

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA.
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y JURÍDICAS .
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID.

TESIS DOCTORAL

**ANÁLISIS DE LOS JUEGOS
CON UTILIDADES CAMBIANTES Y DE LOS
JUEGOS GENERALIZADOS DE
EXTERNALIDADES.**

Doctoranda:
Paula Inmaculada Corcho Sánchez.
Director:
Dr. D. José Luis Ferreira García.



*El presente trabajo, para optar al grado de Doctor, ha
sido realizado en el Departamento de Economía, de
la Universidad Carlos III de Madrid, bajo la dirección
del Dr. D. José L. Ferreira García.*

A Jesús M. y a mis padres.

Las Matemáticas están fuera de este tumulto
que es la vida humana, pero sus métodos son un
espejo, un espejo increíblemente puro de las
relaciones que ligán los hechos de nuestra existencia.

Konrad Knopp (1928).

Agradecimientos:

A través de las siguientes líneas quiero agradecer a todas las personas e instituciones que me han ayudado a la realización de esta tesis doctoral.

En primer lugar, mi mayor gratitud es para el profesor D. José Luis Ferreira, director de esta investigación. Su constante apoyo y sus innumerables comentarios han contribuido a mi formación académica y personal.

La existencia del programa de Doctorado en Economía de la Universidad Carlos III de Madrid me permitió iniciar mis estudios en Teoría de Juegos. Quisiera agradecer al Departamento de Economía de dicha universidad toda la ayuda prestada y, especialmente, a la profesora M. Angeles de Frutos cuyos comentarios han enriquecido todo mi trabajo.

Esta obra ha llegado a su fin gracias a las recomendaciones de ciertos participantes y organizadores de algunos de los congresos donde se han expuesto los capítulos de esta tesis. En este apartado mencionar especialmente el *International Workshop on Game Theory and Politics* (Santiago de Compostela, 1996) y a los evaluadores anónimos de la revista *Annals of Operations Research*, cuyas sugerencias han hecho posible la publicación del primer capítulo de esta tesis.

No quisiera olvidarme del Área de Métodos Cuantitativos de la Facultad de CC. EE. y Empresariales de la Universidad de Extremadura que me ha acogido con profesionalidad y con mucho cariño. A todos ellos, gracias.

A los profesores, D. Manuel Mota y D. Santiago Vila, del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Extremadura. No olvidaré la ayuda informática y la calidad humana que me han brindado en todo momento.

Por último, y no por ello menos importante, quiero dar las gracias a mi familia y amigos. A Jesus M., mi marido, por su infinita paciencia, apoyo, ánimo, ... y su constante ternura y dedicación. A una gran mujer, mi madre, por sus continuos esfuerzos para que yo estudiara y no deje nunca de hacerlo. A mi padre por enseñarme a luchar y conseguir mis sueños. A mis hermanos por intentar mantener en mi rostro siempre una sonrisa. A Leonardo y Juli, por estar siempre ahí, escuchándome. Y como no, a Rosa, Toni, y Teresa por no olvidar los agobios de una amiga.

INDICE

1.- Introducción.	6
Bibliografía.	13
 2.- Equilibrios creíbles en juegos con utilidades cambiantes.	
2.1 Introducción	15
2.2 Equilibrio Creíble en Juegos Finitos	17
2.3 Extensión de Equilibrio Creíble para Juegos Infinitos	22
2.4 Memoria Imperfecta	25
2.5 Ciclos y Clases de Equivalencia	32
2.6 Existencia de ε -equilibrios creíbles.	36
2.7 Variantes del equilibrio creíble.	39
2.8 Conclusiones y comentarios.	42
Bibliografía	43
 3.- Juegos Generalizados de Externalidades.	
3.1 Introducción	45
3.2 Definiciones y Propiedades	47
3.3 Soluciones de los Juegos Generalizados de Externalidades	55
3.3.1 Soluciones de Conjunto.	56
3.3.1 Soluciones Puntuales.	62
3.4 Conclusiones y Comentarios	65
Apéndice	66
Bibliografía	75

Capítulo 1

Introducción.

La Teoría de Juegos puede ser definida como la teoría que estudia modelos matemáticos que, de alguna forma, representen un aspecto de conflicto o de cooperación entre agentes racionales e inteligentes (Myerson R., 1991). De esta forma, diremos que un juego es un problema de decisión donde hay más de un agente decisor y las decisiones de un jugador tienen efectos sobre el otro. El diseño de estrategias competitivas, su ejecución, las negociaciones e incluso las relaciones interpersonales, están llenas de factores estratégicos que pueden analizarse en el esquema conceptual de la Teoría de Juegos.

Los juegos se han clasificado tradicionalmente en juegos cooperativos y juegos no cooperativos. La diferencia estriba en las posibilidades de comunicación y negociación que se les permite a los jugadores. Los juegos no cooperativos son aquellos en los que cada agente actúa siguiendo exclusivamente su propio interés sin poder firmar contratos vinculantes. Los juegos cooperativos se caracterizan por la existencia de un cierto poder superior capaz de hacer cumplir los acuerdos posibles.

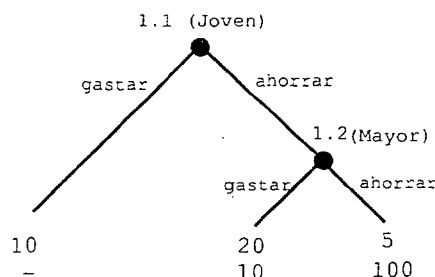
Ambos tipos de juegos se formalizan de distinta manera. Los juegos no cooperativos, se presentan en forma estratégica o en forma extensiva. La forma extensiva (Kuhn, 1953) de un juego describe con gran detalle la secuencia de movimientos de los jugadores, la información que tienen los jugadores en cada momento del juego y otros detalles, como situaciones de azar. En cambio, los juegos cooperativos se presentan en forma característica o coalicional, que consiste en la descripción de los pagos que reciben cada una de las coaliciones posibles.

En esta tesis se estudia una clase de juegos no cooperativos presentados en forma extensiva (capítulo 2) y otra de juegos cooperativos (capítulo 3). El primer problema que abordamos se refiere a cómo modelizar las situaciones en las que las preferencias cambian a lo largo del tiempo. Consideremos el siguiente ejemplo: Supongamos que una persona tiene que decidir a lo largo

de su vida (por ejemplo, cuando es joven y cuando es mayor) entre las acciones *gastar el dinero en vacaciones* y *ahorrar*. Cuando el individuo es joven prefiere *gastar*, mientras que de mayor preferirá *ahorrar*. Con estas preferencias el individuo joven podrá tomar decisiones de las que luego se arrepienta. La no identificación con las preferencias futuras (aún siendo conocidas) están en el núcleo de este tipo de situaciones.

Un breve sumario de la literatura sobre cambios de preferencias incluye los trabajos de Strotz (1956), Pollak (1968), Phelps y Pollak (1968), Pollak (1970), Von Weissaecker (1971), Backorby, Nissen, Primont y Russell (1973), Peleg y Yaari (1973), Hammond (1976), y Pollak (1976). Estos trabajos, o bien se refieren a problemas de decisión individual, o bien proponen conceptos de solución que no tienen completamente en cuenta el carácter temporal de este tipo de juegos, por ejemplo, requiriendo que el joven acepte y se identifique con sus preferencias futuras.

Recientemente, Ferreira, Gilboa y Maschler (1995) intentan dar una respuesta adecuada teniendo en cuenta el carácter temporal del juego y los posibles acuerdos coalicionales, en términos de la Teoría de Juegos clásica. El trabajo consiste en encontrar la extensión adecuada del equilibrio de Nash para juegos donde las utilidades de los individuos cambian a lo largo del juego. En el modelo propuesto por Ferreira *et al.* los individuos (jugadores) se desdoblan en diferentes agentes. En cada momento en que debe tomar una decisión (conjunto de información), el jugador se modeliza como un agente. Los agentes de un mismo jugador podrán tener funciones de utilidad (preferencias) diferentes. A partir de aquí, es posible tratar a los distintos agentes como distintos jugadores. Esto hace que varios agentes de un mismo jugador puedan cooperar fácilmente, ya que todos son el mismo individuo. Como el equilibrio de Nash es robusto con respecto a una desviación de un sólo agente, pero no a la de varios agentes, se hace necesario buscar una noción de equilibrio que sea inmune también a desviaciones coalicionales restringidas a agentes de un jugador y que respete la estructura temporal del juego. Ésta es la peculiaridad de los equilibrios creíbles. En el ejemplo anterior, el grado de identificación entre el individuo joven y el mayor dependerá de cómo se cuantifiquen estas preferencias. La Figura 1 proporciona un caso en el que la prioridad de los agentes primeros en el tiempo lleva a la toma de decisiones de las que el agente futuro se lamentará (en este caso, *gastar*). En este ejemplo, a pesar de la utilidad que se obtiene de elegir (*ahorrar, ahorrar*), la solución del juego es (*gastar, ahorrar*), dado que el jugador 1.1 (el joven) no se identifica con el 1.2 (él mismo, pero mayor).



[FIGURA 1]

El objetivo del capítulo 2 de esta tesis es extender estos estudios a casos más generales: juegos infinitos y juegos con memoria imperfecta. En la sección 2.1 ofrecemos un repaso del modelo presentado inicialmente por Ferreira *et al.*, las características del equilibrio creíble y los supuestos utilizados en el modelo. En la sección 2.2 se extenderá el concepto de equilibrio creíble a juegos infinitos. A continuación, y como tema más importante, se relaja el supuesto de memoria perfecta. Este concepto requiere que el jugador a quien le corresponde decidir conoce la historia completa de todas las decisiones tomadas por él mismo hasta ese momento. La conveniencia de esta segunda generalización ya se apuntaba en el trabajo de Ferreira *et al.*, donde se comentan algunas aplicaciones de los juegos de utilidades cambiantes para las que este supuesto es irreal. Por ejemplo, cuando los jugadores no son personas sino organizaciones, partidos políticos, y cuando los distintos agentes de esa organización no conocen completamente las decisiones tomadas por otros agentes.

La definición de equilibrio creíble de Ferreira *et al.* no es apropiada para estos casos. Al ser una definición recursiva no puede emplearse para el caso de juegos infinitos. En el caso de memoria imperfecta, aún en juegos finitos, la definición tampoco es aplicable. La razón es que cuando el supuesto de memoria perfecta desaparece, tenemos situaciones de ciclicidad en el juego que afectan nuevamente a la definición. Para llevar a cabo estas extensiones nos ubicamos en el campo de la Teoría de las Situaciones Sociales iniciada por Greenberg (1990). Esta teoría nos permite relacionar la noción de equilibrio de un juego con el concepto de conjuntos estables de un sistema abstracto. Los sistemas abstractos están constituidos por un conjunto D y una relación

binaria de dominación $\succ$ entre los elementos de D . La idea es obtener un subconjunto K de D que posea dos propiedades, la estabilidad interna y la estabilidad externa. La estabilidad interna se refiere a que los elementos de este conjunto no se dominan entre sí, mientras que la estabilidad externa se refiere a que cualquier elemento que no esté en K sea dominado por algún elemento de K . Este tipo de conjuntos se denominan conjuntos estables de von Neumann y Morgenstern. Si existe este conjunto estable, K , el conjunto D queda particionado en dos conjuntos, K y $D \setminus K$.

Para juegos con utilidades cambiantes hemos construido un conjunto D y una relación $\succ$ de la siguiente manera: Los elementos de D están formados por agentes, coaliciones de agentes y estrategias. La relación $\succ$ nos indica qué elementos dominan a otros en el sentido de constituir desviaciones coalicionales siguiendo la idea de la definición inicial de desviaciones creíbles dada por Ferreira *et al.*. La definición no recursiva nos identificará las estrategias que formen parte de algún elemento del conjunto estable de este sistema $(D, \succ)$ con la noción de equilibrio creíble. La nueva definición en términos de conjuntos estables coincide con la original en el caso finito.

Cuando obviamos el supuesto de memoria perfecta, la ciclicidad que presenta la relación de dominación nos impide hablar de una última desviación y ello conlleva alterar de forma adecuada la relación de dominación. La existencia de conjuntos estables está establecida bajo ciertas condiciones de finitud y de relaciones de dominación acíclicas. Casos como una relación de dominación cíclica, espacios infinitos de estrategias y de jugadores provocan la posibilidad de no encontrar una forma de particionar D en dos conjuntos del tipo K y $D \setminus K$, donde K sea estable. Kanh y Morkherjee (1992) proponen otro tipo de particiones para estos casos, llamadas semiparticiones, constituidas por tres conjuntos: el bueno, el malo y el feo. Los elementos del conjunto bueno o bien no están dominados o lo están por algún elemento del conjunto malo. Los elementos del conjunto malo son aquellos dominados por uno del conjunto bueno. Finalmente, los elementos del conjunto feo son los que no pertenecen ni al conjunto malo ni al conjunto bueno. Con esta semipartición la definición de equilibrio queda relacionada con los elementos del conjunto bueno y feo. En la sección 2.5 del capítulo 2 analizamos el conjunto feo para nuestro caso, y encontramos que es posible separar los elementos de este conjunto mediante la relación de dominación aplicada a los ciclos que forman. Es importante discriminar entre los elementos del conjunto feo porque hay ejemplos en los que este conjunto acoge a todos los elementos de D , dejando vacíos a los conjuntos bueno y malo. Los elementos del conjunto feo que forman ciclos se identifican en una clase de equivalencia. Las clases de equivalencia darán lugar al conjunto cociente del conjunto feo en el que realizamos otra nueva semipartición. Obtenemos tres nuevos subconjuntos el feo-bueno, el feo-malo y

el feo-feo. En esta nueva definición identificamos los equilibrios creíbles con los elementos del conjunto bueno, del conjunto feo-bueno y del feo-feo. La relación de dominación aplicada al conjunto cociente es acíclica, por lo que la única razón por la que podemos obtener un conjunto feo-feo es la no finitud de las estrategias. Esta nueva metodología empleada para definir equilibrios parece más satisfactoria que la empleada por otros autores basándose solamente en el conjunto bueno y en el feo. Para finalizar la sección ilustramos con un ejemplo el empleo de esta nueva versión de equilibrio creíble. En este mismo capítulo se muestran algunos teoremas de existencia. Por último, se estudia otra variante del equilibrio creíble, el equilibrio creíble óptimo.

El capítulo 3 trata de los Juegos Generalizados de Externalidades, que están englobados dentro de los juegos cooperativos. Estos juegos se definen como un modelo donde interesan las coaliciones que se forman y el pago que recibe cada una de ellas. Las coaliciones de jugadores son los posibles subconjuntos de $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, denotadas por $S \subset N$ (donde N es el conjunto de jugadores). El pago de cada coalición viene dado por la función $v(S)$, llamada función característica del juego. La función característica es un elemento primitivo de estos juegos; sin embargo, en aplicaciones reales se ha de construir a partir de otros elementos. Por ejemplo, los conceptos de α -núcleo y β -núcleo se refieren a soluciones de juegos cooperativos que se distinguen por construirse de distinta manera a partir de un juego no cooperativo (Moulin, 1986). Entre otros trabajos más recientes podemos citar los elaborados por Izquierdo y Rafels (1996), Iñarra y Usategui (1993), Grafe *et al.* (1998), etc. En estos trabajos se estudian los Juegos Financieros, los Juegos Cobb-Douglas y Los Juegos de Externalidades respectivamente, que se definen a partir de una función característica con una interpretación económica específica.

En esta línea, en la segunda parte de la tesis, se estudia un tipo de juegos en forma característica: los Juegos Generalizados de Externalidades. Estos juegos son una extensión de los Juegos de Externalidades estudiados por Grafe, Iñarra y Zarzuelo (1998). La función característica adquiere una forma particular dada por la siguiente expresión: $v(S) = (\sum_{i \in S} \beta_i)^\alpha r(s)$, donde β_i denota la aportación de cada jugador, $\alpha \geq 1$ y r es una función no decreciente en el cardinal de las coaliciones ($s = \text{card}(S)$). La interpretación que se da a este juego es la siguiente: los jugadores ceden sus recursos a la coalición y el resultado de la cooperación depende de esos recursos a través del parámetro α y de la presencia de jugadores a través de r . Nótese cómo la presencia de jugadores se valora positivamente, es decir, el beneficio total obtenido no sólo dependerá del total de recursos aportados sino también del número de participantes en la coalición. A esto se refiere la palabra externalidades empleada para denominar este tipo de juegos.

Las aplicaciones económicas encontradas de los Juegos Generalizados de

Externalidades son varias:

- *La tecnología Cobb-Douglas*: Cuando n empresas, con idénticos capitales, deciden producir conjuntamente, la producción total viene dada por la expresión $F(\lambda, \eta)$ siendo λ el capital total y η la cantidad total de recursos. Si $F(\cdot)$ es la función Cobb-Douglas entonces obtenemos una producción dada por la expresión $F(\lambda, \eta) = (\sum_{i \in N} \eta_i)^\alpha (n\lambda)^\beta$ donde η_i son los recursos de la empresa i . Denotando $r(s) = s^\beta \lambda^\beta$, $\beta_i = \eta_i$ e imponiendo que $\alpha \geq 1$, obtenemos la función característica de un Juego Generalizado de Externalidades¹.

- *Reparto de costes de Bienes Públicos*: Moulin (1992) estudia un modelo de reparto del coste de producir un bien público, a . Un grupo de agentes, T , con idénticos derechos, pero diferentes preferencias, comparten el coste de producir el bien público a partir de un bien privado. La oferta generada por la coalición T es la correspondiente a resolver el problema de maximizar la expresión $(\sum_T \alpha_i a) - \frac{a^2}{2}$ respecto de la cantidad a , siendo α_i el ratio de sustitución entre el bien privado y el bien público y $c(a) = \frac{a^2}{2}$, el coste de producir la cantidad a de bien público. La resolución del problema anterior nos llevará a la expresión $\frac{(\sum_T \alpha_i)^2}{2}$. Nuevamente, esta expresión proporciona una función característica con la que podemos definir un Juego Generalizado de Externalidades, donde $r(s) = \frac{1}{2}$, $\beta_i = \alpha_i$ y $\alpha = 2$.

- *Otros ejemplos*: Uhlaner (1989) estudia un modelo que incorpora los llamados Bienes Relacionados, que dependen de la interacción entre las personas. Con este tipo de bienes, por ejemplo, la congestión puede incrementar la utilidad. Esta idea está relacionada con los Juegos Generalizados de Externalidades, donde la presencia de jugadores también provoca un incremento en el pago que reciben las posibles coaliciones. Otra de las situaciones económicas que podemos relacionar con los Juegos Generalizados de Externalidades es la que se desarrolla con las subvenciones. Podemos observar que algunas asociaciones culturales, deportivas, etc. reciben una subvención dependiendo del número de socios.

En la sección 3.2 se estudian algunas de las propiedades de estos juegos, en particular, su estructura algebraica y su relación con los juegos convexos y semiconvexos. Estas propiedades son de utilidad para estudiar las posibles soluciones.

Una solución de un juego cooperativo consiste en distribuir la ganancia total del juego entre sus jugadores. Existen dos clases de soluciones: soluciones de conjunto y soluciones puntuales. Las soluciones de conjunto están formadas por un conjunto de asignaciones o repartos que verifican ciertas condiciones, mientras que una solución puntual selecciona una única asignación. Entre las

¹De esta forma los Juegos de Cobb-Douglas estudiados en Iñarra E. y Usategui JM (1995) quedan incluidos en los Juegos Generalizados de Externalidades.

soluciones de conjunto más importantes estudiamos el Núcleo (Shapley, 1967) y los conjuntos de negociación de Aumann-Maschler (1964) y Mas-Colell (1989). El resultado obtenido para este tipo de juegos es la coincidencia de estas tres soluciones. Finalmente en la sección 3.4 se propone un concepto de solución puntual especialmente apropiado para estos juegos, la solución proporcional que, además, se caracteriza axiomáticamente.

En un apéndice se listan otras propiedades de interés para los Juegos Generalizados de Externalidades.

Bibliografía

- [1] Aumann R.J. and Maschler M. (1964). The bargaining sets for cooperative games. Princeton University Press, New Jersey, 443-476.
- [2] Blackorby C., Niessen D., Primont D., and Russell R. (1973). Consistent Intertemporal Decisions Making, Rev. Econ. Stud. 40.
- [3] Ferreira, Gilboa I. and Maschler (1995) Credible Equilibria in Games with Utilities Changing during the play, Games and Economic Behavior 10, p. 284.
- [4] Grafe F., Iñarra E. Zarzuelo J.M., (1998). Population Monotonic allocation schemes on Externality Games. Mathematical Methods of Operation Research, en prensa.
- [5] Greenberg (1989). Deriving Strong and Coalitional-Proof Nash Equilibria from an Abstract System, Journal of Economic Theory, 49, p.195.
- [6] Greenberg J. (1990). The Theory of Social Situations. An Alternative game-theoretic approach. Cambridge Univ. Press.
- [7] Hammond P. (1976). Changing Tastes and Coherent Dynamic Choice. Rev. Econ. Stud. 43.
- [8] Iñarra E., Usategui JM.,(1993). The Shapley value and average convex games. International Journal of Game Theory, 22:13-29.
- [9] Izquierdo JM, Rafels C.,(1996). A Generalization of the Bankruptcy game: Financial cooperative games. Documento de Trabajo. Universidad de Barcelona.
- [10] Kahn C. and Mookherjee (1992). The Good, the Bad and the Ugly: Coalition-Proof Equilibrium in Infinite Games, Games and Economic Behavior 4, p. 101.
- [11] Kuhn H.W.(1953). Extensive Games and the problem of information, Annals of Mathematics Studies 28, p. 193.

-
- [12] Mas-Colell A. (1989). An equivalence theorem for bargaining set. *Journal of Mathematical Economics*, 18:129-139.
 - [13] Meyerson R. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press, Cambridge.
 - [14] Moulin H. (1992). All Sorry to Disagree: A General Principle for the Provision of Nonrival Goods. *Scand. J. of Economics*, 94(1):37-51.
 - [15] Phelps E., and Pollack R. (1968) On Second-Best National Saving and Game-Equilibrium Growth, *Rev. Econ. Stud.*, 35.
 - [16] Pollak R. (1968). Consistent Planning. *Rev. Econ. Stud.* 35.
 - [17] Pollak R. (1970). Habit Formation and Dynamic Demand Functions. *Journal Polit. Econ.* 78.
 - [18] Pollak R. (1976). Habit Formation and Long-Runs Utility Functions. *Journal Econ. Theory*, 13.
 - [19] Strotz R.H. (1956). Myopia and Inconsistency in Dinamic Utility Maximization, *Rev. Econ. Stud.* 23.
 - [20] Uhlaner C.J (1989). Relational goods and participation: Incorporating sociability into a theory of rational action. *Public Choice* 62:253-285.
 - [21] Von Neumann and Morgenstern (1947). *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton Univ.Press.
 - [22] Von Weizsaecker C.(1971). Notes on Endogenous Changes of Tastes, *Journal Econ. Theory* 4.

Capítulo 2

Equilibrios creíbles en juegos con utilidades cambiantes.

2.1 Introducción.

Las situaciones en las que las preferencias de los individuos están cambiando a lo largo del tiempo han sido estudiadas en el área de economía por algunos autores. Entre los más destacados podemos citar trabajos como los realizados por Strotz (1956), Pollak (1968), Phelps y Pollak (1968), Pollak (1970), Von Weissaecker (1971), Backorby, Nissen, Primont y Russell (1973), Peleg y Yaari (1973), Hammond (1976), y Pollak (1976).

Una consecuencia que conlleva el hecho de considerar la posibilidad de cambios en las preferencias es que las decisiones podrían dejar de ser consistentes en el sentido clásico, es decir, los decisores podrían arrepentirse de ciertas elecciones realizadas en el pasado, incluso en situaciones de información perfecta.

Ferreira, Gilboa y Maschler (1995) proponen el estudio de situaciones de cambio de preferencias desde una perspectiva de la Teoría de Juegos. Estos autores proponen modelizar estas situaciones a través de un juego en forma extensiva donde los diferentes conjuntos de información de un jugador definen un conjunto de agentes de ese jugador. En este modelo los agentes de un jugador pueden tener distintas utilidades. Definen un equilibrio para este tipo de juegos que tiene dos importantes características: El equilibrio es inmune a desviaciones coalicionales formadas por agentes de un mismo jugador y también, satisface cierta consistencia temporal. Esta consistencia requiere que los jugadores que aparecen antes en el juego sean considerados con prioridad, y además las posibles desviaciones no pueden incluir agentes que hayan aparecido antes en el juego. Los acuerdos que satisfacen estos requisitos se denominan equilibrios creíbles.

El modelo requiere de un conjunto finito de jugadores y del supuesto de me-

moria perfecta. En algunas de las aplicaciones sugeridas por Ferreira *et al.* el supuesto de memoria perfecta no resulta demasiado convincente. Los jugadores pueden no ser individuos, sino un estado, un partido político o cualquier tipo de organización. En tales casos no solamente es natural, asumir que diferentes agentes tienen distintas prioridades, sino que además va a existir una situación de memoria imperfecta; es decir, existirán agentes que desconocerán parte de las elecciones realizadas por otros agentes en el pasado. En este capítulo pretendemos extender la noción de equilibrio creíble al caso de que la memoria perfecta no se verifique y, además, al caso en el que el número de jugadores y de estrategias pueda ser infinito.

Hay varias dificultades en estas extensiones. Primero, la definición no puede ser recursiva, como la realizada por Ferreira *et al.* y, segundo, la pérdida de memoria causa situaciones en las que el agente A no sabe si juega después de B, mientras que tampoco B sabe si juega delante o después de A. Esto genera circularidades en la definición y demanda una clara discursión acerca de la noción de consistencia temporal.

Estos problemas se resuelven utilizando ideas de la literatura relacionada con la llamada Teoría de las Situaciones Sociales, iniciada por Greenberg (1990). Una de las peculiaridades de esta teoría es que, usando una generalización de los conjuntos estables definidos por von-Neumann y Morgenstern (1947), las definiciones recursivas pueden extenderse a conjuntos infinitos. La idea es dividir el conjunto de los acuerdos en una partición estable de dos conjuntos: el bueno y el malo. Los elementos del conjunto bueno no están dominados y los elementos del malo siempre están dominados por algún elemento del bueno. En nuestro caso las dominaciones se referirán a las desviaciones coalicionales de un mismo jugador.

La división en los dos conjuntos (bueno y malo) no siempre es posible cuando tenemos un juego infinito o una relación de dominación cíclica. En nuestro modelo se presentan ambas situaciones. Una estrategia sería recurrir a otra división más débil del conjunto de acuerdos. Una semipartición divide los acuerdos en tres conjuntos: el bueno, el malo y el feo. Estas semiparticiones se definen en Kahn y Mookherjee (1992); los elementos buenos, o no están dominados, o lo están por algún elemento del conjunto malo; los elementos del malo son dominados por los elementos del bueno y el conjunto feo es el complementario de la unión de los conjuntos malo y bueno. Este tipo de partición siempre es posible. Los acuerdos de equilibrio o se pueden definir a partir de los elementos del conjunto bueno (versión fuerte) o de los conjuntos bueno y feo (versión débil).

En nuestro caso, encontramos que los conjuntos feos pueden tener elementos *más feos que otros*, en el sentido de que algunos elementos del conjunto feo se ajustan más que otros a la idea de equilibrio creíble que queremos proponer.



Además, este conjunto puede ser bastante amplio (tenemos un caso en el que el conjunto bueno y malo son el vacío). Por ello nos parece interesante explorar en profundidad los elementos del conjunto feo y discriminar algunos de ellos para el concepto de equilibrio. Desarrollamos entonces una nueva relación de equivalencia entre los elementos del conjunto feo. La idea es identificar los elementos que forman ciclos en una misma clase de equivalencia. Estas clases de equivalencia darán lugar al conjunto cociente del conjunto feo en el que realizamos otra nueva partición. Nuevamente pueden aparecer problemas para realizar una partición y tenemos que realizar una semipartición, y de este modo, aparecen los conjuntos feo-bueno, feo-malo y feo-feo. Con esos nuevos conceptos definimos los equilibrios creíbles como las estrategias que forman parte de los acuerdos pertenecientes a los conjuntos buenos, a los buenos-feos y a los feos-feos. De esta manera reducimos las estrategias que anteriormente habíamos tomado del conjunto feo. Finalmente se muestra la existencia de algunas versiones de equilibrios creíbles.

Es importante hacer notar que los equilibrios creíbles son simplemente una extensión del concepto básico de equilibrio de Nash. Refinamientos como el equilibrio secuencial y el equilibrio perfecto también pueden ser ajustados al campo del cambio de utilidades.

El capítulo se organiza de la siguiente forma. La sección 2 es una breve presentación del modelo original en el que se define la noción de equilibrio creíble. La sección 3 extiende la definición de equilibrio creíble a juegos infinitos, pero asumiendo todavía memoria perfecta. La sección 4 abandona el supuesto de memoria perfecta y resuelve las dificultades que conlleva la memoria imperfecta. Se proponen varias versiones preliminares de equilibrio creíble. La sección 5 estudia en profundidad el conjunto feo y propone una partición del mismo. Se propone una versión final de equilibrio creíble. En la sección 6 se discuten algunos teoremas de existencia. La sección 7 considera algunas variantes de la noción de equilibrio creíble. Concretamente se estudia el equilibrio óptimo creíble para juegos con utilidades cambiantes, con un número infinito o finito de jugadores y con la posibilidad de memoria imperfecta. Por último, en la sección 8 se presentan algunos comentarios y conclusiones.

2.2 Equilibrio creíble en Juegos Finitos.

El concepto de equilibrio creíble fue introducido por Ferreira, Gilboa y Maschler (1995) para tratar el cambio de preferencias de un mismo individuo desde la teoría de los juegos. En esta primera sección vamos a presentar el modelo de estos autores y el concepto que definen equilibrio creíble, que generaliza el concepto de equilibrio de Nash. En toda la sección vamos a trabajar con

un número finito de jugadores y con memoria perfecta. En las siguientes secciones abandonaremos estos supuestos y analizaremos las dificultades que ello conlleva.

El modelo teórico para el estudio de los juegos con preferencias cambiantes será el de los juegos en forma extensiva con información completa y perfecta. En estos juegos las decisiones se toman de manera sucesiva y, todas las decisiones anteriores son conocidas antes de tomar las decisiones siguientes.

La forma extensiva, representada por un juego en forma de árbol, es el modelo utilizado para modelizar las situaciones que hemos descrito anteriormente. El conjunto de jugadores viene representado por N , donde $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ denota el conjunto de jugadores (personas, organismos, etc. encargadas de tomar decisiones). Un juego en forma extensiva comienza con un movimiento realizado por algún jugador o por la naturaleza¹. Una vez que el primer jugador ha movido, le llega el turno a algún otro jugador, y así sucesivamente hasta que el juego finalice. Cuando éste termina, los jugadores obtienen sus resultados finales o pagos del juego. Cuando a un jugador le llega el turno de mover, se halla situado en un punto de decisión específico, denominado un nodo. Si el jugador conoce con precisión en qué nodo se halla, entonces éste constituye un conjunto de información. Con su decisión el jugador fijará qué nodo seguirá en la jugada concreta que esté teniendo lugar. Pero, al decidir, el jugador puede no saber con precisión en qué punto del juego está. Esto se representa agrupando todos aquellos nodos de decisión, para cada jugador que es incapaz de distinguir, en un mismo conjunto de información². En nuestro caso de estudio, tenemos además la peculiaridad de que cada jugador i está dividido en k_i agentes, uno por cada conjunto de información, que es lo que nos permitirá especificar utilidades distintas dependiendo de qué agente se trate.

Finalmente, un juego en forma extensiva se representa por

$$\Gamma = (T, P, U, C, p, h)$$

donde T representa el árbol, $P = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ son las particiones de los jugadores en los nodos no finales del árbol, $U = (U_0, \dots, U_N)$ donde cada componente, $U_i = \{u_{i,j}\}_{j=1}^{k_i}$, es la partición de P_i en conjuntos de información; $C = \{C(u_{i,j})\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, k_i}$ es una correspondencia, donde $C(u_{i,j})$ es el conjunto

¹El azar puede ser introducido haciendo que en ciertos puntos de decisión mueva el jugador 0. Este jugador se denomina naturaleza o azar, y elige su movimiento a partir de una distribución de probabilidad que es conocida por el resto de los jugadores.

²En general, un conjunto de información puede contener cualquier número de nodos; sin embargo, cada nodo de un conjunto de información debe tener el mismo número de ramificaciones saliendo de él. Ello es así porque el número de ramificaciones es el número de elecciones que un jugador tiene en ese punto, de no tener exactamente el mismo número de elecciones, tendría un medio de diferenciar los nodos.

de elecciones permitidas al jugador i en el conjunto de información $u_{i,j}$; $p = p(u_{0,j})_{j=1,\dots,k_0}$ es un vector, donde $p(u_{0,j})$ es la distribución de probabilidad de los movimientos de la naturaleza en $u_{0,j}$.

Para completar la descripción del modelo, atribuimos a cada agente i,j una función de utilidad esperada, $h_{i,j}$, definida sobre los nodos finales del árbol T . Cada componente del vector $h = (h_1, \dots, h_n)$ asociado a un punto final z , está compuesto, a su vez por el siguiente vector, $h_i(z) = (h_{i,1}(z), h_{i,2}(z), \dots, h_{i,k_i}(z))$, donde $h_{i,j}(z)$ es la utilidad del agente i,j en el nodo final z .

Nótese que en este modelo de juego en forma extensiva cada jugador i se compone de k_i agentes, cada uno situados en los diferentes conjuntos de información $u_{i,j}$ que posee el jugador i .

En esta sección asumimos que satisface además el supuesto de memoria perfecta (Selten, 1975).

Definición 2.1 *Un juego definido de la forma (T, P, U, C, p) es de memoria perfecta si, para cada i , ($i = 1, 2, \dots, n$) y cada dos conjuntos de información, $u_{i,j}$ y $u_{i,k}$, de un mismo jugador i , algún nodo y , $y \in u_{i,k}$ es alcanzado tras una elección c desde $u_{i,j}$, entonces cada nodo x de $u_{i,k}$ es alcanzado con la misma elección c .*

Una estrategia pura para el jugador i supone seleccionar una acción (elección) en cada conjunto de información. Una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras. Finalmente, una estrategia de comportamiento supone elegir una distribución de probabilidad sobre el conjunto de acciones en cada conjunto de información.

Cuando se supone memoria perfecta podemos restringirnos a estrategias de comportamiento (Kuhn, 1953). Denotamos por $S_{i,j}$ el conjunto de todas las estrategias de comportamiento del jugador i,j . Por lo tanto, el conjunto de estrategias de comportamiento para el jugador i es $S_i = \times_{j=1,\dots,k_i} S_{i,j}$. Una n -upla de estrategias de comportamiento es denotada por $s = (s_1, \dots, s_n)$ y el conjunto de todas las n -uplas es $S = \times_{i=1,\dots,n} S_i$.

En lo que sigue denotaremos por Q a un conjunto de agentes pertenecientes a un mismo jugador. Denotaremos por $-Q$ el conjunto $M \setminus Q$ donde M es el conjunto de todos los agentes (no sólo del mismo jugador). Para una estrategia s , denotamos por s_Q el vector de estrategias $(s_{i,j})_{i,j \in Q}$. Para simplificar notación escribiremos $(s_{-i,j}, s_{i,j})$. Para s y s' de S , escribimos $s' \succ_{i,j} s$ si y sólo si $h_{i,j}(s') > h_{i,j}(s)$.

Definición 2.2 *Diremos que el agente i,j juega después de i,j_0 si $i,j = i,j_0$ o si para cada arco o trayectoria que parte desde $u_{i,j}$ hacia la raíz o parte inicial del juego pasa a través de u_{i,j_0} .*

Definición 2.3 Sean Γ un juego de memoria perfecta con utilidades cambiantes durante el juego, s una n -upla de estrategias de comportamiento y Q un conjunto de agentes del jugador i , que contiene al agente $i.j_0$ y algún agente de i que juega después de $i.j_0$. Una estrategia s'_Q es una desviación creíble de s , propuesta por el agente $i.j_0$ y usando a la coalición Q , si

- (i) $s' \succ_{i.j_0} s$, donde $s' = (s'_Q, s_{-Q})$.
- (ii) $s' \succ_{i.j} (s'_{-i.j}, s_{i.j})$ para todo $i.j \in Q, i.j \neq i.j_0$.
- (iii) Ningún agente de i , que pertenezca o no a Q , y que juegue después de $i.j_0$, puede proponer una desviación creíble desde s' .

Las desviaciones desde s son un conjunto de instrucciones, s'_Q , dadas por $i.j_0$ a los miembros de Q (otros agentes de i). En cambio, los agentes de los demás jugadores siguen jugando con el acuerdo s .

Veamos qué significa intuitivamente cada una de las condiciones requeridas en la definición 2.3:

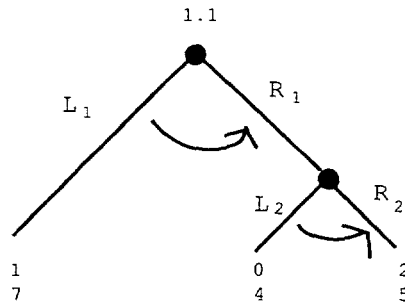
La condición (i) deja claro que el agente $i.j_0$ prefiere que las instrucciones sean obedecidas. La condición (ii) implica que cada miembro de Q es alcanzado con probabilidad positiva cuando se juega s' . Cuando a $i.j$ le toca jugar tiene dos opciones: la original $s_{i.j}$ o la desviación propuesta $s'_{i.j}$. Siempre preferirá jugar de acuerdo con s' cuando los demás implicados en la desviación, es decir todos los miembros de Q , sigan también con s' . Como la idea es seguir con una extensión del equilibrio de Nash, cuando exista indiferencia entre seguir con $s'_{i.j}$ o con $s_{i.j}$ el agente $i.j$ no se desviará y seguirá jugando según $s_{i.j}$. La condición (iii) prohíbe la posibilidad de que algún agente, esté o no en Q , proponga una desviación desde s' . Con esta condición la definición de equilibrio creíble adquiere un aspecto recursivo:

Definición 2.4 Sea un juego Γ con memoria perfecta, un número finito de jugadores y utilidades cambiantes en el juego. Un perfil de estrategias de comportamiento s es llamado equilibrio creíble (CrE) si ningún agente puede proponer una desviación creíble desde s .

Nótese que las condiciones (i)-(iii) imponen requerimientos solamente a los jugadores que juegan después de $i.j_0$.

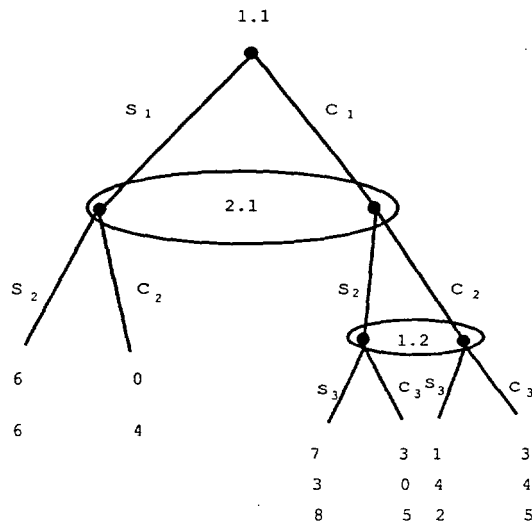
A continuación consideramos varios ejemplos para ilustrar de una forma más clara la idea de desviaciones y equilibrios creíbles.

Ejemplo 1: La estrategia (L_1, L_2) de la Figura 1 no es un equilibrio creíble. La desviación (R_1, R_2) es una desviación creíble desde (L_1, L_2) .



[FIGURA 1]

Ejemplo 2: En la Figura 2 (s_1, s_2, s_3) y (c_1, s_2, s_3) no son equilibrios creíbles. En cambio, (c_1, c_2, c_3) sí es un equilibrio creíble.



[FIGURA 2]

2.3 Extensión de Equilibrio creíble para juegos infinitos.

En esta sección vamos a introducir una metodología que nos permitirá trabajar con el concepto de equilibrio creíble de una forma no recursiva. Extendemos la definición de equilibrio creíble a juegos con un número infinito de jugadores, es decir, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Para esta propuesta seguimos el planteamiento de Asheim (1991) donde la noción, introducida por Von-Neumann y Morgenstern, de conjuntos estables de un sistema abstracto es usado para extender definiciones recursivas a casos infinitos.

Un sistema abstracto (AS) de von-Neumann y Morgenstern es un par $(D, \succ)$ donde D es un conjunto abstracto y $\succ$ es una relación de dominación. La notación $f \succ d$ será utilizada para denotar que f domina a d . Sea $(D, \succ)$ un sistema abstracto, y sea $f \in D$. El dominio de f , denotado por $\Delta(f)$, es el conjunto de todos los elementos de D que son dominados por f , de acuerdo con la relación de dominación $\succ$.

$$\Delta(f) = \{d \in D : f \succ d\}$$

$$\Delta(F) = \bigcup_{f \in F} \{\Delta(f) : F \subset D\}$$

Es decir, un elemento d perteneciente al conjunto D forma parte de $\Delta(F)$ si está dominado por algún elemento de F . Un conjunto $F \subset D$ es un conjunto von Neumann and Morgenstern estable (ASS) para el sistema abstracto $(D, \succ)$ si $F = D \setminus \Delta(F)$.

Estos métodos han sido utilizados recientemente en Greenberg (1989 y 1990) para discutir y comparar nociones de equilibrios de juegos. La idea de conjuntos estables se aplica a cualquier conjunto abstracto de elementos en el cual hay definido una relación de dominación. El resultado es la partición del sistema de elementos en dos conjuntos, con las propiedades de estabilidad interna ($D \setminus \Delta(F) \subset F$) y estabilidad externa ($F \subset D \setminus \Delta(F)$). La primera propiedad hace referencia al hecho de que ningún elemento del conjunto bueno es dominado por otro elemento de este conjunto, la segunda se refiere a que cada elemento del conjunto malo es dominado por algún elemento del conjunto bueno.

Una de las dificultades que presenta esta metodología es que la existencia de conjuntos estables sólo está garantizada para el caso en el que trabajemos con sistemas abstractos finitos. Por ejemplo, Greenberg (1989) demuestra que el equilibrio de Nash a prueba de coaliciones (CPNE) propuesto por Bernheim *et al.* (1987) puede ser caracterizado mediante conjuntos estables de un sistema con una determinada relación de dominación. Más tarde se comprobó que esta caracterización es válida sólo cuando tratamos con juegos finitos. Kahn

y Morokherjee (1992) desarrollan algunos ejemplos con espacios infinitos de acciones para los jugadores donde demuestran que el conjunto estable no existe.

Sea Γ un juego con utilidades cambiantes en el tiempo. Teniendo en cuenta la definición de desviaciones creíbles, vamos a introducir un sistema abstracto $(D, \succ)$. Sea i un jugador de Γ . Para cada agente $i.j$, definimos $Q_{i.j}$ como el conjunto de todos los agentes de i que juegan después de $i.j$. Sea $Q_{i.j}$ un subconjunto de $Q_{i.j}$. Para cualquier $i.k$ tenemos definiciones análogas. Sea s y $\hat{s}$ elementos de $S = \times_{i \in N} S_i$. Con todas estas notaciones, definimos el siguiente conjunto,

$$D = \bigcup_{i \in N} \{(i.j, Q_{i.j}, s) : i.j \in Q_{i.j} \subset Q_{i.j} \quad s \in \times S_i, j \in \{1, \dots, k_i\}\}$$

La relación de dominación que establecemos para este conjunto es la siguiente:

$$(i.j, Q_{i.j}, s) \succ (i.k, Q_{i.k}, \hat{s}) \quad \text{si y solo si}$$

- (i) $i.j$ juega detrás de $i.k$
- (ii) $h_{i.j}(s) > h_{i.j}(\hat{s})$.
- (iii) $h_{i.h}(s) > h_{i.h}(\hat{s}_{i.h}, s_{-i.h}), \forall i.h \in Q_{i.j}$.
- (iv) $s_{-Q_{i.j}} = \hat{s}_{-Q_{i.j}}$.

Siguiendo en la línea de equilibrio de Nash, los agentes del jugador i que no pertenezcan a $Q_{i.j}$ juegan de acuerdo a lo dictado por $\hat{s}$. Esto es lo que refleja la condición (iv). La condición (i) hace referencia a la consistencia temporal requerida entre los agentes que proponen la desviación. La condición (ii) asegura que el jugador $i.j$ prefiere que las ordenes de desviación sean obedecidas, siempre que los demás jugadores no implicados en la desviación, $-Q_{i.j}$, continúen con la estrategia $\hat{s}$. Esto implica que el jugador $i.j$ sea alcanzado con probabilidad positiva cuando se sigue lo dictado por $\hat{s}$. La condición (iii) implica que cada miembro de $Q_{i.j}$ es alcanzado con probabilidad positiva cuando se juega s . En la definición original de equilibrio creíble se añadía la condición de que no fuesen posibles más desviaciones (véase la condición (iii) de la definición 2.3). Para juegos infinitos no es necesario hacer referencia a este hecho en las condiciones de dominación, ya que esta idea se recogerá directamente con la definición de conjunto estable.

Con la siguiente proposición establecemos la relación existente entre la noción de conjunto estable del sistema abstracto anteriormente definido $(D, \succ)$ y la definición de equilibrio creíble establecida por Ferreira *et al.* en juegos finitos con memoria perfecta y utilidades cambiantes en el juego. Seguiremos

con una extensión de la noción de equilibrio creíble para juegos infinitos y de memoria perfecta, utilizando los conjuntos estables de $(D, \succ)$.

Antes de pasar a la caracterización de la noción de equilibrio creíble procedemos a desarrollar alguna notación. Denotamos por $\Gamma_{i,j}^s$ el juego que obtenemos a partir del juego Γ fijando la estrategia s para todos los agentes, exceptuando a i,j y a los agentes de i que juegan después de i,j . Nótese que $\Gamma_{i,j}^s$ es un juego de un jugador posiblemente con muchos agentes, es decir, al comienzo del juego los jugadores piensan que es el juego al que se enfrenta el agente i,j si los demás agentes y sus seguidores siguen con lo que les dicta la estrategia s . Denotamos por $i.j_0$ a un agente de i que no juega después de ningún otro agente de i .

Proposición 1 *Sea K un conjunto estable (ASS) de $(D, \succ)$. Para juegos finitos (número de jugadores y de estrategias finitos) de memoria perfecta con utilidades cambiantes a lo largo del juego, tenemos que para todo i,j , $Q_{i,j} \subset Q_{i,j}$ y $s \in \times_i S_i$, $(i,j, Q_{i,j}, s) \in K$ si y solo si s es un equilibrio creíble en el juego Γ . En particular, $A = \{s : \forall i \in N, (i.j_0, Q_{i.j_0}, s) \in K\}$ es el conjunto de equilibrios creíbles del juego Γ .*

Demostración:

Primero si para todo $i \in N$, para todo i,j y $Q_{i,j} \subset Q_{i,j}$ entonces el acuerdo $(i,j, Q_{i,j}, s) \in K$, no está dominado por ningún otro elemento de D , y ningún agente de i que juegue después de i,j , digamos por ejemplo i,k , puede proponer una desviación creíble de s , digamos por ejemplo $\hat{s}$, que verifique $\hat{s} \succ_{ik} s$ y $\hat{s} \succ_{ih} (s_{ih}, \hat{s}_{-ih})$ para todo $i,h \in Q_{i,j}$. Esto es cierto para todo i, i,j y en particular para $i,j \neq i,k$, lo cual, por la definición 2.4, implica que s es un equilibrio creíble.

Para probar la otra parte de la proposición, procedemos a elegir un equilibrio creíble s de Γ . De este modo sabemos que dado s ningún agente de los que juegan después de i,j pueden proponer una desviación creíble. Si para algún i,j y $Q_{i,j}$, $(i,j, Q_{i,j}, s) \notin K$ entonces este elemento estaría dominado por algún otro elemento de K . Esto significa que algún agente que juegue después de i,j puede proponer una desviación. Es decir, $\exists i,k, Q_{ik}$ y $s' = (s'_{Q_{ik}}, s_{-Q_{ik}})$, tal que $(i,k, Q_{ik}, s') \succ (i,j, Q_{i,j}, s)$. Como, $(i,k, Q_{ik}, s') \in K$, s' es un equilibrio en $\Gamma_{i,k}^{s'}$ y, entonces, s' es una desviación de s propuesta por i,k . Si $i,k \neq i,j$, contradice la afirmación de que s es un equilibrio creíble. Si $i,k = i,j$, por el Teorema 5.1 en Ferreira *et al.* (1995) existirá otra desviación s^* propuesta por i,j tal que s^* será una desviación creíble de s . Esto nos llevaría a la afirmación de que s no es un equilibrio creíble y por lo tanto, llegaríamos a una contradicción con lo que habíamos supuesto inicialmente. ■

En la siguiente proposición establecemos la unicidad del conjunto estable.

Proposición 2 Sean F y T dos conjuntos estables de un sistema abstracto del tipo $(D, \succ)$ asociado a un juego finito, de memoria perfecta y con utilidades cambiantes a lo largo del juego, entonces $F = T$.

Demostración:

Sea $\{(i.j_k, Q_{i.j_k}, s_k)\}_k$ una secuencia infinita tal que,

$$(i.j_{k+1}, Q_{i.j_{k+1}}, s_{k+1}) \succ (i.j_k, Q_{i.j_k}, s_k), \forall k$$

Debido a que el conjunto de agentes y de estrategias es finito y a que la relación de dominación requiere que $i.j_{k+1}$ juegue después de $i.j_k$, tenemos que, la secuencia verifica que para algún ij_k , $Q_{i.j_k} = Q_{i.j_{k+1}}$ y $i.j_{k+1} = i.j_k$. Por lo tanto, la secuencia es transitiva. De acuerdo con el corolario 4b de Arce y Kahn (1991), esto es una condición suficiente para establecer la unicidad del conjunto estable siempre que se afirme su existencia³. ■

Dado que la caracterización establecida en las proposiciones anteriores no están basadas en la recursión, la metodología anterior puede ser utilizada para formular una definición del concepto de equilibrio creíble incluyendo tanto a los juegos finitos como a los infinitos.

Definición 2.5 Consideremos un juego de memoria perfecta con utilidades cambiantes a lo largo del juego y con un número finito o infinito de jugadores y estrategias. Una secuencia $s = (s_1, s_2, \dots)$ es un equilibrio creíble del juego Γ si y solo si existe un conjunto estable (ASS), K , asociado al sistema abstracto $(D, \succ)$ tal que para todo $i \in N$, para todo $i.j_0$ y para todo $Q_{i.j_0} \subset Q_{i.j_0}$ $(i.j_0, Q_{i.j_0}, s) \in K$.

El conjunto estable K es interpretado como una norma social donde cada punto en K es igualmente razonable: Ninguno domina a otro dentro de la norma social y los puntos que estan fuera de ella estan dominados por los pertenecientes a la norma.

Una de las dificultades que presenta esta metodología de conjuntos estables, cuando los sistemas abstractos $(D, \succ)$ no son finitos o la relación de dominación, $\succ$, es cíclica, es que los conjuntos estables pueden no existir. Kahn y Mookhejee (1992) muestran un ejemplo donde el conjunto estable no existe.

2.4 Memoria Imperfecta.

En todo momento estamos considerando que cada agente evalúa sus ganancias antes de que comience el juego. Es lo que se denomina, en teoría de juegos, una visión ex ante sobre la elección de las estrategias.

³La existencia de conjuntos estables está garantizada cuando el conjunto D es finito y $\succ$ es acíclica.

La condición de memoria perfecta es un supuesto básico sobre los conjuntos de información, que se suele imponer en los juegos en forma extensiva. Con este supuesto el jugador al que le corresponde jugar conoce lo que ha jugado él mismo anteriormente hasta ese momento. En nuestro caso la memoria imperfecta significa que puede existir algún agente que no sabe qué decisiones tomaron otros agentes del mismo jugador. El no suponer la condición de memoria perfecta en nuestro modelo va a repercutir en la noción *jugar después de...* que más adelante definiremos. El abandono del supuesto de memoria perfecta es bastante común en muchos problemas económicos: cuando varios agentes representan a un jugador es factible que algún agente no tenga información de los que anteriormente realizó algún otro representante. En algunas aplicaciones comentadas en Ferreira *et al.* (1995) la memoria perfecta no parece un requerimiento muy razonable. Sin embargo, estos autores no proponen ningún tipo de solución a este problema. En esta sección estudiamos esta extensión, y proponemos una noción de equilibrio creíble en juegos de memoria imperfecta. Como se verá, una de las consecuencias de no asumir memoria perfecta es que no se podrán utilizar definiciones recursivas. Utilizando los conjuntos estables aparecen problemas de existencia aún en el caso de un número finito de jugadores. Por ello, utilizamos el concepto más general de semiparticiones. Nótese que la existencia de conjuntos estables o semiestables no implica que el conjunto bueno no sea vacío.

Otra de las consecuencias de no suponer memoria perfecta es que tenemos que especificar las desviaciones permitidas. De acuerdo con la condición (iii) en la definición 2.3 de las desviaciones creíbles, después de una desviación ningún agente que juega después del que propone la desviación encontrará otra desviación. Pero este agente no tiene por qué jugar con probabilidad positiva de acuerdo con la primera desviación, así este nuevo agente puede proponer otra desviación y la primera dejaría de ser creíble. Con la metodología original de memoria perfecta y número de jugadores finitos este tipo de problema no se presentaba, ningún agente que jugase con probabilidad cero se beneficiaría de la desviación pues solamente incluiría agentes que juegan después de él. Las acciones de estos jugadores no cambiaban el pago esperado cuando se evaluaban al comienzo del juego. Sin memoria perfecta esto no tiene por qué ocurrir. Un agente que juegue con probabilidad cero, podría convencer a otros agentes que jueguen después de él, y que, si cambia su comportamiento, le permite jugar con probabilidad positiva. Esta situación no es muy natural, así que en la nueva definición debemos evitar que ocurran estas posibilidades.

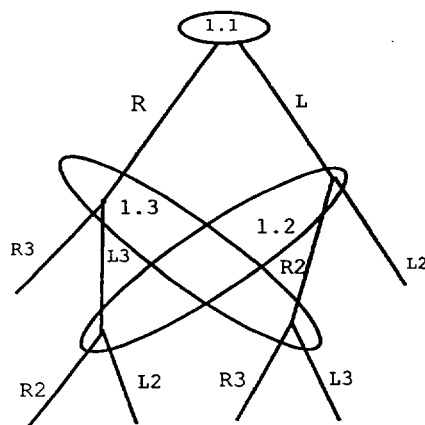
Por ello vamos a definir primero lo que llamaremos *jugar después de* para el caso más general de memoria no perfecta.

Definición 2.6 Sea Γ un juego con o sin memoria perfecta y con utilidades cambiantes durante el juego. Diremos que $i.j$ juega después de $i.k$ de acuerdo

con la estrategia s si existe una trayectoria desde la raíz del juego (comienzo) pasando a través de $y \in u_{i,k}$ y $x \in u_{i,j}$, si y es encontrado antes que x en el árbol que constituye el juego, y si ambos agentes juegan con probabilidad positiva cuando se juega s .

Nota: Si usamos la nueva definición de la relación *jugar después de...de acuerdo con la estrategia....* en la definición 2.2, la definición no cambia cuando nos referimos a juegos con memoria perfecta.

El ejemplo de la Figura 3 ilustra claramente cómo la pérdida de memoria puede hacer que la relación *jugar después de* sea cíclica. Obsérvese que, de acuerdo con la estrategia en la que cada agente selecciona al azar entre sus estrategias, el agente 1.2 puede jugar después de 1.3 y el agente 1.3 también puede jugar después de 1.2, ya que sus conjuntos de información se cruzan. Nótese también que de acuerdo con la estrategia $(R, L2, R3)$ el agente 1.2 juega con probabilidad cero. Si este jugador pudiera proponer una desviación a los agentes que juegan después de él, podría sugerir, por ejemplo, al agente 1.3 jugar $L3$ haciendo que el jugador 1.2 juegue con probabilidad positiva. Estas situaciones son las que se evitarán en las definiciones de las secciones próximas.



[FIGURA 3]

Ahora extendemos la definición de equilibrio creíble a juegos con memoria imperfecta, en los que las coaliciones de los jugadores se comunican antes de comenzar el juego y se realizan los acuerdos no vinculantes que crean oportunos. En este escenario deseamos conocer cuáles son los acuerdos estables.

Para una estrategia $s \in \times_{i \in N} S_i$, denotamos por $Q_{i,j}(s)$ el conjunto de todos los agentes de i que juegan después de i,j de acuerdo con s . Definimos $Q_{i,k}(\hat{s})$ análogamente. Sean $Q_{i,j} \subset Q_{i,j}(s)$ y $Q_{i,k} \subset Q_{i,k}(\hat{s})$ subconjuntos de los anteriores y $s, \hat{s} \in \times S_i$ estrategias del jugador i .

Teniendo en cuenta la definición 2.3 y los comentarios del comienzo de la sección, introducimos la relación de dominación $\succ$ y obtenemos el siguiente sistema abstracto:

$$(D, \succ) \text{ donde:} \quad [4.1.1]$$

$$D = \bigcup_{i \in N} \{ (i,j, Q, s) : i,j \in Q \subset Q_{i,j}(s) \quad s \in \times_i S_i \quad j \in \{1, 2, \dots, k_i\} \}$$

$$(i,j, Q, s) \succ (i,k, H, \hat{s}) \quad \text{si y solo si}$$

- (i) i,j juega después de i,k de acuerdo a $\hat{s}$.
- (ii) $h_{i,j}(s) > h_{i,j}(\hat{s})$.
- (iii) $h_{i,h}(s) > h_{i,h}(\hat{s}_{i,h}, s_{-i,h})$, para todo $i,h \in Q$,
- (iv) $s_Q = \hat{s}_{-Q}$.

Un elemento del conjunto D , que será llamado un acuerdo, es una especificación de cada uno de los movimientos realizados por todos los miembros del acuerdo, teniendo en cuenta que otros jugadores realizan unos movimientos ya dados. La condición (i) permite el análisis de juegos con conjuntos de información cruzados como el de la Figura 4. Solamente si un agente i,j es alcanzado con probabilidad positiva bajo la estrategia s puede proponer una desviación desde $\hat{s}$. La condición (ii) hace referencia a las preferencias del agente i,j , es decir, prefiere lo propuesto en s antes que seguir con $\hat{s}$. La condición (iii) implica que cuando a i,h , un miembro de $Q_{i,j}$, le toca jugar, prefiere cumplir con la desviación que con la estrategia $\hat{s}$, dado que el resto de los agentes implicados en el acuerdo siguen con la desviación propuesta por s . Puede observarse que las condiciones (ii)-(iii) de la relación de dominación imponen requerimientos solamente sobre los jugadores que juegan después de i,j de acuerdo con s . También se puede hacer notar que el sistema abstracto $(D, \succ)$ se reduce al conjunto abstracto $(D, \succ)$ en el caso de juegos con memoria perfecta.

Nuestro objetivo es determinar si un acuerdo es estable, es decir, si nunca está dominado, o si lo estuviese, si está dominado por un acuerdo que a su vez estuviese dominado por otro acuerdo que nunca estaría dominado y así sucesivamente.

Von Neumann y Morgenstern establecieron condiciones suficientes para la existencia y unicidad de los conjuntos estables basándose en propiedades de

las relaciones de dominación acíclicas definidas sobre los conjuntos abstractos. Desafortunadamente la relación de dominación $\succ\succ$ no es acíclica en todos los casos, por lo tanto no podemos utilizar las condiciones suficientes que aludiamos anteriormente para demostrar la existencia de conjuntos estables en el nuevo sistema $(D, \succ\succ)$. Estas situaciones adversas desaparecen en el caso de finitud en el número de jugadores y estrategias, y relaciones acíclicas donde siempre podemos asegurar la existencia de una única partición del sistema en conjuntos estables y no estables.

Kahn y Mookherjee (1992) prueban la no existencia de conjunto estable sobre un sistema abstracto definido a través del concepto de equilibrio de Nash a prueba de coaliciones. Estos autores consideran una versión más débil de las particiones estables y confeccionan lo que llaman partición semiestable o semipartición. La idea es dividir el sistema abstracto en tres conjuntos según la siguiente definición.

Definición 2.7 Sea $(A, \succ\succ)$ un sistema abstracto. Un trío de subconjuntos $\{\mathcal{G}, \mathcal{B}, \mathcal{U}\}$ of A forman una partición semiestable (SSP) de A si:

(1) $\mathcal{B}$ está formado por elementos dominados por elementos pertenecientes a $\mathcal{G}$. I.e., $x \in \mathcal{B}$ sii $\exists x' \in \mathcal{G}$ tal que $x' \succ\succ x$.

(2) $\mathcal{G}$ está formado por todos los elementos no dominados o por dominados por elementos pertenecientes a $\mathcal{B}$. I.e., $x' \in \mathcal{G}$ y $x \succ\succ x'$, entonces $x \in \mathcal{B}$.

(3) $\mathcal{G} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ y $\mathcal{U} = A \setminus (\mathcal{G} \cup \mathcal{B})$.

$\mathcal{G}$ es llamado conjunto bueno, $\mathcal{B}$ es el conjunto malo y $\mathcal{U}$ es el conjunto feo.

Lo ideal sería tener una única partición estable, es decir $\mathcal{U} = \emptyset$, ya que este conjunto de la partición semiestable va a hacer que el concepto de solución, que tomemos para un juego, sea un poco ambiguo. Desafortunadamente, el caso con el que nosotros estamos trabajando no admite una única partición estable y tendremos que conformarnos con las particiones semiestables de $(D, \succ\succ)$. Este concepto de partición semiestable es un poco más débil que el concepto de partición estable. Uno de los resultados sobre las particiones semiestables reflejan que el conjunto feo contiene ciclos y secuencias infinitas de acuerdos dominados unos por otros, sin ser ningún acuerdo del conjunto bueno. En las próximas secciones nos vamos a centrar en este subconjunto. Como se puede comprobar a través de la definición anterior una partición semiestable no tiene por qué ser única. Por ello, la extensión del concepto de equilibrio creíble la vamos a realizar sobre una interesante clase de partición semiestable: La partición semiestable minimal. En este trabajo vamos a considerar este tipo de partición semiestable porque, como se verá inmediatamente, es fácil de construir y es una forma de considerar conjuntos de acuerdos que sean lo más pequeños posibles. Además, en la literatura sobre las particiones semiestables se suele considerar la minimal como un método para particionar el conjunto

de acuerdos. De todos modos, pueden existir otros métodos⁴ para particionar el conjunto total de acuerdos.

Definición 2.8 Una $(\succ\succ)$ -partición semiestable $\{G^*(\succ\succ), B^*(\succ\succ), U^*(\succ\succ)\}$ de D es minimal si satisface que: $G^*(\succ\succ) \subset G(\succ\succ)$, $B^*(\succ\succ) \subset B(\succ\succ)$ y $U^*(\succ\succ)$ es el complementario de $G^* \cup B^*$, para cada partición semiestable $\{G(\succ\succ), B(\succ\succ), U(\succ\succ)\}$ de D . Estos conjuntos $\{G^*, B^*, U^*\}$ son llamados estrictamente buenos, estrictamente malos y estrictamente feo respectivamente.

En nuestro caso, la forma de construir una partición semiestable minimal será análoga a la construida por Kahn y Mookherjee (1992):

Primero definimos los conjuntos G_0^* and B_0^* :

$$G_0 = \{(i,j, Q, s) \in D : \nexists (i,h, H, \hat{s}) \in D : (i,h, H, \hat{s}) \succ\succ (i,j, Q, s)\}$$

$$B_0 = \{(i,j, Q, s) \in D : \exists (i,h, H, \hat{s}) \in G_0^* : (i,h, H, \hat{s}) \succ\succ (i,j, Q, s)\}$$

Posteriormente por inducción definimos G_k^*, B_k^* con $k = 1, \dots$

$$G_k^* = \{(i,j, Q, s) \in D : \text{si } (i,h, H, \hat{s}) \succ\succ (i,j, Q, s)$$

entonces $(i,h, H, \hat{s}) \in B_{k-1}^*\}$

$$B_k^* = \{(i,j, Q, s) \in D : \exists (i,h, H, \hat{s}) \in G_k^* : (i,h, H, \hat{s}) \succ\succ (i,j, Q, s)\}$$

Definimos $G^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_k^*$ y $B^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k^*$. Finalmente, definimos el conjunto U^* como el complementario de $G^* \cup B^*$ en D .

Una vez que hemos definido la partición semiestable minimal del conjunto abstracto basado en el concepto inicial de equilibrio creíble podemos definir lo que entenderíamos por equilibrio creíble en esta semipartición. La existencia de un conjunto feo no vacío abre la posibilidad de recoger dos conceptos de equilibrios creíbles, una versión fuerte y otra más débil.

Definición 2.9 Sea Γ un juego de memoria imperfecta con utilidades cambiantes durante el juego, con un número finito o infinito de jugadores y estrategias. Sea $(D, \succ\succ)$ un sistema abstracto definido como en [4.1.1], y sea $\{G^*, B^*, U^*\}$ una partición semiestable minimal de D . Una estrategia s es un equilibrio creíble en sentido fuerte de Γ si para todo i, j_0 y $Q_{i,j_0} \subset Q_{i,j_0}$, $(i, j_0, Q_{i,j_0}, s) \in G^*(\succ\succ)$.

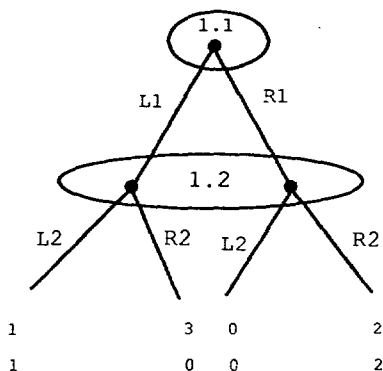
⁴Las próximas definiciones se pueden realizar con otros tipos de particiones semiestables distintas de la partición semiestable minimal.

Según nuestro nuevo concepto de solución (i, j_0, Q_{i, j_0}, s) es estable si está dominado solamente por elementos pertenecientes al conjunto estrictamente malo. En cambio una noción más débil de equilibrio creíble (equilibrio débilmente creíble) sería la siguiente:

Definición 2.10 Sea $\Gamma, (D, \succ)$ y $\{G^*, B^*, U^*\}$ definidos como el caso anterior. Una estrategia s diremos que es un equilibrio débilmente creíble de Γ si para todo i, j_0 y $Q_{i, j_0} \subset Q_{i, j_0}, (i, j_0, Q_{i, j_0}, s) \in G^*(\succ) \cup U^*(\succ)$.

Esta solución más débil (incluye más elementos que la versión fuerte) nos dice que un elemento de D es creíble si no está dominado por un elemento perteneciente al conjunto estrictamente bueno. Estas son las formas estándar de definir equilibrios cuando tenemos particiones semiestables; sin embargo, ninguna de las definiciones establecidas nos parece enteramente satisfactorias. Primero, porque puede ocurrir que el conjunto bueno G sea vacío y, segundo, porque algunos elementos que constituyen el conjunto feo pueden ser *más feos que otros*, en el sentido de que pueden existir elementos que siempre están dominados y no dominan a otros. Esa distinción entre los elementos feos permite prescindir de algunos. Estas distinciones se pueden observar en la Figura 5 de la próxima sección.

Para terminar esta sección vamos a ilustrar con un ejemplo el caso de un juego con memoria imperfecta en el que la relación de dominación es no cíclica. Obsérvese en este ejemplo la diferencia de aplicar el concepto inicial de equilibrio creíble y el que hemos propuesto en esta sección para los juegos con memoria imperfecta.



[FIGURA 4]

Considerando el juego de la Figura 4, $(L1, L2)$ no es un perfil de estrategias creíble de acuerdo con la definición inicial ya que el agente 1.1 puede proponer instrucciones y el agente 1.2 mover con $(R1, R2)$. Si el agente 1.2 supiera que el agente 1.1 va a mover $R1$, elegiría cumplir con las instrucciones. Pero no lo sabe, y si decide cumplir, el agente 1.1 elige $L1$ para conseguir un pago igual a 3. Así pues, la desviación $(R1, R2)$ es poco segura. Sin embargo, la definición original no hace referencia a este hecho.

A la vista de los resultados podemos concluir que la definición original de equilibrio creíble no es apropiada para este tipo de contextos con memoria imperfecta. En cambio, si aplicamos la definición 2.9 ó 2.10, obtenemos la siguiente serie de elementos dominados:

$$\begin{aligned} & (1.1, N, (L1, L2)) \prec\prec (1.1, N, (R1, R2)) \prec\prec \\ & \prec\prec (1.1, \{1.1\}, (L1, R2)) \prec\prec (1.2, \{1.2\}, (L1, L2)). \end{aligned}$$

Podemos observar que el último acuerdo de la serie anterior no está dominado (para ello se necesitaría la participación de 1.1 para ir a $(R1, R2)$, pero esto no es posible porque 1.1 no juega después de 1.2).

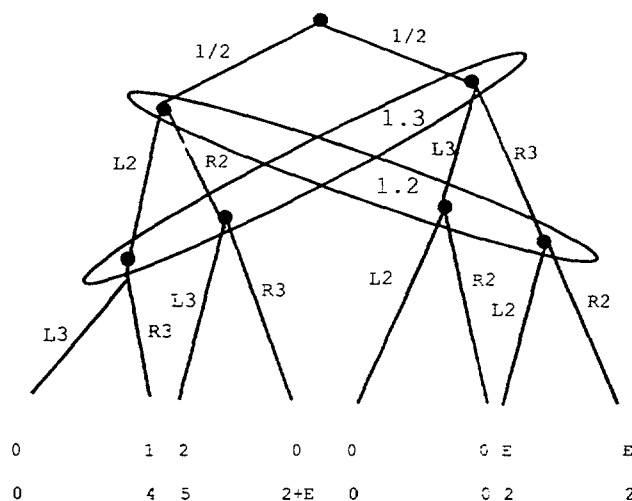
Así que $((1.1, N, (L1, L2)), (1.1, \{1.1\}, (L1, R2)))$ son elementos del conjunto malo y $(1.1, N, (R1, R2)), (1.2, \{1.2\}, (L1, L2))$ del conjunto bueno. En otras palabras, $(R1, R2)$ y $(L1, L2)$ son equilibrios creíbles según nuestra extensión.

2.5 Ciclos y Clases de Equivalencia.

En las secciones anteriores hemos definido la noción de equilibrio creíble apoyándonos en dos conjuntos: el bueno y el feo. El conjunto feo le da un carácter ambiguo a la noción de equilibrio. Lo ideal sería que el conjunto feo fuese el vacío, pero ya hemos visto que hay casos en los que este conjunto es bastante amplio. De todas formas, lo que sí está claro, es que dentro de este conjunto podemos realizar nuevas divisiones y volver a redefinir el concepto de equilibrio creíble con una mejor selección de los elementos que constituyen el conjunto feo.

Consideremos el juego representado en la Figura 5 y, para simplificar cálculos, consideremos sólo estrategias puras. Las siguientes relaciones pueden ser fácilmente comprobadas: Los acuerdos $(1.2, N, (R2, L3))$ y $(1.3, N, (L2, R3))$ forman un ciclo en el que se dominan mutuamente. De esta forma, esos elementos pertenecen al conjunto feo de la partición semiestable correspondiente. El acuerdo $(1.3, N, (R2, R3))$ (con $0 < E < \frac{1}{2}$) es también un elemento del conjunto feo. Además está dominado por los dos acuerdos anteriores y domina al acuerdo $(1.2, N, (L2, L3))$. Finalmente el acuerdo $(1.2, N, (L2, L3))$ no domina

a ningún otro acuerdo y, por lo tanto, también se incluye en el conjunto feo. Este ejemplo nos sugiere una nueva división dentro del conjunto feo.



[FIGURA 5]

En esta sección usaremos algunos de los resultados existentes acerca de la estructura de los conjuntos feos (Arce y Kahn, 1991): Sea $(D, \succ)$ un sistema abstracto, y $\{G, B, U\}$ una partición semiestable en él, entonces, si $U \neq \emptyset$, U contiene una secuencia infinita $\{x_i\}_i$ tal que $x_{i+1} \succ x_i$ para todo i . Algunas veces estas secuencias se convierten en ciclos (cuando el rango es finito).

En esta sección vamos a conectar dos conceptos: clases de equivalencia y ciclos de un sistema abstracto. Para llevar a cabo esto veamos cada uno de los conceptos.

Definición 2.11 Sea $(D, \succ)$ un sistema abstracto, un ciclo de elementos de $(D, \succ)$ es una secuencia finita $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ con $x_i \in D$ que satisface

$$x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_1.$$

Sea $\{G, B, U\}$ una partición semiestable asociada a $(D, \succ)$. Supongamos que U es un conjunto no vacío y que éste contiene al menos un ciclo. Como vimos en el ejemplo, este conjunto puede tener elementos que son *más feos que otros*. Usaremos nuevamente la metodología de conjuntos estables para caracterizar estos elementos que llamaremos buenos-feos sólo en juegos no finitos y memoria imperfecta. La idea es particionar el conjunto de los feos en dos subconjuntos que denotaremos por buenos-feos y malos-feos, con las propiedades de estabilidad interna y estabilidad externa.

Partiendo de la relación de dominación $\succ$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$(i.j, Q, s) \sim (i.h, H, \hat{s})$$

si $(i.j, Q, s) = (i.h, H, \hat{s})$ o si existe un par de sucesiones $\{(x_i)_i\}, \{(y_i)_i\}$ en D tal que

$$\begin{aligned} & (i.j, Q, s) \succ x_1 \succ \dots x_p \succ \\ & \succ (i.h, H, \hat{s}) \succ y_1 \succ \dots y_k \succ (i.j, Q, s). \end{aligned}$$

Proposición 3 *La relación $\sim$ sobre U definida anteriormente es una relación de equivalencia.*

Demostración:

Es trivial demostrar que la relación $\sim$ es reflexiva y simétrica.

Para probar la transitividad, supongamos que tenemos tres acuerdos del sistema que verifican que $(i.j, Q, s) \sim (i.h, H, \hat{s})$ y que $(i.h, H, \hat{s}) \sim (i.k, K, s')$.

Esto implica que o bien $(i.j, Q, s) = (i.h, H, \hat{s}) = (i.k, K, s')$ o se dan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} & (i.j, Q, s) \succ x_1 \succ \dots x_p \succ (i.h, H, \hat{s}) \succ \\ & \succ y_1 \succ \dots y_k \succ (i.j, Q, s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (i.h, H, \hat{s}) \succ \hat{x}_1 \succ \dots \hat{x}_p \succ (i.k, K, s') \succ \\ & \succ \hat{y}_1 \succ \dots \hat{y}_k \succ (i.h, H, \hat{s}). \end{aligned}$$

Entonces, $(i.j, Q, s) \succ x_1 \succ \dots (i.h, H, \hat{s}) \succ \hat{x}_1 \dots \succ (i.k, K, s')$. Pero esto implica que $(i.j, Q, s) \sim (i.k, K, s')$. ■

Consideremos ahora el conjunto cociente obtenido a través de las clases de equivalencia de $\sim$ y definamos una relación de dominación sobre el conjunto cociente.

Definición 2.12 *Las clases de equivalencia de una relación de equivalencia, denotada por $\equiv$, sobre un conjunto $\mathcal{A}$ son colecciones de los siguientes elementos $[a] = \{x \in \mathcal{A} \mid x \equiv a\}$. La colección $\{[a]\}_{a \in \mathcal{A}}$ es denotada por $(\mathcal{A}/\equiv)$ y llamada conjunto cociente de $\mathcal{A}$ por $\equiv$.*

⁵El lector puede referirse a Potter (1990), Capítulo 2, para un estudio detallado sobre las relaciones de equivalencia y los conjuntos cocientes.

Consideremos el conjunto feo U y la relación de dominación inicial $\succ\succ$, $(U, \succ\succ)$. Sea la relación de equivalencia $\sim$ sobre U . Entonces definimos un nuevo sistema abstracto:

$$((U/\sim), \gg)$$

donde, ahora, el conjunto abstracto es el conjunto cociente de la relación de equivalencia definida sobre el conjunto de elementos feos: para todo $[a], [b] \in (U/\sim)$

$$[a] \gg [b]$$

sii $[a] \neq [b]$ y existe $x \in [a]$, $y \in [b]$ y una sucesión $\{(x_i)_i\}$ con $x_i \in U$ tal que, $x \succ\succ x_1 \succ\succ \dots \succ\succ x_p \succ\succ y$.

Para un caso general, como el caso de no finitud del conjunto $(U/\sim)$, nos encontraríamos con problemas de existencia de particiones estables en el sistema $(U/\sim), \gg$. Por ello, consideremos entonces una partición semiestable minimal, $\{G_U^*, B_U^*, U_U^*\}$, es decir, consideramos los siguientes conjuntos:

$$G_U^*(\sim) = \{x \in U : [x] \in G_U(\gg)\} \text{ y } U_U^*(\sim) = \{x \in U : [x] \in U_U(\gg)\}.$$

Con estos conjuntos podemos volver a reformular una extensión de equilibrio creíble que es más satisfactoria que las realizadas anteriormente en 2.9 y 2.10.

Definición 2.13 Sea Γ un juego de memoria imperfecta, con utilidades cambiantes a lo largo del juego y con un número finito o infinito de jugadores y de estrategias. Una estrategia s es un equilibrio creíble del juego Γ si para todo $i, j_0 \in N$, y $Q_{ij_0} \subset Q_{ij_0}$, $(i, j_0, Q_{ij_0}, s) \in G(\succ\succ) \cup G_U^*(\sim) \cup U_U^*(\sim)$.

Llegados a este punto, parece lógico considerar la posibilidad de que U_U^* contenga también elementos *más feos que otros*. Lo interesante es que el conjunto U_U^* no contiene ciclos y que, por lo tanto, no es necesaria esta nueva distinción de elementos.

Proposición 4 Sea $((U/\sim), \gg)$ un sistema como los definidos anteriormente, entonces $\gg$ es una relación acíclica sobre $(U/\sim)$.

Demostración:

Para llevar a cabo la demostración de esta proposición usamos el siguiente resultado: Si una relación es asimétrica, transitiva e irreflexiva, entonces es acíclica. En nuestro caso es trivial demostrar que la relación de dominación $\gg$ es irreflexiva y asimétrica.

Para demostrar la transitividad supongamos que $[a], [b], [c] \in (U/\sim)$ con $[a] \gg [b]$ y $[b] \gg [c]$.

Estas clases de equivalencia son distintas y existe $x \in [a]$, $y, y' \in [b]$ y $z \in [c]$ tal que

$$x \succ\succ x_1 \succ\succ \dots \succ\succ x_p \succ\succ y,$$

$$y' \succ y'_1 \succ \dots \succ y'_p \succ z.$$

Si $y = y'$ o $y \succ y'_1 \dots \succ y'_p$ (porque $y, y' \in [b]$), tenemos que $x \succ \dots \succ z$, lo cual implica que $[a] \gg [c]$. ■

Si el conjunto abstracto es finito y la relación binaria establecida es acíclica, podemos garantizar la existencia de una única partición estable. Una vez que se elimina la posibilidad de que se formen ciclos, la única razón por la que no se puede garantizar la existencia y unicidad de conjuntos estables es el hecho de que el conjunto $(U/\sim)$ no sea finito. Una cuestión interesante para futuras investigaciones es la de buscar condiciones bajo las cuales se nos permita garantizar la finitud de dicho conjunto cociente; esta claro que un conjunto feo finito genera un conjunto cociente tambien finito, pero lo interesante es el estudio de conjuntos feos infinitos que generen un conjunto cociente finito.

2.6 Existencia de ε -equilibrios creíbles.

Si revisamos la literatura que utiliza la metodología de sistemas abstractos, nos encontramos con que hay grandes problemas para demostrar teoremas de existencia y para encontrar contraejemplos. Sin embargo esto no ha sido un impedimento para que esta metodología sea fructífera, abordando problemas difíciles en la Teoría de Juegos, especialmente aquellos relacionados con la estabilidad de desviaciones coalicionales.

En esta sección vamos a demostrar teoremas que garantizan la existencia de una aproximación del equilibrio débilmente creíble para juegos de utilidades cambiantes de memoria imperfecta pero finitos. La idea es la de demostrar existencia de ε -equilibrios creíbles.

En otros contextos diferentes, Greenberg, Monderer y Schitovitz (1996) prueban la existencia de un ε -equilibrio conservador.

Definición 2.14 Para cada $\varepsilon > 0$ definimos $(D, \succ_\varepsilon)$ como el sistema abstracto $(D, \succ)$ exceptuando que las condiciones(ii) y (iii) que aparecen en la definición [4.1] son sustituidas por las siguientes condiciones:

- (ii') $h_{i,j}(s) > h_{i,j}(\hat{s}) - \varepsilon$
- (iii') $h_{i,h}(s) > h_{i,h}(\hat{s}_{i,h}, s_{-i,h}) - \varepsilon$, para todo i, h in $Q_{i,j}$

La definición de ε -equilibrio débilmente creíble es como la definición de equilibrio débilmente creíble de la definición 12 pero sustituyendo la relación de dominación $\succ$ por la relación de dominación $\succ_\varepsilon$. En otras palabras, un ε -equilibrio débilmente creíble es como un equilibrio débilmente creíble exceptuando que los agentes no se desvían a menos que ganen más de $\varepsilon > 0$.

La próxima proposición demuestra la existencia de este nuevo equilibrio para una importante clase de juegos.

Proposición 5 *Sea $\Gamma(\delta) = (T, P, U, C, p, h)$ un juego finito con utilidades cambiantes. Entonces, siempre existe al menos un ε -equilibrio débilmente creíble.*

La prueba de esta proposición es establecida como un corolario de la proposición 6. Antes de pasar a dicha proposición necesitamos realizar una nueva definición.

Definición 2.15 *Sea $\Gamma(\delta) = (T, P, U, C, p, h)$ un juego finito con utilidades cambiantes. Definimos el juego $\Gamma(\delta) = (T, P, U, C, p, h, \delta)$ como Γ , con la única diferencia de que en $\Gamma(\delta)$, para cada agente de cada jugador, todas las estrategias puras deben ser elegidas con una probabilidad positiva y múltiplo de $\delta > 0$.*

Nota: Para aplicar esta definición basta pensar en el caso en el que para cada agente, el número de estrategias dividido por δ es un número entero. De esta forma, siempre es posible definir juegos del tipo $\Gamma(\delta)$ cuando el juego original considerado es finito.

Nótese que a esta clase de juegos se les puede aplicar en todo momento las definiciones de equilibrio creíble. También cabe destacar, que si un jugador juega detrás de otro según una estrategia, también juega detrás de él de acuerdo con cualquier otra estrategia, así que no es necesario hacer referencia a la estrategia.

Proposición 6 *Sea $\Gamma(\delta)$ un juego según la definición 2.15, entonces tiene al menos un equilibrio débilmente creíble.*

Demostración:

Comenzamos considerando una estrategia s , si no es un equilibrio débilmente creíble, entonces existe (i, j_0, Q_{i, j_0}, s) y $(i, j, Q_{i, j}, s')$ tal que $(i, j, Q_{i, j}, s') \succ (i, j_0, Q_{i, j_0}, s)$.

Ahora bien, si s' no es un equilibrio débilmente creíble, entonces podemos encontrar una nueva desviación que la domina y así sucesivamente. Si en algún punto alcanzamos un equilibrio débilmente creíble entonces hemos concluido. Si no es así, habremos construido una serie o

Hay dos posibles casos:

- (i) Los elementos del ciclo se alternan entre elementos buenos y malos.
- (ii) Los elementos del ciclo pertenecen al conjunto feo.

Consideremos el primer caso con $(i, h, Q_{i, h}, s'')$ en el conjunto bueno. Todas las estrategias son completamente mixtas, todos los agentes en el ciclo juegan detrás de algún otro de acuerdo con alguna estrategia. Esto significa que s'' no es un equilibrio débilmente creíble y solamente las desviaciones que están por encima de ésta (las dominadas hasta llegar a dicho acuerdo) son debidas a jugadores o agentes de i que no juegan después de i, h . Fijamos la parte de la estrategia s'' para todos los agentes del jugador i que juegan después de i, h , i.e., fijamos $s''_{Q_{i, h}}$. Con la desviación existente podemos repetir el mismo proceso que comenzamos, pero esta vez con (i, j_0, Q_{i, j_0}, s) . Cada vez que hagamos este procedimiento, o bien encontramos un equilibrio débilmente creíble o bien fijamos una estrategia para un nuevo conjunto de agentes. En el último paso de la situación descrita, por la finitud del juego, hemos fijado una estrategia para cada agente. El perfil de estrategias así construido debe ser un equilibrio débilmente creíble (de hecho, este perfil debería ser un equilibrio creíble si éste perteneciese al conjunto bueno) o bien ningún agente puede encontrar una desviación que pertenezca al conjunto malo. Si $(i, h, Q_{i, h}, s'')$ pertenece al conjunto malo, $(i, k, Q_{i, k}, s''')$ pertenece al conjunto bueno y podemos repetir el proceso para fijar $s'''_{Q_{i, k}}$.

Si por el contrario, todos los elementos del ciclo son elementos pertenecientes al conjunto feo, el proceso puede ser repetido directamente con $(i, h, Q_{i, h}, s'')$ y el perfil final sería o un elemento bueno o un elemento feo, en todo caso sería un equilibrio débilmente creíble. ■

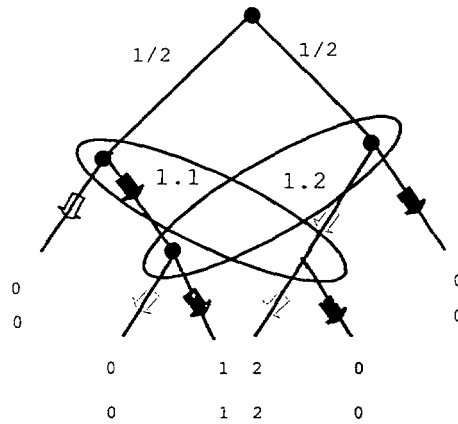
Demostración de la Proposición 5:

Debido a que los pagos son expresados mediante funciones continuas de probabilidad con las que las estrategias mixtas son elegidas, para cada ε existe un δ tan suficientemente pequeño que cada pago, que es el resultado de haber combinado unas estrategias en el juego Γ , pertenece al entorno de tamaño ε de un pago del juego $\Gamma(\delta)$. Así pues, el equilibrio débilmente creíble en el juego $\Gamma(\delta)$ es un ε -equilibrio débilmente creíble en Γ . ■

Nota: Esta prueba funciona con ε positivo, pero no con $\varepsilon = 0$. La razón es doble; primero, cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$, el número de elementos del ciclo tiende también a infinito y no se podría utilizar el argumento anterior y, segundo, el conjunto de equilibrios creíbles no tiene por qué ser un conjunto compacto (véase un ejemplo en Ferreira *et al.*).

Para finalizar las discusiones acerca de la existencia realizamos una obser-

vacación bastante interesante. En el trabajo de Ferreira *et al.*, la existencia de equilibrio creíble fue establecida como consecuencia de obtener el conjunto de los equilibrios perfectos, que siempre existe, como subconjunto de equilibrios creíbles. Cuando el supuesto de memoria perfecta se abandona, las complicaciones se acentúan debido a que este tipo de relaciones ya no se podrán establecer. El siguiente juego es un contraejemplo:



[FIGURA 6]

Se puede comprobar que si ambos agentes mueven derecha (flechas negras) se constituye un equilibrio perfecto. Lo mismo puede decirse si ambos jugadores mueven izquierda (flechas blancas). Sin embargo, el primer perfil no puede ser un equilibrio creíble, debido a que cada agente puede sugerir como desviación jugar izquierda.

2.7 Variantes del equilibrio creíble.

En la definición de equilibrio creíble se establece que, en caso de indiferencia, los agentes no se desvían, tal como se refleja en la condición (iii) de la definición de equilibrio creíble. Si omitimos este requerimiento obtenemos otro tipo de relación de dominación.

Sea D un sistema abstracto como el definido en la sección 4 de este capítulo. Definimos una nueva relación de dominación $\succ_o$:

$$(i, j, Q_{i,j}, s) \succ_o (i, k, Q_{i,k}, \hat{s}) \text{ si}$$

- (i) $i.j$ juega después de $i.k$ de acuerdo con $\hat{s}$
- (ii) $h_{i,j}(s) > h_{i,j}(\hat{s})$
- (iii) $s_{-Q_{i,j}} = \hat{s}_{-Q_{i,j}}$

Dado este nuevo sistema $(D, \succ_o)$ consideremos una partición semiestable minimal del conjunto D , $\{G(\succ_o), B(\succ_o), U(\succ_o)\}$. De forma análoga a las definiciones procedamos a la definición de un nuevo equilibrio.

Definición 2.16 Sea Γ un juego con utilidades cambiantes. Sea $(D, \succ_o)$ el sistema abstracto definido anteriormente. Una estrategia s es un equilibrio óptimo creíble en sentido fuerte si para todo $i.j_0$ y $Q_{i,j_0} \subset Q_{i,j_0}(s)$, se verifica que $(i.j, Q_{i,j_0}, s) \in G(\succ_o)$.

Este equilibrio es también una extensión del equilibrio de Nash para juegos no cooperativos con utilidad constante a lo largo del juego. Esta definición es más sencilla, pero presenta el problema de existencia incluso en juegos finitos con memoria perfecta.

Analícemos con un poco más de detalle estos equilibrios óptimos para los juegos $\Gamma(\delta)$. Recordemos que si un acuerdo $(i.j_0, Q_{i,j}, s)$ pertenece al conjunto $G(\succ_o)$ entonces, o bien no está dominado por ningún otro acuerdo o bien está dominado por un acuerdo malo. Si ocurre lo primero quiere decir que ningún otro jugador encuentra una desviación de s que le reporte mayor utilidad, es decir jugar de acuerdo con s será la *mejor* opción. Si $(i.j_0, Q_{i,j}, s)$ está dominado por otro elemento perteneciente al conjunto malo, éste, a su vez, está dominado por uno bueno y éste último o no está dominado o está dominado por uno malo. Así podemos seguir sucesivamente. De tal forma que si llegamos a un acuerdo bueno no dominado sería otro equilibrio óptimo creíble en sentido fuerte y eso sería una contradicción de que inicialmente teníamos un acuerdo bueno.⁶ Entonces lo único que puede suceder en este caso es que el acuerdo inicial no este dominado o bien que se forme una secuencia infinita de acuerdos de la siguiente manera : $G \succ_o B \succ_o G \succ_o B \succ_o \dots$ lo cual significaría intuitivamente que ningún agente encuentra una estrategia que le reporte mayor utilidad sin que ésta sea objeto de una desviación.

Con este nuevo concepto de equilibrio parece que las cosas se simplifican bastante: la relación de dominación es más simple⁷. Si ahora tenemos la situación $(i.j, Q_{i,j}, s) \succ_o (i.h, Q_{i,h}, \hat{s})$ es debido a que el agente $i.j$ obtiene mayor

⁶Recuérdese que los acuerdos buenos no pueden estar dominados por otro acuerdo bueno.

⁷Hemos prescindido de una de las condiciones, concretamente de la condición (iii) de la definición de equilibrio creíble en sentido fuerte, es decir, ahora para que un acuerdo domine a otro lo único que necesitamos es que haya un agente que con otra estrategia, que sea una desviación de la inicial, consiga mayor utilidad



utilidad con s que con la estrategia⁸ $\hat{s}$. Ahora, a los agentes involucrados en la desviación $Q_{i,j}$ no les exigimos que obtengan una mayor utilidad, ya que con las condiciones impuestas podemos garantizar que si obtienen mayor utilidad con la nueva estrategia se desviarán, si obtienen igual también seguirán la desviación y si obtienen menor utilidad volverán a proponer una desviación, contra $\hat{s}$, alguno de sus miembros. Con esto lo único que nos garantizamos es que si algún agente está indiferente ante la desviación propuesta por otro, este primero la secunde. Si observamos la definición de la relación de dominación lo que nos conlleva es que aumentamos el número de acuerdos que están dominados por otros acuerdos. Esto nos hace pensar que tanto el conjunto malo como el conjunto feo van a aumentar su tamaño en estos casos. Por ello, como comentábamos al comienzo de la sección los problemas de existencia en este tipo de equilibrio son aún más graves.

Como comentario a estos problemas cabe resaltar el ejemplo ya discutido por Ferreira *et al.* para la inexistencia de equilibrios óptimos creíbles en juegos finitos y memoria perfecta, ya que, igual que ocurría en equilibrios creíbles, existe una equivalencia entre las definiciones recursivas de estos autores y las definiciones no recursivas empleadas en esta sección (para juegos finitos y memoria perfecta).

Cuando existen estos equilibrios creíbles óptimos constituyen una solución del juego mucho más simple que la de equilibrio creíble. Si el conjunto de equilibrios creíbles óptimos está formado por al menos un acuerdo, podemos afirmar lo siguiente:

Proposición 7 *Si existe un acuerdo (i, j_0, s, Q_{i,j_0}) perteneciente al conjunto $G(>_0)$ y no está dominado entonces s es un equilibrio creíble y un equilibrio creíble óptimo.*

Definición 2.17 *Para cada $\varepsilon > 0$ definimos $(D, >_{0\varepsilon})$ como el sistema abstracto $(D, >_0)$ exceptuando que las condiciones(ii) y (iii) que aparecen en la definición son sustituidas por las siguientes condiciones:*

$$(ii') \quad h_{i,j}(s) > h_{i,j}(\hat{s}) - \varepsilon$$

$$(iii') \quad h_{i,h}(s) > h_{i,h}(\hat{s}_{i,h}, s_{-i,h}) - \varepsilon, \text{ para todo } i, h \text{ perteneciente a } Q_{i,j}$$

Entonces, un ε -equilibrio óptimo débilmente creíble es aquella estrategia s tal que $(i, j_0, Q_{i,j_0}, s) \in G(>_{0\varepsilon}) \cup U(>_{0\varepsilon})$ para todo $Q_{i,j_0} \subset Q_{i,j_0}(s)$

⁸La estrategia $\hat{s}$ es igual que s para los agentes que no pertenecen a la coalición $Q_{i,j}$, es decir $s_{-Q_{i,j}} = \hat{s}_{-Q_{i,j}}$

2.8 Conclusiones y comentarios.

En este capítulo hemos extendido la definición de equilibrio creíble a juegos infinitos y con memoria imperfecta. Como la definición recursiva original no se puede aplicar a ninguno de estos casos, se ha recurrido a la noción de conjunto estable en la Teoría de las Situaciones Sociales. Los problemas de existencia de las particiones estables se han resuelto con el uso de particiones semiestables. En nuestro estudio de los equilibrios creíbles encontramos que el conjunto feo de la partición semiestable puede ser muy grande. Introduciendo cierta estructura en este conjunto hemos podido desechar algunos de sus elementos. Finalmente se ha demostrado un teorema de existencia para una aproximación de equilibrios creíbles.

Otros problemas han quedado abiertos para futuras investigaciones. Es importante encontrar condiciones necesarias para garantizar un conjunto cociente finito que surge de la relación de equivalencia definida sobre el conjunto feo. El estudio de nuevas variantes del equilibrio creíble ofrecen más alternativas para extender el concepto básico de equilibrio de Nash a juegos con utilidades cambiantes. Asimismo, resultaría interesante el estudio de los refinamientos del equilibrio de Nash para este modelo.

Bibliografía

- [1] Arce M. and Kahn C., The Mathematics of semistability, Mimeo, University of Illinois at Urbana-Champaign,(1991).
- [2] Asheim B., Extending Renegotiation-Proofness to Infinite Horizon Games, Games and Economic Behavior,p. 278,(1991).
- [3] Bergstrom T., Maximal elements of acyclic relations on compact sets, Journal Economic Theory, 10,p.413, (1975).
- [4] Blackorby C., Niessen D., Primont D., and Russell R., Consistent Intertemporal Decision-Making, Rev. Econ. Stud. 40, (1973).
- [5] Chakravorti B. and Kahn C. , Universal Coalition proof Equilibrium: concepts and Applications, Bellocore Economics Discussion Paper No 98,(1993).
- [6] Ferreira, Gilboa I. and Maschler, Credible Equilibria in Games with Utilities Changing during the play, Games and Economic Behavior 10,p.284, (1995).
- [7] Greenberg, Deriving Strong and Coalitional-Proof Nash Equilibria from an Abstract System, Journal of Economic Theory, 49,p.195, (1989).
- [8] Greenberg J., The Theory of Social Situations. An Alternative game-theoretic approach. (Cambridge Univ. Press.), (1990).
- [9] Hammond, P., Changing tastes and Coherent Dynamic Choice, Rev. Econ. Stud. 43, (1976).
- [10] Kahn C. and Mookherjee, The Good, the Bad and the Ugly: Coalition-Proof Equilibrium in Infinite Games, Games and Economic Behavior 4, p. 101,(1992).
- [11] Kuhn H.W., Extensive Games and the problem of information , Annals of Mathematics Studies 28,p. 193,(1953).

-
- [12] Phelps E., and Pollack, R., On Second-Best National Saving and Game-Equilibrium Growth, *Rev. Econ. Stud.* 35, (1968).
 - [13] Pollack, R., Consistent Planning, *Rev. Econ. Stud.* 35, (1968).
 - [14] Pollack, R., Habit Formation and Dynamic Demand Functions, *Journal Polit. Econ.* 78, (1970).
 - [15] Pollack, R., Habit Formation and Long-Run Utility Functions, *Journal Econ. Theory* 13, (1976).
 - [16] Strotz R.H., Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization, *Rev. Econ. Stud.* 23, (1956).
 - [17] Von Neumann and Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior*, (Princeton Univ. Press, 1947).
 - [18] Von Weizsaecker C., Notes on Endogenous Changes of Tastes, *Journal Econ. Theory* 4, (1971).

Capítulo 3

Juegos Generalizados de Externalidades.

3.1 Introducción.

En este capítulo estudiamos un tipo particular de juegos cooperativos, que llamaremos Juegos Generalizados de Externalidades. Estos juegos constituyen una extensión de los Juegos de Externalidades estudiados por Grafe, Iñarra y Zarzuelo (1998). En aplicaciones concretas de la Teoría de Juegos, a menudo el problema se presenta en la especificación de la función característica que define al juego. Los Juegos Generalizados de Externalidades presentan una función característica particular que puede ser de gran interés en algunos contextos económicos.

En esta línea podemos mencionar, los Juegos Financieros (Izquierdo y Rafels, 1996), los Juegos Cobb-Douglas (Iñarra y Usategui, 1993), los Juegos de Mercado (Shapley and Shubik, 1969). Todos ellos poseen una función característica particular y se pueden interpretar como situaciones con cierto interés económico.

Los Juegos Generalizados de Externalidades también poseen su interpretación económica. La función característica para un juego con N jugadores queda definida para cada coalición S con la siguiente expresión:

$$v(S) = \left(\sum_{i \in S} \beta_i \right)^\alpha r(s)$$

donde $(\beta) = (\beta_i)_{i \in N}$ es un vector de R^n , el parámetro α es un real mayor o igual a 1, r es una función no decreciente $r : N \rightarrow R_+$, y s es el cardinal de la coalición S .

El pago que recibe la coalición S depende de la suma de las coordenadas de β y del cardinal de la coalición. En estos juegos cada jugador, $i \in N$, contri-

buye con una dotación, β_i y también con su presencia al valor total que recibe la coalición a la que pertenece. La interpretación económica que poseen los Juegos Generalizados de Externalidades podría resumirse del siguiente modo: Los jugadores aportan los recursos que poseen y a cambio reciben una contraprestación por la cesión de estos recursos, teniendo en cuenta el número de participantes en la coalición. La función r asegura que, la llegada de nuevos jugadores beneficia a los jugadores que originalmente estaban en el juego.

Existen situaciones económicas que se asemejan a la interpretación anterior. Las inversiones conjuntas que se realizan en algunas ocasiones dependen de la cantidad invertida y del número de inversores. Las ayudas económicas que reciben algunas asociaciones están en función del número de socios y de la cuota que aporta cada socio. Las empresas, con idéntico capital (λ), que deciden cooperar entre sí y producir conjuntamente con la tecnología de Cobb-Douglas aportan recursos, η_i y capital, λ . El número de empresas participantes, por ejemplo s , también se refleja en la función total de producción, $f(\lambda, \eta) = \lambda^\alpha s^\alpha (\sum_{i \in S} \eta_i)^\beta$. Si consideramos la producción como el pago de cada coalición tenemos que, analíticamente, la función $f(\lambda, \eta)$ define un Juego Generalizado de Externalidades. Los llamados Bienes Relacionados (Uhlener, 1989) son un subconjunto de los Bienes Públicos Locales, con la peculiar característica de que son definidos en actividades donde los individuos aumentan su utilidad si la cantidad de individuos en esa actividad crece. El análisis de estos bienes sugiere circunstancias en las cuales la participación es beneficiosa. Ambos conceptos, Bienes Relacionados y Juegos Generalizados de Externalidades, fomentan la participación de los individuos. Finalmente, en el modelo de Moulin (1992) donde los agentes comparten el coste de alguna decisión pública, llegamos a una expresión del tipo $v(S) = \frac{(\sum_{i \in S} \beta_i)^2}{2k}$ donde S es un grupo de agentes que deciden compartir los costes de la provisión de un bien, β_i es la tasa de marginal de sustitución entre los bienes privados y el público y k es una constante de la función de costes. Analíticamente podemos englobar este juego en los Juegos Generalizados de Externalidades.

El capítulo se divide en las siguientes secciones: En la segunda sección establecemos la definición de los Juegos Generalizados de Externalidades y estudiamos algunas de sus propiedades, entre las que cabe destacar monotonía, superaditividad, convexidad en media y semiconvexidad. Establecemos una base de juegos, llamados de mínima participación, para el subespacio vectorial que forman cada una de las clases de Juegos Generalizados de Externalidades. En la sección 3 estudiamos varias soluciones para este tipo de juegos. Se analiza el núcleo, y los conjuntos de negociación de Aumann-Maschler y de Mas-Colell. Encontramos que estas soluciones coinciden en este tipo de juegos y que son distintas del vacío. En cuanto a las soluciones puntuales clásicas cabe destacar que en los Juegos Generalizados de Externalidades de cuatro

jugadores, el τ -value pertenece al núcleo. Por último, se propone la distribución proporcional como una solución puntual más aceptable para este tipo de juegos al recoger en gran parte la estructura que presentan. Además aportamos una caracterización axiomática de esta solución. La sección 4 establece las conclusiones y posibles líneas de investigación futuras.

3.2 Definiciones y propiedades.

Los Juegos de Externalidades fueron definidos por Grafe, Iñarra y Zarzuelo (1998) como una clase de juegos cooperativos.

Utilizando la notación convencional denotamos con Γ_N a los juegos en forma característica con n jugadores.

Definición 3.1 *Un juego $v \in \Gamma_N$ es un juego de externalidades si existe un vector $\beta = (\beta_i)_{i \in N}$ y una función no decreciente, $r(\cdot)$, $r : N \rightarrow \mathbb{R}_+$, y tal que*

$$v(S) = \sum_{i \in S} \beta_i r(s),$$

donde s denota el cardinal de la coalición S .

Grafe *et al.* (1998) estudian algunas propiedades de esta clase de juegos cooperativos. En esta sección vamos a extender éstas y otras propiedades a una clase de juegos cooperativos más general, los Juegos Generalizados de Externalidades.

Definición 3.2 *Un juego $v \in \Gamma_N$ es un Juego Generalizado de Externalidades (GE_N) si si existe un vector $\beta = (\beta_i)_{i \in N}$, un parámetro $\alpha \geq 1$ y una función no decreciente $N \rightarrow \mathbb{R}_+$, tal que*

$$v(S) = \left(\sum_{i \in S} \beta_i \right)^\alpha r(s),$$

donde s denota el cardinal de la coalición S .

Continuando con la línea de los ejemplos introductorios, los Juegos Generalizados de Externalidades pueden interpretarse como una situación en la que los jugadores contribuyen con dotaciones, que poseen al inicio del juego, y con su presencia al valor total de la coalición a la que pertenecen. Podemos hablar de una contribución doble por parte de cada jugador. Por un lado cada jugador aporta β_i y por otro, la presencia de ese jugador beneficia al resto de jugadores que forman la coalición. Esto último es modelado por la función r .

Ejemplo 2.1: Consideremos tres jugadores, $N = \{1, 2, 3\}$ con las siguientes dotaciones $\beta_1 = 2, \beta_2 = 3$ y $\beta_3 = 2$. Supongamos que la presencia de jugadores es valorada de forma constante e igual a la unidad, $r(s) = 1 \forall s$ y que el parámetro α es igual a 2. Los pagos obtenidos por las distintas coaliciones serán:

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 4; v(\{2\}) = 9; v(\{3\}) = 4; \\ v(\{1, 2\}) &= 25; v(\{1, 3\}) = 16; v(\{2, 3\}) = 25; v(\{1, 2, 3\}) = 49; \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2: Si en el caso anterior admitimos que la presencia de los jugadores beneficia a los demás de la siguiente forma $r(1) = 1, r(2) = 2$ y $r(3) = 3$, tendríamos los siguientes pagos :

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 4; v(\{2\}) = 9; v(\{3\}) = 4; \\ v(\{1, 2\}) &= 50; v(\{1, 3\}) = 32; v(\{2, 3\}) = 50; v(\{1, 2, 3\}) = 147; \end{aligned}$$

Como puede observarse la presencia de jugadores incrementa los beneficios obtenidos por las coaliciones. Los Juegos Generalizados de Externalidades valoran de distinta forma la presencia de jugadores, unas veces lo que realmente aumentará los beneficios serán las aportaciones de recursos (cuando α sea bastante elevado), otras el número de participantes será decisivo (cuando α sea pequeño y r tome valores muy grandes en su dominio de definición), y por último, podemos conjugar ambas cosas.

A continuación se exponen las propiedades básicas de este tipo de juegos que se necesitarán para establecer los resultados de las siguientes secciones. En el apéndice se listarán otras propiedades de interés.

Primeramente comprobaremos que los GE_N satisfacen las propiedades de monotonía y superaditividad. Estas propiedades son estándar en la literatura de juegos cooperativos y permiten asegurarse de que los beneficios no disminuyen por actuar en coalición.

Proposición 8 *Los GE_N son monótonos, es decir,*

$$v(S) \leq v(T),$$

para toda coalición S y T tal que $S \subset T$.

La demostración se sigue inmediatamente de la definición. Basta observar que las dotaciones iniciales son no negativas y que la función r es no decreciente.

La idea de esta propiedad es que la adhesión de nuevos miembros a una coalición de agentes nunca empeora el resultado obtenido por la coalición.

Proposición 9 *Los GE_N son juegos superaditivos, es decir, se verifica que $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) \forall S, T \subset N, S \cap T = \emptyset$.*

Demostración:

Sea (Π^α, h) un Juego Generalizado de Externalidades, entonces para dos coaliciones cualesquiera S y T ,

$$v(S) + v(T) = \left(\sum_{i \in S} \pi_i \right)^\alpha h(s) + \left(\sum_{i \in T} \pi_i \right)^\alpha h(t),$$

Por el hecho de ser h una función no decreciente y por la desigualdad para números reales $(a + b)^\alpha \geq a^\alpha + b^\alpha$ para $\alpha \geq 1$, podemos obtener lo siguiente:

$$\left[\left(\sum_{i \in S} \pi_i \right)^\alpha + \left(\sum_{i \in T} \pi_i \right)^\alpha \right] h(s + t) \leq \left[\sum_{i \in S} \pi_i + \sum_{i \in T} \pi_i \right]^\alpha h(s + t)$$

Como $S \cap T = \emptyset$ se obtiene que la expresión anterior es igual a

$$\left[\left(\sum_{i \in S \cup T} \pi_i \right)^\alpha \right] h(s + t) = v(S \cup T). \quad \blacksquare$$

Como es sabido los juegos cooperativos de utilidad transferible tienen estructura de espacio vectorial de dimensión 2^{n-1} . Los juegos de unanimidad constituyen una base de este espacio vectorial, son juegos convexos y forman un cono de dimensión 2^{n-1} . Análogamente vamos a estudiar una base que nos genere el conjunto de los Juegos Generalizados de Externalidades asociados a un vector de dotaciones β . Los componentes de esta nueva base que buscamos linealmente independientes y generadores de los Juegos Generalizados de Externalidades.

Definición 3.3 *Un juego de mínima participación asociado al vector β y a la coalición T , $v_{T,\beta}$, se define como:*

$$\begin{aligned} v_{T,\beta}(S) &= 0 && \text{si } \text{card}(S) < \text{card}(T) \text{ o bien} \\ & && \text{si } \text{card}(S) = \text{card}(T) \text{ y } \sum_{i \in S} \beta_i < \sum_{i \in T} \beta_i \\ v_{T,\beta}(S) &= \sum_{i \in S} \beta_i && \text{si } \text{card}(S) \geq \text{card}(T) \text{ o bien} \\ & && \text{si } \text{card}(S) = \text{card}(T) \text{ y } \sum_{i \in S} \beta_i \geq \sum_{i \in T} \beta_i \end{aligned}$$

El conjunto de juegos de mínima participación asociados a un $v \in GE_N$ lo denotaremos por v_β y estará definido por

$$v_\beta = (v_{T,\beta})_{T \in 2^N}$$

Dado el conjunto de coaliciones $S \subset N$ de un $v \in GE_N$ consideremos el siguiente conjunto $\mathcal{L}$ de coaliciones:

$$\mathcal{L} = \{S_0, S_1, S_2, \dots, S_m\}$$

donde se verifica (i) $\text{card}(S_{k-1}) < \text{card}(S_k)$ y (ii) si los cardinales de coaliciones consecutivas coinciden, $\text{card}(S_{k-1}) = \text{card}(S_k)$, entonces las dotaciones verifican que $\sum_{i \in S_{k-1}} \beta_i < \sum_{i \in S_k} \beta_i$, donde $S_0 = \emptyset$ y $S_m = N$ con $n \leq m \leq 2^n - 1$.

Obsérvese que el conjunto $\mathcal{L}$ son las coaliciones iniciales del juego ordenadas con la característica de que si dos coaliciones, S y T , tienen el mismo número de participantes y la misma suma de dotaciones estarán representadas por la misma coalición S_h para algún $h \in M$ siendo $M = \{0, 1, 2, \dots, m\}$.

Es inmediato mostrar que los GE_N que tienen una suma de dotaciones iguales para cada coalición y el mismo parámetro α , forman un subespacio vectorial de los juegos cooperativos. Denotamos por GE_N^β a este subconjunto de juegos.

Proposición 10 *Dado un juego $v \in GE_N^\beta$ con vector de dotaciones $(\beta_i)_{i \in N}$, sea $\mathcal{L} = \{S_1, \dots, S_r\}$ un conjunto de coaliciones ordenadas de la manera anterior, entonces el conjunto de juegos de mínima participación asociados a las coaliciones que forman $\mathcal{L}$, $v_\beta = (v_{T,\beta})_{T \in \mathcal{L}}$, forman una base de los GE_N^β .*

Demostración:

Sea una combinación lineal de juegos de mínima participación, $\{v_{S_k,\beta}\}_{S_k \in \mathcal{L}}$, igualada al juego nulo¹ 0_N y con $\lambda_{S_k} \in \mathbb{R}$

$$\sum_{S_k \in \mathcal{L}} \lambda_{S_k} v_{S_k,\beta} = 0_N \quad [3.1]$$

Para demostrar que los juegos $v_{S_k,\beta}$ son linealmente independientes tenemos que ver que en toda combinación lineal de los $\{v_{S_k,\beta}\}$ igualada a 0_N los reales λ_{S_k} son cero.

Supongamos que existe algún $\lambda_{S_m} \neq 0$; seleccionamos, entre todos los escalares que sean distintos de cero, el correspondiente a la coalición que contenga menor participación, es decir, $S_m \in \mathcal{L}$, $\lambda_{S_m} \neq 0$ y $\text{card}(S_m) < \text{card}(S_k) \forall S_k \in \mathcal{L}$ con $\lambda_{S_k} \neq 0$. Si esta selección no se pudiese efectuar, es decir, si existiesen varios escalares distintos de cero y las coaliciones asociadas fuesen del mismo tamaño, tendríamos que elegir aquel escalar asociado a la coalición de menor² suma de dotaciones.

¹El juego nulo sería aquel que concede a todo jugador el pago igual a cero.

²Recuérdese que no existen en $\mathcal{L}$ coaliciones del mismo tamaño y con igualdad de suma de dotaciones.

Dada la expresión [3.1] obtenemos que

$$\begin{aligned}
 v_{S_m, \beta}(S_m) &= \sum_{S_k \neq S_m \in \mathcal{L}} -\frac{\lambda_{S_k}}{\lambda_{S_m}} v_{S_k, \beta}(S_m) = \sum_{S_k: \text{card}(S_k) < \text{card}(S_m)} -\frac{\lambda_{S_k}}{\lambda_{S_m}} \sum_{i \in S_m} \beta_i \\
 &+ \sum_{S_k: \text{card}(S_k) > \text{card}(S_m)} -\frac{\lambda_{S_k}}{\lambda_{S_m}} 0 + \sum_{\substack{S_k: \text{card}(S_k) = \text{card}(S_m) \\ \sum_{i \in S_k} \beta_i > \sum_{i \in S_m} \beta_i}} -\frac{\lambda_{S_k}}{\lambda_{S_m}} 0 \\
 &+ \sum_{\substack{S_k: \text{card}(S_k) = \text{card}(S_m) \\ \sum_{i \in S_k} \beta_i < \sum_{i \in S_m} \beta_i}} -\frac{\lambda_{S_k}}{\lambda_{S_m}} 0 = \sum_{S_k: \text{card}(S_k) < \text{card}(S_m)} -\frac{\lambda_{S_k}}{\lambda_{S_m}} \sum_{i \in S_m} \beta_i
 \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que $\sum_{S_k \in \mathcal{L}: \text{card}(S_k) < \text{card}(S_m)} -\frac{\lambda_{S_k}}{\lambda_{S_m}} = 1$ ya que la expresión inicial $v_{S_m, \beta}(S_m) = \sum_{i \in S_m} \beta_i$. Con todo esto podemos afirmar que algún λ_{S_k} es distinto de cero y eso no es posible por la manera en la que hemos seleccionado S_m . Como llegamos a una contradicción, tenemos que el conjunto $\{v_\beta\}$ es linealmente independiente.

Veamos que todo $v \in GE_N^\beta$ $v(S) = (\sum_{i \in S} \beta_i)^\alpha r(s)$ se puede escribir como combinación lineal de juegos de mínima participación.

Sea una combinación lineal de juegos de mínima participación, $\sum_{S_k \in \mathcal{L}} \lambda_{S_k} v_{S_k, \beta}$ con λ_{S_k} con $k = 1, 2, \dots, m$, definida del siguiente modo

$$\lambda_{S_k} \doteq \frac{v(S_k)}{\sum_{i \in S_k} \beta_i} - \frac{v(S_{k-1})}{\sum_{i \in S_{k-1}} \beta_i}$$

Dado un Juego Generalizado de Externalidades, v , tenemos que dada cualquier $S \subset N$ existe S_h del conjunto $\mathcal{L}$ tal que $\sum_{i \in S_h} \beta_i = \sum_{i \in S} \beta_i$ y además $\text{card}(S_h) = \text{card}(S)$. Así podemos afirmar que $v(S) = v(S_h)$.

Por otro lado, desarrollando³ la expresión dada por $\sum_{S_k \in \mathcal{L}} \lambda_{S_k} v_{S_k, \beta}(S)$ tenemos que,

³Aplicar la definición de λ y de los juegos de mínima participación.

$$\begin{aligned}
\sum_{S_k \in \mathcal{L}} \lambda_{S_k} v_{S_k \beta}(S) &= \sum_{S_k \in \mathcal{L}} \left[\frac{v(S_k)}{\sum_{i \in S_k} \beta_i} - \frac{v(S_{k-1})}{\sum_{i \in S_{k-1}} \beta_i} \right] v_{S_k, \beta}(S) \\
&= \sum_{S_k \in \mathcal{L}: \text{card}(S_k) < \text{card}(S)} \left[\frac{v(S_k)}{\sum_{i \in S_k} \beta_i} - \frac{v(S_{k-1})}{\sum_{i \in S_{k-1}} \beta_i} \right] \sum_{i \in S} \beta_i \\
&\quad + \sum_{\substack{S_k: \text{card}(S_k) = \text{card}(S) \\ \sum_{i \in S_k} \beta_i \leq \sum_{i \in S} \beta_i}} \left[\frac{v(S_k)}{\sum_{i \in S_k} \beta_i} - \frac{v(S_{k-1})}{\sum_{i \in S_{k-1}} \beta_i} \right] \sum_{i \in S} \beta_i \\
&\quad + \sum_{\substack{S_k: \text{card}(S_k) = \text{card}(S) \\ \sum_{i \in S_k} \beta_i > \sum_{i \in S} \beta_i}} \left[\frac{v(S_k)}{\sum_{i \in S_k} \beta_i} - \frac{v(S_{k-1})}{\sum_{i \in S_{k-1}} \beta_i} \right] 0 \\
&\quad + \sum_{S_k \in \mathcal{L}: \text{card}(S_k) > \text{card}(S)} \left[\frac{v(S_k)}{\sum_{i \in S_k} \beta_i} - \frac{v(S_{k-1})}{\sum_{i \in S_{k-1}} \beta_i} \right] 0 \\
&= v(S_h) = v(S). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

La estructura algebraica que presentan los Juegos Generalizados de Externalidades (GE_N) será utilizada en el estudio de las soluciones para estos juegos.

Otra propiedad importante en los juegos cooperativos es la convexidad (véase apéndice), ya que permite relacionar distintos tipos de soluciones. Sin embargo, la convexidad es un requisito demasiado fuerte para establecer ese tipo de relaciones, por lo que se han estudiado versiones más débiles en las que estas relaciones se siguen manteniendo. En las propiedades siguientes se muestra cómo los GE_N satisfacen una de estas definiciones. En las secciones siguientes se mostrará la utilidad de estas generalizaciones del concepto de convexidad. En el apéndice se darán condiciones suficientes para que un juego $v \in GE_N$ cumpla la condición de convexidad.

En primer lugar vamos a enunciar el concepto de semiconvexidad que fue introducido por Driessen y Tijs (1983).

Definición 3.4 *Un juego cooperativo, (N, v) es semiconvexo si se verifica que:*

$$v(N) - v(N \setminus i) \geq v(\{i\}) \quad (1)$$

$$v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} (v(N) - v(N \setminus j)) \leq v(\{i\}) \quad (2)$$

$$\forall i \in N, \forall S \subset N, i \in S.$$

Se puede comprobar inmediatamente que los juegos convexos están incluidos en el conjunto de juegos semiconvexos.

Proposición 11 *Los Juegos Generalizados de Externalidades son juegos semiconvexos.*

Demostración:

Probemos que se cumple (1): En el caso de Juegos Generalizados de Externalidades tenemos que demostrar que

$$\left(\sum_{i \in N} \beta_i\right)^\alpha r(n) - \left(\sum_{j \in N \setminus i} \beta_j\right)^\alpha r(n-1) \geq \beta_i^\alpha r(1).$$

Dado que $\beta_i^\alpha r(1) \leq \binom{\alpha}{\alpha} \beta_i^\alpha r(n).$

Entonces se verifica que

$$\begin{aligned} & \beta_i^\alpha r(1) \leq \\ & \left(\sum_{j \in N \setminus i} \beta_j\right)^\alpha (r(n) - r(n-1)) + \binom{\alpha}{1} \left(\sum_{j \in N \setminus i} \beta_j\right)^{\alpha-1} \beta_i r(n) + \dots + \binom{\alpha}{\alpha} \beta_i^\alpha r(n) = \\ & = \left(\sum_{i \in N} \beta_i\right)^\alpha r(n) - \left(\sum_{j \in N \setminus i} \beta_j\right)^\alpha r(n-1). \end{aligned}$$

Veamos que se cumple (2):

$$\begin{aligned} \beta_i^\alpha r(1) & \geq \left(\sum_{j \in S} \beta_j\right)^\alpha r(s) - (s-1) \left(\sum_{i \in S} \beta_i + \sum_{i \in N \setminus S} \beta_i\right)^\alpha r(n) - \sum_{j \in S \setminus i} \left(\sum_{i \in N \setminus j} \beta_i\right)^\alpha r(n-1) \\ & = \left(\sum_{j \in S} \beta_j\right)^\alpha r(s) - (s-1) \left(\sum_{i \in N} \beta_i\right)^\alpha r(n) - \sum_{j \in S \setminus i} \left(\sum_{i \in N \setminus j} \beta_i\right)^\alpha r(n-1) \\ & = \left(\sum_{j \in S} \beta_j\right)^\alpha r(s) - \sum_{j \in S \setminus i} \left(\sum_{i \in N} \beta_i\right)^\alpha r(n) - \left(\sum_{i \in N \setminus j} \beta_i\right)^\alpha r(n-1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esta propiedad de semiconvexidad en los Juegos Generalizados de Externalidades nos permitirá, en las próximas secciones dedicadas al estudio de las soluciones de los juegos cooperativos, dar una fórmula sencilla para la solución llamada τ -value en los Juegos Generalizados de Externalidades.

3.3 Soluciones de los GE_N .

Una solución para un juego cooperativo es un vector, $x \in R^n$, cuya componente i -ésima representa la asignación que le correspondería al jugador i . Además la

suma de estas n asignaciones debe ser igual a la cantidad total $v(N)$, siempre que el juego sea superaditivo. En la literatura existen dos tipos de soluciones: las soluciones de conjunto y las soluciones puntuales. Entre las primeras vamos a estudiar el Núcleo, el conjunto de negociación de Aumann-Maschler y el conjunto de negociación de Mas-Colell. Estas soluciones proponen un conjunto de asignaciones. En cambio, las soluciones puntuales, valor de Shapley y τ -value, proponen una única distribución.

3.3.1 Soluciones de conjunto.

En esta sección estudiamos la existencia de asignaciones en el núcleo y demostramos que el núcleo coincide con el conjunto de negociación de Aumann y Maschler (1964) y con el conjunto de negociación de Mas-Colell (1989). Los Juegos Generalizados de Externalidades constituyen una clase de juegos en los que las soluciones anteriormente mencionadas coinciden.

Definición 3.5 *Sea v un juego cooperativo superaditivo en forma característica. El conjunto núcleo, $C(v)$, está constituido por las asignaciones $x = (x_i)_{i \in N}$ tales que se verifican las siguientes desigualdades:*

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ y } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N$$

Proposición 12 *Los Juegos Generalizados de Externalidades poseen núcleo no vacío.*

La demostración es un corolario de la Proposición 17 donde se demuestra que la distribución proporcional pertenece al núcleo.

Otras soluciones para los juegos cooperativos en forma característica vienen dadas por los conjuntos de negociación.

La principal característica de los conjuntos de negociación se haya en las objeciones y contraobjeciones que realizan los jugadores en el proceso de negociación. Pasemos a analizar estos conceptos.

Definición 3.6 *Una objeción del jugador i contra el jugador j con respecto a la imputación x es un par (T, y) con $T \in \Gamma_{ij}$ e $y \in \mathbb{R}^t$, donde $\Gamma_{ij} = \{S \in N : i \in S \text{ y } j \notin S\}$ y que verifica que:*

- (i) $y_k > x_k \quad \forall k \in T$
- (ii) $y(T) = v(T)$

Definición 3.7 *Dada una objeción (T, y) de i contra j . Diremos que (M, z) es una contraobjeción de j contra i si $M \in \Gamma_{ji}$, $z \in \mathbb{R}^m$ y se verifica que:*

- (i) $z_k \geq y_k \quad \forall k \in M \cap T$
- (ii) $z_k \geq x_k \quad \forall k \in M \setminus T$
- (iii) $z(M) = v(M)$

Aumann y Maschler (1964) definen el conjunto de negociación de la siguiente manera:

Definición 3.8 Una imputación $x \in I(v)$ es un elemento del conjunto de negociación $\mathcal{M}_1^{(i)}(v)$ si para cada objeción de un jugador i contra otro jugador j con respecto a x existe una contraobjeción de j contra i .

Es inmediato comprobar que todo elemento del núcleo pertenece al conjunto de negociación de Aumann-Maschler. Mediante la definición de núcleo obsérvese que no es posible realizar ninguna contraobjeción contra un elemento del núcleo.

La siguiente proposición establece que el conjunto de negociación y el núcleo de los juegos Generalizados de Externalidades coinciden. Sabemos que si una asignación está en el núcleo entonces pertenece al conjunto de negociación. Nos falta demostrar que toda asignación del núcleo también pertenece al conjunto de negociación.

Antes de enunciar y demostrar esta proposición necesitaremos los siguientes resultados (aquí sólo lo enunciamos, véanse las Proposiciones 26 y 27 en el apéndice):

Si $x \notin C(v)$ entonces podemos seleccionar una coalición T que verifica lo siguiente:

- (i) $v(T) - x(T) > 0$.
- (ii) $v(T) - x(T) \geq v(S) - x(S) \quad \forall S \subset N$.
- (iii) Si $v(T) - x(T) = v(S) - x(S)$ entonces $\text{card}(T) \geq \text{card}(S)$.

Es decir, T es la coalición con mayor exceso (diferencia entre $v(\cdot)$ y $x(\cdot)$) respecto a esa asignación x que no está en el núcleo.

Una vez fijada T , seleccionamos un jugador i de esa coalición de la siguiente manera: De todos los jugadores que constituyen T seleccionamos aquel que verifica $\frac{x_i}{\beta_i} \leq \frac{x_k}{\beta_k}$ para todo jugador k perteneciente a la coalición T . Si existiesen dos pares (T, i) $(\hat{T}, \hat{i})$ tal que $v(T) - x(T) = v(\hat{T}) - x(\hat{T})$, $\text{card}(T) = \text{card}(\hat{T})$ elegimos el par que contenga al jugador i tal que $\frac{x_i}{\beta_i} \leq \frac{x_{\hat{i}}}{\beta_{\hat{i}}}$.

Trás la elección de un par (T, i) , podemos garantizar que dado $W \in \Gamma_{ji}$ se verifican las siguientes desigualdades:

$$\sum_{i \in W \setminus T} \beta_i \frac{v(W)}{\sum_{i \in W} \beta_i} \leq \sum_{i \in W \setminus T} x_i \quad [3.9.1]$$

$$v(T) - x(T) > v(W) - x(W) \quad \forall W \in \Gamma_{ji} \quad [3.9.2]$$

La existencia de jugadores y coaliciones que verifican estas desigualdades se demuestra por contradicción (véase Apéndice).

Otro resultado que vamos a utilizar es el siguiente:

Sea $(N, v) \in \Gamma_N$, $x \in \mathbb{R}^N$ con $x_j \geq v(j)$ y sea el vector con $N-1$ coordenadas $s = (s_1, s_2, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots) \in \mathbb{R}^{N-1}$, entonces si $\sum_{i \in T} s_i \geq v_x^{N-j}(T)$ para toda coalición $T \subset N \setminus j$ se verifica que,

$$\sum_{i \in S \setminus j} s_i + \sum_{i \in S \cap \{j\}} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N$$

donde v_x^{N-j} es el juego reducido tal que, $v_x^{N-j}(\emptyset) = 0$ y

$$v_x^{N-j}(T) = \max\{v(T); v(T \cup j) - x_j\} \quad \forall T \subset N \setminus j.$$

Proposición 13 Sea un juego $v \in GE_N$, entonces $C(v) = \mathcal{M}_1^{(i)}(v)$.

Demostración:

Para todo juego se cumple que $C(v) \subset \mathcal{M}_1^{(i)}(v)$.

Veamos que $\mathcal{M}_1^{(i)}(v) \subset C(v)$. Para ello vemos que para toda asignación que no pertenece al núcleo existe una objeción que no tiene contraobjeción.

Sea $x \notin C(v)$, entonces seleccionamos T, i como los descritos en [3.9.1] y [3.9.2]. El jugador i mediante la coalición T objetará respecto a x y el jugador $j \in N \setminus T$ será el que contraobjetará con una coalición $M \in \Gamma_{ji}$.

Veamos la coalición M con detalle: M debe tener algún jugador de T , ya que si $M \cap T = \emptyset$ tendríamos que $v(M) < \sum_{i \in M} x_i$ y esto último es una contradicción (aplicando 3.9.1 a $W = M$).

Por lo tanto, M tendrá jugadores de T , de fuera de T y al jugador j . Es decir, podemos dividir de la siguiente forma a los agentes que forman parte de M :

$$M = S \cup R \cup j$$

donde $S \subset T \setminus i$ y $R \subset N \setminus (T \cup j)$.

Para cada coalición R definimos el siguiente juego $(T \setminus \{i\}, w_R)$ donde

$$w_R(S) = v(S \cup R \cup j) - \sum_{i \in R \cup j} x_i \quad \forall S \subset T \setminus \{i\}$$

Definimos el juego $(T \setminus \{i\}, u)$ donde

$$u(S) = \max_{R \subset N \setminus (T \cup j)} w_R(S)$$



Sea p_k la distribución proporcional⁴ del jugador k respecto del juego u :

$$p_k = \beta_k \frac{u(T \setminus \{i\})}{\sum_{i \in T \setminus \{i\}} \beta_i}.$$

Estudiemos los posibles casos que nos podemos encontrar en un Juego Generalizado de Externalidades:

Caso 1: $\text{card}(T \setminus \{i\}) = 1$ y que $p_k \leq x_k$ siendo k el jugador de $T \setminus \{i\}$.

Tenemos que $x_k \geq \max_{Q \subset N \setminus (T \cup j)} w_Q(k) \geq v(k \cup R \cup j) - x(R \cup j)$ para toda coalición R que no tenga elementos de $T \cup j$.

La objeción⁵ de i , (T, y) , contra j definida como

$$y_k = x_k + \frac{e}{2}$$

$$y_i = x_i + \frac{e}{2}$$

donde e es el exceso $e = v(T) - x(T)$.

Esta objeción no tiene ninguna contraobjeción de j . Para afirmar esto supongamos que hubiese una contraobjeción⁶ (M, z) de j contra i respecto a (T, y) , entonces

$$\sum_M z_i = z_k + \sum_{R \cup j} z_i \geq y_k + \sum_{R \cup j} x_i > x_k + \sum_{R \cup j} x_i \geq v(M)$$

Esta desigualdad no es posible ya que $v(M) = \sum_{i \in M} z_i$.

Por lo tanto, llegados a esta contradicción, podemos afirmar que para este caso dada una asignación que no está en el Núcleo tampoco pertenece al conjunto de negociación.

Caso 2: $\text{card}(T \setminus \{i\}) \geq 1$ y además $x_k < p_k$.

Consideremos t_h para todo $h \in T \setminus i$, de la siguiente forma

$$t_h = \beta_h \frac{u(T \setminus i)}{\sum_{k \in T \setminus i} \beta_k} - x_h$$

El jugador i realiza la objeción (T, y) contra j donde

$$y_k = x_k + t_k + \frac{d}{t} \quad \forall k \in T \setminus i$$

$$y_i = x_i + \frac{d}{t}$$

⁴Esta asignación $(p_k)_{k \in T \setminus i}$ será objeto de estudio en la sección 3.3.2 de este capítulo.

⁵Nótese que $x(k \cup R \cup j) \geq v(k \cup R \cup j) \quad \forall R \subset N \setminus (t \cup j)$

⁶ $M = S \cup R \cup j$

donde $t = \text{card}(T)$ y $d = [v(T) - x(T)] - [v(T \setminus i \cup R \cup j) - x(T \setminus i \cup R \cup j)]$, considerando R la coalición que define al juego u .

Nuevamente j no podrá lanzar una contraobjeción (M, z) contra i , ya que llegaríamos a una contradicción del tipo $\sum_{i \in M} z_i > v(M)$, ya que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in M} z_k &\geq \sum_{k \in S} y_k + \sum_{R \cup j} x_k > \sum_{i \in S} (x_i + t_i) + \sum_{R \cup j} x_k \\ &\geq \sum_{k \in S} \beta_k \frac{u(S)}{\sum_{k \in S} \beta_k} + \sum_{R \cup j} x_k \\ &= u(S) + \sum_{R \cup j} x_k \geq v(S \cup R \cup j) - \sum_{R \cup j} x_k + \sum_{R \cup j} x_k \\ &= v(M). \end{aligned}$$

Caso 3: Algún jugador⁷, b_1 de $T \setminus i$, verifica que $x_{b_1} \geq p_{b_1}$.

Consideramos el juego reducido⁸ del juego u eliminando el jugador b_1 .

Si algún jugador en $T \setminus i \cup b_1$ sigue verificando la desigualdad $x_{b_2} \geq p_{b_2}$, volvemos a reducir el juego que anteriormente habíamos reducido y así sucesivamente. Sea E^m el conjunto formado por los jugadores eliminados. Obsérvese que los jugadores eliminados respecto a juego reducido verifican $x_{b_j} \geq u_{x, T \setminus i \cup E^{j-2}}^{T \setminus i \cup E^{j-1}}(b_j)$

Entonces pueden ocurrir dos cosas:

1.- El número de jugadores que quedan en $T \setminus (\{i\} \cup E^m)$ es igual a 1. A este jugador lo denotamos por $\hat{k}$, y se verifica que $x_{\hat{k}} \geq \beta_{\hat{k}} \frac{u^{T \setminus (\{i\} \cup E^m)}(\hat{k})}{\beta_{\hat{k}}}$. Con lo cual volveríamos al Caso 1 (aplicado sobre el juego reducido) y haciendo uso del resultado de la Proposición 27 del apéndice tenemos que, partiendo de un elemento x_{b_1} podemos obtener $(x_h)_{h \in S}$ tal que $x^{T \setminus i}(S) \geq u(S) \forall S \subset T \setminus i$. Nuevamente construimos una objeción⁹ que no tiene contraobjeción posible.

2.- El número de jugadores que quedan en el conjunto $T \setminus (\{i\} \cup E^m)$ es al menos 1, y se verifica que

$$x_k < \beta_k \frac{u^{T \setminus i \cup E^m}}{\sum_{k \in T \setminus i \cup E^m} \beta_k}$$

⁷Nótese que es imposible que se verifique para todos los jugadores, porque si ello ocurriese no habría objeción.

⁸Dado $x \in \mathbb{R}^n$ el juego reducido a la coalición $N \setminus j$ para x se define como:

$$v_x^{N \setminus j}(\emptyset) = 0; \quad v_x^{N \setminus j}(T) = \max\{v(T), v(T \cup j) - x_j\} \quad \forall T \subset N \setminus j$$

⁹Análoga a la construida en el Caso 1:

$$y_i = x_i + \frac{v(T) - x(T)}{t}$$

siendo $t = \text{card}(T)$.

Nuevamente se realiza la reducción del juego u (tantas reducciones como elementos contenga E_m) y de forma análoga¹⁰ al Caso 2 se realiza una objeción y que no tiene contraobjeción posible. En el transcurso de las reducciones obtenemos puntos pertenecientes al Núcleo de los juegos reducidos y aplicando la Proposición 27 obtenemos puntos del Núcleo del juego original. De este modo podemos formular (véase la construcción en el apéndice) la objeción $y \in \mathbb{R}^t$ utilizando la coalición T :

$$y_i = x_i + \frac{h}{t} \text{ si } i \in \{i\} \cup E^m$$

$$y_i = x_i + \frac{h}{t} + t_i \text{ si } i \in T \setminus (\{i\} \cup E^m).$$

siendo $h > 0$ y $h = v(T) - x(T) - (v(S) - x(S))$ con S una coalición que contenga al jugador j y no contenga al jugador i .

Analizados todos los posibles casos hemos concluido que $\mathcal{M}(v) \subset C(v)$ por lo que queda demostrada la proposición. ■

El conjunto de negociación de Mas-Colell es otro tipo de solución que se define del siguiente modo:

Definición 3.9 Sea x una asignación tal que $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. Una objeción respecto a x es un par (T, y) , $T \subset N$, $y \in \mathbb{R}^t$ tal que

- (i) $y_i \geq x_i \quad \forall i \in T$, siendo alguna de las desigualdades estricta.
- (ii) $\sum_{i \in T} y_i \leq v(T)$

Definición 3.10 Dada una objeción (T, y) . Diremos que (M, z) es una contraobjeción si $M \subset N$, $z \in \mathbb{R}^m$ y se verifica que:

- (i) $z_k \geq y_k \quad \forall k \in M \cap T$
- (ii) $z_k \geq x_k \quad \forall k \in M \setminus T$
- (iii) $z(M) \leq v(M)$

Definición 3.11 Una asignación x es un elemento del conjunto de negociación de Mas-Colell, $B(v)$, si para cada objeción con respecto a x existe una contraobjeción.

Proposición 14 El conjunto de negociación de Mas-Colell coincide con el núcleo de los Juegos Generalizados de Externalidades.

¹⁰En este caso con las reducciones efectuadas consideraremos

$$t_h = \beta_h \frac{u^{T \setminus (\{i\} \cup E^m)}(T \setminus i \cup E^m)}{\sum_{k \in T \setminus (\{i\} \cup E^m)} \beta_k} - x_h$$

como una asignación del núcleo del juego $u^{T \setminus (\{i\} \cup E^m)} - x$ para construir la objeción y .

Demostración:

La demostración de este resultado se realiza de forma análoga a la anterior demostración considerando los siguientes casos:

Caso 1: Todo elemento de la coalición T de máximo exceso verifica

$$x_k < \beta_k \frac{u(T)}{\sum_{i \in T} \beta_i} \forall k \in T$$

Construimos la objeción: $y_i = \beta_i \frac{u(T)}{\sum_{i \in T} \beta_i} \forall i \in T$

A esta objeción no se le puede realizar ninguna contraobjeción¹¹ en el sentido de Mas-Colell:

Si existiese una contraobjeción (M, z) llegaríamos a la siguiente contradicción:

$$\sum_{i \in M} z_i > \sum_{i \in S} y_i + \sum_{i \in R} x_i \geq u(S) + \sum_{i \in R} x_i \geq w_R(S) + \sum_{i \in R} x_i = v(M)$$

Caso 2: Algún elemento, k , de la coalición T verifica

$$x_k \geq \beta_k \frac{u(T)}{\sum_{i \in T} \beta_i} \quad [16.2]$$

Para desarrollar este caso procedemos del mismo modo que en el caso 3 de la anterior proposición. Empezamos a reducir el juego inicial y reducimos tantas veces como jugadores de T verifican la expresión [16.2]. Al final construimos una objeción (T, y) que no tiene contraobjeción posible (véase apéndice). Con ello terminamos concluyendo que

$$B(v) \subset C(v). \quad \blacksquare$$

3.3.2 Soluciones puntuales.

Entre las soluciones puntuales más interesantes de los juegos cooperativos se encuentran el valor de Shapley. Pero esta solución no siempre pertenece al núcleo (Grafe *et al.*, 1998).

Otra solución puntual en los juegos cooperativos es el τ -value (Tijs, 1981). En un estudio posterior Driessen y Tijs (1983) muestran que el τ -value de los juegos semiconvexos con $n \leq 4$ pertenece al núcleo. Como los GE_4 cumplen esta propiedad podemos concluir que el τ -value pertenece al núcleo. Además, por el hecho de que los GE_N son equilibrados existe una fórmula un poco más

¹¹Dado M podemos considerar $M = S \cup R, S \subset TR \subset N \setminus T$

simple para el cómputo del τ -value. En el apéndice se desarrollan estos conceptos y se muestran condiciones suficientes para que esta solución pertenezca al núcleo de un GE_N .

Finalmente proponemos la distribución proporcional como un concepto de solución atractivo para los Juegos Generalizados de Externalidades. La definición tiene las características de otras soluciones proporcionales propuestas en distintos tipos de juegos (Financieros, Bancarrota, etc.).

Los GE_N tiene como elemento primitivo, además de la función característica, los recursos que aporta cada jugador. Parece inevitable hacer referencia a estos recursos a la hora de proponer una solución para este tipo de juegos. En este sentido el reparto proporcional puede ser una solución aceptable. Es evidente que cualquiera de los repartos estudiados en las secciones anteriores son posibles, pero a veces para ciertos tipos de juegos no parecen las más idóneas. El considerar soluciones que tengan en cuenta las aportaciones de los jugadores plantea una diferencia formal respecto de las soluciones clásicas: estas últimas se aplican sobre el juego v ; la solución proporcional deberá aplicarse sobre el par (v, β) .

Definición 3.12 Sea (N, v) un Juego Generalizado de Externalidades y sean $\beta_1, \dots, \beta_n$ las dotaciones de cada jugador, definiremos la solución proporcional, $p(v, \beta) \in \mathbb{R}^n$ como

$$p_i(v, \beta) = \left(\frac{\beta_i}{\sum_{i \in N} \beta_i} v(N) \right)_{i=1, \dots, n}$$

Veamos algunas de las propiedades que verifica esta solución:

- Pseudo racionalidad individual (PSRI): Si $\frac{v(N)}{\sum_{i \in N} \beta_i} \geq 1$ entonces $p_i(v, \beta) \geq \beta_i$. Esta propiedad puede interpretarse del siguiente modo: Si el valor total del juego es mayor que el total de recursos aportados por los participantes, entonces cada jugador va a recibir, al menos, lo que aportó.

- Eficiencia (EF): $\sum_{i \in N} p_i(v, \beta) = v(N)$

- Linealidad restringida (LR): Sean v_1 y v_2 dos Juegos Generalizados de Externalidades con el mismo vector de dotaciones β . Entonces se verifica que:

$$p_i(v_1, \beta) + p_i(v_2, \beta) = p_i(v_1 + v_2, \beta)$$

$$p_i(\lambda v, \beta) = \lambda p_i(v, \beta), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Proposición 15 La solución dada por la distribución proporcional de un Juego Generalizado de Externalidades es un elemento del Núcleo de dicho juego.

Demostración:

Probar que el vector distribución proporcional está bien definido es inmediato.

Debemos probar las dos propiedades que deben cumplir las asignaciones del Núcleo:

$$i) \sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

$$ii) \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset N.$$

La igualdad $i)$ es trivial. Para demostrar $ii)$ hagamos el siguiente desarrollo:

$$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} \pi_i \frac{v(N)}{\sum_{j \in N} \pi_j} = \sum_{i \in S} \pi_i \frac{(\sum_{i \in N} \pi_i)^\alpha h(n)}{\sum_{j \in N} \pi_j}$$

La función $f(x) = x^{\alpha-1}$ con $\alpha \geq 1$ es no decreciente. Entonces, tenemos

$$\left(\sum_{i \in N} \pi_i \right)^{\alpha-1} \geq \left(\sum_{i \in S} \pi_i \right)^{\alpha-1}$$

aplicando esta desigualdad a la anterior expresión obtenemos,

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset N. \quad \blacksquare$$

Proposición 16 *La distribución proporcional es la única solución que cumple las propiedades EF, PSRI y LR.*

Demostración:

Sea v un Juego Generalizado de Externalidades con n jugadores. Consideremos una solución Φ^n que satisface las propiedades de EF, PSRI y LR. Vamos a demostrar que esa solución coincide con la distribución proporcional.

Sabemos que todo Juego Generalizado de Externalidades v se puede escribir como combinación lineal de juegos de mínima participación, es decir,

$$v = \sum_{k=1}^m \lambda_{S_k} v_{S_k \beta}$$

donde $v_{S_k \beta}$ son los juegos de mínima participación que generan a v y $\lambda_{S_k} = \frac{v(S_k)}{\sum_{i \in S_k} \beta_i} - \frac{v(S_{k-1})}{\sum_{i \in S_{k-1}} \beta_i}$.

Entonces utilizando las propiedades LR y PSRI tenemos que,

$$\begin{aligned} \Phi_i(v, \beta) &= \Phi_i\left(\sum_{k=1}^m \lambda_{S_k} v_{S_k \beta}, \beta\right) = \sum_{k=1}^m \lambda_{S_k} \Phi_i(v_{S_k \beta}, \beta) \\ &\geq \sum_{k=1}^m \lambda_{S_k} \beta_i = \frac{v(N)}{\sum_{i \in N} \beta_i} \beta_i = p_i(v, \beta). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nótese que estas propiedades no se cumplen para todas las soluciones puntuales que hemos estudiado a lo largo de este capítulo. Por ejemplo, el valor de Shapley cumple EF y LR pero no PSIR. La solución proporcional es la única que cumple estos tres axiomas.

3.4 Conclusiones y comentarios.

Los Juegos Generalizados de Externalidades estudiados en este capítulo constituyen una extensión de los Juegos de Externalidades estudiados por Grafe *et al.*(1998). La función característica, v , que presentan este nuevo tipo de juegos es interesante en algunos contextos económicos. Existen situaciones económicas en el que el pago a una coalición viene dado por una expresión análoga a la de los Juegos Generalizados de Externalidades $v(S) = (\sum_{i \in S} \beta_i)^\alpha r(s)$. Esta generalización de la definición original es una de las muchas posibles. En esta primera generalización añadimos el parámetro α , que hace que el juego sea algo más que un juego aditivo. En investigaciones futuras realizaremos otras extensiones de los Juegos de Externalidades. Por ejemplo, podemos considerar las expresiones:

$$v(S) = \sum_{i \in S} \beta_i^{\alpha_i} r(s) \quad v(S) = \sum_{i \in S} \beta_i^{\alpha(S)} r(s)$$

Nótese que en estas expresiones los exponentes afectan a cada uno de los agentes, no a la suma de las dotaciones como en los Juegos Generalizados de Externalidades. En la primera expresión tenemos un parámetro para cada agente y en la segunda expresión depende de la coalición considerada. Estas extensiones o generalizaciones pueden resultar bastante interesantes.

En cuanto a los Juegos Generalizados de Externalidades cabe destacar que poseen asignaciones en el Núcleo y que esta solución coincide con los conjuntos de negociación de Aumman-Maschler y de Mas-Colell. Otra solución interesante que se ha estudiado en este capítulo ha sido la distribución proporcional. La obtención de una caracterización axiomática de esta solución establece unas pautas para buscar nuevas soluciones para este tipo de juegos.

APÉNDICE

Otras Propiedades de los GE_N .

Proposición 17 *Si $\beta(S) = \beta(T)$ y $s = t$ entonces $v(S) = v(T)$.*

Es decir, si dos coaliciones del mismo tamaño invierten los mismos recursos en un proyecto obtendrán los mismos beneficios.

Es obvio que el recíproco de esta implicación no es, en general, cierta; ya que si $v(S) = v(T)$ puede ser que las aportaciones sean distintas, pero debido a que la presencia o número de colaboradores es determinante del valor total de la coalición, éste puede ser igual para coaliciones con distintas aportaciones y distinto número de participantes. Sin embargo, podemos enunciar una condición más restringida:

Proposición 18 *Si las aportaciones totales de dos coaliciones, S y T , son iguales ($\beta(S) = \beta(T)$), entonces el pago medio respecto a la valoración del número de participantes de la coalición es el mismo, es decir,*

$$\frac{v(S)}{r(s)} = \frac{v(T)}{r(t)}.$$

Nótese que en estos tipos de juegos no podemos afirmar siempre que cuánto más recursos posea una coalición mayor será el beneficio obtenido. Ahora una coalición con menos recursos que otra, pero con más participantes puede obtener mayores beneficios.

Observación 1.2: Algunos casos particulares de estas propiedades lo tendremos para las coaliciones S y T que verifiquen que $S \subset T$ y $S \neq T$. En este caso se cumplirá: Si $\beta(S) < \beta(T)$ entonces $v(S) \leq v(T)$.

Para coaliciones R y W tales que $\text{card}(R) \leq \text{card}(W)$. En este caso, si $\beta(R) < \beta(W)$ entonces $v(R) \leq v(W)$.

Las propiedades que se han comentado se deben a que la función $r(\cdot)$ sólo depende del cardinal de las coaliciones y no de quienes las integran.

Proposición 19 *Si $v(N) = 0$ entonces $v(S) = 0$ para toda coalición $S \in N$.*

Esta propiedad es consecuencia de la positividad del juego y del hecho de que la función r es no decreciente en el cardinal de las coaliciones.

Proposición 20 Sean $v_1, \dots, v_t$ Juegos Generalizados de Externalidades definidos sobre el mismo conjunto de jugadores N , sobre el mismo vector de recursos, $(\beta_i)_{i \in N}$ y con el mismo parámetro α , entonces v_m definido como $v_{\max}(S) = \max\{v_1(S), \dots, v_t(S)\}$ es un Juego Generalizado de Externalidades determinado por (β^α, r^m) .

Demostración:

Cada juego v_j , $j = 1, \dots, t$, viene determinado por la siguiente función de pagos $v_j(S) = (\sum_{i \in S} \beta_i)^\alpha r_j(s)$ $j = 1, \dots, t$, entonces el juego máximo queda definido como

$$v_{\max}(S) = ((\sum_{i \in S} \beta_i)^\alpha (\max_{j=1, \dots, t} r_j(s)))$$

que posee una estructura de Juego Generalizado de Externalidades ($\beta \in \mathbb{R}_+^N$ y la función r_m es no decreciente en el cardinal de las coaliciones).

Esta propiedad 1.4 nos permite afirmar que cada coalición puede invertir o participar de la mejor forma posible (el de pago máximo) en un Juego Generalizado de Externalidades (donde más se valora al número de miembros de la coalición) si cada proyecto que se presenta a dicha coalición tiene estructura de Juego Generalizado de Externalidades.

Relación entre los Juegos Convexos y los GE_N .

Existen diferentes caracterizaciones de un juego convexo. En la definición tomaremos la introducida por Shapley (1971).

Definición 3.13 Un juego cooperativo (N, v) es convexo si y solo si

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(R \cup \{i\}) - v(R), \quad \forall S, R \in 2^N, \quad R \subset S.$$

Podemos comprobar con varios ejemplos que los Juegos Generalizados de Externalidades, en general, no son convexos. Bajo ciertas condiciones, podemos obtener qué Juegos Generalizados de Externalidades cumplen las condiciones de convexidad.

Ejemplo de no convexidad en GE_N :

Sea un Juego Generalizado de Externalidades de tres jugadores, $N = \{1, 2, 3\}$, con dotaciones iniciales de los jugadores $\pi_1 = 1, \pi_2 = 2, \pi_3 = 20$, con parámetro $\alpha = 2$ y función h no decreciente dada por $h(1) = 1, h(2) = 3, h(3) = 4$. Este juego no verifica las condiciones de convexidad, pues para

algunas coaliciones la contribución de algún jugador en coaliciones grandes es menor que su contribución en otras más pequeñas.

A continuación damos algunas condiciones para que los GE_N sean convexos. La convexidad puede ser expresada de la siguiente forma:

$$v(S \cup \{i, j\}) - v(S \cup \{j\}) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S), \quad \forall S \subset N, i, j \notin S$$

En nuestro caso, como $v(S) = (\sum_{i \in S} \beta_i)^\alpha r(s)$, la convexidad queda expresada en la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i \in S} \beta_i + \pi_i + \pi_j \right)^\alpha r(s+2) - \left(\sum_{i \in S} \beta_i + \pi_j \right)^\alpha r(s+1) \geq \\ & \geq \left(\sum_{i \in S} \beta_i + \pi_i \right)^\alpha r(s+1) - \left(\sum_{i \in S} \beta_i \right)^\alpha r(s). \end{aligned}$$

Cuando el parámetro α toma el valor 1 las condiciones de convexidad son expresadas por Grafe *et al.* (1998), que resumimos en las siguientes proposiciones:

Proposición 21 *Dado un Juego de Externalidades, $v(S) = \sum_{i \in S} \beta_i r(s)$, con dotaciones ordenadas $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n$, es convexo si y solo si se verifica que:*

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_n + \beta_{n-1} + \dots + \beta_{n-s+1}} \geq \frac{r(s+1) - r(s)}{r(s+2) - r(s+1)} - 1, \quad \forall s \leq n-2.$$

También bajo ciertas condiciones de la función r podemos conseguir que algunos de los Juegos Generalizados de Externalidades sean convexos:

Proposición 22 *Un Juego de Externalidades, con función de pagos de la forma $v(S) = (\sum_{i \in S} \beta_i) r(s)$, tal que la función r es convexa, es un juego convexo.*

El requerimiento de convexidad es bastante fuerte, por ello hay muchas clases de juegos no convexos.

Unos juegos que merecen un tratamiento especial, en este apartado, son los juegos simétricos. Este tipo de juegos son aquellos en los que el beneficio que obtienen coaliciones del mismo tamaño es el mismo. En nuestro caso, si $\text{card}(S) = \text{card}(T)$ entonces $r(s) = r(t)$ y tendríamos que los Juegos Generalizados de Externalidades simétricos son aquellos que verifican que $(\sum_{i \in S} \beta_i) = (\sum_{i \in T} \beta_i)$. En esta subclase de Juegos Generalizados de Externalidades podemos establecer la siguiente condición para garantizar la convexidad del juego.

Proposición 23 Dado un juego (N, v) Generalizado de Externalidades y simétrico, $v(S) = (\sum_{i \in S} \beta_i)^\alpha r(s)$, si la función r verifica que $\frac{r(s+1)}{r(s)} > 2 \forall s$ el juego, v , es convexo.

Demostración:

Dado que el juego v es simétrico tenemos que

$$v(S \cup \{j\}) = v(S \cup \{i\})$$

Con lo cual la convexidad queda garantizada si se verifica que

$$2v(S \cup \{i\}) \leq v(S \cup \{i, j\}) + v(S) \forall i, j \notin S$$

Empleando la notación de π_i, π_j para los recursos aportados por i y j respectivamente, y desarrollando ambos lados de la desigualdad anterior tenemos que queremos demostrar que,

$$\begin{aligned} & 2\left(\sum_{i \in S} \beta_i + \pi_i\right)^\alpha r(s+1) - \left(\sum_{i \in S} \beta_i\right)^\alpha r(s) \\ & \leq \left[\left(\sum_{i \in S} \beta_i\right)^\alpha + \binom{\alpha}{1} \left(\sum_{j \in S} \beta_j\right)^{\alpha-1} (\pi_i + \pi_j) + \dots\right] r(s+2) \end{aligned}$$

Dividiendo por $r(s+2)$ la desigualdad de la izquierda tenemos,

$$\begin{aligned} & 2\left(\sum_{i \in S} \beta_i + \pi_i\right)^\alpha \frac{r(s+1)}{r(s+2)} - \left(\sum_{i \in S} \beta_i\right)^\alpha \frac{r(s)}{r(s+2)} \\ & = \left(\sum_{i \in S} \beta_i\right)^\alpha \frac{2r(s+1) - r(s)}{r(s+2)} + \left[\binom{\alpha}{1} \left(\sum_{j \in S} \beta_j\right)^{\alpha-1} (\pi_i) + \dots\right] \frac{2r(s+1)}{r(s+2)} \\ & \leq \left(\sum_{i \in S} \beta_i\right)^\alpha \frac{r(s+2) - r(s)}{r(s+2)} + 2 \binom{\alpha}{1} \left(\sum_{j \in S} \beta_j\right)^{\alpha-1} (\pi_i) \frac{r(s+1)}{2r(s+1)} + \dots \\ & \leq \left[\left(\sum_{i \in S} \beta_i\right)^\alpha + \binom{\alpha}{1} \left(\sum_{j \in S} \beta_j\right)^{\alpha-1} (\pi_i + \pi_j) + \dots\right] \end{aligned}$$

Este tipo de Juegos Generalizados de Externalidades simétricos nos reflejan la idea de que el tamaño de la coalición cambia el resultado final del juego. Aquellos Juegos Generalizados de Externalidades en los que los jugadores aporten siempre los mismos recursos, $\beta_i = E \forall i \in N$, son juegos simétricos independientemente de los valores que pueda tomar r . En las ciencias sociales, nos podemos encontrar casos de Juegos Generalizados de Externalidades simétricos.

Construcción de objeciones y contraobjeciones.

Dado un elemento $x = (x_i)_{i \in N}$ no perteneciente al núcleo, $C(v)$, de un juego $v \in GE_N$ podemos obtener los siguientes resultados:

Proposición 24 *Existe una coalición T con exceso positivo, un jugador $i \in T$, un jugador $j \notin T$, una coalición $W \in \Gamma_{ji}$ tal que se verifica:*

$$\sum_{i \in W \setminus T} \beta_i \frac{v(W)}{\sum_{i \in W} \beta_i} \leq \sum_{i \in W \setminus T} x_i$$

$$v(T) - x(T) > v(W) - x(W)$$

Demostración:

Para llegar a estos resultados se procede por contradicción:

Supongamos que todo jugador de T verificase

$$\sum_{i \in W \setminus T} \beta_i \frac{v(W)}{\sum_{i \in W} \beta_i} > \sum_{i \in W \setminus T} x_i$$

Entonces

$$v(T) - x(T) \leq v(T) - x(T) + \left[\sum_{i \in W \setminus T} \beta_i \frac{v(W)}{\sum_{i \in W} \beta_i} - \sum_{i \in W \setminus T} x_i \right] <$$

$$< \left[\sum_{i \in T} \beta_i \frac{v(W \cup T)}{\sum_{i \in W \cup T} \beta_i} - \sum_{i \in W \cup T} x_i \right] = v(W \cup T) - x(W \cup T)$$

Como se puede observar esto es una contradicción porque T era la coalición de mayor o igual exceso con respecto a las coaliciones que contienen a i .

Para comprobar que $v(T) - x(T) > v(W) - x(W)$ para toda coalición $W \in \Gamma_{ji}$ sólo tenemos que probar que $v(T) - x(T) \neq v(W) - x(W)$.

Supongamos que existe $W \in \Gamma_{ji}$ tal que $v(T) - x(T) = v(W) - x(W)$. Con esto podemos afirmar que existe un jugador k de $T \cap W$ que verifica la desigualdad $\frac{x_k}{\beta_k} < \frac{v(W)}{\sum_{i \in W} \beta_i}$. Además el jugador elegido i también verifica que $x_i < \beta_i \frac{v(W)}{\sum_{i \in W} \beta_i}$ con lo cual tenemos que,

$$v(T) - x(T) < v(T) - x(T) + \beta_i \frac{v(W)}{\sum_{i \in W} \beta_i} - x_i$$

$$= v(W) - x(W) + \beta_i \frac{v(W)}{\sum_{i \in W} \beta_i} - x_i$$

$$\leq v(W \cup i) - x(W \cup i)$$

■

Proposición 25 Sea $(N, v) \in \Gamma^N$, $x \in \mathbb{R}^N$ con $x_j \geq v(j)$ y sea el vector con $N - 1$ coordenadas $s = (s_1, s_2, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots) \in \mathbb{R}^{N-1}$, entonces si

$\sum_{i \in T} s_i \geq v_x^{N-j}(T) \quad \forall T \subset N \setminus j$ se verifica que,

$$\sum_{i \in S \setminus j} s_i + \sum_{i \in S \cap \{j\}} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N$$

donde v_x^{N-j} es el juego reducido tal que, $v_x^{N-j}(\emptyset) = 0$ y

$$v_x^{N-j}(T) = \max\{v(T); v(T \cup j) - x_j\} \quad \forall T \subset N \setminus j$$

Demostración:

Si $j \notin S$ es trivial. Supongamos que $j \in S$, entonces $S = T \cup \{j\}$ para alguna coalición T , $T \subset N \setminus j$.

Tenemos que,

$$\begin{aligned} v(S) &\leq \max\{v(T) + x_j, v(S)\} = \max\{v(T), v(T \cup j) - x_j\} + x_j = \\ &= v_x^{N \setminus j}(T) + x_j \leq \sum_{i \in T} s_i + x_j \end{aligned}$$

Prueba del Caso 2 de la proposición 8:

Si existe un jugador k tal que $x_k \geq \beta_k \frac{u(T)}{\sum_{i \in T} \beta_i}$ entonces se realiza la reducción del juego inicial y se obtiene el juego reducido $u_{x_T}^{T \setminus k}$. Si siguiesen existiendo elementos como k volveríamos a reducir el juego ya reducido y así sucesivamente hasta llegar al juego $u_{x_{T \setminus E^m}}^{T \setminus E^m}$.

Se puede comprobar fácilmente que

$$u_{x_{T \setminus E^m}}^{T \setminus E^m}(T \setminus E^m) = v(T) - x(E^m) > 0$$

Construimos el juego $\hat{u}$ definido como

$$\hat{u}(S) = u_{x_{T \setminus E^m}}^{T \setminus E^m}(S) - x(S) \quad \text{si } u_{x_{T \setminus E^m}}^{T \setminus E^m}(S) - x(S) \geq 0$$

$$\hat{u}(S) = 0 \text{ en el resto}$$

El lector puede remitirse al trabajo de Izquierdo y Rafels (1996) para la demostración de que el núcleo de este juego es no vacío.

Sea t una distribución del núcleo del juego $\hat{u}$. La objeción que se utilizará será:

$$\begin{aligned} y_i &= x_i \quad \forall i \in E^m \\ y_i &= t_i + x_i \quad \forall i \in T \setminus E^m \end{aligned}$$

Obsévese que aplicando el resultado anterior podemos obtener que:

$$u(S) \leq \sum_{i \in (T \setminus E^m) \cap S} (x_i + t_i) + \sum_{i \in E^m \cap S} x_i \quad \forall S \subset T$$

Si existiese una contraobjeción (M, z) llegaríamos a:

$$\sum_{i \in M} z_i > \sum_{i \in S} y_i + \sum_{i \in R} x_i \geq \sum_{i \in (T \setminus E^m) \cap S} (y_i) + \sum_{i \in E^m \cap S} y_i + \sum_{i \in R} x_i \geq v(M)$$

Esto invalida la contraobjeción porque se debería de establecer $z(M) \leq v(M)$. ■

El τ -value

De acuerdo con Tijs (1981), la principal propiedad de este valor es el carácter de solución compromiso, al ser una solución intermedia entre una cota superior y una cota inferior del pago que los jugadores pueden recibir. Las cotas a las que nos referimos son las siguientes:

- La cota superior, $M^v = (M_i^v)_{i \in N}$, se compone de las contribuciones marginales de cada jugador y representa lo máximo a lo que un jugador aspirará en el juego (de ahí que a veces se llame a esta cota vector de utopía).

$$M_i^v = v(N) - v(N \setminus \{i\})$$

- La cota inferior, $m^v = (m_i^v)_{i \in N}$, se compone de los pagos mínimos que cada jugador se puede asegurar en el juego, un jugador siempre puede garantizarse como pago lo que queda después de pagar a sus compañeros de coalición lo máximo a lo que éstos pueden aspirar, es decir, su contribución marginal (a esta cota se le denomina vector de mínimos derechos).

$$m_i^v = \max_{S \subset N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - \sum_{j \in S} M_j^v]$$

Para que el τ -value pueda ser calculado es necesario que se cumplan una serie de requisitos. En primer lugar sólo se puede calcular en aquellos juegos que sean cuasiequilibrados, que son aquellos que verifican las dos propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} m_i^v &\leq v(N) \leq \sum_{i \in N} M_i^v \\ m_i^v &\leq M_i^v \quad \forall i \in N \end{aligned}$$

Dentro de esta clase de juegos se incluyen los juegos equilibrados o balanceados, por lo tanto, los Juegos Generalizados de Externalidades, que ya vimos en el capítulo anterior que son juegos balanceados, permiten el cálculo de esta solución.

Una vez que hemos comprobado que se cumplen las condiciones para poder calcular el τ -value, pasemos a la definición del mismo establecida por Tijs (1981).

Definición 3.14 *El τ -value se define como la única distribución eficiente que se halla en el segmento que une las cota superior e inferior definidas anteriormente.*

Los autores Driessen y Tijs (1983) dan una fórmula que permite el cálculo del τ -value para los juegos equilibrados:

$$\tau(v) = (1 - \delta)m^v + \delta M^v$$

$$\text{donde } \delta = \frac{v(N) - \sum_{i \in N} m_i^v}{\sum_{i \in N} M_i^v - \sum_{i \in N} m_i^v}$$

Finalmente establecemos las condiciones para que el τ -value pertenezca al núcleo.

Proposición 26 *Si $v \in GE_N$, normalizado¹² y $M^v(N) = \sum_{i \in N} M_i^v > 0$, entonces el τ -valor de v pertenece al Núcleo si y solo si $\frac{M^v(N)}{M^v(N) - v(N)} \geq \frac{M^v(S)}{M^v(S) - v(S)} \quad \forall S \in 2^N$ con $1 < s < n - 1$ y $M^v(S) - v(S) \neq 0$ donde s es el cardinal S .*

Demostración:

Al ser v un juego semiconvexo tenemos que $\text{Min}_{\{S: i \in S\}} M^v(S) - v(S) = M_i^v - v(\{i\}) \quad \forall i \in N$

Sea $\lambda_i^v = \text{Min}_{\{S: i \in S\}} M^v(S) - v(S)$. Además es fácil comprobar que dadas las definiciones de las cotas podemos expresar el vector $\lambda^v = (\lambda_i^v)_{i \in N}$ en función de las cotas de la siguiente manera:

$$\lambda^v = M^v - m^v$$

Como v es normalizado y $\sum_{i \in N} v(N) - v(N \setminus \{i\}) > 0$ tenemos que $m_i^v = M_i^v - \lambda_i^v = v(\{i\}) = 0$

Entonces $\tau(v) = \delta M^v$, donde $\delta \in [0, 1]$. Además debemos elegir δ de tal forma que $\tau^v(N) = v(N)$. Esto conlleva que $\tau^v = \frac{v(N)M^v}{M^v(N)}$. Nótese que $\delta^v(S) = M^v(S) - m^v(S) = M^v(S)$; en particular $\delta^v(N) = M^v(N) > 0$, lo

¹²Un juego normalizado si $v(\{i\}) = 0 \quad \forall i \in N$. Dado un juego v siempre podemos obtener un juego normalizado $\hat{v}$, tal que $\hat{v}(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\})$.

que implica que $M^v(N) - v(N) > 0$. Por definición de τ -valor $m_i^v \leq \tau_i^v \leq M_i^v \quad \forall i \in N$. Así que tenemos $\tau_i^v \geq a_i^v \geq v(\{i\})$ y $\tau^v(N - i) = v(N) - \tau_i^v \geq v(N) - M_i^v = v(N - i)$, por lo que por definición de núcleo se sigue que $\tau^v \in \mathcal{C}(v)$ si y solo si $\tau^v(S) \geq v(S)$ cuando $1 < s < n - 1$. Utilizando el Teorema 2.4 en Driessen y Tijs¹³ (1983) la expresión anterior es equivalente a $M^v(S) - v(S) \geq (M^v(N) - v(N))(\lambda^v(N))^{-1}\lambda^v(S)$ para todo $S \in 2^N$ con $1 < s < n - 1$.

En el trabajo de Driessen y Tijs (1983) se demuestra que para juegos semiconvexos balanceados de cuatro jugadores el τ -value siempre pertenece al núcleo. Por lo tanto, los Juegos Generalizados de Externalidades de cuatro jugadores verifican esa propiedad.

¹³Estos autores demuestran para los juegos cuasiconvexos que si $M^v(N) - v(N) > 0$ entonces el τ -valor es $\tau^v = M^v - \frac{M^v(N)}{\lambda^v(N)}\lambda^v$ siendo $\lambda_i^v = \min_{S: i \in S} M^v(S) - v(S)$.

Bibliografía

- [1] Aumann R.J. and Maschler M.(1964). The bargaining sets for cooperative games. Princeton University Press, New Jersey, 443-476.
- [2] Driessen TSH, Tijs SH. (1983). The τ -value, the Core and Semiconvex Games. International Journal of Game Theory 15:229-248.
- [3] Grafe F., Iñarra E. Zarzuelo J.M., (1998). Population Monotonic allocation schemes on Externality Games. Mathematical Methods of Operation Research, preprint.
- [4] Izquierdo JM, Rafels C.,(1996). A Generalization of the Bankruptcy game: Financial cooperative games. Documento de Trabajo. Universidad de Barcelona.
- [5] Iñarra E., Usategui JM.,(1993). The Shapley value and average convex games. International Journal of Game Theory, 22:13-29.
- [6] Mas-Colell A. (1989). An equivalence theorem for bargaining set. Journal of Mathematical Economics, 18:129-139.
- [7] Shapley L.S., (1953). A value for n -person games. Annals of mathematical studies, 28:307-317.
- [8] Shapley L.S. and Shubik, (1969). On market games. Journal of Economic Theory, 1:9-25.
- [9] Tijs SH. (1981). Bounds for the core and the τ -value. Game Theory and Mathematical Economics, ed. by O.Moeschlin and D. Pallaschke, North-Holland Publ. Cie, 123-132.