcanza su máxima amplitud favoreciendo la apertura de la fisura con lo que las tensiones de tracción aumentan. Sin embargo, en la Figura 6.40 las tensiones de tracción disminuyen, lógico, debido a que en ese incremento la fuerza alcanza su máxima amplitud en sentido contrario favoreciendo el cierre de la fisura. Finalmente en la Figura 6.41 que muestra el último incremento se obtienen las máximas tensiones de tracción.

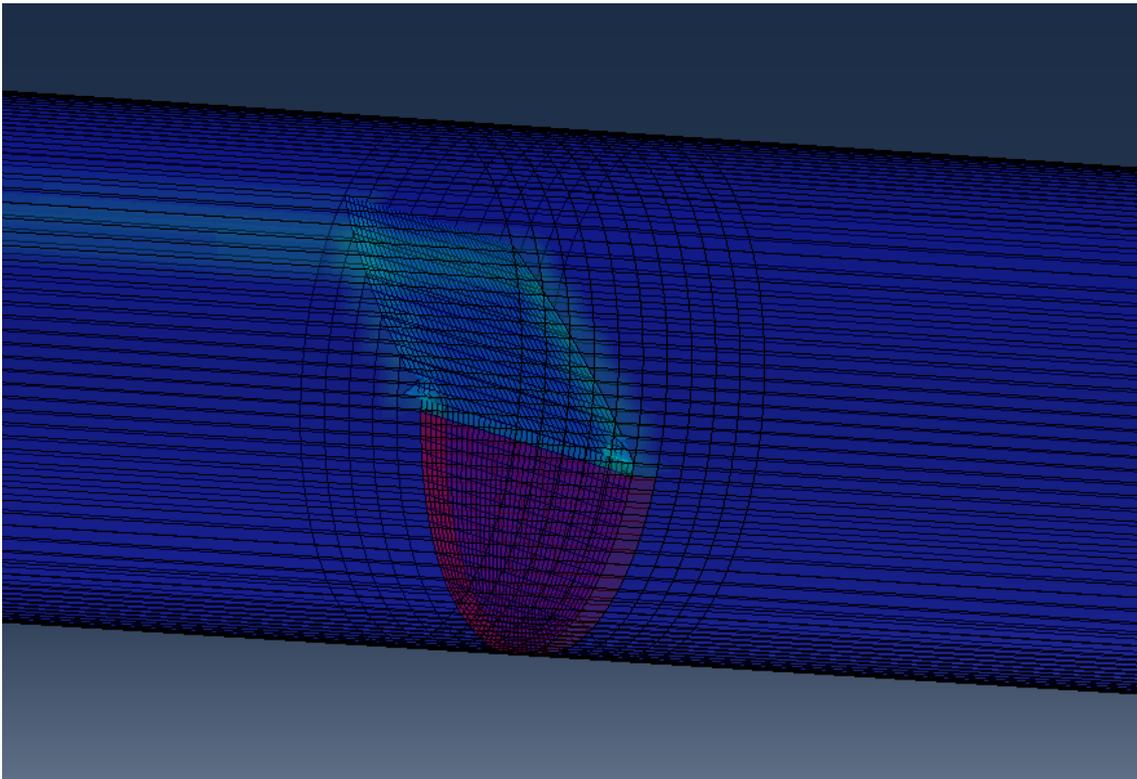


Figura 6.42: Vista interior de la sección fisurada para cargas alternantes para fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  para el mallado 1

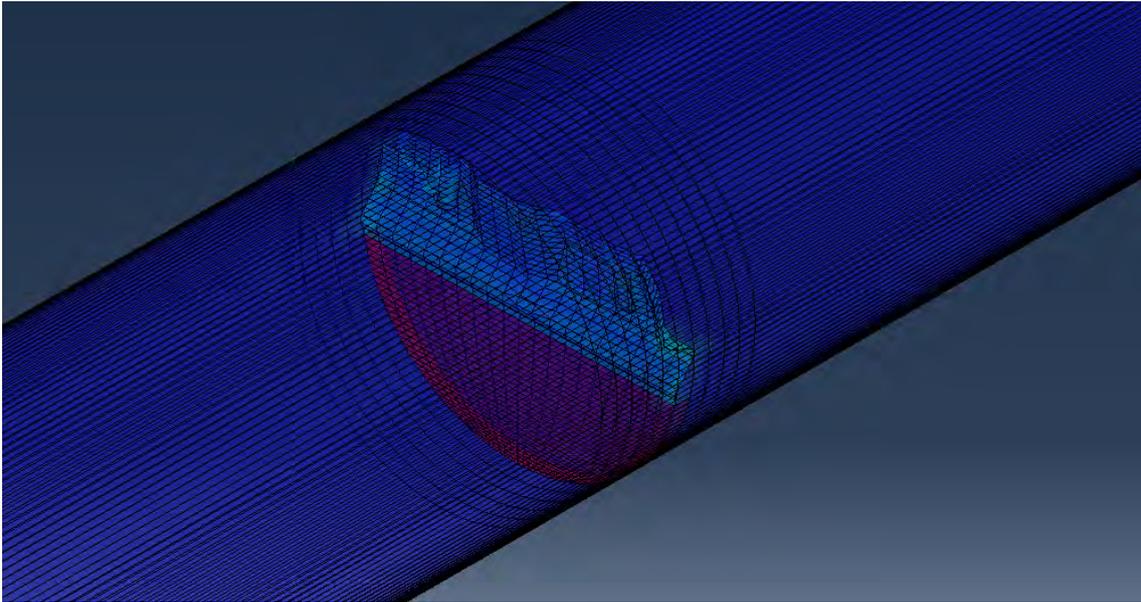


Figura 6.43: Vista interior de la sección fisurada para cargas alternantes para fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$  para el mallado 2

El crecimiento de la fisura con el primer mallado se produce en un plano inclinado a la derecha respecto al inicial, además es bastante lisa. Por el contrario con el segundo mallado se obtiene una fisura con muchas rugosidades que presenta un zig-zag inicial y luego se propaga en el plano inicial.

### 6.2.2 Tamaño de fisura $\frac{a}{D} = 0.5$

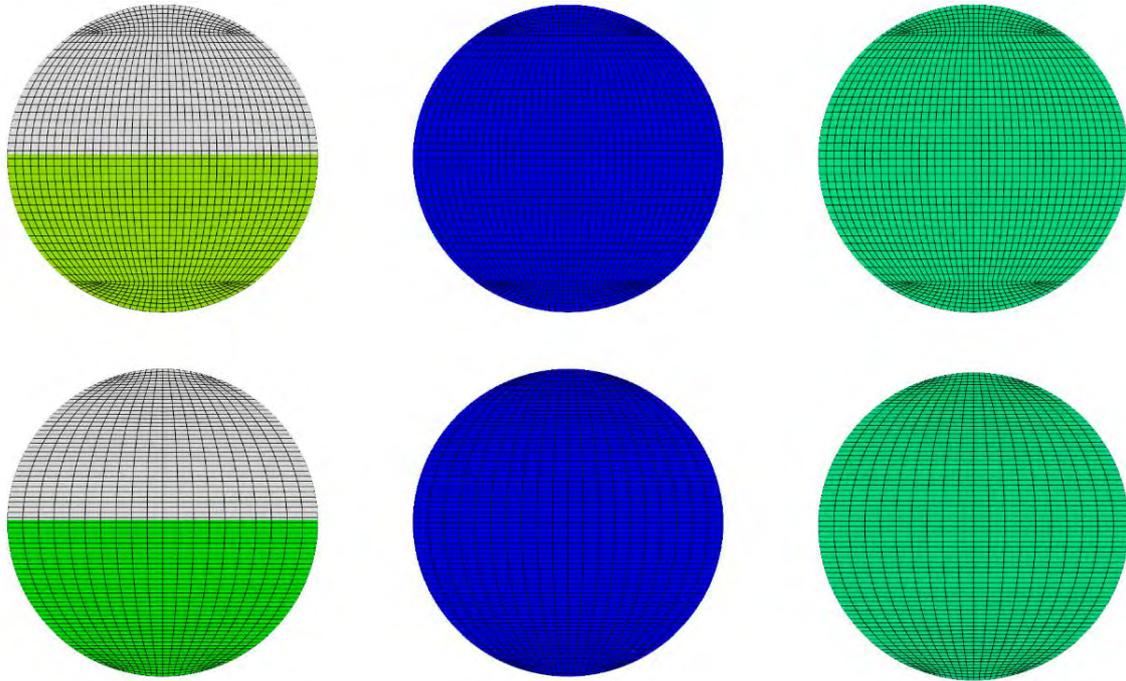


Figura 6.44: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 1

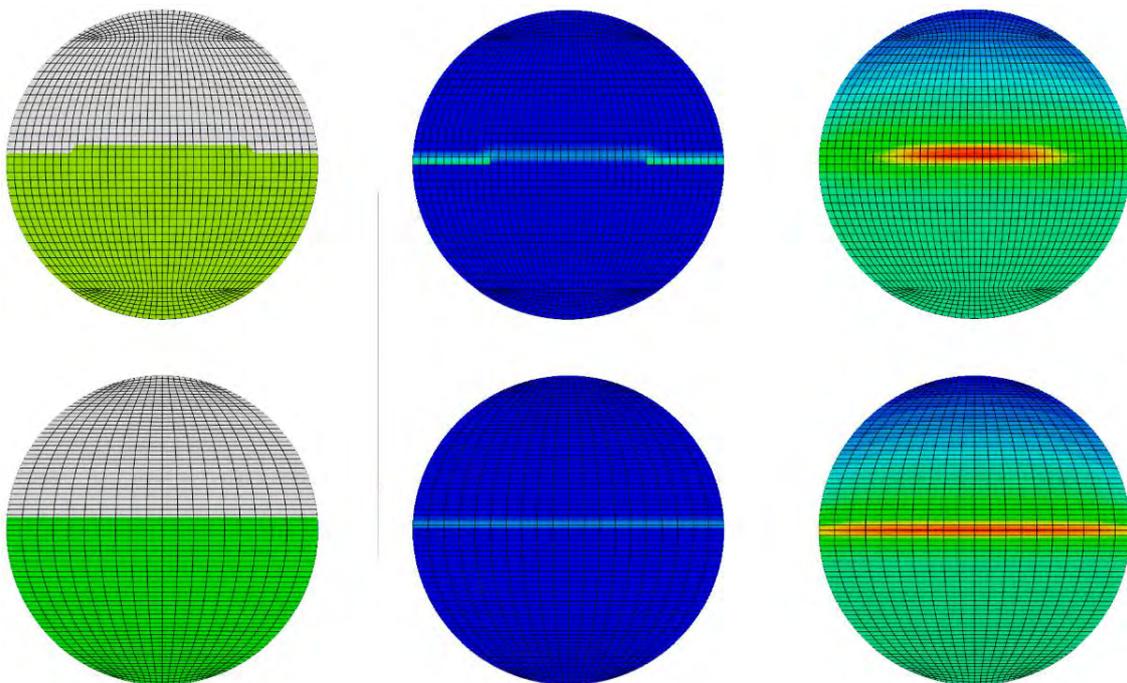


Figura 6.45: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 2

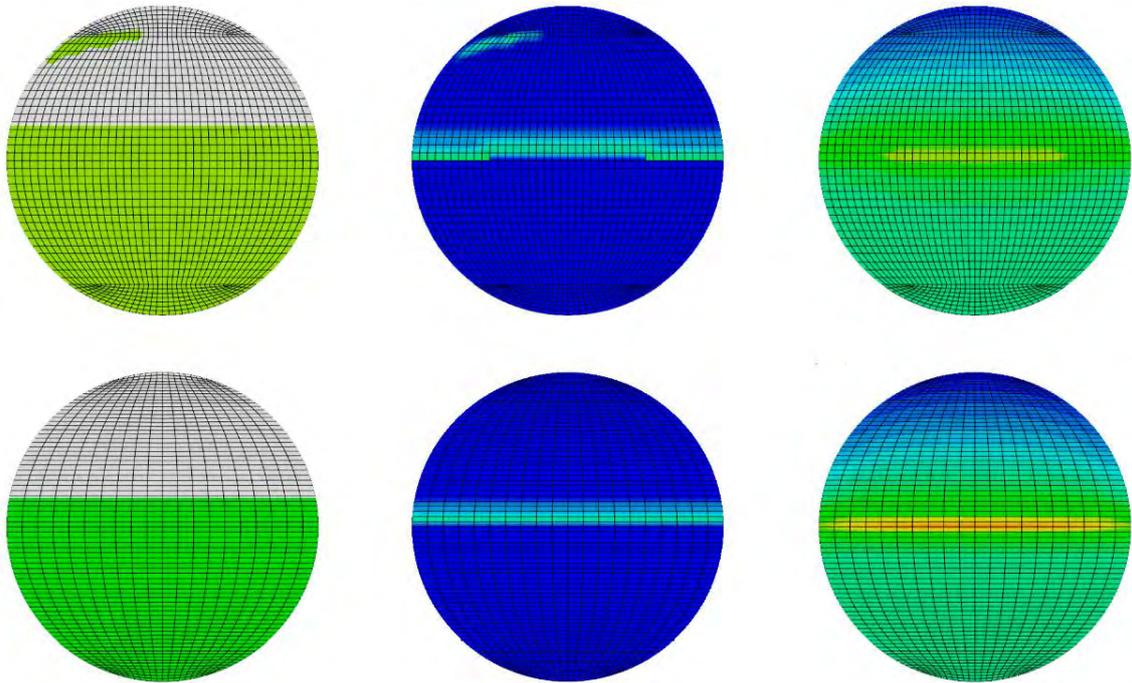


Figura 6.46: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 3

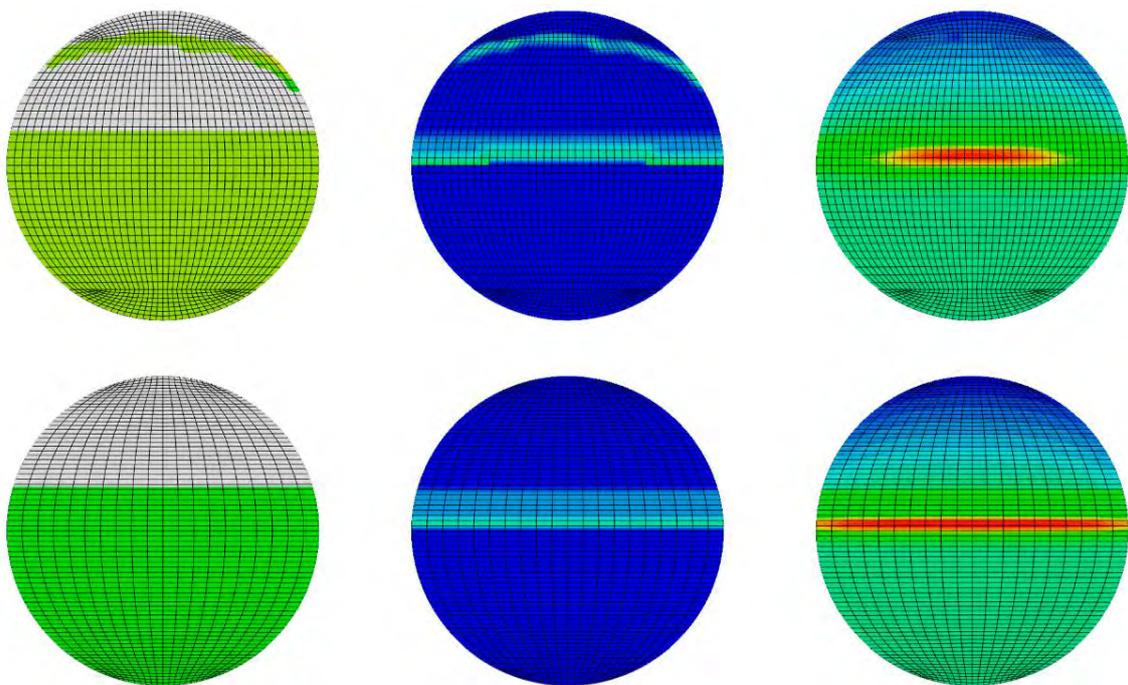


Figura 6.47: Resultados para cargas alternantes PHILSM, STATUSXFEM y S33 fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  incremento 4

En este caso al ser la fisura inicial mayor la propagación es más rápida ya que se produce una mayor concentración de tensiones en el frente de grieta. En los dos mallados la fisura crece al mismo tiempo por el centro que por los lados. Sin embargo existe una diferencia al llegar al final del diámetro y es que con el primer tipo de mallado se nuclea una nueva fisura en la dirección axial. En cuanto a las tensiones se produce un fenómeno similar al del apartado anterior donde se puede apreciar cuando la fisura está completamente abierta (ver Figuras 6.45 y 6.47) y cuando la apertura es parcial (ver Figura 4.46).

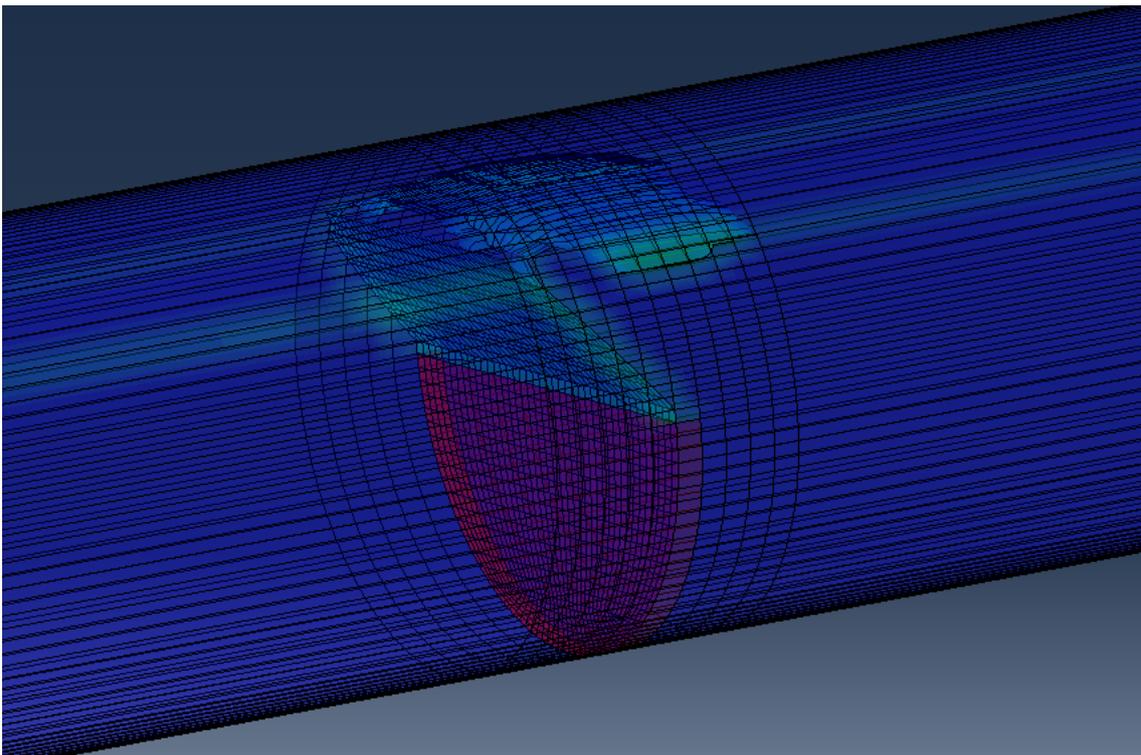


Figura 6.48: Vista interior de la sección fisurada para cargas alternantes para fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  para el mallado 1

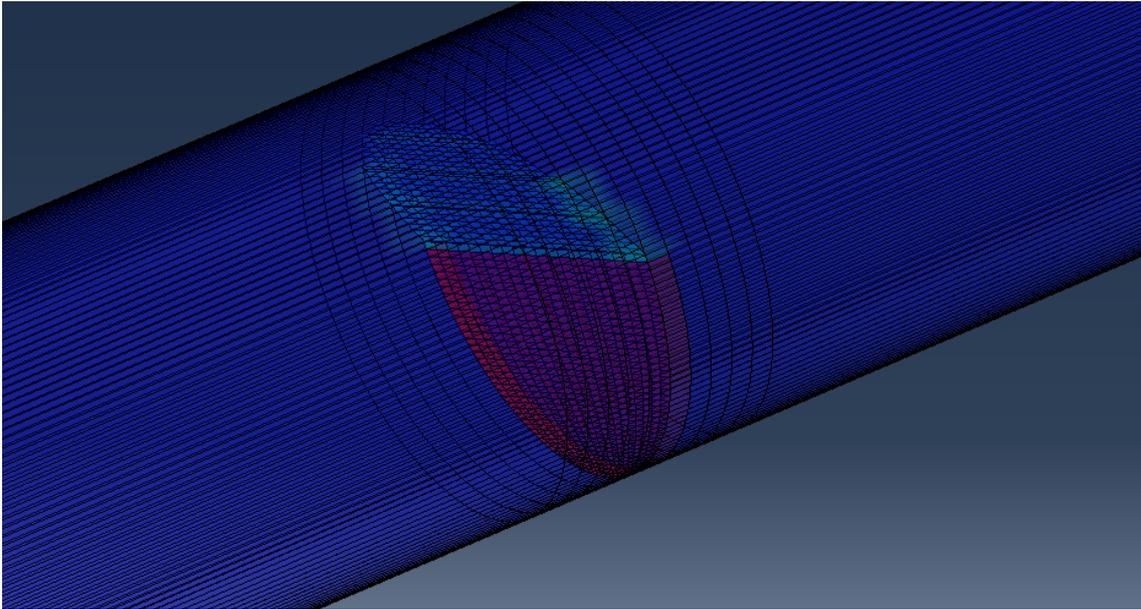


Figura 6.49: Vista interior de la sección fisurada para cargas alternantes para fisura  $\frac{a}{b} = 0.5$  para el mallado 2

En ambos casos la fisura se desarrolla en un plano inclinado hacia la derecha respecto al inicial, además en ambos casos es bastante lisa. La única diferencia es la nucleación de una nueva grieta en la dirección axial con el primer mallado mientras que al llegar al final la fisura del segundo mallado se detiene.

En estos dos casos sometidos a fatiga se observa el proceso de apertura y cierre de la misma, además como la fisura inicial es bastante grande la visión de este fenómeno está favorecida. En la Figura 6.50 se pueden apreciar las dos situaciones extremas: la fisura completamente abierta cuando está sometida a tracción en el punto inferior y cuando se encuentra sometida a tracción en el punto superior.

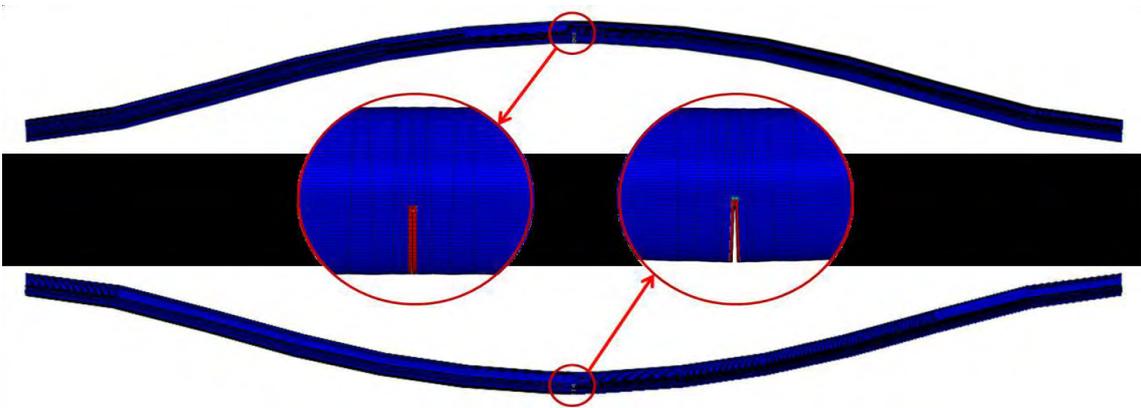


Figura 6.50: Posiciones de fisura cerrada (arriba) y abierta (abajo) (69)

## 6.3 Discusión de resultados

En primer lugar, hay que destacar la enorme dificultad de simular procesos de propagación de grietas mediante el XFEM. El principal problema radica en el hecho de que con esta herramienta solo se pueden realizar estudios estáticos porque el XFEM solo está disponible en los steps de tipo *Static*. Lo ideal sería poder simular de forma dinámica el proceso de propagación de fisuras. Normalmente se suelen utilizar modelos bidimensionales con cargas y condiciones de contorno sencillas. Sin embargo, los casos estudiados en el presente Trabajo son bastante más complejos, especialmente los dos últimos en los que la viga se encuentra sometida a fatiga a flexión, además del correspondiente proceso de fractura. En dichos casos el proceso de cierre y apertura es crítico.

En cuanto a los experimentos con cargas estáticas se tuvo que suponer una fuerza bastante más elevada de la que se consideró inicialmente (200 N) para acelerar el proceso de crecimiento (20000 N). De otro modo el análisis superaba los 2000 incrementos sin que se apreciara ningún tipo de crecimiento. Al propagarse la grieta más rápido es posible que se generaran inexactitudes durante el análisis y que los resultados no sean exactamente los mismos que los que se hubieran obtenido manteniendo la fuerza inicial. Las condiciones de contorno a las que está sujeto el sistema son simétricas, la viga tiene restringido el movimiento en sus dos extremos y se considera despreciable el efecto de la gravedad.

Al seleccionar los Modelos de Zona Cohesiva (CZM) para el análisis realizado se tuvieron que modificar algunas propiedades del material para favorecer la convergencia de las ecuaciones, además se añadió un coeficiente de regulación viscosa. Este hecho también es una posible explicación para las inexactitudes apreciadas.

Una de las conclusiones más notables obtenidas es que el mallado tiene una importancia muy grande en la obtención de resultados. Afecta en la forma que se propaga la fisura ya que, aunque en algunos casos coincida la dirección de propagación para ambos mallados, en otros es completamente diferente. Es el caso del análisis para el tamaño de fisura  $\frac{a}{b} = 0.4$ , en las Figuras 6.28 y 6.29 se puede apreciar como en el caso del primer mallado la propagación es en un plano diagonal y la fisura que se forma es lisa, mientras que con el segundo mallado el plano de propagación es el inicial y la fisura es mucho más irregular y rugosa. En general, se obtiene un crecimiento de grieta más regular con el primer tipo de mallado donde la grieta va propagándose desde el centro hacia los laterales, lo cual sería el comportamiento más intuitivo ya que se parecería más a un frente de grieta semielíptico que predicen algunos autores (40). Por el contrario, con el segundo tipo de mallado se obtiene un crecimiento más aleatorio, la causa radica sin duda en el tipo de malla utilizado. El centro de la primera malla, lugar por donde crecen todas las fisuras en la mayoría de su recorrido, es mucho más regular, los elementos son prácticamente cuadrados y esto facilita una mayor precisión en la resolución de las ecuaciones correspondientes en los nodos. El centro de la segunda malla es más irregular ya que los elementos son rectangulares, algunos de ellos bastante alargados y muchos autores (67) señalan esto como una posible causa en la distorsión de los resultados. En la Figura 6.51 se muestra un detalle del centro de ambos mallados para poder apreciar más claramente las diferencias expuestas.

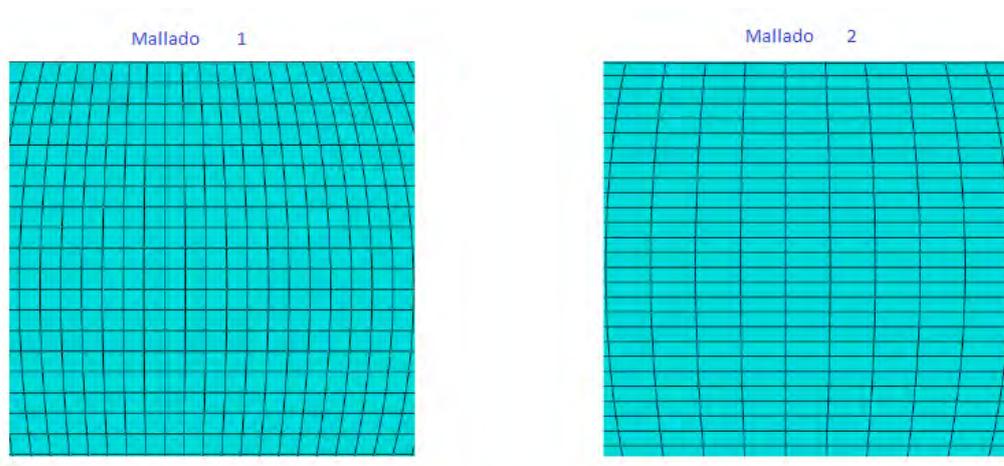


Figura 6.51: Detalle de los dos tipos de mallado en la zona central de la sección transversal

Para el análisis de las tensiones normales con la variable S33 hay que añadir que en casi todos los casos las tensiones máximas de tracción se encuentran en el frente de grieta porque es la zona de mayor concentración de tensiones. En todos los casos las tensiones que se alcanzan son mayores con el primer tipo de mallado, por lo que al haber asumido que en la región central los resultados son más precisos en el primer tipo de mallado, se escogen como válidos los resultados obtenidos con este tipo de mallado (en cuanto a las tensiones de tracción máximas ya que estas se encuentran en la región central).

A pesar de que se ha asumido la primera malla como más precisa en el centro, esto no ocurre en toda la malla. En los extremos la situación se invierte ya que el primer mallado presenta elementos con ángulos muy agudos y elementos distorsionados que pueden dar lugar a resultados poco fiables. La segunda malla tiene la ventaja de que aunque los elementos que se forman son más rectangulares en el centro, son más regulares en los extremos. Por lo tanto en los casos en los que los resultados difieran al final del análisis, como en las Figuras 6.28 y 6.29, se tomarán como válidos los obtenidos mediante el análisis con el segundo mallado. En la Figura 6.52 se muestra un detalle del mallado en la zona superior de la sección. Los elementos en rojo representan los elementos más distorsionados y con ángulos más críticos. Se puede apreciar cómo en el primer tipo de mallado aparecen 6 elementos con estas características mientras que en el segundo tipo de mallado solo aparecen 2 y además están casi al final de la viga, localización que no es alcanzada por la fisura en casi ningún análisis, por lo que se considera que esos 2 elementos no tienen influencia alguna en los resultados.

En la Figura 6.48 se aprecia cómo la fisura se propaga en la dirección axial al llegar al final del eje. Este hecho puede tener su causa en la superación del límite de energías de fractura establecidos en los Modos II y III. Y esto a su vez puede ser consecuencia de la mayor concentración de tensiones que se producen en los 6 elementos distorsionados que se ven en el mallado 1 de la Figura 6.52.

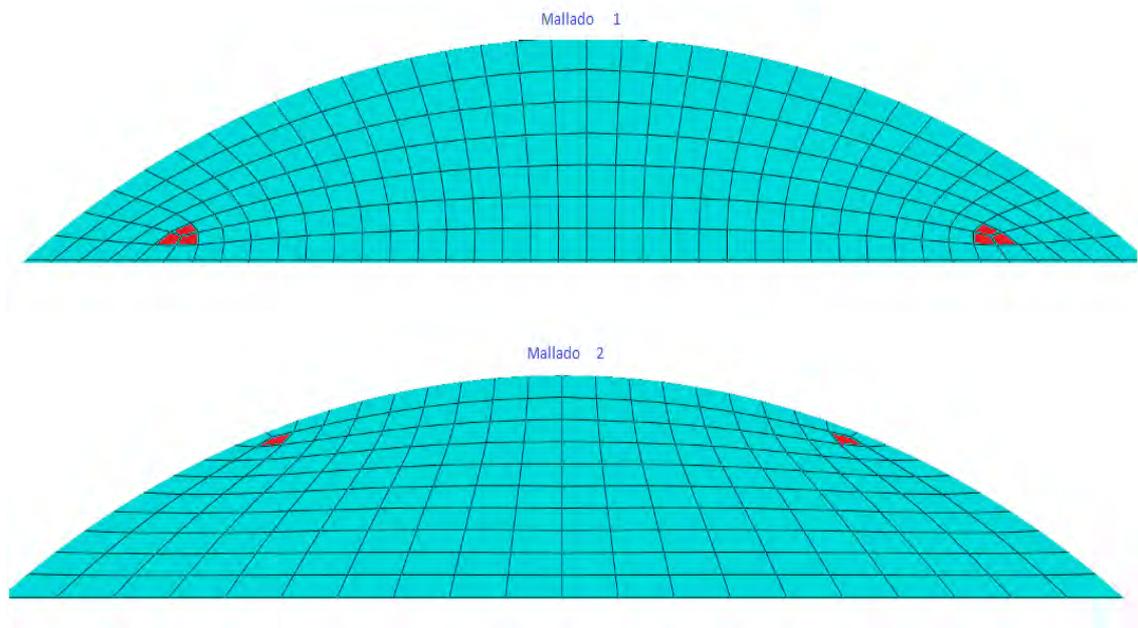


Figura 6.52: Detalle de los dos tipos de mallado en la parte superior de la sección transversal

Otro hecho destacable es el camino que sigue cada fisura en su crecimiento. Inicialmente no es intuitivo pensar que la fisura va a seguir un camino definido por un plano inclinado respecto al inicial. Como ya se ha comentado las condiciones de contorno son estrictamente simétricas al igual que las cargas que se aplican a la viga. Por lo tanto, no hay razón aparente para que la fisura no siga un camino recto. Sin embargo, en muchos de los casos analizados la fisura sigue un camino definido por un plano inclinado, este hecho también puede tener la explicación en el mallado, concretamente en el tamaño. En el Capítulo 5 vienen explicados los pasos que se han seguido para realizar los dos tipos de malla, en ambos casos, se utiliza la misma distancia para el mallado en la dirección axial, al no necesitar una alta precisión en esta dirección,  $l = 75 \text{ mm}$  excepto en la región próxima a la fisura donde esta distancia se reduce a  $l = 1 \text{ mm}$ . Como puede intuirse la relación entre la dimensión longitudinal y la transversal de cada elemento es muy grande y por lo tanto muy fácil que los elementos se distorsionen. Si los elementos se distorsionan las ecuaciones no se resuelven del mismo modo que si no ocurre este fenómeno, el tiempo de resolución aumenta. Por lo tanto si los elementos se distorsionan antes en un lado que en otro de la viga las ecuaciones no se resolverán simétricamente, se obtendrán las soluciones de un lado más rápidamente y en consecuencia la fisura puede tener tendencia a desarrollarse hacia alguno de los dos lados.

En la Figura 6.53 se puede ver la advertencia en una de las pruebas iniciales realizadas que el programa Abaqus ofrece en el *Módulo Job* → Monitor → Warnings cuando el ratio de dos de las dimensiones de los elementos es tan grande (la relación es mayor de 1 a 100).

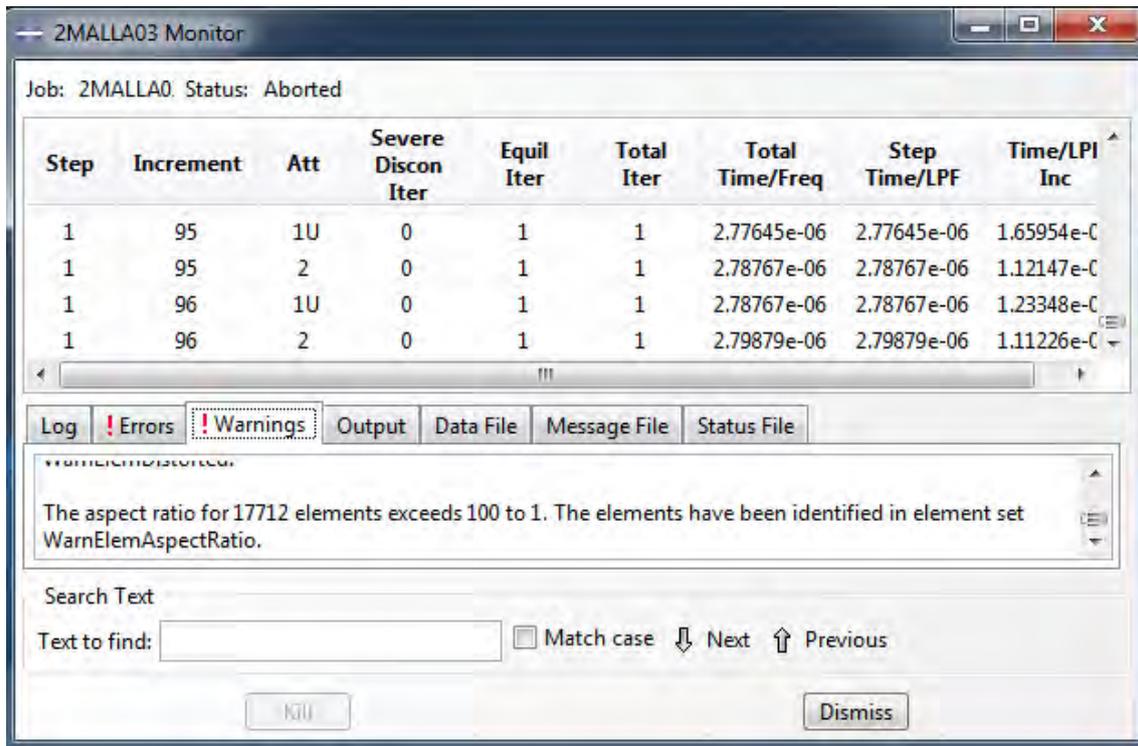


Figura 6.53: Advertencias ante el tamaño de los elementos en el Módulo Job

También se puede extraer alguna conclusión de los casos estudiados sometidos a cargas fluctuantes. En primer lugar, en estos casos se puede apreciar el fenómeno de *breathing* de la fisura aunque no totalmente. Por ejemplo, en las Figuras 6.45 y 6.47 se ve como la fisura soporta tensiones de tracción (fisura abierta) y posteriormente esta tensión se reduce pero sigue siendo de tracción. Si la fisura se cerrara completamente las tensiones deberían ser de compresión lo que indica que el período de la fuerza utilizada (0.000001 s) es demasiado pequeño para que a la fisura le dé tiempo a cerrarse por completo, se cierra parcialmente, por eso disminuyen las tensiones y posteriormente vuelve a abrirse completamente.

Por otro lado es destacable el hecho de que las tensiones que se alcanzan son de tres órdenes de magnitud superiores a las obtenidas mediante la aplicación de cargas estáticas aun cuando las fuerzas aplicadas son mucho menores. Esto nos da una idea de la importancia de las cargas alternantes que provocan fatiga en los elementos, con una fuerza mucho menor se consiguen tensiones mucho mayores.

Una vez más queda demostrado la enorme influencia del mallado ya que por ejemplo las Figuras 6.42 y 6.43 denotan un crecimiento completamente diferente con los dos tipos de mallados.

Por último hay que añadir la puntualización de que en un ensayo de fatiga sobre una viga de aluminio lo esperable es que al final se produzca la rotura frágil de la última parte de la viga. Esto se produce en el momento en el que la sección fisurada es incapaz de soportar los esfuerzos a la que se ve sometida. Como consecuencia de esto se produce un crecimiento

acelerado y muy inestable de la grieta hasta que finalmente se produce la fractura. La principal causa de que la fractura total no se produzca en ninguno de los modelos es que con el número de ciclos estudiados es muy difícil que se produzca la fractura completa. Se ha probado con innumerables valores de los parámetros: energías de fractura, tensión máxima admisible, etc. Pero en ninguna de las alternativas se ha producido la rotura total, esto es debido a que los elementos no se degradan por completo porque el número de ciclos no es suficiente. Algunos autores (69) que han estudiado fenómenos parecidos pero con ejes rotativos sometidos a fatiga (que en teoría deberían romper mucho antes) señalan que el número de ciclos es mucho más elevado que los 2000 máximos que se han alcanzado en el presente Trabajo antes de que el *job* aborte para poder apreciar este fenómeno.



7

# PLANIFICACIÓN Y PRESUPUESTO

## 7.1 Planificación

Los proyectos son trabajos complejos que tienen la particularidad de que pueden ser divididos en tareas variadas e interrelacionadas cuya realización está sometida a un conjunto de restricciones, lo que hace más sencillo el análisis de un proyecto complejo. Cada proyecto es singular e irreversible.

Las fases de planificación que se deben llevar a cabo cuando se realiza un proyecto son las siguientes:

- 1) Descomposición del proyecto en tareas.
- 2) Estimación de la duración.
- 3) Estimación de recursos (humanos y materiales).
- 4) Secuencia en la que han de ejecutarse las tareas (red lógica que represente las restricciones).
- 5) Programación de las tareas: consiste en la distribución a lo largo del tiempo de las tareas y de la identificación de hitos de control, un ejemplo es el Diagrama de Gantt que es el que se va a utilizar para este Proyecto.

La planificación es muy útil para cumplir unos determinados requisitos de costes y plazos. Por ello se presenta a continuación el Diagrama de Gantt realizado en Microsoft Project que se ha llevado a cabo para la realización de este Proyecto. El diagrama está organizado por las áreas de trabajo, además se incluyen las relaciones de precedencia entre las tareas y la secuenciación temporal. Debajo se añade la Tabla 7.1 en la que están desglosadas las tareas con sus fechas de comienzo y de fin así como las horas y los días dedicadas a cada tarea.

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO A LA PROPAGACIÓN DE FISURAS EN VIGAS CILÍNDRICAS – PLANIFICACIÓN Y PRESUPUESTO

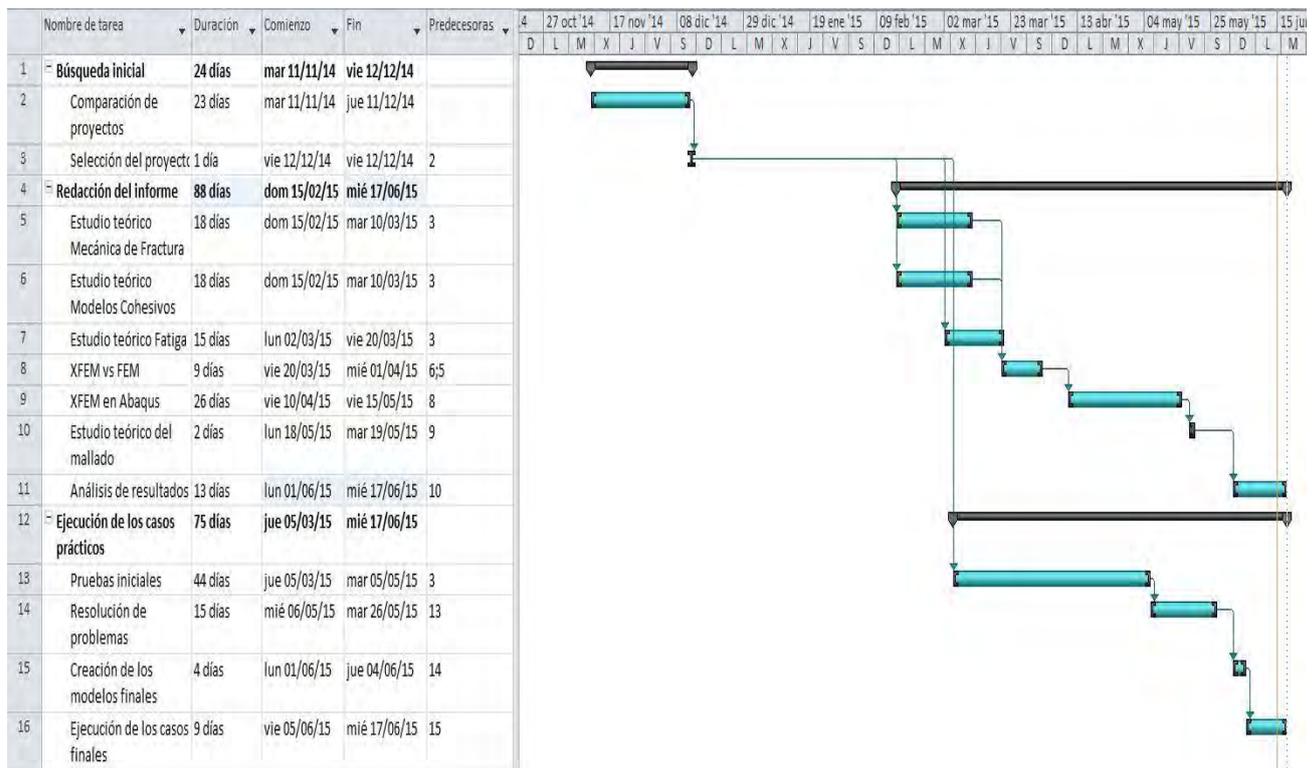


Figura 7.1: Diagrama de Gantt del proyecto

Planificación de Tareas				
Nombre de la tarea	Fecha de comienzo	Fecha de finalización	Horas dedicadas	Días dedicados
<b>Búsqueda inicial</b>				
Comparación de proyectos	11/11/14	11/12/14	15	30
Selección del proyecto	12/12/14	12/12/14	2	1
<b>Redacción del informe</b>				
Estudio teórico Mecánica de Fractura	15/02/15	10/03/15	55	23
Estudio teórico Modelos Cohesivos	15/02/15	10/03/15	55	23

<b>Estudio teórico Fatiga</b>	02/03/15	20/03/15	55	18
<b>XFEM vs FEM</b>	20/03/15	01/04/15	35	12
<b>XFEM en Abaqus</b>	10/04/15	15/05/15	55	35
<b>Estudio teórico del mallado</b>	10/5/15	15/05/15	15	5
<b>Análisis de resultados</b>	01/06/15	17/06/15	60	14
<b>Ejecución de los casos prácticos</b>				
<b>Pruebas iniciales</b>	05/03/15	05/05/15	25	60
<b>Resolución de problemas</b>	05/05/15	25/05/15	50	20
<b>Creación de los modelos finales</b>	01/05/15	04/05/15	15	3
<b>Ejecución de los casos finales</b>	04/05/15	16/05/15	60	12
<b>Horas totales</b>			<b>497</b>	

Tabla 7.1

## 7.2 Presupuesto

El presupuesto va a estar compuesto principalmente por los costes de amortización de los equipos así como las licencias de software utilizadas. En cuanto al personal, se va a tener en cuenta los honorarios de los trabajadores que han hecho posible el Trabajo.

### 7.2.1 Amortización de equipos y licencias de software

Se hace uso de la ecuación 7.1 que es una fórmula estándar para calcular los costes de amortización de un producto:

$$C_{amor} = \frac{A}{B} \cdot C \cdot D$$

7.1

Donde  $A$  representa el tiempo que el equipo ha sido utilizado expresado en meses,  $B$  el período de depreciación,  $C$  el coste del equipo y  $D$  el porcentaje de utilización que normalmente se supondrá del 100%.

En la Tabla 7.2 se presentan las amortizaciones en base a estos conceptos.

Costes de Amortización					
Equipo	$A$ (meses)	$B$ (meses)	$C$ (€)	$D$ (%)	$C_{amor}$ (€)
Ordenador personal	5	12	1000	100	417
Ordenador laboratorio	2	12	1500	100	250
Licencias de software	$A$ (meses)	$B$ (meses)	$C$ (€)	$D$ (%)	$C_{amor}$ (€)
Abaqus 6.11	5	12	33650	100	14021
Microsoft Office	5	12	150	100	63
<b>Total</b>					<b>14751</b>

Tabla 7.2

## 7.2.2 Honorarios de personal

En la Tabla 7.3 se presentan los costes estimados a este respecto.

Costes de Personal				
Personal	Cargo	Dedicación (h)	Coste (€/h)	$C_{pers}$ (€)
Tutora	Ingeniero	150	40	6000
Autor	Estudiante	497	15	7455
<b>Total</b>				<b>13455</b>

Tabla 7.3

Teniendo en cuenta todos los costes, el presupuesto final del proyecto es el siguiente:

$$C_{total} = C_{amort} + C_{pers} = 14751 + 13455 = 28206 \text{ €}$$



8

# CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

## 8.1 Conclusiones

En el presente Trabajo Fin de Grado se ha analizado la propagación y crecimiento de fisuras en vigas cilíndricas bajo condiciones cuasiestáticas focalizándose especialmente en la influencia del mallado sobre los resultados. Para ello se han desarrollado diferentes modelos numéricos tridimensionales mediante el Método de los Elementos Finitos eXtendido (XFEM). Todos los modelos han sido parametrizados mediante uno de los códigos comerciales de elementos finitos más conocido y utilizado como es Abaqus/Standard.

Para conseguir el objetivo final ha sido fundamental una extensa revisión bibliográfica para adquirir un criterio lo más óptimo posible acerca de los temas involucrados en la propagación de dichas grietas. Los más importantes son, por un lado los aspectos más teóricos que incluyen materias como la fatiga y la mecánica del daño, y por otro aspectos más prácticos como el manejo de las herramientas que proporciona Abaqus para simular la propagación de fisuras así como un amplio estudio sobre los tipos de mallado.

Después de todo este proceso se ha analizado la influencia del mallado en la propagación de fisuras en vigas cilíndricas en función de la profundidad de las mismas. Además se ha añadido un pequeño apartado en el que también se analizan los resultados obtenidos con cargas alternantes, para ver el comportamiento a fatiga. La alternativa utilizada dentro de las dos que ofrece Abaqus ha sido la de los modelos cohesivos CZM por ser el aluminio un material dúctil. Se han comparado entre sí los resultados obtenidos por los dos tipos de mallado en todos los casos.

Como resumen final del trabajo se puede concluir que tanto el tamaño como la forma de la malla utilizada tienen una influencia mayúscula en los resultados obtenidos. Debido a que la forma de los elementos es distinta en cada tipo de malla las tensiones se distribuyen de distinta manera, los elementos se deforman de forma diferente y en definitiva, el avance de la fisura puede cambiar tanto de dirección como de textura (rugosa o lisa). Cabe destacar que el proceso de análisis mediante el XFEM es bastante complicado debido que solo se puede utilizar en condiciones estáticas. Los resultados obtenidos es bastante limitado por varias razones: el alejamiento del modelo desarrollado a las condiciones reales de funcionamiento de una viga debido a simplificaciones necesarias como las condiciones de carga; cambios en criterios como las energías de fractura; el tamaño de la malla que podría haberse optimizado, sin embargo, esto no ha sido posible debido al tiempo requerido para ello. Una malla más pequeña hubiera supuesto un aumento considerable del tiempo de cálculo y teniendo en cuenta que con este tamaño cada simulación tardaba en ocasiones días en completarse, menores tamaños hubieran sido inviables por las restricciones temporales del proyecto. Además se ha comprobado que las cargas por fatiga favorecen mucho más rápidamente la propagación de fisuras.

En conclusión, este Trabajo Fin de Grado es válido como una aproximación al estudio tanto de la propagación de fisuras en vigas cilíndricas modeladas en tres dimensiones como, sobre todo, de la influencia del mallado en estos estudios. A partir del presente Trabajo se puede continuar trabajando y desarrollando modelos más elaborados encuadrados en la misma línea de investigación.

## 8.2 Desarrollos futuros

Una vez que se han expuesto las conclusiones obtenidas tras la realización de este Trabajo se proponen una serie de alternativas por las que la investigación podría continuar:

- ❖ Realizar un estudio que se mantenga más fiel a los valores adecuados de parámetros cruciales como son las energías de fractura o la tensión máxima para el inicio de daño (en el caso de que se utilice la alternativa MAXPS). De esta forma se podrán obtener unos resultados que se ajusten más a la realidad y comprobar si el comportamiento de la fisura se ajusta más a la realidad y no depende tanto del tipo de malla.
- ❖ Reducir el tamaño de la malla, aumentando así la densidad y la precisión de los resultados obtenidos, con una doble motivación. Por un lado comprobar si las fisuras siguen creciendo de manera irregular presentando anomalías en alguno de los casos y por otra parte analizar si la forma del mallado es tan decisiva para tamaños más pequeños. También se debería optimizar la malla en la sección no fisurada para que no haya problemas con la distorsión de los elementos, sería especialmente importante para el caso de fisuras pequeñas (que son las que menos resultados han arrojado) ya que el número de elementos aumenta considerablemente debido al aumento de la sección efectiva.
- ❖ Realizar estudios similares considerando frentes de grieta que no sean rectos y comprobar si la malla juega un papel importante en estos casos.
- ❖ Estudiar la influencia del mallado en la propagación de fisuras considerando un punto de inicio de la misma mediante la modelización de irregularidades en la geometría como entallas o considerando procesos con campos acoplados como tener en cuenta el fenómeno de la corrosión en el defecto.
- ❖ Investigar la influencia del mallado en vigas con otro tipo de secciones más utilizadas como las rectangulares o las de doble T.
- ❖ Realizar un estudio similar con un material frágil para poder aplicar la Mecánica de Fractura Elástico-Lineal en lugar de los Modelos de Zona Cohesivos.



# BIBLIOGRAFÍA

1. *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners.* **Inglis, C.E.** 1913.
2. *The phenomena of rupture and flow in solids.* **Griffith A.** 1920, Philosophical Transactions, págs. 163-198.
3. *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate.* **Irwin, G.** 1957, Journal of Applied Mechanics, págs. 361-364.
4. **J.L Arana & J.J González.** *Mecánica de Fractura.* s.l: Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, 2002.
5. *Yielding of Steel sheets containing slits.* **Dugdale, D.S.** 1960, Journal of Mechanics and Physics of Solid, págs. 100-104.
6. **Wells, A.A.** *Instable Crack Propagation in Metals: Cleavage and Fast Fracture, Proceedings of the Crack Propagation Symposium, Vol 1, Paper 84.* Cranfield: s.n.
7. **Burdekin, F.M and Dawes, M.G.** , “*Practical Use of Linear Elastic and Yielding Fracture Mechanics with Particular Reference to Pressure Vessels*” Poceedings of the Institute of Mechanical Engineers Conference, London, May 1971, pp.
8. *Métodos Numéricos en la Fractura de Materiales Cohesivos.* **Manuel Elices, Jaime Planas, Javier Lorca, Gustavo Guinea.** Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid.
9. *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture.* **Barenblatt, G.I.** 1962, Advances in Applied Mechanics, págs. 1246-1272.
10. *Progressive delamination using interface elements.***Y.Mi, M.A.Crisfield, G.A. Davies & H.B. Hellweg.** 1998, Journal of Composite Materials, págs. 1246-1272.
11. *Interface element including point-to-surface constraints for three-dimensional problems with damage propagation.* **J. Gonçalves, M. de Moura, P. de Castro & A.Marques.** 1999, Engineering Computations, págs. 28-47.

12. *A simple technique for avoiding convergence problems in finite element simulations of crack nucleation and growth on cohesive interfaces.* **Y.F. Gao & A.F. Bower.** 2004, Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, pág. 453.
13. *Cohesive Zone Models: A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces.* **Kyoungsoo Park & Glaucio h. Paulino.** 2013, Appl. Mech. Rev.
14. *Numerical analysis of indentation-induced cracking of brittle coatings on ductile substrates.* **A. Abdul-Baqi & E. Van der Giessen.** 2002, International Journal of Solids and Structures, págs. 1427-1442.
15. *Über Treibseile am Harz.* **Albert, W.A.J** 1837, Archiv für Mineralogie, Geornoise. Bergbau and Hüttenkunde, Vol. 10, págs. 215-234.
16. *On the causes of the unexpected breakage of the journals of railway axles, and on the means of preventing such accidents by observing the law of continuity in their construction.* **Rankine, W.J.M** [ed.] Institution of Civil Engineers. London: s.n., 1842, Minutes of Proceedings, Vol. 2, págs. 105-108.
17. *On the fatigue and consequent fracture of metals.* **Braithwaite, F.** s.l. : Institution of Civil Engineers, 1854, Minutes of Proceedings, Vol. 13, págs. 463-474.
18. *Versuche zur Ermittlung der auf die Eisenbahnwagenachsen einwirkenden Kräfte und die Widerstandsfähigkeit der Wagen-Achsen.* **Wöler, A.** 1860, Zeitschrift für Bauwesen, Vol. 10, págs. 583-616.
19. **Juvinall, C.** *Stress, Strain and Strength.* C.R. Mischke. 1, s.l : Trans. Of ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1987, Vol. 109.
20. *Prediction of Stochastic Endurance Strength,* **C.R. Mischke.** 1, s.l. : Trans. Of ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1987, Vol. 109.
21. *A stastical distribution function of wide applicability.* **Weibull, W.** [ed.] Trans. ASME. 1951, Journal of Applied Mecganics, Vol. 73, págs. 293-297.
22. **R.G. Budynas & J.K. Nisbett.** *Shigley's Mechanical Engineering Design.* New York: McGraw-Hill, 2008.
23. **Abella Muñoz, M.B.** Apuntes de la asignatura: Mecánica de Máquinas, 2012 s.l. : Universidad Carlos III de Madrid.

24. *Diseño de elementos mecánicos sometidos a fatiga*. **José Luis San Román García, Belén Muñoz Abella, Guadalupe Fernandez Rico, María Ramírez Bersategui**. s.l. : Universidad Carlos III de Madrid.
25. *A critical analysis of crack propagation laws*. **P. Paris & F. Erdogan**. 1963, Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering, págs. 528-534.
26. *Shape change of surface cracks in round bars under cyclic axial loading*. **Carpinteri, A.** 1993, International Journal of Fatigue, págs. 21-26.
27. **A. Valiente**, *Criterios de fractura para alambres*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid (1980).
28. **A. Bush**, *Experimentally determined stress-intensity factors for single-edge-crack round bars loaded in bending*, Exp. Mech. 16 (1976) 249-257.
29. **F. Ouchterlony**, *Extension of the compliance and stress intensity formulas for the single edge crack round bar in bending*, *Fracture Mechanics for Ceramics, Rocks and Concrete*, ASTM STP 145 (1981) 237-256.
30. *The application of fracture mechanics to surface cracks in shafts*. **T. Lorentzen, N. Kjaer & T. Henriksen**. 1986, Engineering Fracture Mechanics, págs. 1005-1014.
31. *Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading*. **A. Kobayashi & R. Shahand**. 1971, Engineering Fracture Mechanics, págs. 71-96.
32. *Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending*. **C. Shin & C. Cai**. 2004, International Journal of fracture, págs. 239-264.
33. **T. Mackay, B. Alperin**, *Stress intensity factors for fatigue cracking in high-strength bolts*, Engineering Fracture Mechanics 21 (1985) 391-397.
34. *A survey of the dynamic behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack*. **Gasch, R.** 1993, Journal of Sound and Vibration, págs. 313-332.
35. *Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack rotor*. **I. Mayes & W. Davies**, . 1984, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reability in Design, págs. 139-145.
36. *Transient response and breathing behavior of a cracked Jeffcott rotor*. **A. Darpe, K. Gupta & A. Chawla**. 2004, Journal of Sound and Vibration, págs. 207-243.

37. *Some remarks on breathing mechanism, on non-linear affects and on slant and helicoidal cracks.* **N. Baschschmid, P. Pennacchi & E. Tanzi.** 2008, Mechanical Systems and Signal Processing, págs. 879-904.
38. **Z. Kulesza, J. Sawicki,** *New finite element modeling approach of a propagating shaft crack,* Journal of Applied Mechanics 80 (2013) 0210251-02102517.
39. *Shape growth simulation of surface cracks in tension fatigued round bars.* **X. Lin & R. Smith.** 1997, International Journal of Fatigue, págs. 461-469.
40. *A critical review of stress intensity factor solutions for surface cracks in round bars subjected to tension loading.* **J. Toribio, N. Álvarez, B. Gonzalez & J.C. Matos.** 2009, Engineering Failure Analysis, págs. 794-809.
41. *Simplified model for the fatigue growth analysis of surface cracks in round bars under mode I.* **N. Couroneau & J. Royer.** 1998, International Journal of Fatigue, págs. 711-718.
42. *Analysis of fatigue crack growth on a cracked shaft.* **Y. Shih & J. Chen.** 2002, International Journal of Fracture, págs. 477-485.
43. *Stress intensity factors for circumferential surface cracks in pipes and rods.* **J. Newman & I. Raju.** 1986, Fracture Mechanics, págs. 789-805.
44. *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations.* **Courant, R.** 1943, Bulletin of the American Mathematical Society, págs. 1-23.
45. *Energy Theorems and Structural Analysis,* **J.H. Argyris & Sidney Kelsey.**
46. *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis.* **Clough, R.W.** Pittsburgh, PA: American Society of Civil ENGINEERS, 1960. 2<sup>nd</sup> conference on Electronic Computation, págs. 345-378.
47. *Stiffness and deflection analysis of complex structures.* **R.W. Clough, M.J. Turner, H.C. Martin & L.J. Topp.** 1956, Journal of Aeronautical Sciences, págs. 805-824.
48. *Some aspects of recent contributions to the mathematical theory of finite elements.* **Oden, J.T.** 1972, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design.
49. **Przemieniecki, J.S.** *Theory of Matrix Structural Analysis.* New York: Mc Graw-Hill, 1968.

50. **O.C. Zienkiewicz & G. Hollister.** *Stress Analysis*. London: John Wiley, 1966.
51. **O.C. Zienkiewicz & Y.K. Cheung.** *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. London: Mc Graw-Hill, 1967.
52. **O.C.Zienkiewicz & R.L. Taylor.** *El método de los Elementos Finitos*. Barcelona: Mc Graw-Hill, 1994.
53. *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing.* **T. Belytschko & T. Black.** 1999, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, págs. 601-620.
54. *A finite element method for crack growth without remeshing.* **N. Moës, J. Dolbow & T. Belytschko.** 1999, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, págs. 131-150.
55. **Dassaul Systèmes.** *Abaqus/Cae User,s Manual*. 2011.
56. *Extended finite element method for three dimensional crack modeling.* **N. Sukumar, N. Moës, B. Moran & T. Belytschko.** 2000, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, págs. 1549-1570.
57. *New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks.* **G. Zu & T. Belytschko.** 2003, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57, págs. 2221-2240.
58. *Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements.* **G. Ventura, E. Budyn & T. Belytschko.** 2003, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58, págs. 1571-1592.
59. *Extended finite element method for fretting fatigue crack propagation.* **E. Giner, N. Sukumar, F. Denia & F. Fuenmayor.** 2008, *International Journal of Solid and Structures*, 45, pág. 5675.
60. **Dassault Systèmes.** *Abaqus Analysis User´s Manual*. 2011.
61. *A Method for Dynamic Crack and Shear Band Propagation with Phantom Nodes.* **J.H. Song, P.M.A. Areias, & T.Belytschko.** 2006, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67, págs. 868-893.
62. *The Simulation of Dynamic Crack Propagation using the Cohesive Segments Method.* **J.J.C. Remmers, R. de Borst, & A. Needleman.** 2008, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56, págs. 70-92.

63. *Mixed mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials*. **P.P. Camanho & C.G. Davila**. 2002, págs. 1-37.
64. *3D mixed-mode delamination fracture criteria – An experimentalist’s perspective*. **Reeder, J.R.** 2006. 21<sup>st</sup> Technical Conference.
65. *Measurement of Mixed-Mode Delamination Fracture Toughness of Unidirectional Glass/Epoxy Composites with Mixed-Mode Bending Apparatus*. **M.L. Benzeggagh & M. Kenane**. 1996, Composites Science and Technology, 56, págs. 439-449.
66. **Wu, Reuter M, Ward PI, Barbour AD**. *Correcting for sampling bias in quantitative measures of selection when fitness is discrete*, págs. 286-291.
67. **Jorge Alonso Zahr Viñuela**. Apuntes de la asignatura: Modelización en Mecánica de Sólidos, 2014, s.l.: Universidad Carlos III de Madrid.
68. **Richard G. Budynas y J. Keith Nisbett**, *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley*, McGraw-Hill, Mexico, 2008.
69. **José María Luna Buendía**, *Estudio numérico de la propagación de fisuras en ejes rotativos mediante XFEM*, 2014, s.l. : Universidad Carlos III de Madrid.
70. **Patricia Rubio Herrero**, *Factor de Intensidad de Tensiones en fisuras elípticas con mecanismo de apertura y cierre en ejes giratorios*, 2014, págs. 7-90. s.l. : Universidad Carlos III de Madrid.

