



**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**  
**ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR**

Dpto. de Ingeniería Mecánica

INGENIERÍA INDUSTRIAL  
PROYECTO FIN DE CARRERA

***ESTUDIO DE TENSIONES EN UN  
ANILLO COMPRIMIDO  
DIAMETRALMENTE MEDIANTE  
ELEMENTOS FINITOS***

***D. PABLO BLANCO ESTEBAN***  
***SEPTIEMBRE 2013***

Directora: D<sup>a</sup>. Ester Olmeda Santamaría  
Tutor: D. Ramón Alberto Gutiérrez Moizant

## Agradecimientos

*En primer lugar, me gustaría agradecer, aunque siento que nunca lo haré lo suficiente, todo el apoyo y ayuda que me han dado mis padres a lo largo de todos mis estudios, ya que gracias a ellos he podido llegar hasta aquí.*

*Quiero dar las gracias a todos mis amigos, que a pesar de no haber tenido el tiempo que me gustaría haber podido pasar con ellos, han seguido estando cerca.*

*Gracias María por tu apoyo y comprensión en los momentos difíciles, y sobre todo por los buenos momentos, que me han ayudado a seguir adelante.*

*Finalmente quiero dar las gracias a Ramón, tutor del proyecto, cuyas indicaciones a lo largo del proyecto han sido claves, y contar con alguien tan preparado y tan dispuesto a ayudar facilita enormemente la ardua tarea de elaborar un proyecto fin de carrera.*

*A todos, GRACIAS.*

# Índice

---

<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>5</b>
<b>1.1.- Introducción .....</b>	<b>5</b>
<b>1.2.- Objetivo del proyecto .....</b>	<b>6</b>
<b>1.3.- Estructura de la memoria .....</b>	<b>6</b>
<b>2. ESTADO DEL ARTE .....</b>	<b>8</b>
<b>2.1.- Aplicaciones .....</b>	<b>8</b>
<b>2.2.- Métodos de cálculo .....</b>	<b>10</b>
2.2.1.- Ensayo real .....	10
2.2.2.- Fotoelasticidad .....	12
2.2.3.- Resistencia de Materiales .....	15
2.2.4.- Teoría de la Elasticidad .....	16
2.2.5.- Elementos Finitos .....	18
<b>3. CÁLCULO MEDIANTE MÉTODOS TEÓRICOS.....</b>	<b>22</b>
<b>3.1.- Introducción .....</b>	<b>22</b>
<b>3.2.- Resistencia de Materiales .....</b>	<b>23</b>
3.2.1.- Anillo delgado.....	26

3.2.2.- Anillo grueso.....	27
<b>3.3.- Teoría de la Elasticidad.....</b>	<b>30</b>
<b>4. CÁLCULO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>37</b>
4.1.- Abaqus.....	37
4.2.- Creación del modelo en Abaqus .....	39
4.3.- Análisis del modelo y resultados.....	57
<b>5. RESULTADOS Y ANÁLISIS .....</b>	<b>75</b>
5.1.- Resultados de la Resistencia de Materiales.....	77
5.2.- Resultados del Método de los Elementos Finitos .....	84
<b>6. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....</b>	<b>91</b>
6.1.- Conclusiones.....	91
6.2.- Trabajos futuros .....	92
<b>7. REFERENCIAS.....</b>	<b>93</b>

# Capítulo I

## INTRODUCCIÓN

---

### 1.1.- Introducción

Uno de los casos que se encuentran con frecuencia, en estructuras o elementos mecánicos que soportan esfuerzos, es el que genera la presencia de un cilindro o anillo sometido a cargas externas. Por tanto, el estudio de estos elementos, al igual que el de los arcos, ha sido tan intenso a lo largo de la historia como continua su utilización en estructuras arquitectónicas antiguas y en máquinas modernas.

En concreto, las particularidades y problemática específica de un anillo sólido sometido a dos fuerzas opuestas en dirección diametral han sido especialmente estudiadas y, en el transcurso del tiempo, se han empleado diversos métodos y teorías con el propósito de analizar las tensiones y deformaciones que tienen lugar durante dicho problema.

## **1.2.- Objetivo del proyecto**

El presente proyecto se centra en el cálculo y análisis de las tensiones en un anillo comprimido diametralmente, aplicando el Método de los Elementos Finitos. Para ello, se elaborará un modelo en un programa de Elementos Finitos, configurado específicamente para este caso, del que se extraerán los resultados necesarios.

Finalmente, se pretende efectuar un análisis comparativo entre las dos teorías principalmente empleadas para calcular los valores de las tensiones en el problema objeto de análisis, la Resistencia de Materiales y la Teoría de la Elasticidad, y el Método de los Elementos Finitos, de forma que se pueda contrastar y evaluar la validez de los resultados obtenidos.

## **1.3.- Estructura de la memoria**

Con el fin de facilitar la lectura de la memoria, se incluye a continuación un breve resumen de los diferentes capítulos que la componen.

El capítulo número uno de la memoria, contiene una introducción sobre el tema tratado en el proyecto, con el fin de explicar brevemente la razón de la elaboración del mismo. También se incluye en la introducción, la definición del objetivo del proyecto, así como la sinopsis del contenido completo de la memoria.

En el segundo de los capítulos, se muestra una visión global del estado del arte referente al problema del anillo comprimido diametralmente. Se describen algunas de las aplicaciones reales relacionadas con dicho problema y se exponen los principales métodos empleados para su solución.

En el tercer capítulo, se plantean las ecuaciones necesarias para el cálculo de las tensiones en el anillo del problema tratado, haciendo uso de las dos principales teorías, la Teoría de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales.

El cuarto capítulo comienza con una breve descripción del programa de Elementos Finitos Abaqus, el cual se emplea en el presente proyecto para obtener los resultados necesarios del problema del anillo. A continuación se detallan los pasos seguidos para la creación del modelo, en dicho programa, necesario para la adquisición de las soluciones. Y finalmente se analizan los datos obtenidos, para tratar de ofrecer al término del apartado los mejores resultados que pueda aportar el método empleado.

En el quinto capítulo se realiza un análisis comparativo de los resultados obtenidos, empleando la Resistencia de Materiales y el Método de los Elementos Finitos, frente a los resultados de la que se considera como la teoría más próxima a la realidad, la Teoría de la Elasticidad.

En el sexto y último capítulo de la memoria, se exponen las conclusiones finales extraídas tras la elaboración del proyecto, así como una enumeración de recomendaciones para futuros trabajos sobre el mismo tema.

## Capítulo II

### ESTADO DEL ARTE

---

#### 2.1.- Aplicaciones

El análisis del problema del anillo comprimido diametralmente cobra relevancia al ser aplicado a problemas reales, que pueden ser aquellos casos donde se encuentre un anillo o cilindro sobre el que actúen dos fuerzas que lo comprimen radialmente. Siempre teniendo en cuenta que, en función de las dimensiones de la pieza y el punto de interés, puede ser necesario considerar determinadas variables como los efectos de borde u otros concentradores de tensiones.

Una de las aplicaciones que se pueden encontrar del problema en cuestión son los anillos dinamométricos. Estos anillos se usan para la medición de carga o calibración de máquinas de laboratorio [1]. Su funcionamiento se basa en la determinación indirecta de

la carga de compresión o tracción mediante la medición de la deformación diametral sufrida por el anillo que incluye el aparato.



Figura 2.1 Anillos dinamométricos [1]

Otro de los usos prácticos de este problema es el que realiza la empresa Advanced Material Simulation, que ha desarrollado un procedimiento con el que es posible conocer la energía de fractura de un material a partir de ensayos de compresión diametral en tubos de pared delgada [2]. En este método se combinan pruebas experimentales con cálculos por Elementos Finitos, obteniendo resultados similares con ambas técnicas.

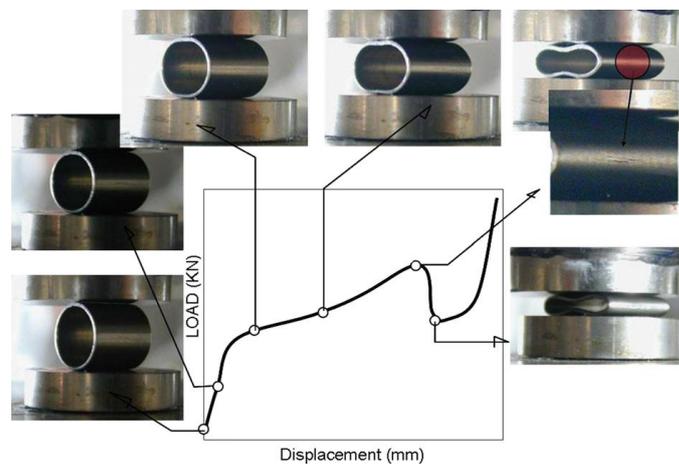


Figura 2.2 Prueba de carga en cilindro [2]

La principal aplicación del método de la empresa AMS ha sido la determinación de las propiedades, en concreto de las relacionadas con la fractura de los materiales, de los revestimientos de combustible nuclear, donde se utilizan piezas en forma de tubo.

## **2.2.- Métodos de cálculo**

En el análisis de las tensiones que aparecen en un anillo sometido a dos fuerzas iguales y opuestas en dirección radial, se pueden emplear varios de los métodos habitualmente utilizados en el ámbito de la ingeniería, con el fin de caracterizar el comportamiento de las estructuras frente a un estado de cargas. Dichos métodos se explican a continuación.

### **2.2.1.- Ensayo experimental**

El ensayo experimental es una técnica muy utilizada en el análisis de elementos mecánicos, que cuenta con muchos años de desarrollo. Básicamente, consiste en someter una pieza a esfuerzos o deformaciones controladas para analizar su comportamiento.

La principal ventaja de este frente a otros métodos es, precisamente, el empleo de una pieza real, lo cual exime al ensayo de la posible falta de verosimilitud en cuanto al comportamiento real de la pieza y otros problemas de precisión, aunque de esta manera sea preciso considerar la variación que pueden tener unas piezas con respecto a otras.

Este tipo de ensayo, permite la evaluación de las deformaciones y fuerzas soportadas por una estructura o elemento antes del momento de colapso, o incluso, el análisis de la fatiga que sufren las piezas mediante la aplicación de cargas cíclicas. Por su parte, la utilización de probetas de un material cualquiera, permite determinar sus propiedades mecánicas, como sucede en los ensayos de tracción o compresión. En estos ensayos se

registra la curva tensión-deformación del material, de la que se obtienen características como el módulo de Young, el límite elástico, límite a rotura, resiliencia...etc.

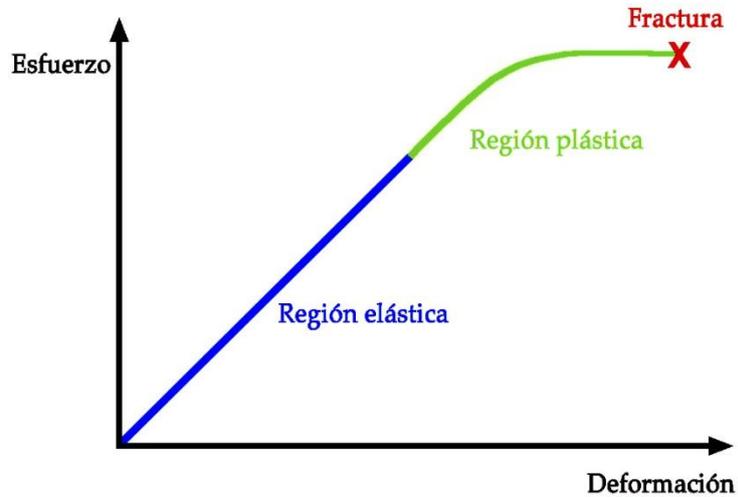


Figura 2.3 Diagrama tensión-deformación simplificado

Los medios utilizados normalmente para este método son las máquinas universales, capaces de aplicar tracción o compresión sobre el elemento midiendo los desplazamientos; galgas extensométricas, para evaluar las deformaciones en ciertas partes del elemento, o células de carga para medir las fuerzas aplicadas.

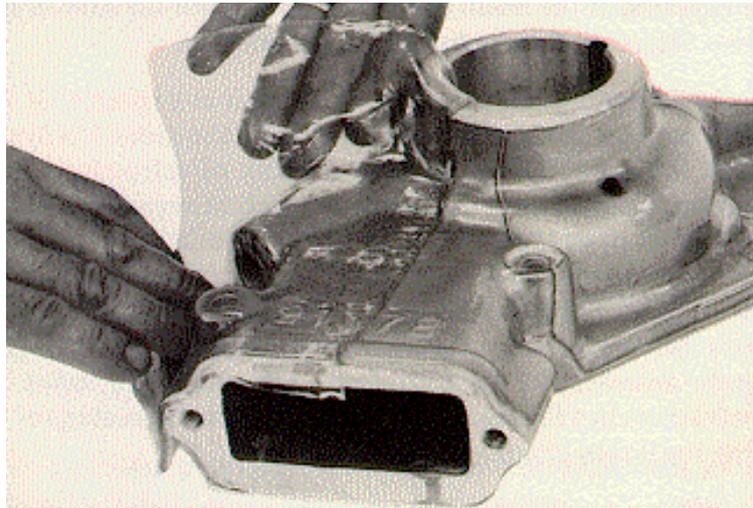


Figura 2.4 Máquina universal de ensayos

### 2.2.2.- Fotoelasticidad

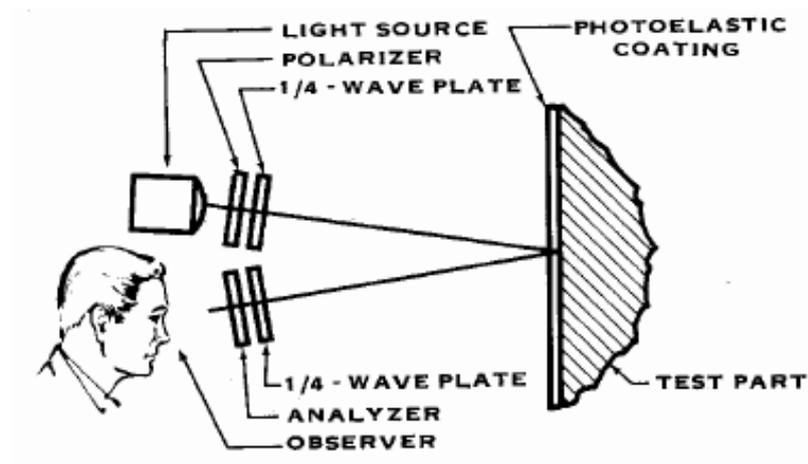
La fotoelasticidad es una técnica experimental utilizada para la medición de esfuerzos y deformaciones, basada en la proyección de luz polarizada para generar ciertos contornos sobre piezas de materiales isótropos, transparentes y continuos, que están siendo sometidas a esfuerzos. Los contornos así generados dan una indicación del nivel tensional y de deformación alcanzado en cada una de las partes de la pieza [3].

En el proceso de aplicación de esta técnica, se pueden distinguir dos líneas básicas de análisis: una que parte de la creación de un modelo idéntico a la pieza objeto de estudio, fabricada con material birrefringente, y otra mediante el recubrimiento de la pieza a analizar con una lámina de este mismo material.



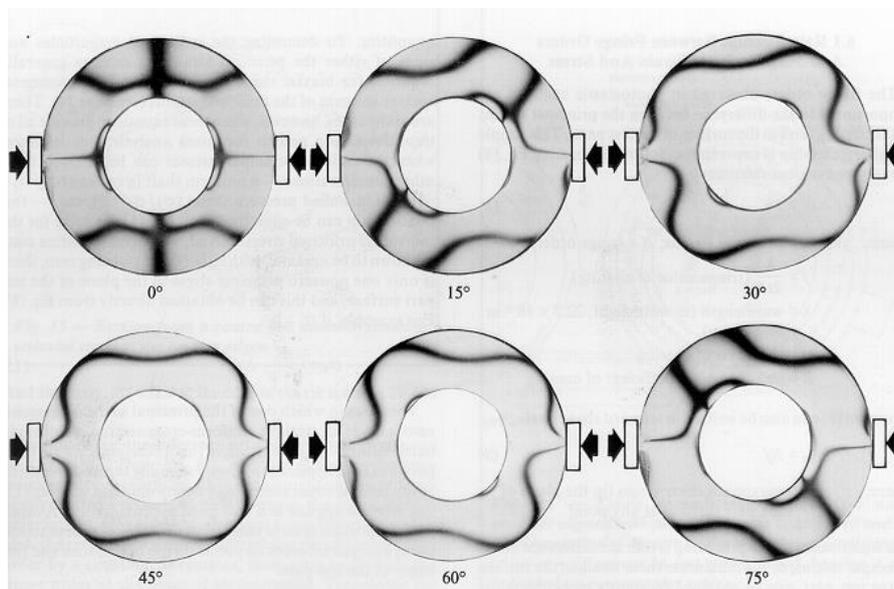
**Figura 2.5** Aplicación de recubrimiento fotoelástico a la carcasa de una bomba de agua [3]

Para cualquiera de los dos métodos el sistema de análisis es similar; se utiliza un polariscopio donde se observan y miden las deformaciones superficiales en el elemento sobre el que se practica el ensayo, tal y como se muestra en la figura 2.6.



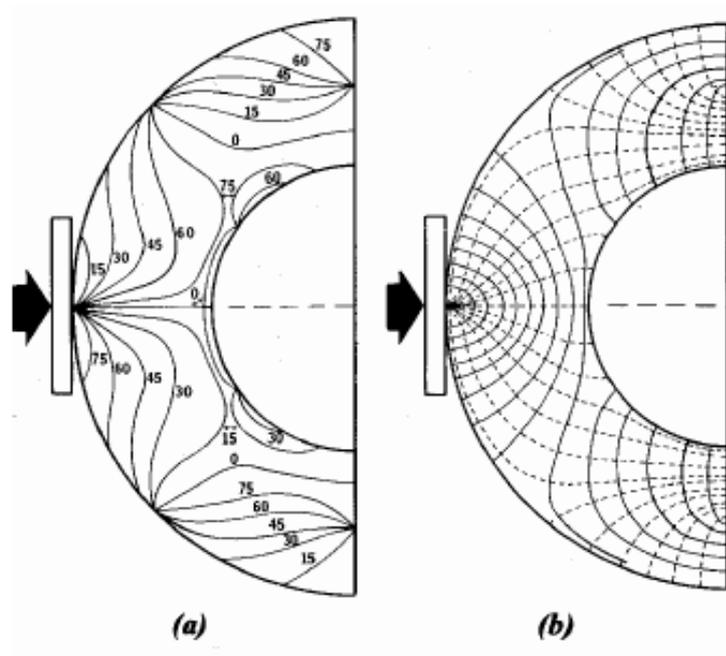
**Figura 2.6** Representación esquemática de un polariscopio por reflexión [3]

Se trata de un método relativamente sencillo que, a la vez, permite analizar geometrías de considerable complejidad, y por ello está bastante extendido. Además, esta técnica en los últimos años ha registrado significativos avances gracias a la aparición de polariscopios digitales que incluyen LED y diodos láser, y permiten la supervisión continua de estructuras.



**Figura 2.7** Franjas de isóclinas correspondientes a un anillo cargado diametralmente con incrementos de 15° [3]

Asimismo, el surgimiento de la esterolitografía, sistema que hace posible el rapidprototyping o prototipado rápido, ha supuesto una gran aportación al método, facilitando y reduciendo los tiempos del análisis.



**Figura 2.8** (a)Franjas de isóclinas.(b)Líneas isostáticas construidas partiendo de las isóclinas [3]

Algunas de las utilidades del método de la fotoelasticidad son [3]:

- La identificación instantánea de áreas críticas, regiones sobretensionadas o subtensionadas en piezas de distintos materiales.
- La medición precisa de tensiones de pico, así como la determinación de concentraciones de tensión alrededor de agujeros, entallas, chaflanes y otras áreas de fallo potencial en dichas piezas.
- Optimizar la distribución de tensiones en elementos y estructuras, logrando así que cuenten con el mínimo peso y la máxima fiabilidad.
- La medición de tensiones y direcciones principales en cualquier punto del elemento analizado.

- La posibilidad de practicar mediciones de tensión en el laboratorio o en el exterior evitando, en su caso, que se vean afectadas por las condiciones climáticas.
- La identificación y medición de tensiones residuales y de montaje.
- La detección de deformaciones en un elemento y la observación de la redistribución de deformaciones en su rango plástico.

En cuanto al empleo de la fotoelasticidad para la determinación de las tensiones en un anillo comprimido por dos fuerzas opuestas en dirección radial, Yu. V. Tokovyy, K.-M. Hung y C.-C. Ma [4] obtienen en sus estudios resultados coincidentes con los obtenidos por Timoshenko [5] y Filon [6] de forma analítica, los cuales a su vez han sido validados de manera experimental por E. A. Ripperger y N. Davids [7].

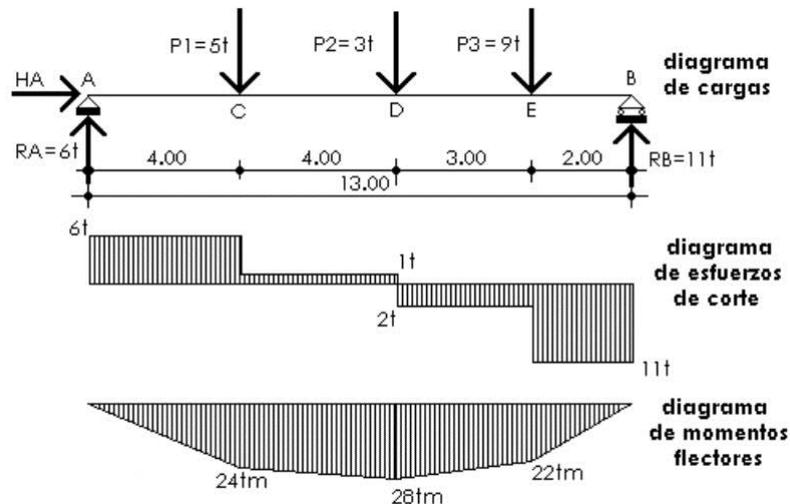
No obstante, y pese a seguir siendo una técnica ampliamente utilizada, su aplicación se ha visto mermada debido al desarrollo de los programas de elementos finitos, que permiten obtener una mayor precisión sin necesidad de crear un modelo real del elemento que se pretende examinar.

### **2.2.3.- Resistencia de Materiales**

La Resistencia de Materiales es una disciplina de la Ingeniería Mecánica y Estructural que estudia los sólidos deformables mediante modelos simplificados, con el objeto de obtener información sobre su comportamiento mecánico frente a un determinado estado de cargas.

Un modelo de Resistencia de Materiales establece una relación entre un estado de cargas y las tensiones y deformaciones inducidas por este. Generalmente las simplificaciones geométricas y las restricciones que impone el método sobre el modo de

aplicación de las cargas facilitan el cálculo del campo de deformaciones y tensiones, permitiendo la aplicación del método en una gran variedad de casos diferentes.



**Figura 2.9** Diagrama de esfuerzos cortantes y flectores empleado en Resistencia de Materiales

Como se ha indicado anteriormente, el empleo de la Resistencia de Materiales requiere cierta simplicidad de las piezas a analizar, siendo por tanto de uso común en el análisis de elementos como vigas, pilares o arcos. Aplicada sobre ciertos elementos, aun cuando la Resistencia de Materiales proporciona una solución, ésta no es exacta, o varía en función de las dimensiones de la pieza, lo cual obliga a poner un mayor cuidado durante su uso. Este es el caso en el que se enmarca un anillo comprimido radialmente, que será analizado, mediante el método aquí descrito, en el capítulo III.

#### 2.2.4.- Teoría de la Elasticidad

Si bien la Mecánica Racional contempla el estudio del punto material y del sólido rígido, conceptos abstractos que han demostrado ser de gran utilidad para comprender numerosos aspectos del comportamiento de los sólidos reales, dichos sólidos sufren deformaciones ante la aplicación de cargas, no comprendidas en los citados conceptos.

En consecuencia, si se desea conocer un comportamiento más semejante a la realidad, es necesario recurrir a otra herramienta.

La Teoría de la Elasticidad intenta atender al requerimiento anterior, y tiene como propósito describir el comportamiento del sólido deformable desde el punto de vista macroscópico, propio de la mecánica de medios continuos [8]. El modelo matemático que se construye para describir el comportamiento del sólido, que en principio puede poseer geometría y cargas cualesquiera, tiene como incógnitas fundamentales los desplazamientos de los distintos puntos del sólido.

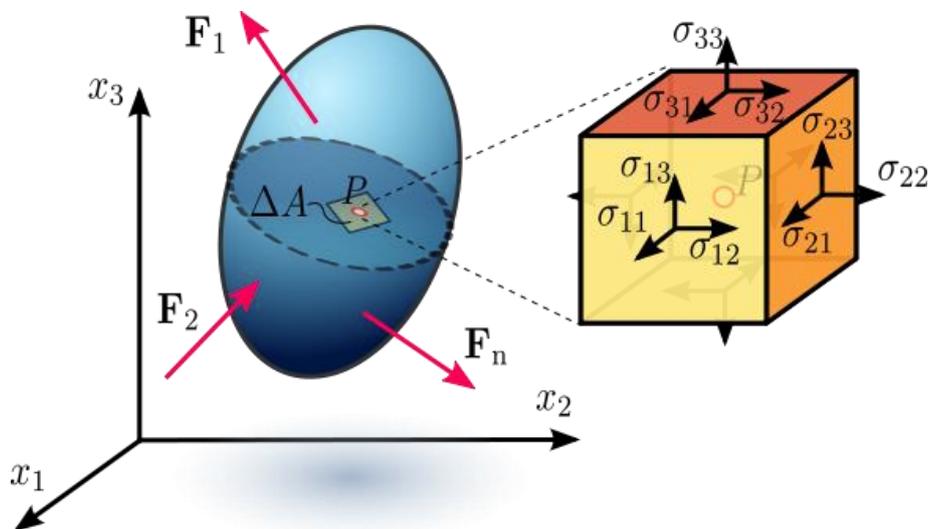


Figura 2.10 Tensiones en un punto de un cuerpo [9]

Debido a la complejidad de los materiales reales, expresable en un amplio rango de propiedades, en su estudio estas se reducen a grupos organizados a través de modelos que describen el comportamiento de un material ideal. De esta forma, la Teoría de la Elasticidad considera como material ideal al sólido perfectamente elástico que, partiendo de un estado inicial sin cargas ni fuerzas internas, llega a un estado final deformado por la aplicación cuasi-estática de un juego de cargas. Dicho material puede llegar al mismo estado final por efecto de diferentes juegos de cargas que hacen igual trabajo. Además, este trabajo se recupera totalmente en cualquier proceso de retorno a su estado inicial tras la retirada de las cargas [10].

Aunque no existen sólidos reales con dicho comportamiento, a muchos se les reconoce un rango elástico donde se comportan esencialmente de la manera descrita, el cual varía según el material y las condiciones.

Desde un punto de vista práctico, se puede afirmar que las principales diferencias entre la Resistencia de Materiales y la Teoría de la Elasticidad son la mayor complejidad, potencia y precisión de ésta última.

Dado el interés de este método, principalmente por la precisión demostrada en el problema del anillo comprimido en los estudios realizados por Timoshenko [10], se analizará mediante esta técnica dicho problema en el tercer capítulo de la memoria.

### **2.2.5.- Elementos Finitos**

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es un procedimiento numérico muy extendido, para la resolución por ordenador de numerosos problemas de ingeniería, dada su gran potencia. Gracias a este sistema se pueden resolver casos que, por medio de métodos matemáticos tradicionales, sería prácticamente imposible resolver, tales como análisis estructurales de piezas complejas o problemas de transferencia de calor [11].

Las principales ventajas del MEF son los ahorros que supone su uso, para el diseño de elementos y estructuras, tanto en tiempo como en dinero, ya que permite obtener resultados con relativa rapidez, que se aproximan en gran medida a la realidad, sin necesidad de construir y ensayar una gran cantidad de prototipos. De esta forma, es posible realizar y analizar numerosas modificaciones en los diseños hasta su optimización, consiguiendo tiempos y costes significativamente más bajos que con otros métodos. Aun así, normalmente se validan los resultados obtenidos con ensayos experimentales.

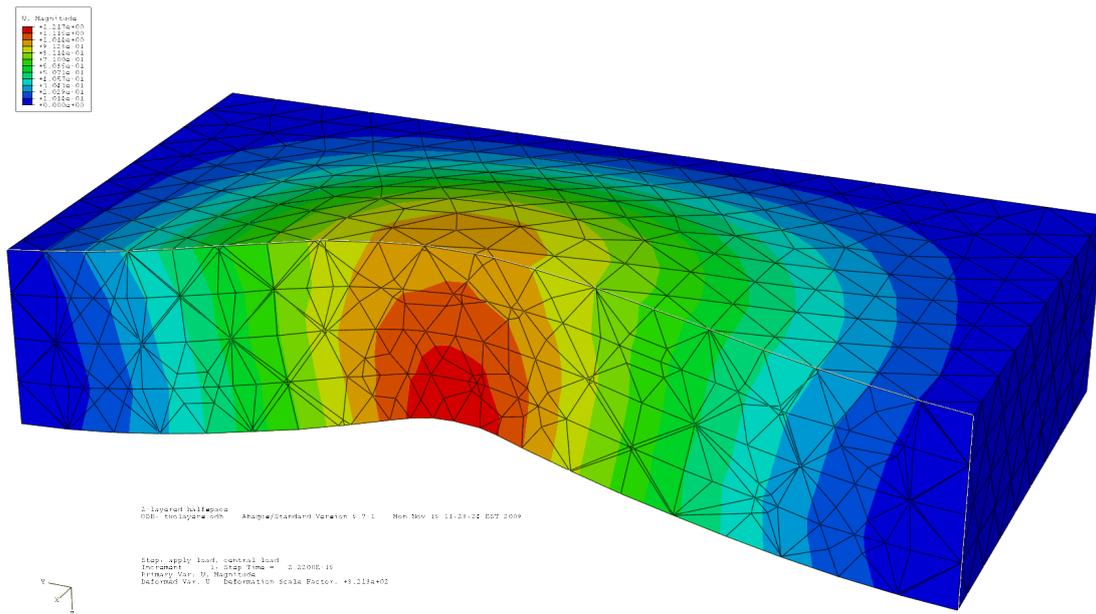
El Método de los Elementos Finitos consiste en la transformación de un cuerpo continuo, en un modelo discreto aproximado. A esta transformación se le denomina *discretización del modelo*. De esta forma, el cuerpo o pieza se divide en un número finito de pequeñas partes denominadas *elementos*, interconectadas entre ellas por una serie de puntos llamados *nodos*. Adicionalmente, variables características como las propiedades del material del que está fabricada la pieza y las ecuaciones que rigen su comportamiento, son consideradas individualmente sobre los mencionados *elementos* [11].

Un sistema continuo complejo tiene infinitos grados de libertad y está regido por un sistema de ecuaciones diferenciales. Gracias al MEF se convierte en un sistema de elementos con un número finito de grados de libertad, cuyo comportamiento se rige por un sistema de ecuaciones lineales o no lineales.

En todos los sistemas que se pueden analizar por el Método de los Elementos Finitos se pueden distinguir los siguientes aspectos:

- Dominio: se trata del espacio geométrico donde se define el modelo.
- Condiciones de contorno: son variables conocidas que condicionan el cambio del sistema, tales como cargas y apoyos.
- Incógnitas: su determinación es el objetivo del estudio. Son variables desconocidas que se calculan tras la intervención de las condiciones de contorno sobre el sistema. Pueden ser tensiones, desplazamientos, etc.

Para definir el modelo que representa el sistema objeto de estudio, cabe la posibilidad de emplear desde una a tres dimensiones, de manera que es posible crear modelos de distinta complejidad adaptándose a las necesidades de cada caso. En función del tipo de espacio considerado, es posible utilizar elementos puntuales, de línea, de área o volumen.



**Figura 2.11** Pieza analizada por Elementos Finitos [12]

El proceso de análisis a través del Método de Elementos Finitos está integrado por las siguientes etapas:

- Preproceso: correspondiente a la elaboración del modelo que se va a simular, definiendo aquí el dominio y las condiciones de contorno.
  - Diseño geométrico del modelo.
  - Definición de las propiedades de los materiales empleados.
  - Determinación del sistema de cargas exteriores y demás condiciones de contorno.
  - Discretización del modelo, o mallado del dominio.
- Resolución: a lo largo de esta fase se realizan las operaciones de cálculo necesarias para la obtención de las soluciones buscadas, ejecutando los siguientes trabajos.
  - Selección del tipo de cálculo a realizar.

- Configuración de los parámetros de cálculo, intervalos de tiempo y número de iteraciones.
- Transferencia de las cargas al modelo, generación de funciones de forma, ensamblaje de la matriz de rigidez, resolución de sistemas de ecuaciones y obtención de la solución.
- Postproceso: en esta etapa se traza la representación gráfica de los resultados y se obtienen los resultados indirectos operando las soluciones del modelo.

## Capítulo III

# CÁLCULO MEDIANTE MÉTODOS TEÓRICOS

---

### 3.1.- Introducción

En este capítulo se analiza el problema del anillo sometido a dos cargas iguales y opuestas utilizando dos métodos teóricos: la Resistencia de Materiales y la Teoría de la Elasticidad. Es preciso señalar que, dada la prioridad que en este estudio se le otorga al sentido práctico de los resultados finales, en la aplicación de ambas teorías, éstos se centrarán en las tensiones tangenciales, ya que serán las tensiones críticas del problema, al alcanzar los mayores valores, debido a la forma de la sección del anillo [13].

### 3.2.- Resistencia de materiales

Para la resolución del problema del anillo planteado de acuerdo con la Resistencia de Materiales, se tienen en cuenta inicialmente las simetrías existentes. De esta forma, es factible considerar únicamente un cuarto del anillo, tal y como se muestra en la figura 3.1, donde por razones de simetría, en la sección CD solo existe esfuerzo axial y flector, mientras que en la sección AB aparecen esfuerzo cortante y flector.

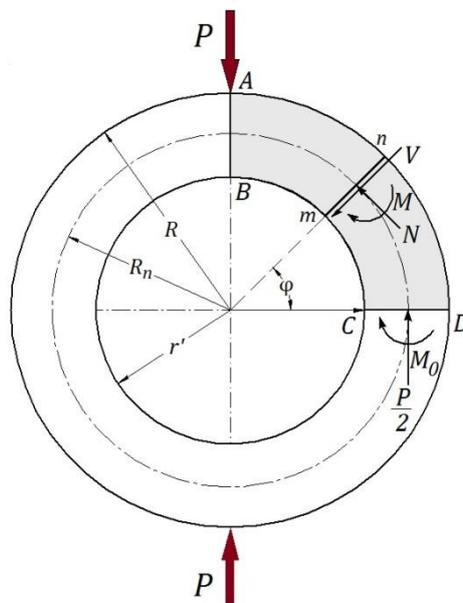


Figura 3.1 Anillo comprimido por dos fuerzas opuestas.

Para el cálculo de las tensiones circunferenciales se tiene en cuenta el esfuerzo normal y el momento que aparecen en el anillo, de forma que  $\sigma_{\theta\theta}$  puede ser calculado como:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{N}{A} + \frac{My}{(r_L - y)Ae} \quad \text{Ecuación 3.1}$$

Donde el primer término representa las tensiones normales y el segundo las tensiones producidas por el momento flector en la barra curva. Por su parte,  $M$  es el momento flector de la sección considerada,  $A$  es el área transversal,  $r_L$  es el radio de la fibra

neutra, y la distancia desde cualquier radio a la fibra neutra y  $e$  la distancia de la fibra neutra al centro de la sección transversal del anillo.

Utilizando el concepto del factor  $K$  de concentración de tensiones introducido por Timoshenko en uno de sus artículos en 1925 [14], se obtiene que:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2P}{\pi l R} K$$

Donde:

$$K = \frac{\pi l R}{2P} \left[ \frac{N}{A} + \frac{My}{(r_l - y)Ae} \right] \quad \text{Ecuación 3.2}$$

Cuyas variables representan:

$$N = -\frac{P}{2} \cos \varphi$$

$$A = (R - r')l = (1 - \rho)l$$

$$r_l = \frac{(R - r')}{\ln \frac{R}{r'}} = \frac{R(1 - \rho)}{\ln \rho^{-1}}$$

$$R_n = \frac{r' + R}{2} = \frac{R(\rho + 1)}{2}$$

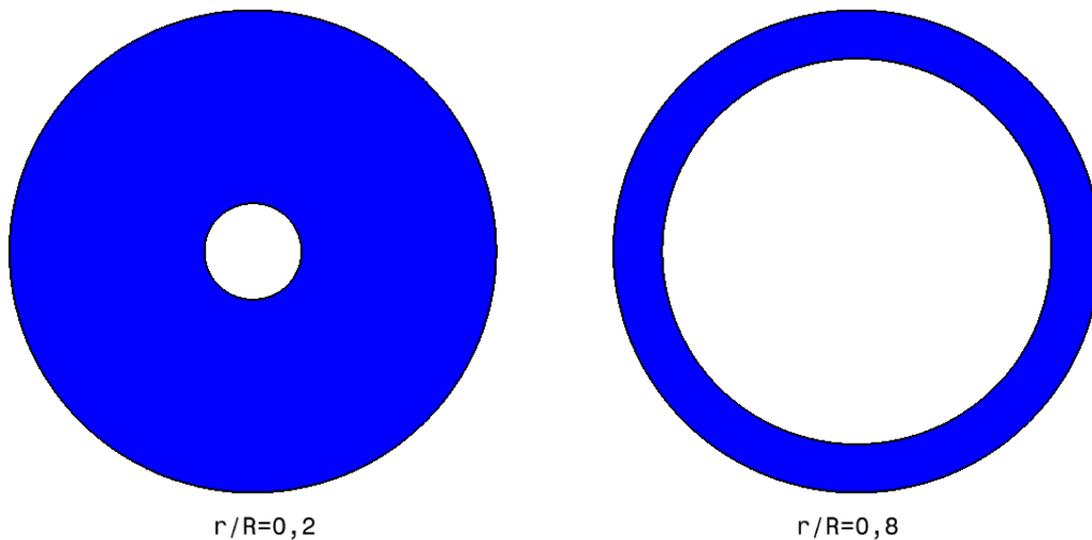
$$e = R_n - r_l = R \left\{ \frac{[(\rho + 1) \ln \rho^{-1} - 2(1 - \rho)]}{2 \ln \rho^{-1}} \right\}$$

$$y = r_l - [r + m(R - r')] = r_l - \rho [1 + m(1 - \rho)]$$

Ecuaciones 3.3

Aquí  $m$  es un coeficiente que puede tomar valores de 0 a 1, de tal manera que si alcanza el mayor valor, y representa la distancia de la superficie exterior a la fibra neutra de la sección, mientras que si alcanza el menor de los valores, y equivale a la distancia que va de la superficie interna del anillo a la fibra neutra.

Dependiendo de las consideraciones asumidas para la determinación del momento flector  $M$ , se podrán contemplar dos casos diferentes, el del anillo delgado y el del anillo grueso [15]. En el primero, la energía de deformación es producida únicamente por el momento flector  $M_0$ , mientras que en el segundo caso se tienen en cuenta tanto el momento flector  $M_0$ , como la influencia de las fuerzas longitudinal  $N$  y cortante  $V$ .



**Figura 3.2** Ejemplo de anillo grueso (izquierda) y delgado (derecha)  
 $R$ =radio externo,  $r$ =radio interno

El criterio para seleccionar el método a emplear para el cálculo del momento  $M$ , depende de la relación  $R_n/(R-r')$  [16], cuyas componentes aparecen representadas en la figura 3.1. Si la relación es mayor de 2, lo que provoca que se considere anillo delgado, se tendrá en cuenta exclusivamente el momento flector  $M_0$  para el cálculo de la energía de deformación, en tanto que para  $R_n/(R-r') < 2$ , se calificará como anillo grueso, y será necesario entonces tener en cuenta los esfuerzos flectores, longitudinales y cortantes [15]. Por esta razón, en los siguientes apartados de la memoria se procede diferenciando los dos tipos de anillo.

### 3.2.1.- Anillo delgado

Según lo indicado con anterioridad, asumiendo la hipótesis de anillo delgado, la energía de deformación depende únicamente del momento flector. De esta forma, resulta que la energía de deformación es [15]:

$$dU = \frac{M^2 R_n d\varphi}{2EI_z}$$

Siendo  $E$  el módulo de Young e  $I_z$  el momento polar de inercia de la sección.

Para cualquier sección  $mn$  con un ángulo  $\varphi$  respecto de la horizontal (figura 3.1), el momento flector es:

$$M = \frac{P}{2} R_n (1 - \cos \varphi) - M_0 \quad \text{Ecuación 3.4}$$

En este caso  $M_0$  se determina empleando el teorema de Castigliano, y considerando que la sección  $CD$  no gira por efecto de la simetría, se concluye que [15]:

$$\frac{dU}{dM_0} = 0$$

$$\frac{1}{EI_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ M_0 - \frac{P}{2} R_n (1 - \cos \varphi) \right] R_n d\varphi = 0$$

De donde se obtiene:

$$M_0 = \frac{PR_n}{2} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right)$$

Introduciendo la expresión de  $M_0$  en la ecuación 3.4, se obtiene la expresión del momento flector para un anillo delgado:

$$M = \frac{PR_n}{2} \left( \cos\varphi - \frac{2}{\pi} \right) \quad \text{Ecuación 3.5}$$

Finalmente, combinando las ecuaciones 3.5 y 3.3 en 3.2, se obtiene el factor  $K$  de concentración de tensiones para anillo delgado según la teoría de Resistencia de Materiales, que depende únicamente de la relación entre el radio interno y externo del anillo  $\rho$ , y del ángulo  $\varphi$ :

$$K = \frac{1}{2(1-\rho)} \left\{ -\frac{\pi}{2} \sin\theta + \left( 1 - \frac{\pi \sin\theta}{2} \right) \frac{\ln \frac{1}{\rho} [\rho^2(m-1) - \rho - m] + 1 - \rho^2}{\ln \frac{1}{\rho} [\rho^2(1-m) + \rho + m] - 2(1-\rho)[\rho + m(1-\rho)]} \right\} \quad \text{Ecuación 3.6}$$

### 3.2.2.- Anillo grueso

Cuando se trata de analizar los anillos comprimidos cuyas dimensiones cumplen que  $R_n/(R-r') < 2$ , y por tanto se pueden definir como gruesos, la energía de deformación ha de ser calculada teniendo en cuenta los esfuerzos flectores, longitudinales y cortantes [15].

La energía de deformación debida a la flexión entre dos secciones adyacentes, producida por el momento flector es [15]:

$$dU_1 = \frac{M^2 ds}{2AEeR_n} \quad \text{Ecuación 3.7}$$

En esta igualdad  $e$  es la distancia de la fibra neutra al centro de la sección transversal y  $ds$  el espesor de la sección.

La fuerza longitudinal  $N$  produce un alargamiento del elemento comprendido entre dos secciones adyacentes en la dirección de la línea media de la barra, de tal manera que el

trabajo suministrado es  $N^2 ds / 2AE$ . Durante la aplicación de la fuerza longitudinal, el par  $M$  realiza un trabajo negativo  $-MNds / AER_n$ . Por consiguiente, la energía total almacenada por el elemento durante la aplicación de la fuerza longitudinal  $N$  es [15]:

$$dU_2 = \frac{N^2 ds}{2AE} - \frac{MNds}{AER_n} \quad \text{Ecuación 3.8}$$

Los esfuerzos cortantes  $V$  producen un deslizamiento de una sección respecto a la otra, de manera que la energía de deformación que producen es [15]:

$$dU_3 = \frac{\alpha V^2 ds}{2AG} \quad \text{Ecuación 3.9}$$

Donde  $G$  es el módulo de elasticidad a cortadura y  $\alpha$  un factor de forma de la sección transversal.

Sumando e integrando las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9) a lo largo de la pieza, se obtiene la energía total de deformación de una barra curva:

$$dU = \int_0^s \left( \frac{M^2 ds}{2AEeR_n} + \frac{N^2 ds}{2AE} - \frac{MNds}{AER_n} + \frac{\alpha V^2 ds}{2AG} \right) ds \quad \text{Ecuación 3.10}$$

Por aplicación del teorema de Castigliano en la sección  $CD$ , y recordando que por aplicación de las reglas de simetría resulta que la sección no gira durante la aplicación de las cargas, se obtiene que:

$$\frac{dU}{dM_0} = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{M^2 ds}{2AEeR_n} + \frac{N^2 ds}{2AE} - \frac{MNds}{AER_n} + \frac{\alpha V^2 ds}{2AG} \right) R_n d\varphi = 0 \quad \text{Ecuaciones 3.11}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{M}{2e} - N \right) d\varphi = 0$$

Combinando las ecuaciones (3.11), (3.4) y la fuerza normal  $N = -(P/2)\cos\varphi$  de la figura 3.1 se desprende que:

$$M_0 = \frac{PR_n}{2} \left[ \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{4e}{\pi R_n} \right]$$

Introduciendo el valor de  $M_0$  en la ecuación 3.4, se obtiene la expresión del momento flector para el caso de anillo grueso:

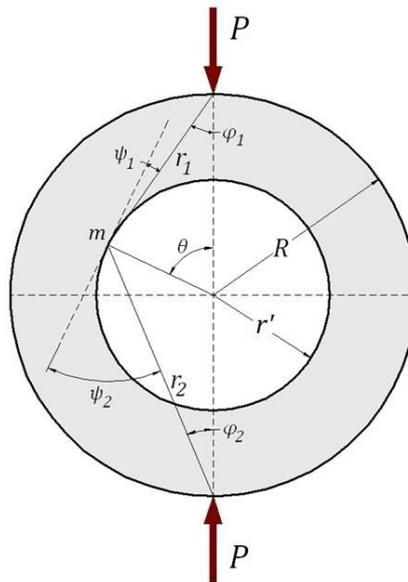
$$M = \frac{PR_n}{2} \left[ \left( \frac{2}{\pi} - \cos\varphi \right) - \frac{4e}{\pi R_n} \right] \quad \text{Ecuación 3.12}$$

Y combinando las ecuaciones (3.12), (3.3) y (3.2), se consigue el factor  $K$  de concentración de tensiones para anillo grueso:

$$K = \frac{1}{2(1-\rho)} \left\{ -\frac{\pi}{2} \sin\theta + \frac{4(1-\rho) - \left[ (\rho+1) \left( 1 + \frac{\pi}{2} \sin\theta \right) \ln \frac{1}{\rho} \right]}{[\rho+m(1-\rho)] \left[ \ln \frac{1}{\rho} (\rho+1) - 2(1-\rho) \right]} \cdot \left( \frac{(1-\rho)}{\ln \frac{1}{\rho}} - [\rho+m(1-\rho)] \right) \right\} \quad \text{Ecuación 3.13}$$

### 3.3.- Teoría de la Elasticidad

Cuando se trata de resolver la cuestión del anillo comprimido por dos fuerzas mediante la Teoría de la Elasticidad, se divide el problema en dos estados. Uno de los estados considera las tensiones en un disco completo comprimido por dos fuerzas opuestas (figura 3.3b) y el otro un anillo (figura 3.3c) donde las tensiones en la parte interna son tales que cancelan las tensiones en un disco de igual radio  $r'$  [17].



**Figura 3.2** Anillo comprimido por dos fuerzas opuestas diametrales [18]

El campo de tensiones en el disco, en cualquier punto  $m$  y en un radio  $r'$  (figura 3.3b), viene determinado por la superposición de una compresión hidrostática en dos direcciones (ecuación 3.14) y dos esfuerzos radiales en las direcciones  $r_1$  y  $r_2$  (ecuaciones 3.15) [13].

$$\sigma_u = \frac{2P}{\pi l d} = \frac{P}{\pi l R} \quad \text{Ecuación 3.14}$$

Donde  $l$  es la longitud del anillo,  $R$  es el radio externo y  $P$  la fuerza aplicada.

$$\sigma_{r_1} = -\frac{2P \cos \varphi_1}{\pi l r_1}$$

$$\sigma_{r_2} = -\frac{2P \cos \varphi_2}{\pi l r_2}$$

Ecuación 3.15

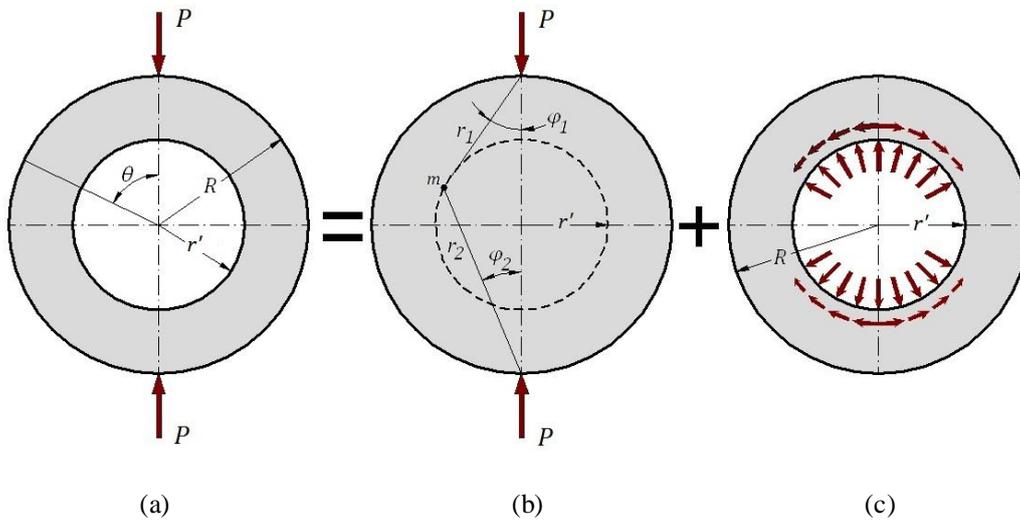


Figura 3.3 Descomposición de las fuerzas en el anillo.

Las componentes de la tensión en el punto  $m$  del disco se pueden calcular mediante el círculo de Mohr, de manera que:

$$\sigma_r = \sigma_{r_1} \sin^2 \psi_1 + \sigma_{r_2} \sin^2 \psi_2$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{r_1} \cos^2 \psi_1 + \sigma_{r_2} \cos^2 \psi_2$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_{r_1} \sin 2\psi_1 + \sigma_{r_2} \sin 2\psi_2}{2}$$

Ecuaciones 3.16

La distribución de tensiones en cualquier punto de la línea discontinua de radio  $r'$  (figura 3.3b) se consigue por superposición de las ecuaciones (3.14) y (3.16):

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi IR} \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos \varphi_1}{r_1} \sin^2 \psi_1 - \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \sin^2 \psi_2 \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2P}{\pi IR} \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos \varphi_1}{r_1} \cos^2 \psi_1 - \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \cos^2 \psi_2 \right)$$

**Ecuaciones 3.17**

$$\tau_{r\theta} = \frac{P}{\pi IR} \left( \frac{\cos \varphi_1}{r_1} \sin 2\psi_1 + \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \sin 2\psi_2 \right)$$

De la figura 3.2, se pueden deducir las siguientes relaciones geométricas:

$$r_1^2 = r'^2 \sin^2 \theta + (R - r' \cos \theta)^2$$

$$r_2^2 = r'^2 \sin^2 \theta + (R + r' \cos \theta)^2$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{R - r' \cos \theta}{r_1}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{R + r' \cos \theta}{r_2}$$

**Ecuaciones 3.18**

$$\sin \psi_1 = \cos(\theta + \varphi_1)$$

$$\sin \psi_2 = \cos(\theta - \varphi_1)$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{r' \sin \theta}{r_1}$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{r' \sin \theta}{r_2}$$

Introduciendo estas relaciones en las ecuaciones (3.17), se consiguen las distribuciones de tensión en el disco para una posición de radio  $r'$ , como función de los radios interior y exterior y la posición angular  $\theta$ :

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi l R} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{r'}{R} \cos \theta\right) \left(\cos \theta - \frac{r'}{R}\right)^2}{\left[\left(\frac{r'}{R}\right)^2 + 1 - 2 \frac{r'}{R} \cos \theta\right]^2} - \frac{\left(1 + \frac{r'}{R} \cos \theta\right) \left(\cos \theta + \frac{r'}{R}\right)^2}{\left[\left(\frac{r'}{R}\right)^2 + 1 + 2 \frac{r'}{R} \cos \theta\right]^2} \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2P}{\pi l R} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{r'}{R} \cos \theta\right) \sin^2 \theta}{\left[\left(\frac{r'}{R}\right)^2 + 1 - 2 \frac{r'}{R} \cos \theta\right]^2} - \frac{\left(1 + \frac{r'}{R} \cos \theta\right) \sin^2 \theta}{\left[\left(\frac{r'}{R}\right)^2 + 1 + 2 \frac{r'}{R} \cos \theta\right]^2} \right\}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi l R} \sin \theta \left\{ \frac{\left(1 - \frac{r'}{R} \cos \theta\right) \left(\cos \theta - \frac{r'}{R}\right)}{\left[\left(\frac{r'}{R}\right)^2 + 1 - 2 \frac{r'}{R} \cos \theta\right]^2} + \frac{\left(1 + \frac{r'}{R} \cos \theta\right) \left(\cos \theta + \frac{r'}{R}\right)}{\left[\left(\frac{r'}{R}\right)^2 + 1 + 2 \frac{r'}{R} \cos \theta\right]^2} \right\}$$

Ecuaciones 3.19

Las fuerzas generadas por el corte de un agujero concéntrico en un disco sólido pueden expresarse como una serie de Fourier [17]. Estas fuerzas tienen que cumplir, por equilibrio de fuerzas, que las tensiones en el disco en la posición de  $r'$  sean iguales a las tensiones en la cara interna del anillo con el mismo radio. Las tensiones  $\sigma_r$  y  $\tau_{r\theta}$  en un disco sólido para una relación entre radio interno y externo  $\rho$ , puede representarse por la siguiente suma infinita [19]:

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi l R} \left\{ -\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \rho^{n-2} \left[ \rho^n (n-2) - n \right] \cos n\theta \right\}$$

Ecuaciones 3.20

$$\tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi l R} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \rho^{n-2} (1 - \rho^2) \sin n\theta \right\}$$

Donde  $n$  es un número entero par y  $\rho = r'/R$ .

Las correspondientes componentes de las tensiones para un anillo (figura 3.3b), se obtienen sustituyendo las funciones de tensión desarrolladas por J. H. Michell (1899) dentro de las ecuaciones de las tensiones en un sistema de coordenadas polar [17]:

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi IR} \left\{ c_0 r^{-2} + 2d_0 - \sum_{n=2}^{\infty} \left[ n(n-1)c_n r^{n-2} + (n+1)(n-2)d_n r^n + n(n+1)c_n' r^{-n-2} + (n+2)(n-1)d_n' r^{-n} \right] \cos n\theta \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2P}{\pi IR} \left\{ -c_0 r^{-2} + 2d_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ n(n-1)c_n r^{n-2} + (n+2)(n+1)d_n r^n + n(n+1)c_n' r^{-n-2} + (n-2)(n-1)d_n' r^{-n} \right] \cos n\theta \right\} \quad \text{Ecuaciones 3.21}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi IR} \sum_{n=2}^{\infty} n \left[ (n-1)c_n r^{n-2} + (n+1)d_n r^n - (n+1)c_n' r^{-n-2} - (n-1)d_n' r^{-n} \right] \sin n\theta$$

Donde el factor  $r = x/R$  define la posición del punto de interés  $x$  en la sección transversal en la que tiene que ser calculado. Esto significa que  $r = \rho$  cuando se desee calcular las tensiones en la parte interna del anillo y  $r = R/R$  si se trata de la parte externa.

Las fuerzas de tracción en la cara interna del anillo son iguales y opuestas a las del disco del mismo radio, de forma que, igualando la expresión de  $\sigma_r$  de las ecuaciones (3.20) y (3.21), con  $r = \rho$ , y teniendo en cuenta que ambas fuerzas se cancelan unas con otras, resulta que [19]:

$$\frac{1}{2} = \frac{c_0}{\rho^2} + 2d_0 \quad \text{Ecuación 3.22}$$

Puesto que en la cara exterior del anillo no existen esfuerzos normales a la superficie, tomando  $r = R/R$  en las ecuaciones (3.21) [19]:

$$0 = c_0 + 2d_0 \quad \text{Ecuación 3.23}$$

Resolviendo para  $c_0$  y para  $d_0$ , de las ecuaciones (3.22) y (3.23) se obtiene que:

$$c_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \right); d_0 = -\frac{1}{4} \left( \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \right)$$

Igualando los coeficientes de  $\cos n\theta$  y  $\sin n\theta$  en la expresión de  $\sigma_r$  y  $\tau_{r\theta}$  de las ecuaciones (3.20) y (3.21) y con las mismas condiciones de contorno para las caras interna y externa del anillo, es decir, sin que existan fuerzas de tracción en la cara externa y con fuerzas iguales en la cara interna, se obtienen las cuatro ecuaciones para resolver el resto de coeficientes. Los coeficientes resueltos por R. B. Chianese y R. J. Erdlac [19] son:

$$c_n = \frac{1}{2(n-1)D} \left[ n(\rho^2 - 1) + (\rho^{2n} - 1) - n^2 \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 \right]$$

$$d_n = \frac{1}{2(n+1)D} \left[ n^2 \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 + n \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - (\rho^{2n} - 1) \right]$$

$$c'_n = \frac{1}{2(n+1)D} \left[ n(\rho^2 - 1) + (\rho^{2n} - 1) \right]$$

$$d'_n = \frac{1}{2(n-1)D} \left[ n \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 + (\rho^{2n} - 1) \right]$$

Donde:

$$D = n^2 \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 - \left( \rho^n - \frac{1}{\rho^n} \right)^2$$

Para terminar, la solución completa de las tensiones en un anillo comprimido por dos fuerzas opuestas para cualquier ángulo  $\theta$  y relación  $\rho$ , se obtiene por la superposición de las tensiones calculadas por la ecuación 3.20 y las tensiones en un anillo 3.21. En este caso, se comprueba que las tensiones tangenciales  $\sigma_{\theta\theta}$  producidas son [19]:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2P}{\pi l R} K$$

Ecuación 3.24

Donde el factor de concentración de tensiones  $K$  es:

$$K = \frac{1}{2} - \frac{1-\rho^2}{2r^2} \left( \frac{1+r^2}{1-\rho^2} \right) - \frac{(1-r\cos\theta)\sin^2\theta}{(r^2+1-2r\cos\theta)^2} - \frac{(1+r\cos\theta)\sin^2\theta}{(r^2+1+2r\cos\theta)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ n(n-1)c_n r^{n-2} + \right. \\ \left. + (n+2)(n+1)d_n r^n + n(n+1)c'_n r^{-n-2} + (n-2)(n-1)d'_n r^{-n} \right] \cos n\theta$$

Ecuación 3.25

## Capítulo IV

# CÁLCULO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

---

### 4.1.- Abaqus

Abaqus es un conjunto de programas informáticos de simulación desarrollado a finales de la década de los setenta por David Hibbitt, Dr. Beng Karlsson y P. Soresen, que aplica el Método de los Elementos Finitos para realizar cálculos estructurales.

Para la creación del presente modelo de estudio se utiliza Abaqus/Cae 6.12-1, una interfaz de Abaqus capaz de manipular, visualizar y evaluar los resultados de las simulaciones de Abaqus/Standard y Abaqus/Explicit. Abaqus/Cae está dividido en diferentes módulos para facilitar la implementación del modelo.

Cada módulo define un proceso del modelaje como la geometría, las propiedades del material, y finalmente la generación de una malla acorde a las necesidades del análisis a realizar. Los módulos aportan opciones, parámetros y datos que forman un archivo de entrada que se somete al análisis de ABAQUS/Standard o ABAQUS/Explicit. La información de salida se vuelve a enviar a ABAQUS/Cae para monitorear el proceso de trabajo y crear una base de datos de resultados. Con ABAQUS/Cae se pueden leer y visualizar los resultados del análisis.

Estos son los diferentes módulos de ABAQUS/Cae [20]:

- **Part:** Lo primero que se define del modelo es la geometría de la pieza o las piezas que lo componen. Este módulo da paso a otro llamado “Sketch”, que ayuda a crear el modelo. ABAQUS es capaz de modelar geometrías muy complejas. A la hora de definir la geometría es conveniente tener previsto cómo son las condiciones de contorno y el mallado a fin de realizar las particiones oportunas.
- **Property:** Aquí se definen las propiedades del material o los materiales del que está hecha la pieza.
- **Assembly:** En este módulo se realiza el proceso de ensamblado de las piezas del modelo, estableciendo la relación que existe entre ellas y su posición relativa con respecto a las demás.
- **Step:** Permite dividir el análisis en una secuencia de una o más etapas diferentes. Se trata de una manera conveniente de realizar el análisis, ya que se pueden captar cambios en las condiciones de contorno y en el propio modelo durante el transcurso del análisis completo.
- **Interaction:** Se usa para definir las interacciones mecánicas o térmicas entre las partes del modelo, o entre el modelo y sus alrededores. Se pueden establecer las limitaciones de las regiones, sus conexiones con otras, o con la “tierra”.

- Load: Aquí se definen las condiciones de contorno tales como el sistema de cargas al que está sometido el modelo y sus apoyos u otro tipo de impedimento al desplazamiento.
- Mesh: Este módulo contiene herramientas que permiten generar mallas de diferentes tipos, usando elementos de geometrías diversas. También contiene funciones para el refinamiento de la malla y para su verificación.
- Job: En este módulo se crea y monitoriza el trabajo de análisis. Da paso al módulo “Visualization”.
- Visualization: Aquí se pueden visualizar diagramas de resultados, imágenes de deformadas y demás datos calculados durante el análisis.
- Sketch: Este módulo se encarga de realizar bocetos bidimensionales que ayudan a definir la geometría del modelo. Dicho esquema representa una parte plana, pero el módulo tiene herramientas para barrer esta geometría, generando una pieza tridimensional para los modelos que así lo requieran.

#### 4.2.- Creación del modelo en Abaqus

Antes de iniciar la creación del modelo en Abaqus, es necesario definir el problema planteado en cuanto a geometrías, cargas e interacciones.

El modelo escogido a estos efectos es un símil de un ensayo de compresión diametral de un cilindro, tal y como se puede apreciar en la figura 4.1, en la que un anillo de radio exterior  $R$  y radio interior  $r$  es comprimido mediante dos platos planos de compresión, que se considerarán rígidos.

Las propiedades del cilindro serán las propias del acero, con módulo de Young=210 GPa, límite elástico=350 MPa, coeficiente de Poisson=0,3 y coeficiente de rozamiento con la superficie del plato de compresión de 0,2.

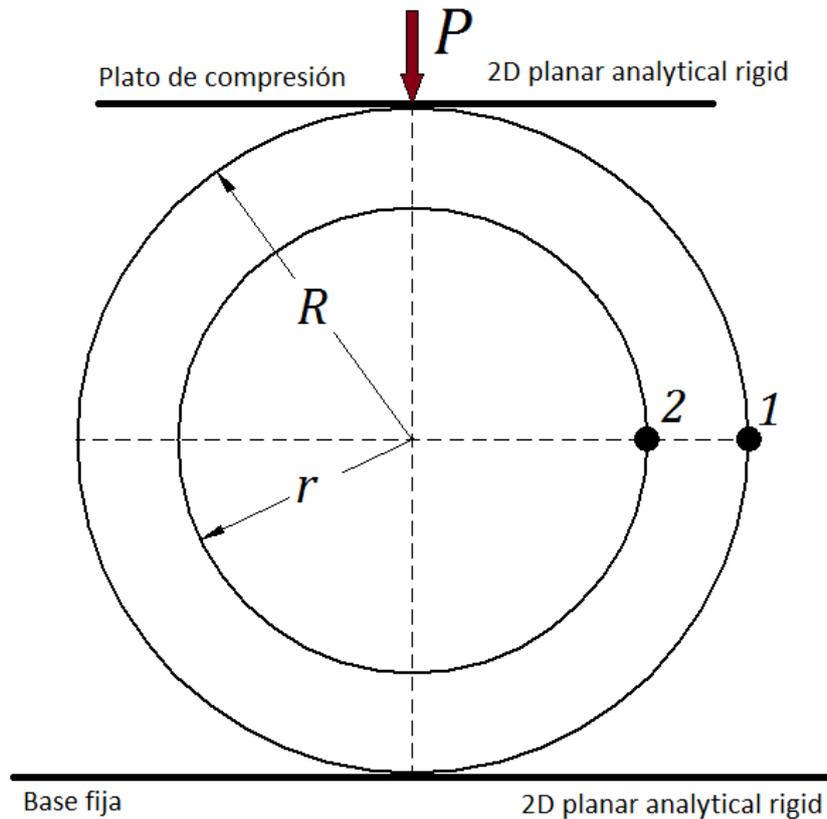


Figura 4.1 Representación del problema.

Se establece un radio exterior  $R=50$  mm y un radio interior que dependerá del valor del coeficiente  $\rho$ , siendo  $r=\rho \cdot R$ . De manera que,  $\rho$  tomará valores de 0,1 a 0,9 con incrementos de 0,1. De este modo, se estudiarán nueve casos de cilindros con distintas proporciones, y una longitud en dirección axial de  $l=1$  mm.

La última variable a definir del problema es la carga  $P$ , que se establecerá en función de los cálculos realizados para conseguir que no se produzcan plastificaciones en el anillo, debido a que las teorías que se emplearán para comparar los resultados, no consideran la zona de deformación plástica del material del anillo. Así se podrán emplear los datos obtenidos en el presente proyecto para compararlos con los resultados de ensayos reales.

Los resultados de las tensiones obtenidas se tomarán en los puntos 1 y 2 de la figura 4.1, teniendo únicamente en cuenta las tensiones máximas principales, de cara nuevamente a su posterior análisis comparativo frente a los resultados de las otras teorías.

Una vez definido el problema a analizar, y contemplando la simetría que este posee, es posible limitar el caso al análisis de un cuarto del anillo, siempre tomando las consideraciones oportunas. Por tanto, se trabajará únicamente sobre un cuarto del anillo, tal y como se muestra en la figura 3.1, advirtiendo que, por simetría, en la sección *AB* no existirán desplazamientos horizontales ni giros en el plano de la figura, mientras que en la sección *CD* no habrá desplazamientos verticales ni giros en dicho plano.

La creación del modelo en Abaqus CAE comienza entrando en el módulo *Part*, en el que se hallan las herramientas necesarias para la creación de las distintas partes que integran el modelo. Accediendo al menú *Create Part* se pueden seleccionar las opciones para la primera de las piezas a crear, a la que se llamará *Cilindro*. Se elige un modelo en dos dimensiones, escogiendo la opción *2D Planar*, y *Deformable*; aunque un modelo sin deformación posee un coste computacional mucho menor, y dependiendo del caso, con resultados aceptables; porque para el modelo que nos ocupa será necesario evaluar la pieza de una forma más cercana a la realidad. Finalmente, se elegirá la opción *Shell*, la cual permite el modelado del anillo con elementos placa, que son los adecuados para obtener la distribución de tensiones a lo largo de cualquier sección del anillo.

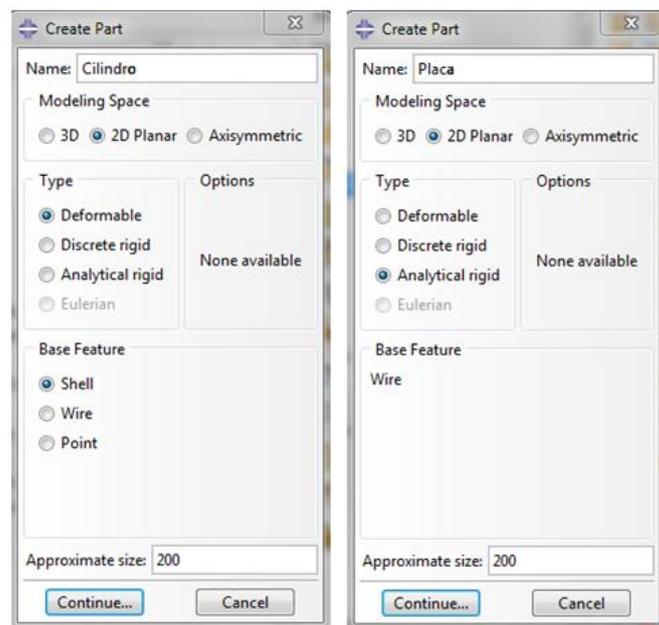
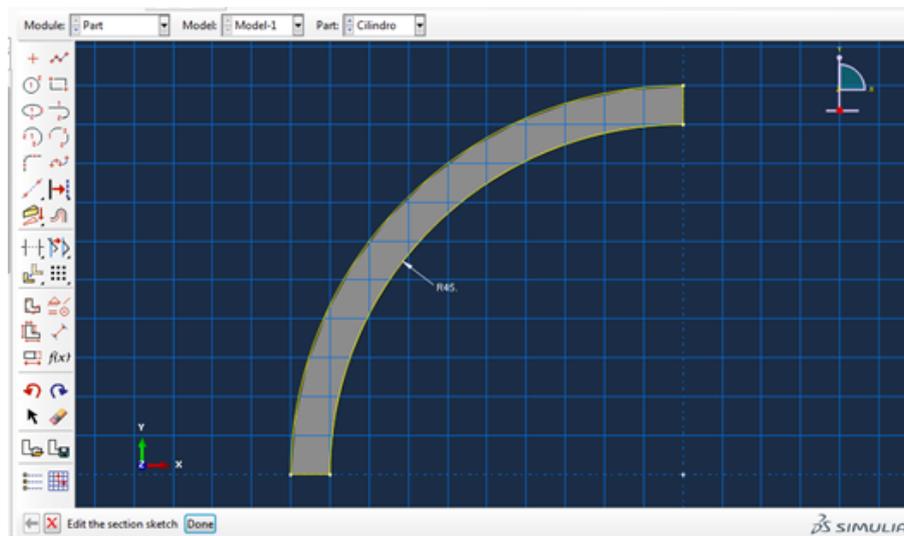


Figura 4.2 Cuadro *Create part*

Tras pulsar el botón *Continue*, aparece un entorno gráfico sobre el que se puede dibujar la figura mediante herramientas simples de dibujo, empleando en este caso dos circunferencias concéntricas de radios 50 y 45 para el cilindro con  $\rho=0,9$ . Cabe señalar que en este tipo de programas no existen unidades, todos los valores son relativos, así que la única precaución que hay que tomar es ser coherente con las unidades de los valores introducidos. En este proceso, tal como se puede apreciar, las longitudes se introducen en milímetros.

A continuación, trazando las líneas vertical y horizontal que representan los ejes de simetría de las circunferencias y recortando las líneas sobrantes, se consigue el cuarto de cilindro del problema tal y como se muestra en la figura 4.3.



**Figura 4.3** Creación de la pieza *Cilindro*

Con el fin de crear una serie de zonas que permitan estructurar el mallado y, en caso de ser preciso, la obtención de datos en diferentes ángulos del cilindro, se divide la pieza accediendo a la opción *Create Partition*  $\rightarrow$  *Face*  $\rightarrow$  *Sketch* y dibujando líneas desde el centro de las circunferencias, con una separación de  $4^\circ$ . El resultado de esta operación se puede apreciar en la figura 4.6.

Finalmente, a través de la opción *Tools*→*Set*→*Create* se crea un set llamado *Punto sup*, de tipo *Geometry*, seleccionando el punto más alto del cuarto de cilindro, para su uso posterior.

De cara a la creación del plato de compresión, se genera una nueva pieza denominada *Placa*. Se trata de nuevo de una pieza *2D Planar*, pero del tipo *Analytical rigid*, es decir, no deformable, ya que no es de interés para el problema la deformación sufrida por el plato de compresión y se puede suponer en este una rigidez mayor que la del cilindro, por lo tanto, se considera la opción adecuada para reducir el coste computacional.

Aun cuando para el modelado del plato de compresión basta con dibujar una línea horizontal, será preciso adoptar una serie de cautelas para evitar problemas de convergencia durante la simulación. Se trataría básicamente de asegurar que ningún nodo de los que componen el cilindro supere los bordes del plato de compresión, pues si esto sucede, el nodo en cuestión podría llegar hasta la cara opuesta a la de contacto y generar, como se ha apuntado, problemas de convergencia en el modelo.



A node "falling behind" a rigid surface can cause convergence problems

Extending the rigid surface prevents a node from "falling behind" the surface

**Figura 4.4** Ejemplo de nodo superando la zona de contacto [20]

Para evitar que esto ocurra existen dos alternativas, extender la pieza que representa al plato de compresión hasta una zona segura a la que no pueda llegar el cilindro o redondear sus bordes en dirección opuesta a la cara de contacto. Cualquiera de estas soluciones resultaría eficiente sin suponer un incremento del coste computacional.

Aquí se opta por extender la superficie del plato de compresión, y por tanto se dibuja una línea horizontal de dimensiones notablemente superiores al radio exterior del cilindro. Para finalizar, mediante la opción *Tools*→*Reference Point* se crea un punto de referencia en el centro de la pieza *Placa* que será necesario más adelante.

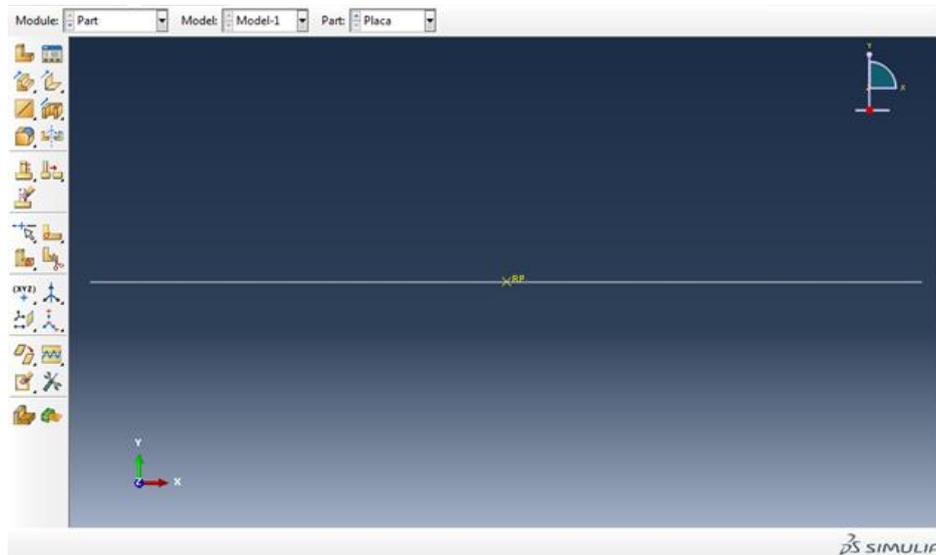


Figura 4.5 Pieza *Placa*

El siguiente paso en la creación del modelo es la asignación de las propiedades que le corresponden al cilindro. Algo que no es preciso en el caso del plato de compresión por ser un elemento rígido. Para ello se accede al módulo *Property*, donde se encuentra la opción *Create Material*, en la que se crea un material llamado *Acero*. Seleccionando la opción *Mechanical*→*Elasticity*→*Elastic* se puede definir el material como *Isotropic*, por no depender las propiedades mecánicas de la dirección, con módulo de Young 210000, que representan los 210GPa del acero en las unidades del modelo  $\text{N/mm}^2$ , o lo que es lo mismo, MPa. Y un coeficiente de Poisson de 0,3.

Pulsando en la opción *Create Section* se crea una nueva sección llamada *Section-1* de tipo *Solid* y *Homogeneous*, se selecciona el material *Acero* y se marca la opción de *Plane stress/strain thickness* con un valor de 1, que representará la longitud axial del cilindro.

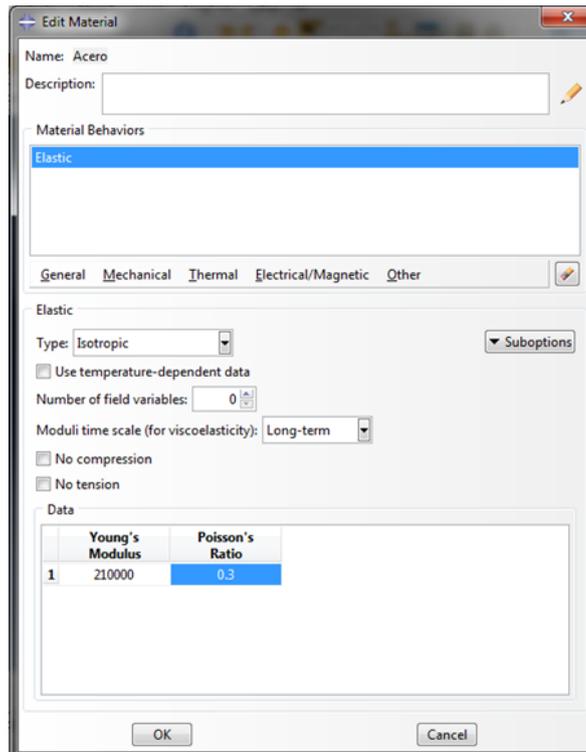


Figura 4.6 Cuadro *Edit Material*

Para asignar definitivamente las propiedades al cilindro, se pulsa la opción *Assign Section*, y tras seleccionar el cilindro se le asigna la sección *Section-1* y se marca la opción del ancho *From section* para que se tome como longitud del modelo la introducida previamente en la sección creada.

En este momento se pueden unir las dos partes creadas, disponiendo para ello de dos opciones, una es mantener un espacio entre ambas piezas para producir el primer contacto durante la simulación y otra posicionar ambas en contacto desde el principio. Ha sido necesario un análisis a través de numerosas pruebas para determinar la mejor opción ya que, aun siendo la primera de las opciones la recomendada para la mayoría de los casos en los ejemplos del manual de Abaqus, por las características del problema y principalmente por la simplicidad de las superficies, ha resultado ser más eficiente la segunda de las opciones.

Para posicionar las piezas se elige la opción *Instance Part* dentro del módulo *Assembly*, donde se seleccionará cada una de las piezas a insertar en el modelo marcando la opción *Dependent*. Esta elección provoca que el mallado se aplique a la pieza en vez de al conjunto, y aquí su uso es simplemente una cuestión de comodidad personal del programador.

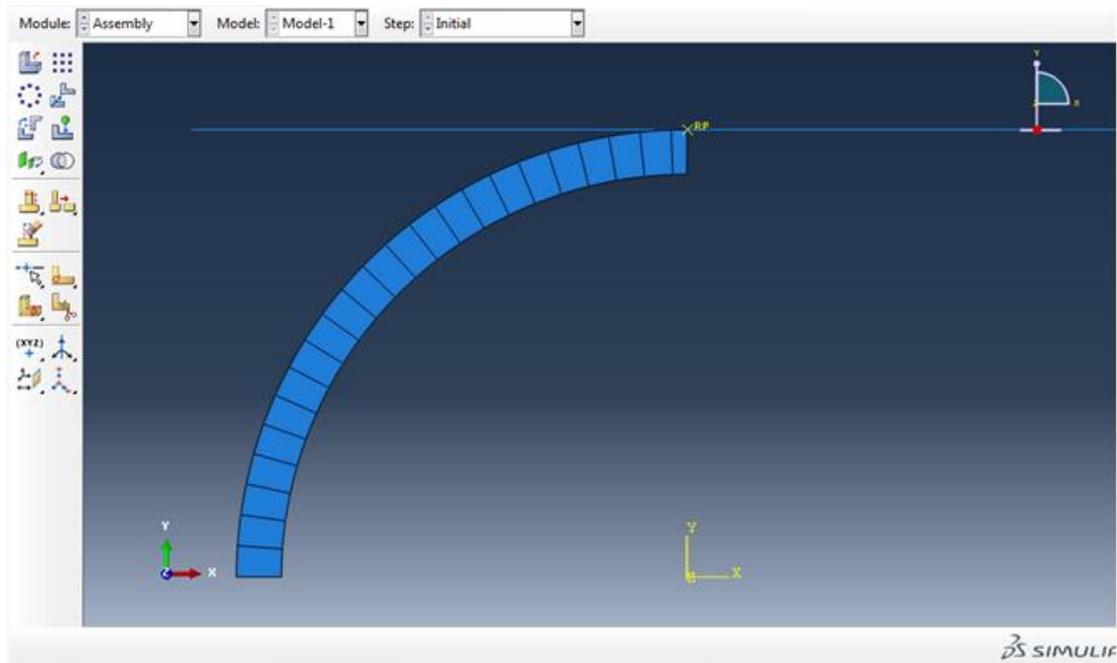
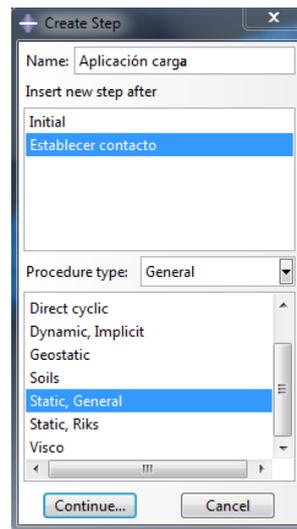


Figura 4.7 Conjunto

Empleando la opción *Translate Instance* se coloca el plato de compresión en contacto con la parte superior del cilindro, de forma que el conjunto queda tal y como se puede apreciar en la figura 4.7.

Lo siguiente es definir los pasos de los que se compondrá la simulación. Dentro del módulo *Step*, después del paso *Initial*, mediante la opción *Create Step*, se crea el siguiente paso, de tipo *Static General*, llamado *Establecer contacto*, donde se asegurará la estabilización del contacto. A continuación se activa la opción *Nlgeom* para considerar comportamientos no lineales, lo cual hace del modelo un supuesto más parecido a la realidad por admitir grandes deformaciones, las cuales pueden aparecer en la zona de contacto, debido a su geometría, y en otras zonas en el caso de aplicar una

carga alta a los cilindros de menor sección [21]. Además, se establece el tamaño del primer incremento en 0,5 para que el programa tenga más tiempo de estabilizar el contacto. Esto mismo se repite con el paso *Aplicación carga*, en el que se introducen las cargas que comprimen el cilindro radialmente, y se adopta como tamaño del primer incremento 0,2, de forma que en este segundo paso se disponga de más tiempo para la aplicación de las cargas, evitando así problemas de convergencia.



**Figura 4.8** Cuadro *Create Step*

Dentro de este módulo, también se añade la opción *Output* → *DOF Monitor*, donde se selecciona el punto Punto sup de la pieza *Cilindro*, el grado de libertad 2 y la salida cada un incremento. De esta forma, al resolver el modelo, se mostrará una gráfica (figura 4.14) donde aparece representada la altura relativa del punto superior del cilindro en función del tiempo transcurrido, permitiendo una primera evaluación del comportamiento del modelo, ya que, un movimiento del punto seleccionado desde el instante de aplicación de la carga, diferente a un desplazamiento prácticamente proporcional a la carga aplicada y en su misma dirección, indicaría algún problema en la simulación.

El siguiente paso en la creación del modelo es aquel donde se definen las interacciones entre las piezas que lo componen. Para ello, Abaqus propone en su manual tres sencillos

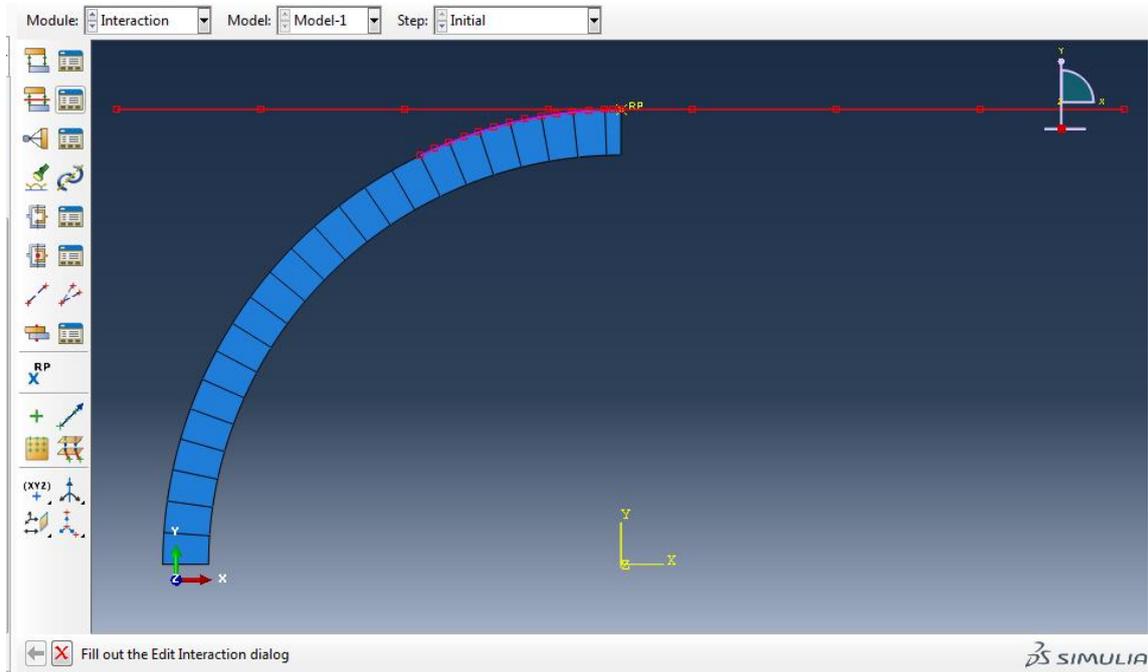
pasos como base de análisis a través de los que se van a definir las superficies que podrían entrar en contacto, con qué superficies tendrían contacto y las propiedades del contacto. De esta manera se resuelve que, la superficie exterior del cilindro, y en concreto su zona superior, entrará en contacto con la cara inferior del plato de compresión. Y, en la interacción tendrá lugar la transmisión de esfuerzos en dirección normal y tangencial a las superficies, debido al coeficiente de rozamiento entre ambas.

De acuerdo con lo descrito, dentro del módulo *Interaction*, en la opción *Create Interaction Property* se crea la relación de propiedades, llamadas *IntProp-1*, para la interacción entre las dos piezas, de tipo *Contact*, donde se añaden las propiedades de *Normal Behavior* utilizando la opción de “*Hard*” *Contact*, que es la solución estándar, y *Tangential Behavior* de tipo *Penalty*, introduciendo un valor para el coeficiente de fricción de 0,2.

Según el manual de Abaqus, únicamente se debe incluir fricción en el modelo cuando ésta tiene una influencia significativa en el problema. Así mismo el manual advierte que, coeficientes mayores de 0,2 suelen dar problemas y aumentan mucho el coste computacional. Por esto, aunque la influencia de la fricción parece no ser muy importante en el problema, se ha decidido incluir un coeficiente de 0,2, que se encuentra dentro del rango de coeficientes para los materiales empleados, y no debería complicar el modelo notablemente. De esta forma, se mantiene un modelo más realista que si no se incluyeran dichos efectos.

Seguidamente, entrando en la opción *Create Interaction* se puede seleccionar el tipo de interacción entre las piezas del modelo. La primera opción a considerar es la llamada *General contact*, de acuerdo con el manual del programa, la que posee el algoritmo más potente y permite definir los contactos de manera más sencilla. *Surface-to-surface contact* es la segunda opción, la cual está indicada para resolver problemas de contacto de forma más especializada que la anterior, proporcionando un control más preciso sobre esta parte del problema. Para el modelo del cilindro comprimido se escoge la segunda de las opciones, que a pesar de su mayor complejidad y trabajo de

configuración, permite un mayor control sobre la simulación, evitando posibles problemas de convergencia y en consecuencia ahorrando costes computacionales innecesarios. Esta se aplicará a partir del paso *Initial*, de forma que esté presente durante toda la simulación.



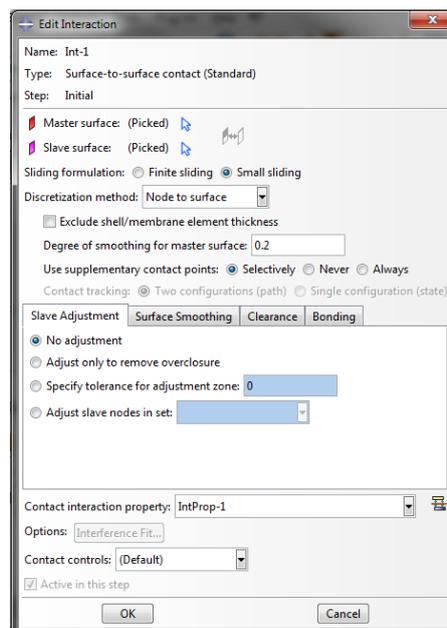
**Figura 4.9** Conjunto con las superficies de interacción en rojo

A continuación es necesario seleccionar las superficies de interacción maestra y esclava. El manual de Abaqus indica que la superficie esclava será la que tenga una mayor densidad de malla y, en caso de ser de similar densidad, la que posea un material menos rígido. También se aconseja que, si se cuenta con una superficie modelada como rígida, sea esta la superficie maestra. De tal manera, se selecciona como superficie maestra o *master* el plato de compresión, y como cara de contacto la inferior.

Puesto que el coste computacional aumentará con el mayor tamaño de la zona esclava o *slave*, entre las distintas zonas del cuarto de cilindro se seleccionan solamente siete de su parte superior externa, dejando margen para deformaciones relativamente grandes.

Aun así, será necesario comprobar al menos visualmente que el contacto tras la simulación no ha sobrepasado la zona seleccionada.

En el panel que se muestra tras la selección de las zonas de contacto se marca la opción *Small sliding* que, en comparación con la opción de *Finite sliding* ofrece un mejor comportamiento durante la aproximación de las zonas de contacto, si bien solo se puede emplear en problemas donde los desplazamientos entre superficies no son muy superiores al tamaño típico de los elementos empleados.



**Figura 4.10** Cuadro *Edit Interaction*

Aun cuando *Surface to surface* suele conseguir mejores resultados en las zonas de contacto, como método de discretización se elige *Node to surface*, puesto que, al existir un nodo en el primer punto de contacto y no ser de vital importancia para el modelo, ésta técnica ofrece menos problemas y un coste computacional menor sin necesidad de emplear controles adicionales de contacto. Llegado a este punto, solo queda incluir las propiedades del contacto previamente configuradas y nombradas *IntProp-1*.

A fin de añadir las condiciones de contorno del modelo, se accede al módulo *Load*, en el que se aplican las restricciones necesarias y las cargas para la simulación. Pulsando en la opción *Create Load*, se añade una nueva carga al modelo. En este caso se deja el nombre por defecto *Load-1* y se dispone su creación en el paso *Aplicación carga*. Esta fuerza será de tipo *Mechanical* y se aplicará como *Concentrated force*. Como punto de aplicación se selecciona el punto de referencia *RP* del plato de compresión y se introduce, como valor, la mitad del perteneciente al módulo y con signo negativo, en el eje 2. Dicha fuerza corresponde a una carga vertical con sentido hacia abajo, y se introduce únicamente la mitad de su valor real, correspondiente a la mitad representada del modelo.

El valor de esta fuerza se detallará más adelante en el presente capítulo, al ser necesario analizar la misma antes de proporcionar un valor definitivo para utilizarlo finalmente en la simulación, por las razones explicadas al principio de este apartado.

Seguidamente se incluirán en el modelo las condiciones de contorno del problema. Estas se componen de las restricciones que imponen las simetrías aplicadas al modelo, una restricción del movimiento horizontal y de rotación del plato de compresión y una restricción de todos los movimientos sobre el plato de compresión, que desaparecerá justo en el momento de aplicación de la carga, con lo que se evita la aparición del efecto denominado *chattering* o castaño durante la estabilización del contacto.

Accediendo a la opción *Create Boundary Condition* se nombra la primera de las condiciones de contorno como *Simetría y*, y se aplicada en el paso *Initial*, siendo de categoría *Mechanical* y de tipo *Symmetry/Antisymmetry/Encastre*. La zona de aplicación es el corte horizontal del anillo, y para bloquear los movimientos en dirección vertical y las rotaciones, tal y como establece la simetría del problema, se selecciona la opción *YSYMM* ( $U_2=UR_1=UR_3=0$ ). Se procede de forma similar para la aplicación de la coacción *Simetría x*, asignándola en este caso al corte vertical del anillo y seleccionando la opción *XSYMM* ( $U_1=UR_2=UR_3=0$ ), como corresponde a la zona afectada por la simetría horizontal del problema.

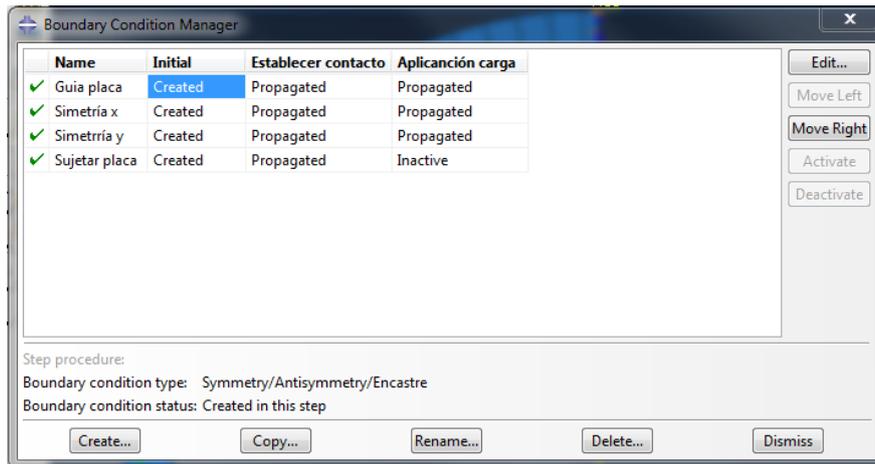


Figura 4.11 Cuadro *Boundary Condition Manager*

La siguiente condición de contorno toma el nombre *Guía placa*, es de categoría *Mechanical* y de tipo *Symmetry/Antisymmetry/Encastre* y se aplica en el paso *Initial*. Dicha condición se fija en el punto de referencia *RP* del plato de compresión y para evitar el desplazamiento horizontal y los giros del mismo, se escoge la opción de *XSymm* ( $U1=UR2=UR3=0$ ).

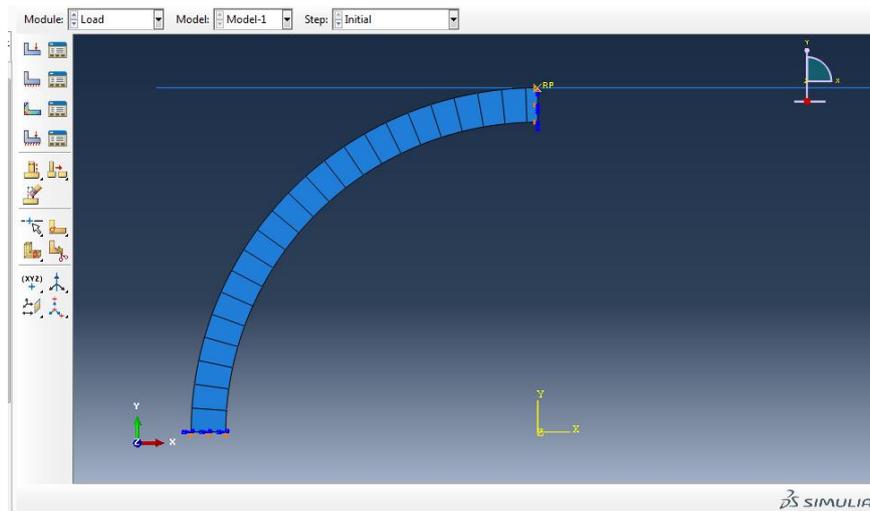


Figura 4.12 Conjunto con carga y coacciones

A la última condición de contorno se le nombra *Sujetar placa*, se crea en el paso *Initial*, es de categoría *Mechanical* y de tipo *Displacement/Rotation*. Se selecciona el punto de referencia del plato de compresión *RF*, y se elige la opción *U2*, con el objeto de impedir

los desplazamientos verticales, y a partir de este momento, tal y como se puede apreciar en la figura 4.12, aparecen los símbolos que representan las coacciones aplicadas en sus respectivas zonas de aplicación.

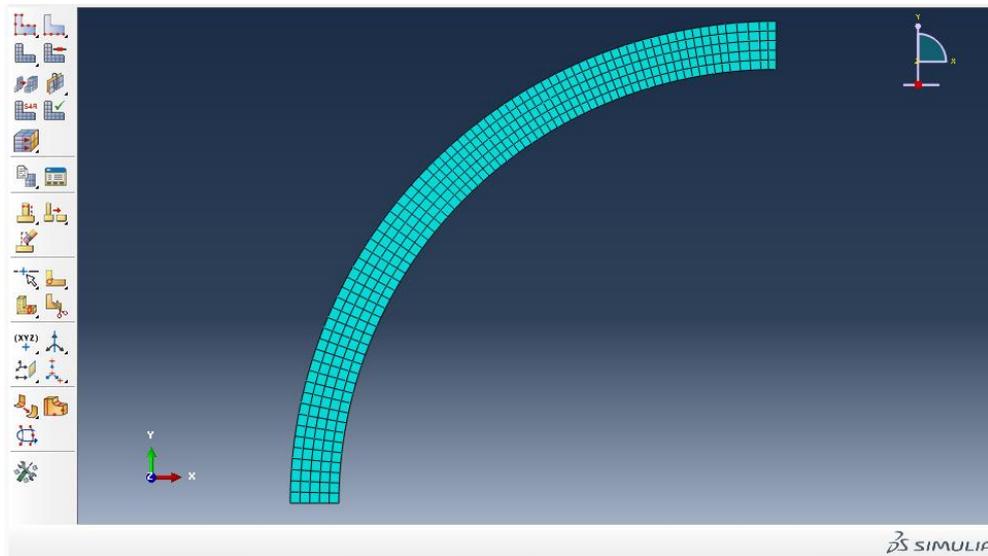
Para finalizar la configuración de las condiciones de contorno, accediendo al cuadro *Boundary Condition Manager*, se desactiva la coacción *Sujetar placa* durante el paso *Aplicación carga*. De esta forma, una vez establecido el contacto entre las dos partes, la placa se podrá mover libremente en dirección vertical ante la aplicación de las fuerzas del modelo.

Para completar el modelo, falta aplicar la malla al cilindro, o dicho de otra manera, dividir el cilindro en un conjunto finito de elementos, lo cual se efectúa dentro del módulo **Mesh** de Abaqus. Pero antes es necesario tener en cuenta algunas consideraciones extraídas del manual de Abaqus.

Una mayor densidad de malla suele implicar resultados más precisos, pero a la vez, al aumentar el número de elementos, se incrementa el coste computacional. Los elementos de segundo orden (cuadráticos) proporcionan mayor precisión y captan mejor las concentraciones de tensiones, por lo que son más apropiados para el modelado de geometrías que los elementos de primer orden (lineales). Aún así, los elementos de segundo orden pueden no dar buenos resultados en problemas de contacto empleando el modelo general *hard contact*, o en análisis que requieran grandes deformaciones de los elementos.

En cuanto a la forma de la malla, dado que se adapta convenientemente al cilindro, se propone un modelo de elementos cuadrados colocados de forma estructurada sobre todo el cilindro, de manera que dos de sus lados tengan dirección radial y los otros dos tangencial. De este modo se generarán una serie de mallados con distintos tamaños de elemento, obteniendo así una serie sobre la que se analizará la influencia de la densidad de malla en los resultados.

Respecto del tipo de elemento, aunque se prevé la obtención de mejores resultados con elementos cuadráticos, se tomarán resultados también empleando elementos lineales para así poder analizar las diferencias. Además, debido a la mayor facilidad para proporcionar resultados aceptables que ofrece la utilización de elementos lineales en situaciones de contacto, se efectuará un primer análisis con este tipo de elemento, de cara a determinar la fuerza  $P$  máxima aplicable al modelo sin llegar a la plastificación, pues se prevé que las mayores tensiones se conseguirán en la zona de aplicación de la carga. Esto es debido a que la zona mencionada es, según los métodos analíticos de cálculo de este problema [7], donde aparecen las mayores tensiones, sumándose además en este caso las tensiones provocadas por el contacto entre las piezas del modelo.



**Figura 4.13** Malla del cilindro

Para realizar el mallado del cilindro se empieza configurando un tamaño del elemento típico al que el programa tratará de adaptarse. Esto se ejecuta en la opción *Seed Part*, insertando en el campo *Aproximate global size* el tamaño de elemento de la malla que en cada momento se va a crear, en milímetros, por ser la unidad establecida para las dimensiones del modelo. En el siguiente paso será necesario pulsar en la opción *Assign Mesh Controls*, y una vez seleccionada la pieza del cilindro se indica como forma de elemento *Quad*, de tipo *Structured*, de forma que el programa componga automáticamente una malla con elementos cuadrados repartidos de forma uniforme.

Posteriormente, dentro de la opción *Assign Element Type*, y tras seleccionar la pieza completa del cilindro, se elige la librería de elementos *Standard*, ya que *Abaqus Explicit* no es compatible con elementos cuadráticos. Y dentro de la familia de elementos de *Plane Stress*, se escogerán elementos de primer o segundo orden, *Linear* o *Quadratic* respectivamente, en función del análisis que se requiera en cada momento.

Para finalmente generar la malla sobre la pieza, basta con pulsar la opción *Mesh Part*. En este momento se tiene la base sobre la que obtener cualquiera de los modelos previstos, y si se desea cambiar el tamaño de los elementos o su tipo, basta con modificar el parámetro a variar y generar la malla nuevamente.

Una vez logrado el modelo completo y listo para su cálculo, se accede al módulo *Job*, donde se crea un nuevo trabajo de simulación mediante la opción *Create Job*. Entrando en el cuadro *Job Manager* aparecen las opciones *Submit*, para simular el modelo, *Monitor*, donde se puede comprobar el estado de la simulación y la aparición de errores, y *Results*, para ver los resultados.

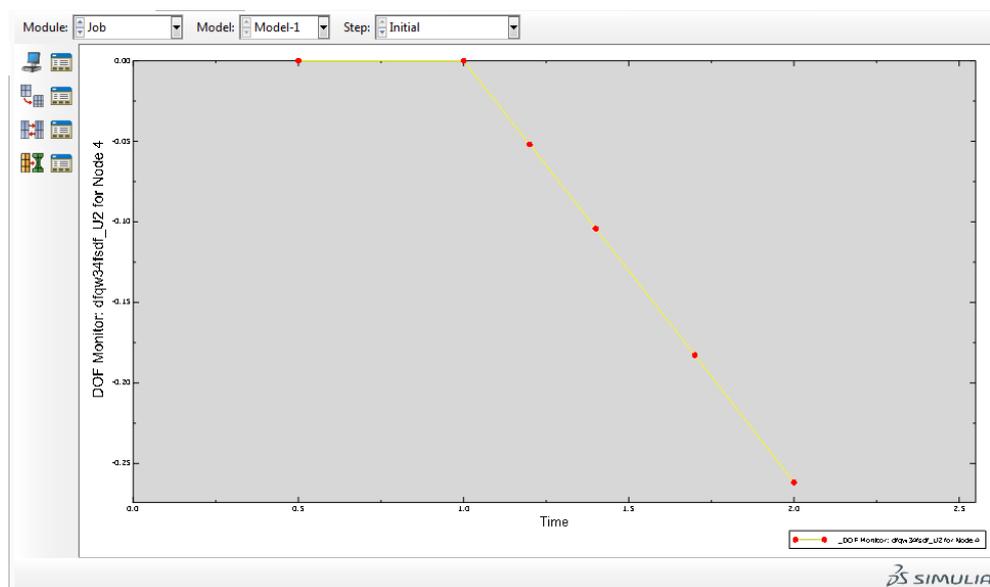
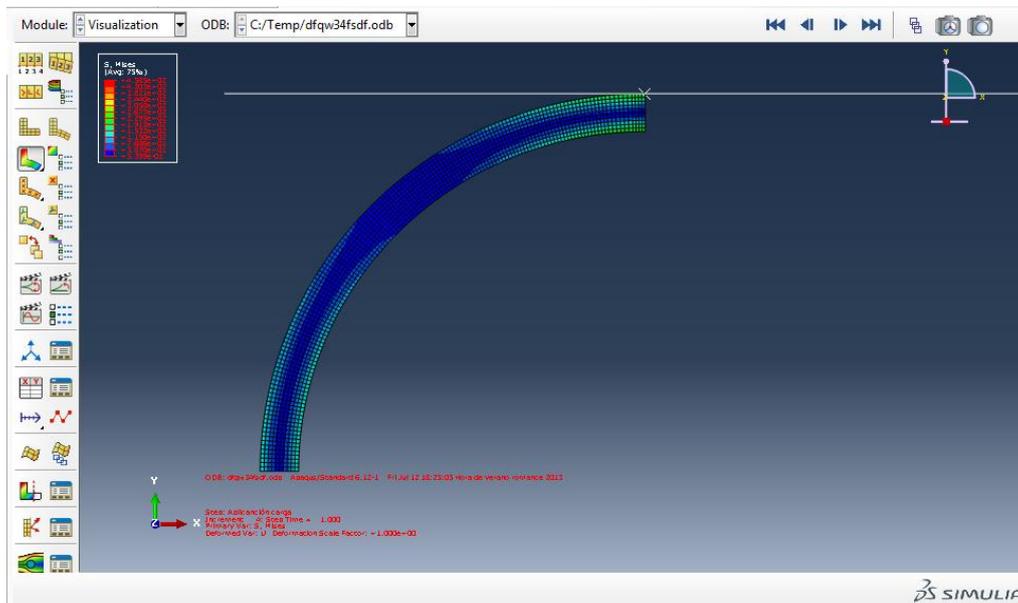


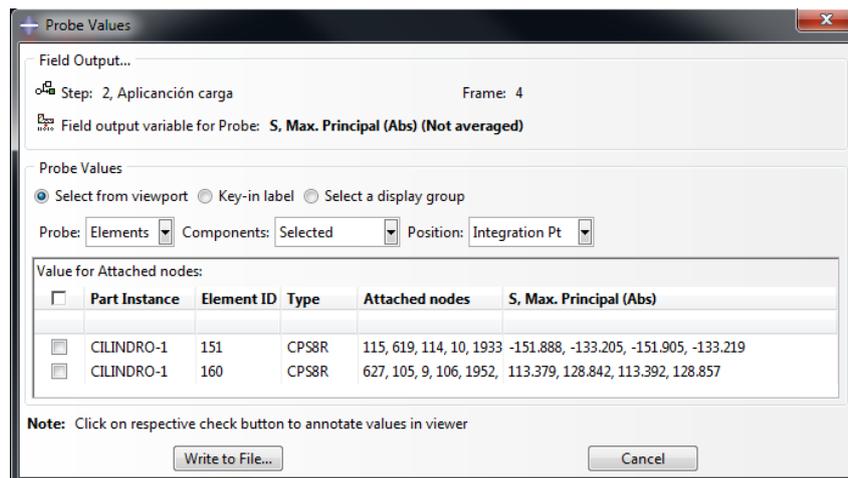
Figura 4.14 Gráfica del *DOF Monitor* del caso  $\rho=0,9$  y elementos cuadráticos

Tras la simulación del modelo se comprueba que no existen errores, tanto en el registro de avisos de la simulación como en la gráfica del *DOF Monitor*, mostrada en la figura 4.14, donde aparece una tendencia coherente con el comportamiento esperado. Pulsando en la opción *Results* se accede al módulo *Visualization*, donde se cargan los resultados de la simulación seleccionada. Y a través de la opción *Plot Contours on Deformed Shape* se puede visualizar el modelo deformado por las fuerzas que actúan sobre él, coloreado según el nivel tensional alcanzado en cada zona (figura 4.15). De esta forma se puede obtener una visión rápida de los resultados obtenidos en el modelo, pudiendo además modificar el tipo de resultado que se muestra, eligiendo las tensiones según Von Mises, Tresca, tensiones principales, etc.



**Figura 4.15** Visualización de las tensiones de Von Mises en el modelo

Para finalmente obtener las tensiones en un punto concreto, basta con hacer uso de la opción *Tools*→*Query*→*Probe values*, y seleccionar cualquiera de los nodos del modelo. De esta manera se consiguen las tensiones en cualquier punto de un determinado elemento según la teoría elegida. Los resultados de las tensiones calculadas se tomarán de los puntos de integración según Von Mises, para comprobar si el modelo plastifica, y según las tensiones máximas principales, para los resultados finales.

Figura 4.16 Cuadro *Probe Values*

### 4.3.- Análisis del modelo y resultados

De acuerdo con lo indicado en el punto 4.2, antes de proceder al análisis del modelo, se practica una primera toma de valores mediante prueba y error, para determinar de manera aproximada una carga  $P$  que no haga plastificar al modelo. Esta prueba se efectúa en el cilindro con la relación de aspecto  $\rho=0,9$  por ser en el que se alcanzan mayores tensiones con la misma carga. De esta forma se asegura que ninguno de los cilindros plastifique.

Para conseguir una primera aproximación de la carga  $P$ , se calcula la presión máxima producida por las presiones de Hertz en contacto cilíndrico [22], que aparecen en la zona de contacto debido a su geometría. Esto se calcula empleando las ecuaciones proporcionadas por Hertz para el contacto entre elementos cilíndricos, considerando en este caso el diámetro del plato de compresión como  $\infty$ , por ser plano.

$$b = \sqrt{\frac{2F(1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2}{\pi l (1/d_1 + 1/d_2)}}$$

$$p_{\max} = \frac{2F}{\pi b l}$$

Ecuaciones 4.1

Donde  $F$  es la carga,  $\nu$  el coeficiente de Poisson y  $E$  el módulo elástico de cada uno de los materiales,  $d$  el diámetro de cada uno de los elementos en contacto,  $l$  la longitud axial de los elementos y  $p_{m\acute{a}x}$  la presión máxima alcanzada.

Introduciendo en las ecuaciones 4.1 los datos del problema, descritos en el apartado 4.2 de la memoria, se obtiene una presión de 354,7MPa con una carga de 85N. De esta forma, se consigue un valor de la carga  $P$  para comenzar la búsqueda de un valor definitivo de la misma, que no haga plastificar ningún punto del cilindro, mediante el programa de Elementos Finitos, teniendo en cuenta ahora el modelo completo y no solo las presiones generadas en el contacto.

El modelo para la obtención de  $P$  se realiza con un mallado de tipo estructurado, con elementos cuadrados lineales de tamaño aproximado 0,1. Y tras ajustar la fuerza  $P$  repetidas veces a partir del valor obtenido previamente, se alcanza una tensión máxima en el modelo según Von Mises de **347,3MPa** con  **$P=70\text{N}$** , que se encuentra por debajo de los 355MPa, donde comienza la zona plástica del material considerado. Por lo que la mencionada fuerza  $P$ , será la empleada para la simulación del modelo.

Conocida la magnitud de la fuerza del problema, se procede a la evaluación de los resultados que ofrece el modelo, en función del tamaño y el tipo de elementos que forman la malla. A estos efectos, se tomarán las tensiones máximas principales absolutas, en aquellos puntos de integración de los nodos que corresponden a los puntos  $P1$  y  $P2$  del modelo, aplicando una carga  $P=70\text{N}$ , y variando el tamaño de los elementos desde un máximo de 2 hasta un mínimo que consiga resultados aceptables, todo ello tanto para elementos lineales como cuadráticos.

Los resultados obtenidos se mostrarán incluyendo todos los decimales ofrecidos por el programa en los datos de salida, de forma que, aun no siendo necesarios en muchos de los casos por el nivel de precisión de los cálculos, dichos resultados queden a disposición de futuros trabajos con todo el nivel de precisión que poseen en su origen.

En el cilindro de  $\rho=0,9$  se inicia la toma de resultados, mostrada en las tablas 4.1 y 4.2, y donde se observa que el mínimo tamaño de elemento empleado es 0,05. Dicho valor, ha sido el último tomado del modelo debido a que la variación en la tensión producida, respecto de la generada al contemplar el elemento anterior, de mayor tamaño, se sitúa entorno al 1%. No se espera pues, una mejoría notable de los resultados disminuyendo aún más el tamaño de los elementos, algo que sí supondría elevar en gran medida el coste computacional.

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-104,565	90,6599		
1	-131,526	112,412	20,50	19,35
0,5	-143,914	122,432	8,61	8,18
0,1	-155,598	131,878	7,51	7,16
0,05	-157,186	133,166	1,01	0,97

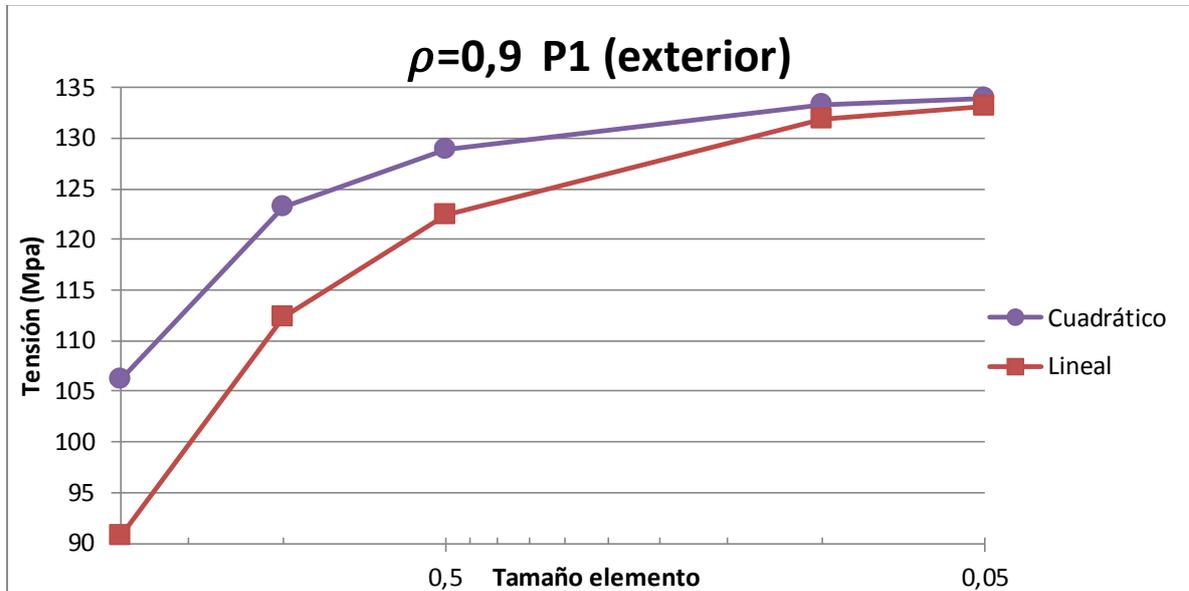
**Tabla 4.1** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **lineales** en el cilindro con  $\rho=0,9$

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-124,685	106,146		
1	-145,045	123,199	14,04	13,84
0,5	-151,905	128,857	4,52	4,39
0,1	-157,424	133,358	3,51	3,37
0,05	-158,12	133,924	0,44	0,42

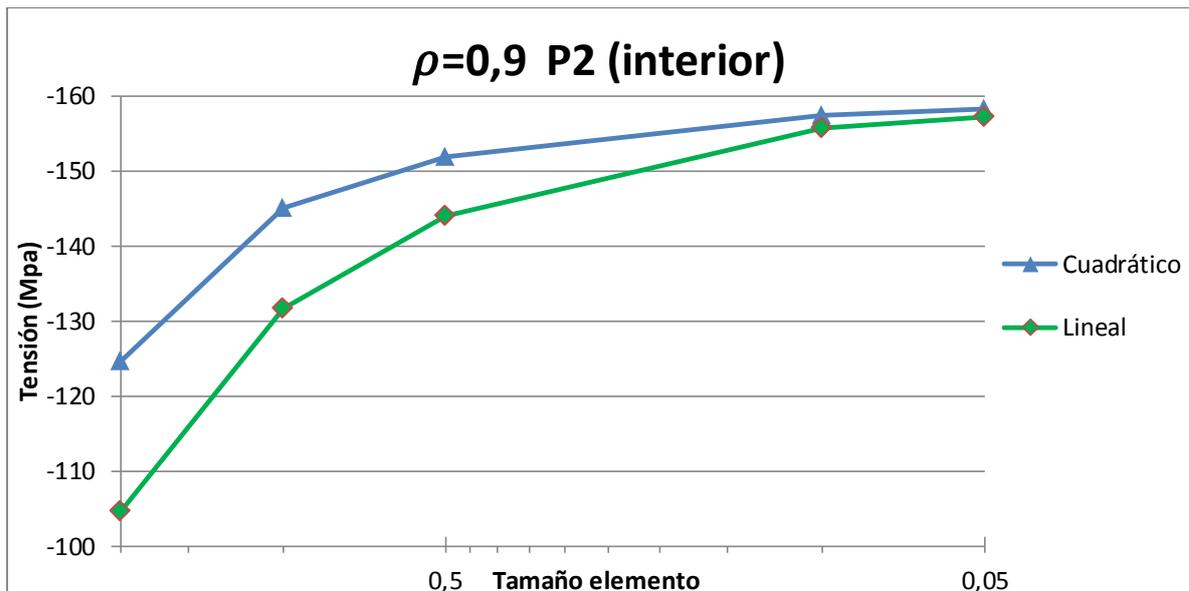
**Tabla 4.2** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **cuadráticos** en el cilindro con  $\rho=0,9$

A continuación se muestran las gráficas 4.1 y 4.2, donde aparecen representados los datos de las tensiones en el cilindro de  $\rho=0,9$  para los puntos P1 y P2 respectivamente, utilizando elementos lineales y cuadráticos. Tal y como se puede observar en dichas gráficas, donde las tendencias son similares, en ambos casos se consiguen resultados más próximos al resultado final cuando se utilizan elementos cuadráticos, siendo más notable su diferencia cuanto más grandes son los elementos. Por tanto, todo apunta a

que se consiguen mejores resultados con elementos cuadráticos que con elementos lineales, de acuerdo con lo señalado en el apartado 4.2.



**Gráfica 4.1** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P1** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,9$



**Gráfica 4.2** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P2** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,9$

En el caso del cilindro con  $\rho=0,8$  el comportamiento es similar al apreciado en el caso de  $\rho=0,9$ . Según se observa en las tablas 4.3 y 4.4, la variación sufrida por el resultado de las tensiones en los puntos  $P1$  y  $P2$ , tras la última disminución en el tamaño de los elementos empleados, se encuentra por debajo del 1%. En consecuencia, se toma de nuevo como resultado final el obtenido con elementos de tamaño 0,05 mm.

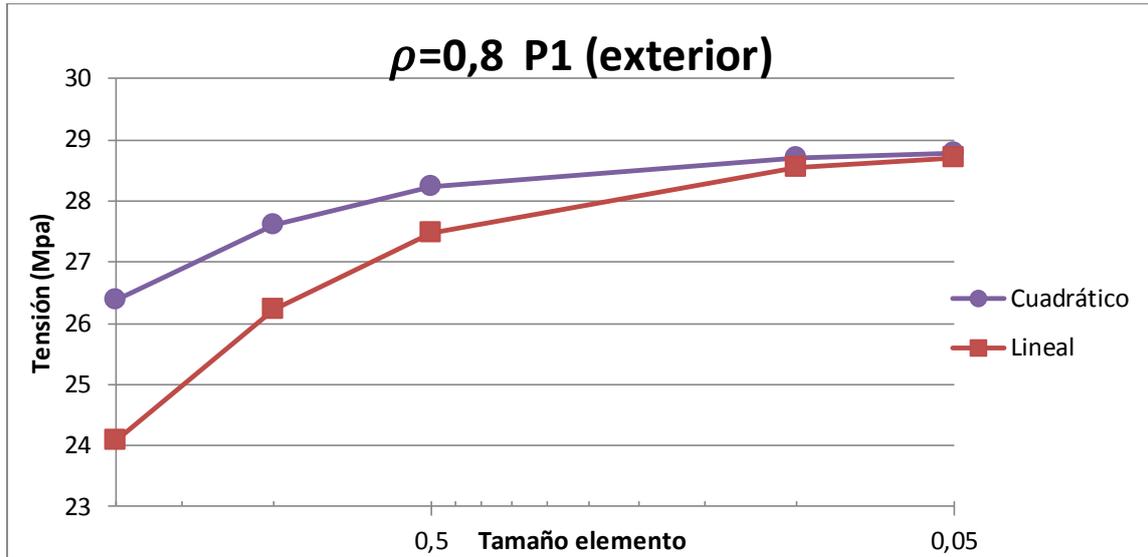
Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	$P2$ (interior)	$P1$ (exterior)	$P2$ (interior)	$P1$ (exterior)
2	-33,6538	24,0834		
1	-36,9967	26,2330	9,03	8,19
0,5	-38,9275	27,4719	4,95	4,50
0,1	-40,6152	28,5521	4,15	3,78
0,05	-40,8372	28,6935	0,54	0,49

**Tabla 4.3** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **lineales** en el cilindro con  $\rho=0,8$

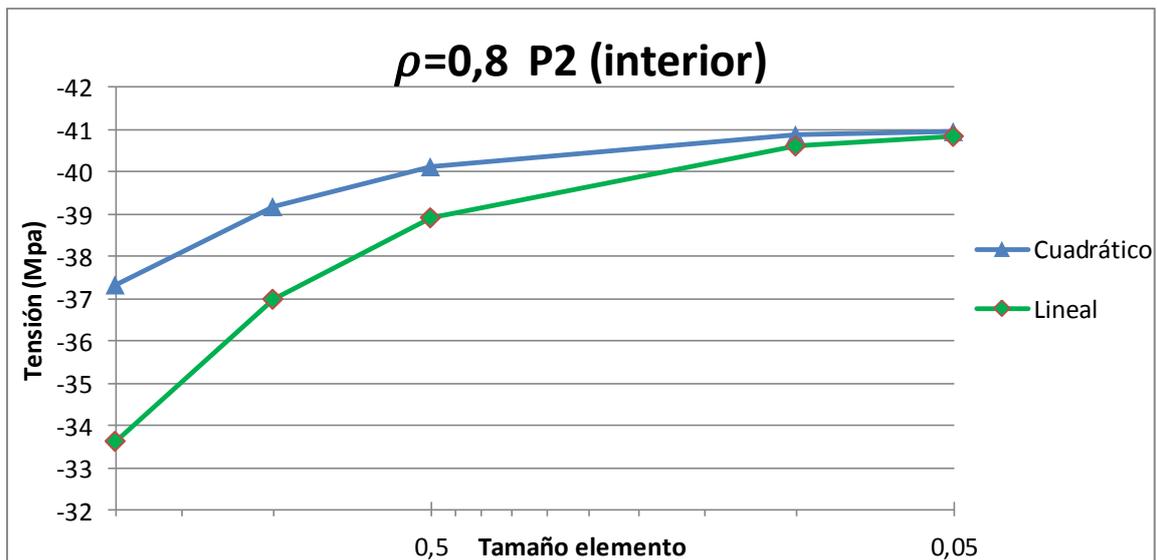
Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	$P2$ (interior)	$P1$ (exterior)	$P2$ (interior)	$P1$ (exterior)
2	-37,3268	26,3918		
1	-39,1792	27,6177	4,72	4,43
0,5	-40,1160	28,2289	2,33	2,16
0,1	-40,8705	28,7148	1,84	1,69
0,05	-40,9642	28,7757	0,23	0,21

**Tabla 4.4** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **cuadráticos** en el cilindro con  $\rho=0,8$

Comparando de nuevo las tensiones obtenidas en ambos puntos, según la utilización de elementos lineales o cuadráticos en las gráficas 4.3 y 4.4, también en esta ocasión se aprecia una aproximación mayor de los elementos cuadráticos al resultado final, siendo esta más significativa con mayores tamaños de elemento.



Gráfica 4.3 Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P1** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,8$



Gráfica 4.4 Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P2** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,8$

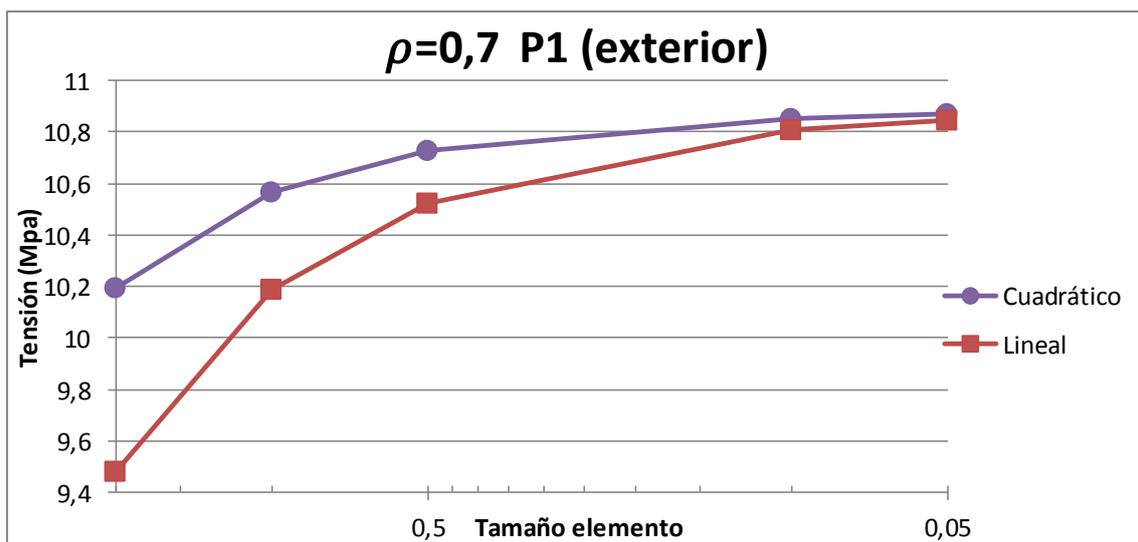
A continuación se muestran los resultados obtenidos y las gráficas comparativas para los cilindros desde  $\rho=0,7$  a  $\rho=0,2$ .

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-16,3313	9,47958		
1	-17,7430	10,1875	7,95	6,94
0,5	-18,4271	10,5245	3,71	3,20
0,1	-19,0113	10,8104	3,07	2,64
0,05	-19,0875	10,8471	0,40	0,34

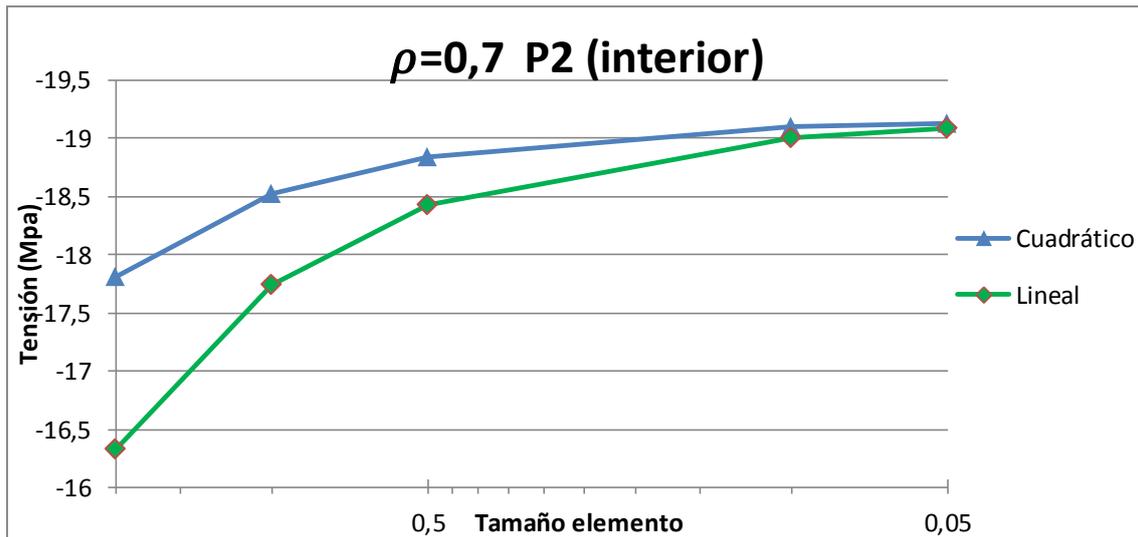
**Tabla 4.5** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **lineales** en el cilindro con  $\rho=0,7$

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-17,8111	10,1975		
1	-18,5237	10,5681	3,84	3,50
0,5	-18,8420	10,7269	1,68	1,48
0,1	-19,0989	10,8530	1,34	1,16
0,05	-19,1299	10,8685	0,16	0,14

**Tabla 4.6** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **cuadráticos** en el cilindro con  $\rho=0,7$



**Gráfica 4.5** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P1** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,7$



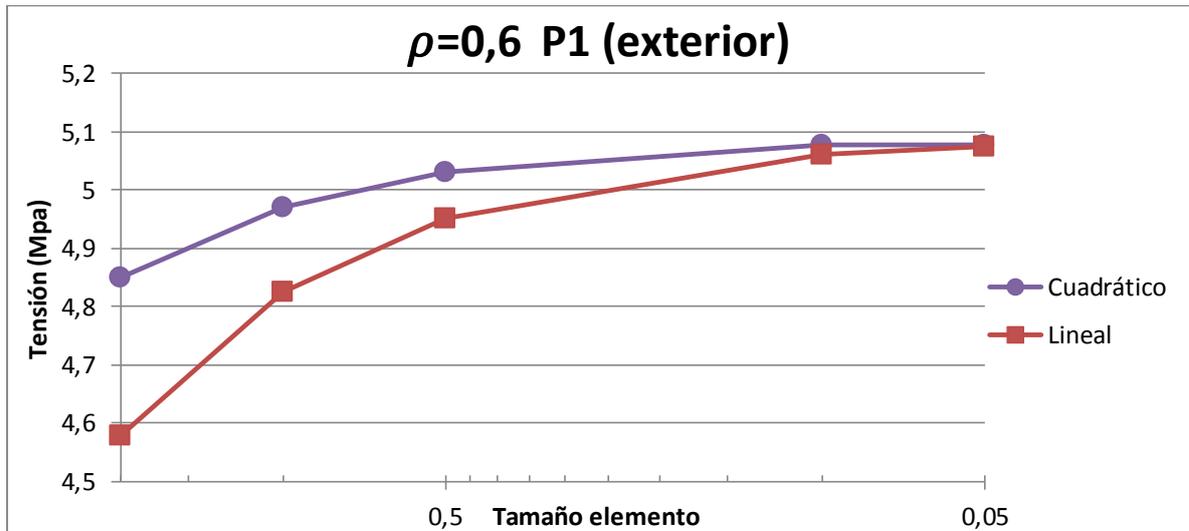
**Gráfica 4.6** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P2** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,7$

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-10,0769	4,57993		
1	-10,7334	4,82475	6,11	5,07
0,5	-11,0878	4,95282	3,19	2,58
0,1	-11,3894	5,06038	2,64	2,12
0,05	-11,4281	5,07397	0,34	0,27

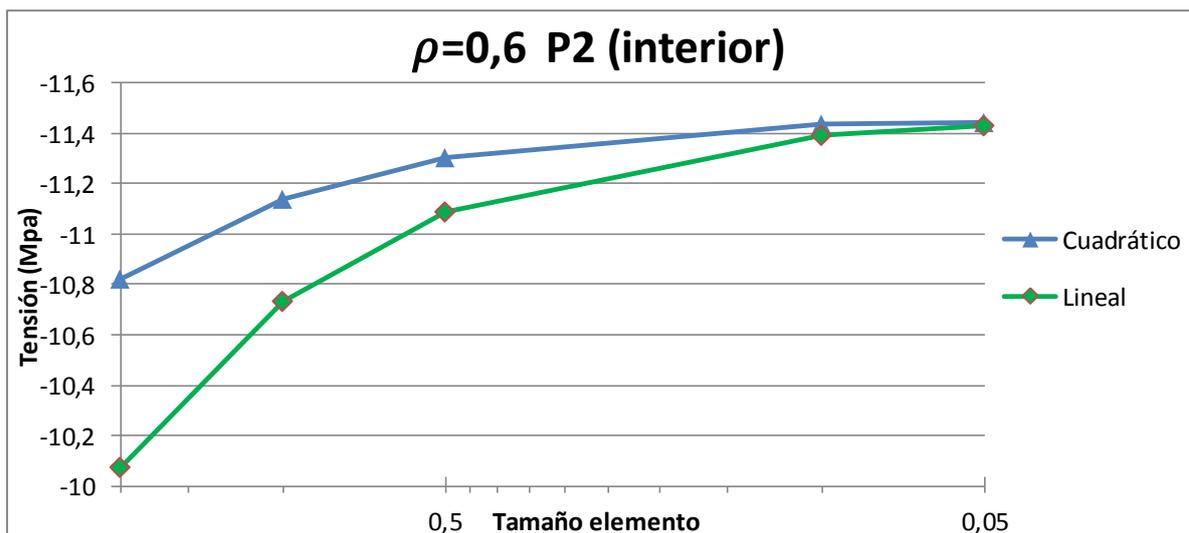
**Tabla 4.7** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **lineales** en el cilindro con  $\rho=0,6$

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-10,8239	4,85049		
1	-11,1418	4,97154	2,85	2,43
0,5	-11,3043	5,03033	1,43	1,16
0,1	-11,4348	5,07655	1,14	0,91
0,05	-11,4452	5,07901	0,09	0,05

**Tabla 4.8** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **cuadráticos** en el cilindro con  $\rho=0,6$



**Gráfica 4.7** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P1** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,6$



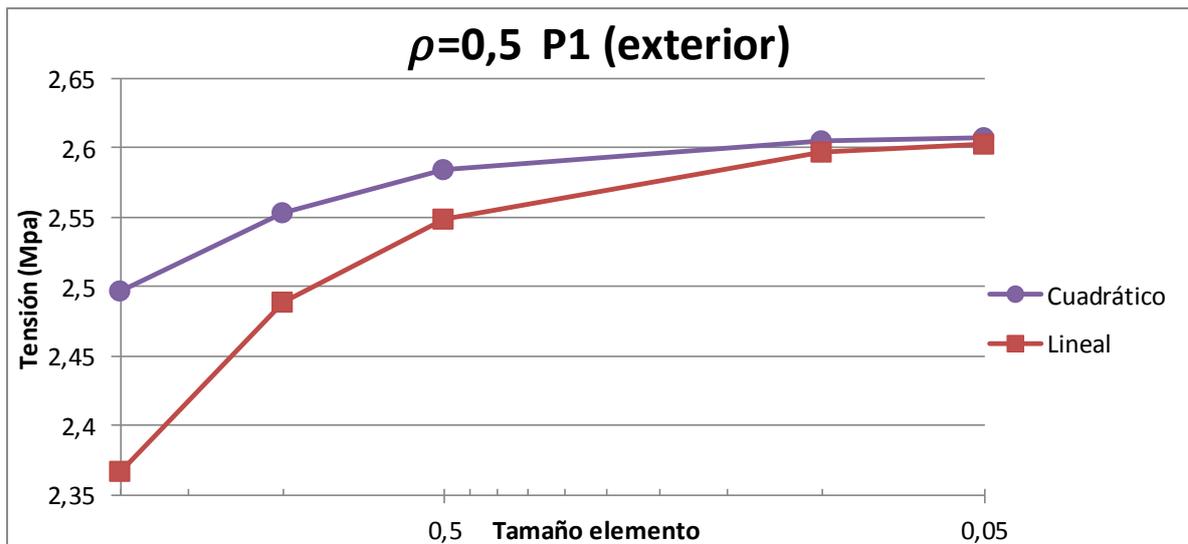
**Gráfica 4.8** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P2** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,6$

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-6,97488	2,36633		
1	-7,44308	2,48933	6,29	4,94
0,5	-7,67883	2,54822	3,07	2,31
0,1	-7,87948	2,59711	2,54	1,88
0,05	-7,90517	2,60332	0,32	0,24

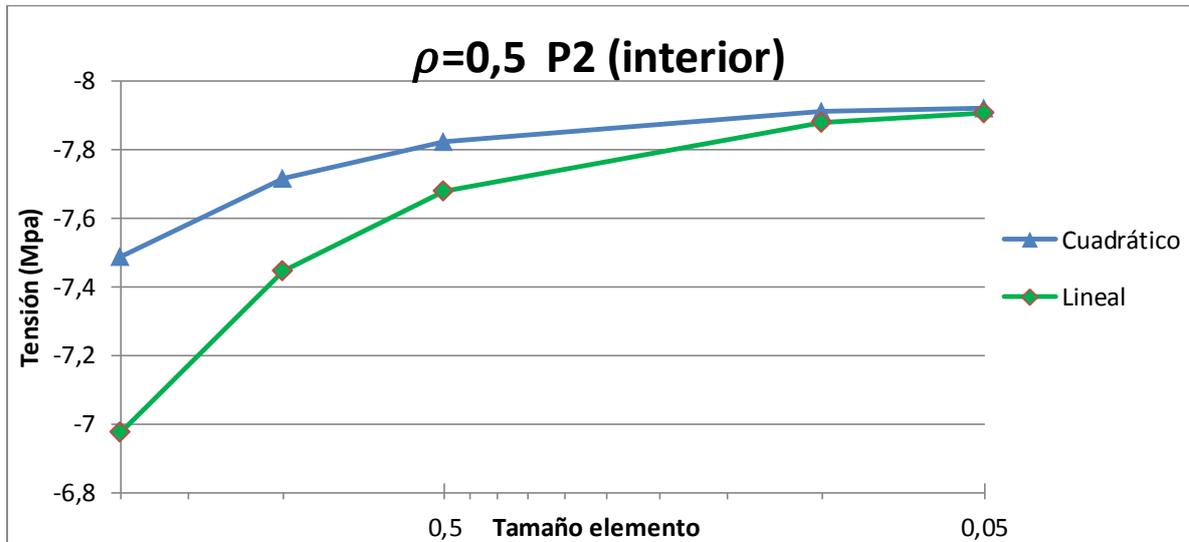
**Tabla 4.9** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **lineales** en el cilindro con  $\rho=0,5$

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-7,48821	2,49728		
1	-7,71549	2,55270	2,94	2,17
0,5	-7,82327	2,58389	1,37	1,20
0,1	-7,90985	2,60473	1,09	0,80
0,05	-7,92043	2,60693	0,13	0,08

**Tabla 4.10** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **cuadráticos** en el cilindro con  $\rho=0,5$



**Gráfica 4.9** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P1** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,5$



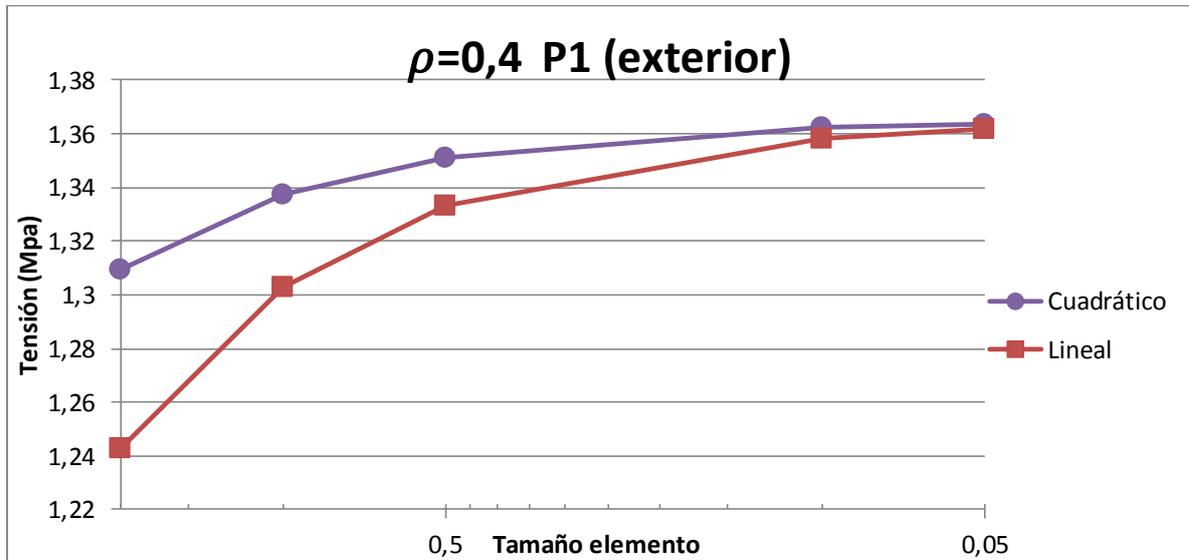
**Gráfica 4.10** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P2** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,5$

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-5,35421	1,24304		
1	-5,7043	1,30302	6,13	4,60
0,5	-5,89732	1,33347	3,27	2,28
0,1	-6,06299	1,35856	2,73	1,84
0,05	-6,08449	1,36176	0,35	0,23

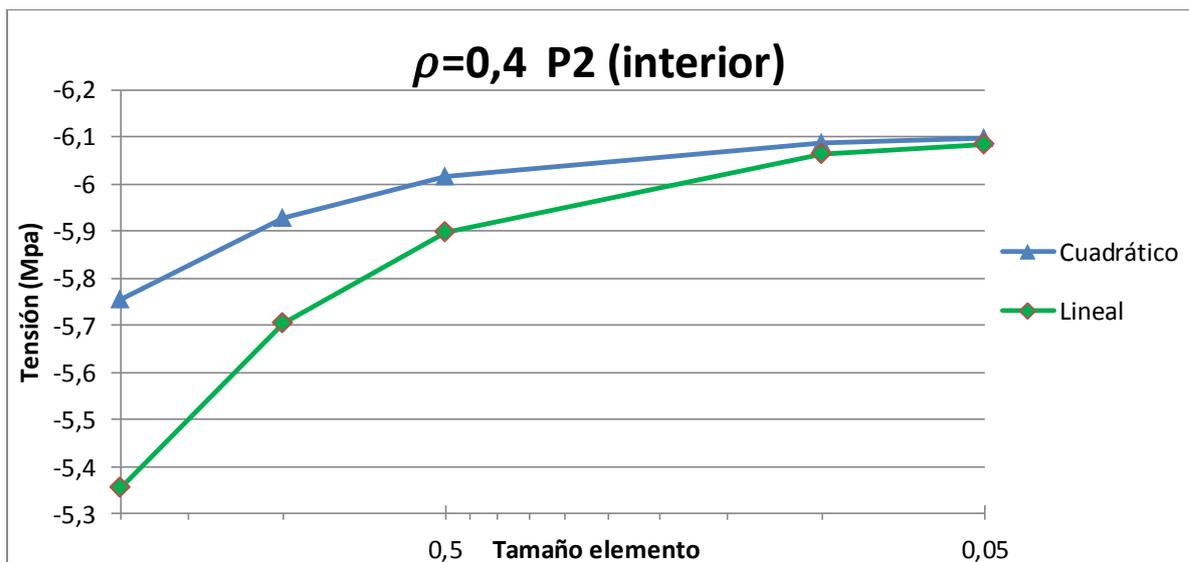
**Tabla 4.11** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **lineales** en el cilindro con  $\rho=0,4$

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-5,75414	1,30952		
1	-5,92628	1,33774	2,90	2,10
0,5	-6,01537	1,35144	1,48	1,01
0,1	-6,08791	1,36234	1,19	0,80
0,05	-6,09707	1,36367	0,19	0,11

**Tabla 4.12** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **cuadráticos** en el cilindro con  $\rho=0,4$



Gráfica 4.11 Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P1** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,4$



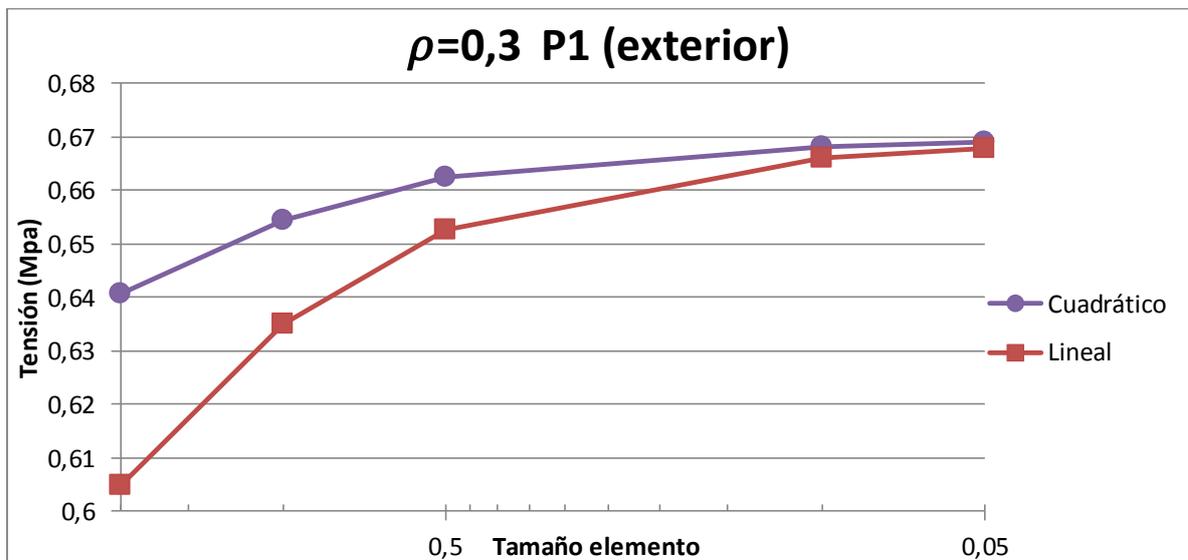
Gráfica 4.12 Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P2** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,4$

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-4,42579	0,604946		
1	-4,74074	0,635048	6,64	4,74
0,5	-4,93847	0,652693	4,00	2,70
0,1	-5,10777	0,666171	3,31	2,02
0,05	-5,13000	0,667899	0,43	0,26

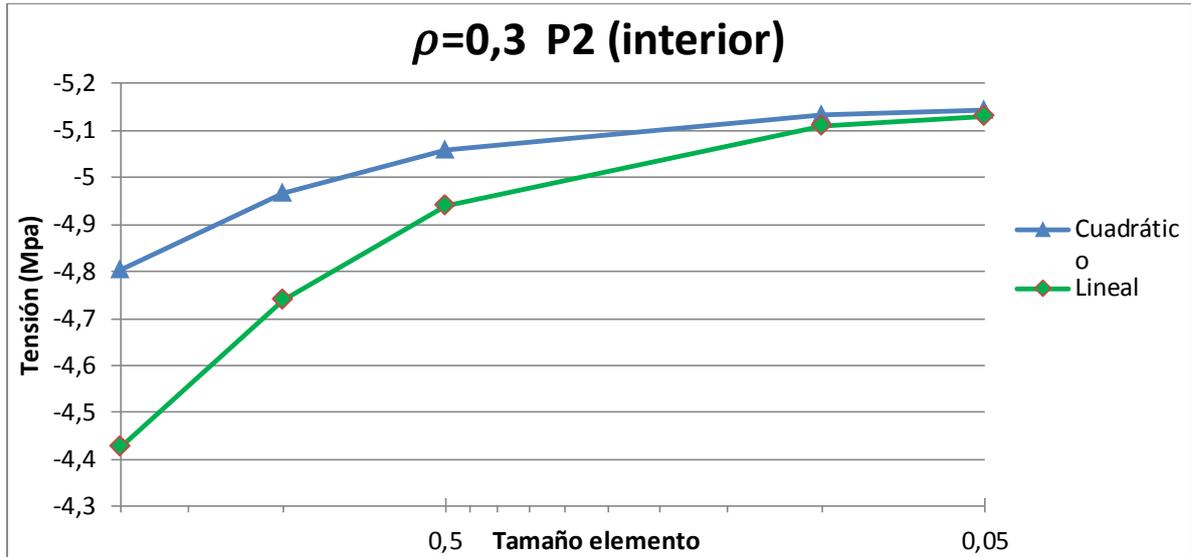
**Tabla 4.13** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **lineales** en el cilindro con  $\rho=0,3$

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-4,80267	0,640743		
1	-4,96726	0,654523	3,31	2,10
0,5	-5,05858	0,662388	1,80	1,18
0,1	-5,13355	0,668211	1,46	0,87
0,05	-5,14302	0,668926	0,18	0,10

**Tabla 4.14** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **cuadráticos** en el cilindro con  $\rho=0,3$



**Gráfica 4.13** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P1** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,3$



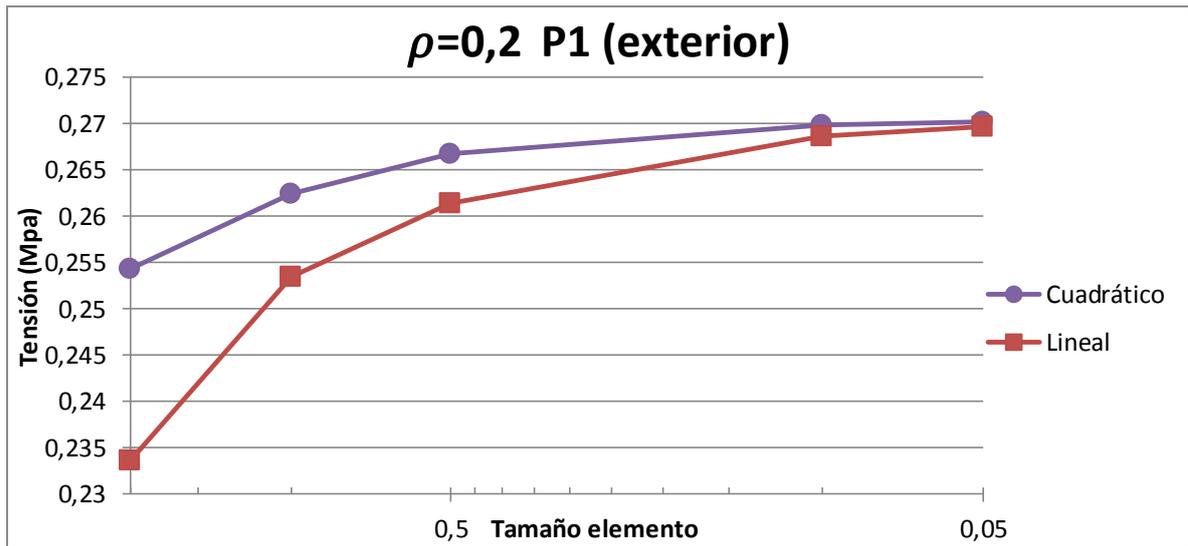
**Gráfica 4.14** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P2** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,3$

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-3,79713	0,233663		
1	-4,17604	0,253486	9,07	7,82
0,5	-4,41569	0,261328	5,42	3,00
0,1	-4,63345	0,268692	4,69	2,74
0,05	-4,66295	0,269657	0,63	0,36

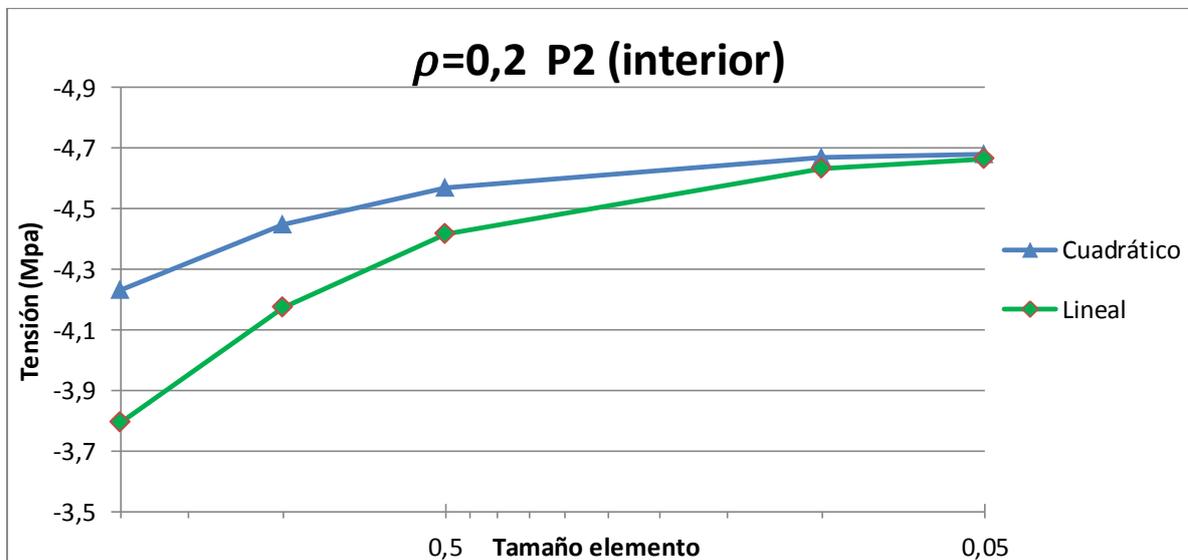
**Tabla 4.15** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **lineales** en el cilindro con  $\rho=0,2$

Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-4,23192	0,254388		
1	-4,45002	0,262391	4,90	3,05
0,5	-4,56854	0,266660	2,59	1,60
0,1	-4,66758	0,269831	2,12	1,17
0,05	-4,68012	0,270220	0,27	0,14

**Tabla 4.16** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **cuadráticos** en el cilindro con  $\rho=0,2$



**Gráfica 4.15** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P1** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,2$



**Gráfica 4.16** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P2** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,2$

Reiteradamente se observa en las tablas y gráficas de los resultados obtenidos en el rango de  $\rho=0,7$  a  $\rho=0,2$ , que se consiguen comportamientos muy similares a las situaciones de  $\rho=0,9$  y  $\rho=0,8$ , consiguiendo una pequeña variación como consecuencia de la última disminución del tamaño de los elementos, y una aproximación mayor de los resultados al resultado final, empleando elementos cuadráticos.

Finalmente, se exponen los resultados relativos al cilindro con  $\rho=0,1$  en las tablas 4.17 y 4.18, y en las mismas se advierte que, aun siendo importante la diferencia en las dimensiones empleadas, y por lo tanto también de las correspondientes tensiones obtenidas en comparación con el cilindro de  $\rho=0,9$ , las tendencias se mantienen, consiguiendo una variación entorno al 1% con la reducción del tamaño de los elementos a 0,05 mm.

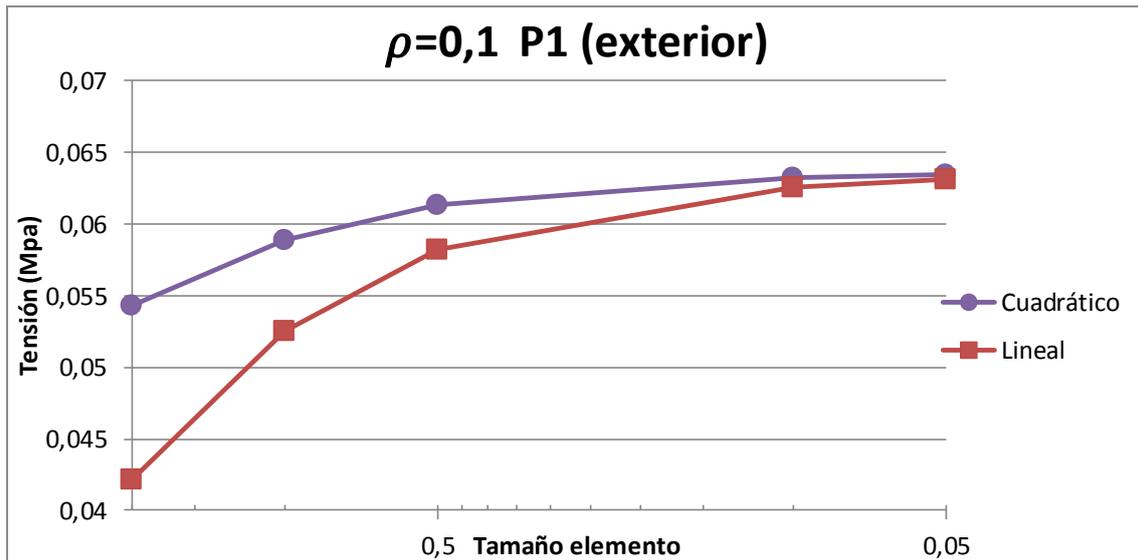
Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-3,18289	0,0421439		
1	-3,65554	0,0525694	12,92	19,83
0,5	-4,01385	0,0581781	8,92	9,64
0,1	-4,39205	0,0625558	8,61	6,99
0,05	-4,44713	0,0631039	1,24	0,86

**Tabla 4.17** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **lineales** en el cilindro con  $\rho=0,1$

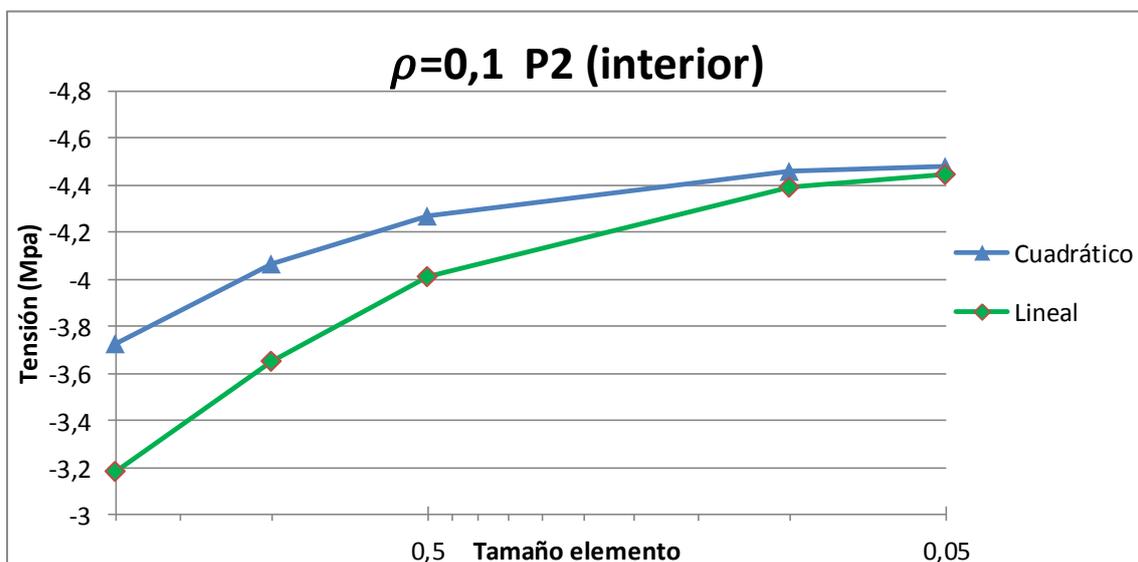
Tamaño elemento (mm)	Tensión (Mpa)		% Variación	
	P2 (interior)	P1 (exterior)	P2 (interior)	P1 (exterior)
2	-3,72912	0,0542822		
1	-4,06288	0,0588556	8,21	7,77
0,5	-4,27111	0,0613507	4,87	4,06
0,1	-4,45569	0,0632191	4,14	2,95
0,05	-4,47998	0,0634546	0,54	0,37

**Tabla 4.18** Tensiones y sus variaciones con el cambio de tamaño de los elementos, obtenidas mediante Elementos Finitos empleando elementos **cuadráticos** en el cilindro con  $\rho=0,1$

Lo mismo ocurre de nuevo con las tendencias de las tensiones si se confrontan los resultados de los elementos lineales y cuadráticos, tal y como se muestra en las gráficas 4.17 y 4.18. Los resultados obtenidos con elementos cuadráticos vuelven a aproximarse en mayor medida al resultado final.



**Gráfica 4.17** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P1** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,1$



**Gráfica 4.18** Tensiones obtenidas mediante Elementos Finitos en **P2** en función del tamaño de los elementos, empleando elementos lineales y cuadráticos, para el cilindro con  $\rho=0,1$

Tras el estudio de los datos de las tensiones obtenidas, en los puntos P1 y P2, con elementos lineales y cuadráticos de distintos tamaños, se puede concluir que, tal y como se indica en el manual del programa para este tipo de situaciones [20], para hallar las tensiones en dichos puntos del cilindro, los elementos cuadráticos ofrecen mejores resultados. Por esta razón, aun cuando el coste computacional se incrementa con su empleo, considerando aproximadamente el tiempo empleado por el ordenador en hacer

los cálculos (~4 horas con  $\rho=0,1$ ), en este caso merece la pena su uso antes que aumentar la densidad de la malla.

Los resultados finales obtenidos para el problema del cilindro de radio exterior  $R=50$  mm, comprimido diametralmente por una fuerza  $P=70$ N, según el método de los elementos finitos para los puntos  $P1$  y  $P2$ , se muestran en la tablas 4.19 en función de  $\rho$ . Estos datos, han sido extraídos de los valores resultantes del empleo de una malla uniforme y estructurada con **elementos cuadráticos** de tamaño típico **0,05 mm**.

$\rho$	Tensión (Mpa)		$\rho$	Tensión (Mpa)	
	$P2$ (interior)	$P1$ (exterior)		$P2$ (interior)	$P1$ (exterior)
0,1	-4,447	0,063	0,1	-4,480	0,063
0,2	-4,663	0,270	0,2	-4,680	0,270
0,3	-5,130	0,668	0,3	-5,143	0,669
0,4	-6,084	1,362	0,4	-6,100	1,364
0,5	-7,905	2,603	0,5	-7,920	2,607
0,6	-11,428	5,074	0,6	-11,445	5,079
0,7	-19,087	10,847	0,7	-19,130	10,869
0,8	-40,837	28,694	0,8	-40,964	28,776
0,9	-157,186	133,166	0,9	-158,120	133,924

**Tablas 4.19** Tensiones obtenidas en función de  $\rho$  para  $P1$  y  $P2$  empleando elementos de tamaño 0,05 mm, lineales (izquierda) y cuadráticos (derecha)

## Capítulo V

### RESULTADOS Y ANÁLISIS

---

Entre las teorías utilizadas por Filon y Timoshenko [23] para el cálculo de las tensiones en el problema del anillo comprimido diametralmente, la más precisa de las tratadas, dentro de su rango de actuación, es la Teoría de la Elasticidad, ya que de partida no adopta simplificaciones. Por ello, en lo sucesivo, en la presente memoria se fijarán como resultados exactos para el problema tratado, los obtenidos a partir de dicha teoría, y los mismos servirán como referencia para evaluar la validez y precisión de las soluciones extraídas de los otros dos principales métodos para tratar el problema, la Resistencia de Materiales, por ser una teoría que resulta práctica y de uso relativamente fácil, y el Método de los Elementos Finitos, por la potencia y precisión demostradas en los últimos años sin necesidad de emplear modelos reales.

En los próximos apartados se desarrolla un análisis de los dos últimos métodos mencionados, comparando sus resultados con los de la Teoría de la Elasticidad. En concreto, se cotejan dichas soluciones con los valores obtenidos para el factor de concentración de tensiones  $K$ , correspondiente a las tensiones tangenciales en los puntos  $P1$  y  $P2$  y para los valores de  $\rho$ , entre 0,1 y 0,9, tratados en el cuarto capítulo de la memoria.

Por ello, es necesario extraer los resultados del factor de concentración de tensiones  $K$ , mediante la Teoría de la elasticidad. Estos se obtienen de la ecuación 3.25, para los distintos valores de  $\rho$ , con  $R=50$  mm,  $\theta=90^\circ$ ,  $r=1$  para  $P1$  y  $r=\rho$  para  $P2$ . El cálculo se realiza en una hoja de Excel, hasta  $n=152$ , que parece una precisión más que aceptable para el rango de valores manejados. Dichos resultados se muestran en la siguiente tabla:

$\rho$	$K$	
	$P2$ (interior)	$P1$ (exterior)
0,1	-5,054	0,071
0,2	-5,265	0,303
0,3	-5,781	0,751
0,4	-6,851	1,531
0,5	-8,898	2,928
0,6	-12,860	5,705
0,7	-21,497	12,209
0,8	-46,033	32,324
0,9	-176,898	149,708

**Tabla 5.1** Valores de  $K$  según la Teoría de la Elasticidad

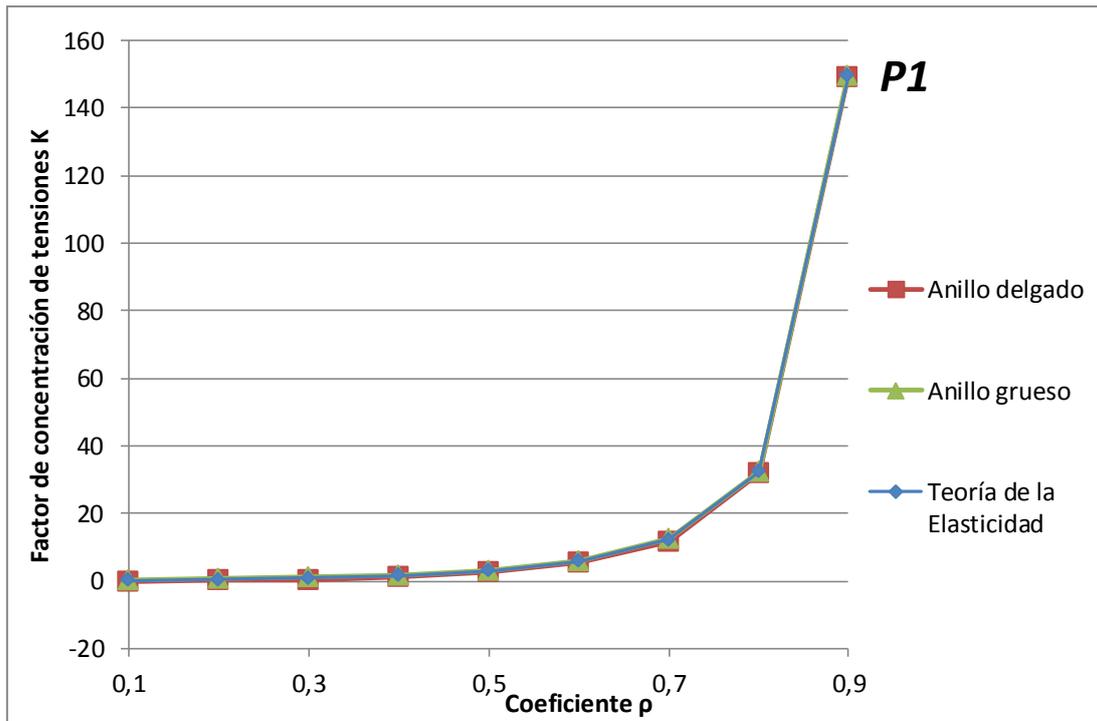
### 5.1.- Resultados de la Resistencia de Materiales

Los resultados del factor de concentración de tensiones  $K$  mediante la Resistencia de Materiales, se calculan utilizando las ecuaciones 3.6 para anillo delgado y 3.13 para anillo grueso, con  $m=1$  para  $P1$  y  $m=0$  para  $P2$ ,  $\theta=90^\circ$  y los valores de  $\rho$  tratados en el anterior apartado. De esta manera se obtienen los resultados plasmados en las siguientes tablas:

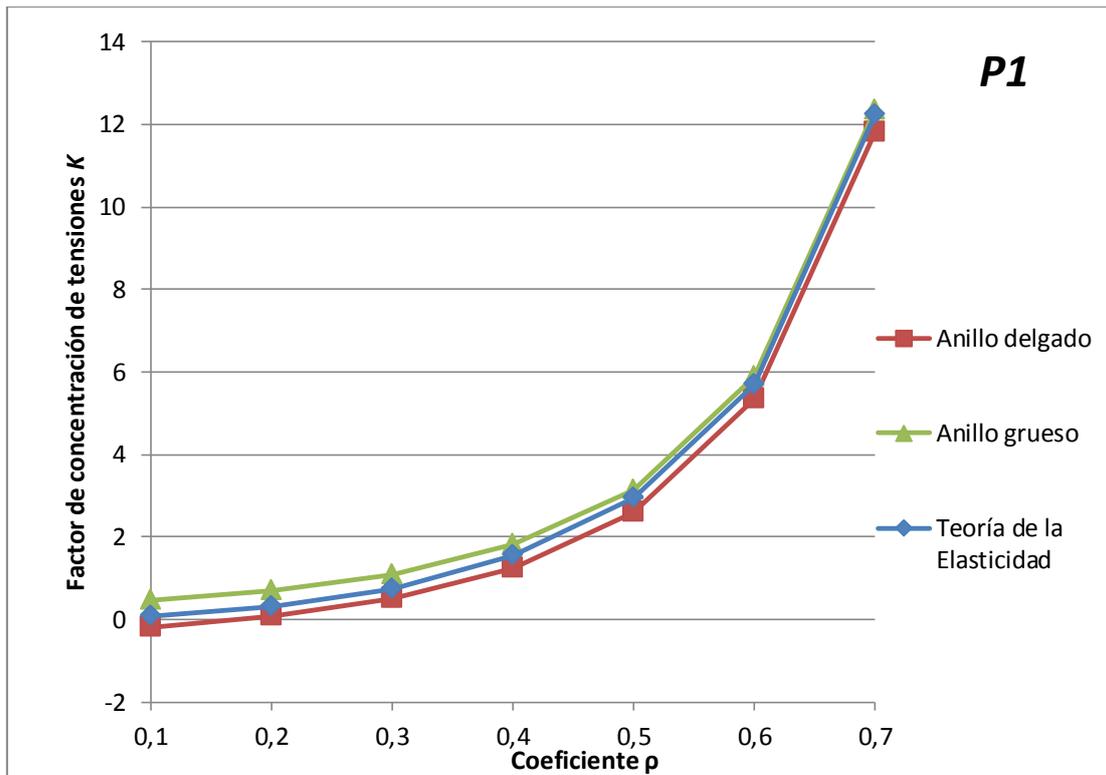
$\rho$	$K$		$\rho$	$K$	
	$P2$ (interior)	$P1$ (exterior)		$P2$ (interior)	$P1$ (exterior)
0,1	-4,060	-0,205	0,1	-7,292	0,471
0,2	-4,070	0,064	0,2	-5,927	0,692
0,3	-4,746	0,495	0,3	-6,086	1,093
0,4	-6,003	1,234	0,4	-7,064	1,809
0,5	-8,185	2,592	0,5	-9,070	3,149
0,6	-12,234	5,340	0,6	-12,997	5,883
0,7	-20,936	11,822	0,7	-21,608	12,351
0,8	-45,523	31,918	0,8	-46,125	32,437
0,9	-176,429	149,286	0,9	-176,974	149,794

**Tabla 5.2** Valores de  $K$  según la Resistencia de materiales para anillo delgado (izquierda) y grueso (derecha)

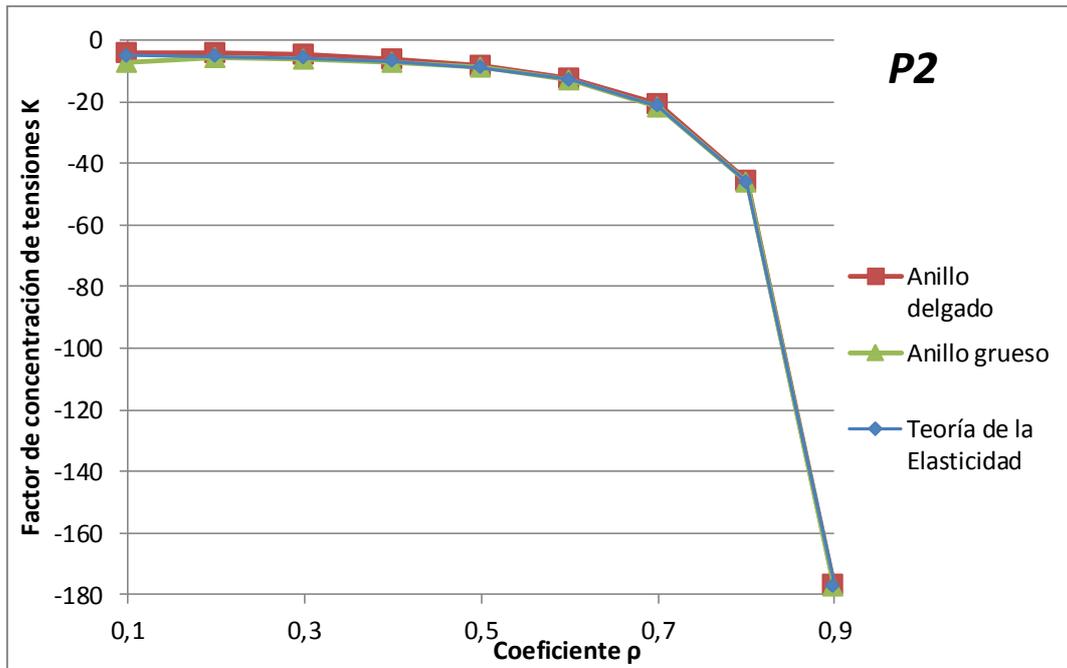
A continuación se muestran las gráficas de los resultados obtenidos mediante la Teoría de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales, distinguiendo los dos supuestos tratados en la última, anillo delgado y anillo grueso.



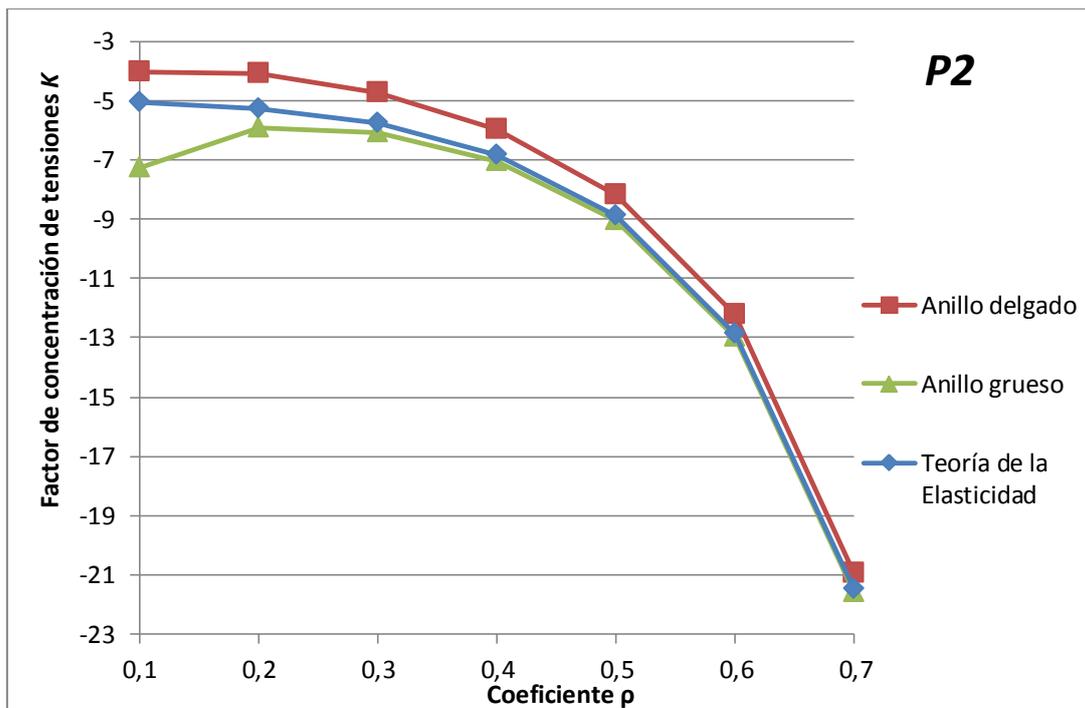
Gráfica 5.1 Valores de  $K$  en función de  $\rho$  en  $P1$  (exterior) mediante la Teoría de la Elasticidad y Resistencia de Materiales suponiendo anillo grueso y anillo delgado



Gráfica 5.2 Valores de  $K$  en función de  $\rho$  en  $P1$  (exterior) mediante la Teoría de la Elasticidad y Resistencia de Materiales suponiendo anillo grueso y anillo delgado. Detalle hasta  $\rho=0,7$



Gráfica 5.3 Valores de  $K$  en función de  $\rho$  en  $P2$  (interior) mediante la Teoría de la Elasticidad y Resistencia de Materiales suponiendo anillo grueso y anillo delgado



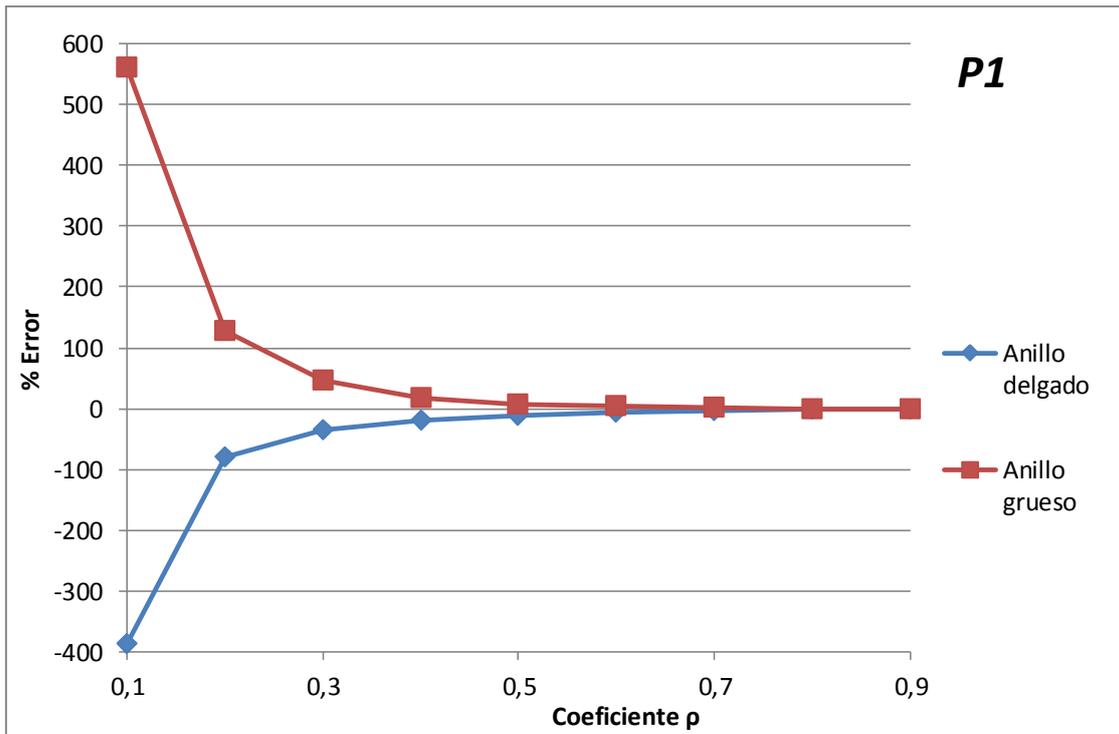
Gráfica 5.4 Valores de  $K$  en función de  $\rho$  en  $P2$  (interior) mediante la Teoría de la Elasticidad y Resistencia de Materiales suponiendo anillo grueso y anillo delgado. Detalle hasta  $\rho=0,7$

Aunque en las gráficas 5.1 y 5.3 para los puntos P1 y P2 no se distingue con claridad la diferencia en los resultados obtenidos, sí se percibe, y aún mejor se puede apreciar en las gráficas en detalle 5.2 y 5.4. En concreto, las diferencias entre la Resistencia de Materiales y la Teoría de la Elasticidad, son mayores para valores de  $\rho < 6$ , e incluso más notables para el supuesto de anillo delgado.

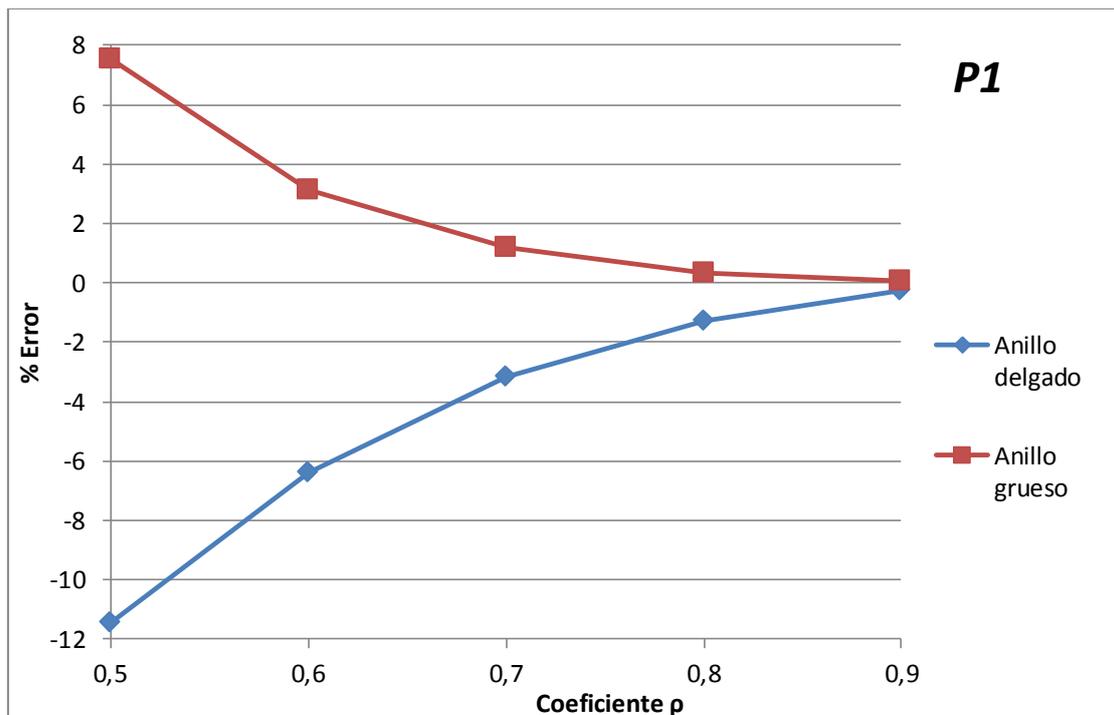
$\rho$	Error (%)		$\rho$	Error (%)	
	P2 (interior)	P1 (exterior)		P2 (interior)	P1 (exterior)
0,1	-19,66	-386,83	0,1	44,29	559,87
0,2	-22,70	-78,89	0,2	12,57	128,13
0,3	-17,90	-34,08	0,3	5,28	45,50
0,4	-12,38	-19,39	0,4	3,12	18,17
0,5	-8,02	-11,47	0,5	1,93	7,57
0,6	-4,86	-6,39	0,6	1,07	3,12
0,7	-2,61	-3,17	0,7	0,52	1,17
0,8	-1,11	-1,26	0,8	0,20	0,35
0,9	-0,27	-0,28	0,9	0,04	0,06

**Tabla 5.3** Errores de  $K$  según la Resistencia de materiales para anillo delgado (izquierda) y grueso (derecha) en comparación con la Teoría de la Elasticidad

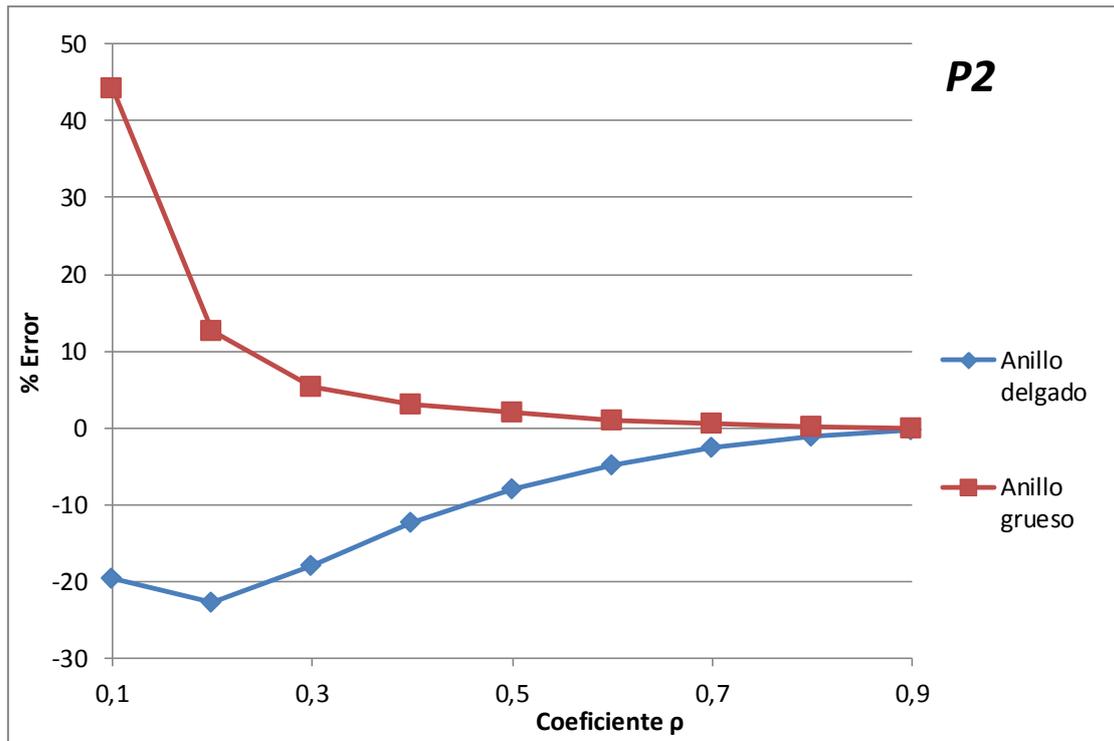
Para apreciar las diferencias con mayor claridad, se muestran en las gráficas 5.5 y 5.6 los errores cometidos por ambos supuestos de la Resistencia de Materiales en comparación con los resultados de la Teoría de la Elasticidad.



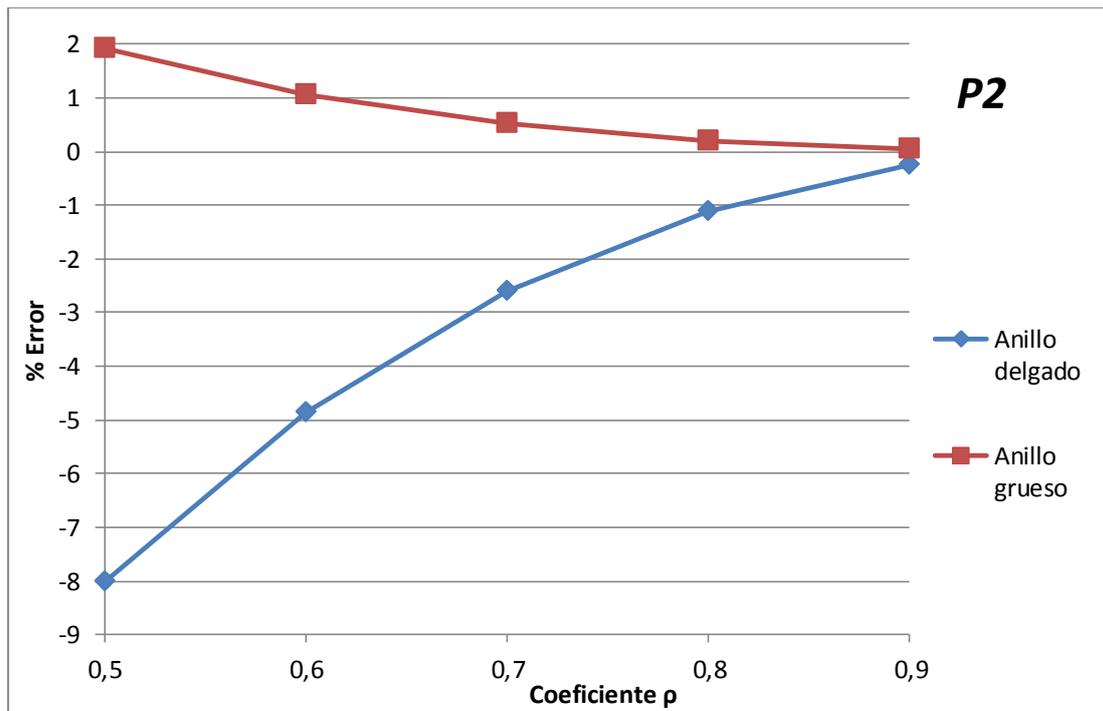
Gráfica 5.5 Errores de  $K$  en  $P1$  (exterior) según la Resistencia de Materiales para anillo delgado y grueso en comparación con la Teoría de la Elasticidad



Gráfica 5.6 Errores de  $K$  en  $P1$  (exterior) según la Resistencia de Materiales para anillo delgado y grueso en comparación con la Teoría de la Elasticidad. Detalle desde  $\rho=0,5$



Gráfica 5.7 Errores de  $K$  en **P2** (interior) según la Resistencia de Materiales para anillo delgado y grueso en comparación con la Teoría de la Elasticidad



Gráfica 5.8 Errores de  $K$  en **P2** (interior) según la Resistencia de Materiales para anillo delgado y grueso en comparación con la Teoría de la Elasticidad. Detalle desde  $\rho=0,5$

En el punto *PI* los resultados no ofrecen un valor por debajo del 10% de error hasta valores de  $\rho > 0,5$ , para anillo delgado, y  $\rho > 0,4$  para anillo grueso. Mientras que en el punto *P2* esto mismo ocurre para  $\rho > 0,4$ , con anillo delgado, y  $\rho > 0,2$  con anillo grueso. Esto demuestra que gran parte de los resultados que ofrece la Resistencia de Materiales, tomando como referencia la Teoría de la Elasticidad, no son correctos para las tensiones tangenciales en los puntos de cálculo. Se puede comprobar en las gráficas además, cómo los resultados son mejores para el supuesto de anillo grueso, y especialmente en el punto *P2*. En concreto, para la hipótesis de anillo grueso se consiguen errores entorno al 1% a partir de  $\rho > 0,5$  en el punto *P2* (interior), y a partir de  $\rho > 0,6$  en el punto *PI* (exterior). En el caso de anillo delgado, no se alcanza esta precisión en ambos puntos, hasta  $\rho > 0,7$ .

La diferencia entre los dos supuestos de la Resistencia de Materiales tratados, para el caso del anillo, es la consideración de los esfuerzos longitudinales y cortantes únicamente en el caso de anillo grueso, lo cual parece ser la causa de la variación resultante.

En cuanto a las diferencias que se producen en las precisiones en función de  $\rho$ , todo apunta a que, en el problema del anillo, la Resistencia de Materiales es capaz de ofrecer mejores resultados en casos donde predominan los esfuerzos flectores, ya que aumenta su precisión al incrementarse el valor de  $\rho$ . En todo caso, queda demostrado que los resultados de las tensiones tangenciales, ofrecidos por la Resistencia de Materiales para el problema del anillo comprimido diametralmente, en los puntos tratados, depende en gran medida de las proporciones del anillo, y en consecuencia, para su uso será necesario establecer cuidadosamente los rangos de actuación.

## 5.2.- Resultados del Método de los Elementos Finitos

Para poder realizar la comparación de los resultados obtenidos en el capítulo 4 mediante el Método de los Elementos Finitos, respecto de los de la Teoría de la Elasticidad, se calcula el factor de concentración de tensiones para cada tensión, mediante la fórmula, ya empleada en el tercer capítulo:

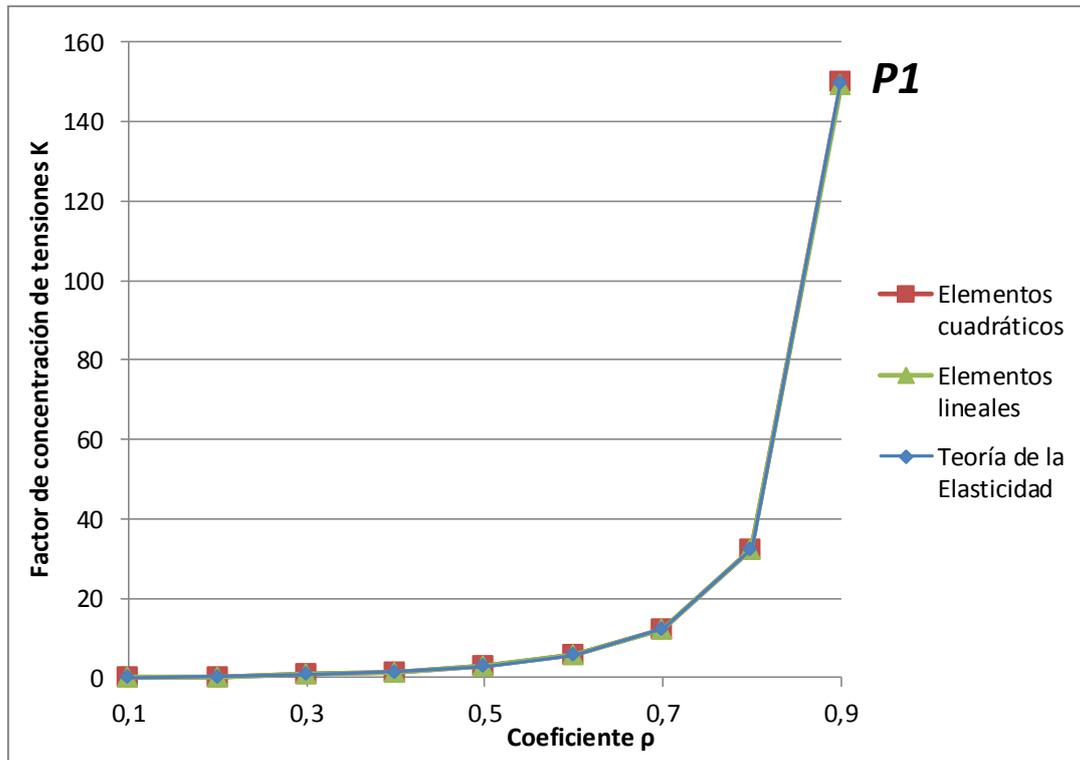
$$K_{FEM} = \frac{\pi \sigma l R}{2P}$$

De esta forma, los resultados del problema del anillo comprimido diametralmente, expresados mediante el concepto de concentración de tensiones, para elementos lineales y cuadráticos, quedan como se muestra en las siguientes tablas:

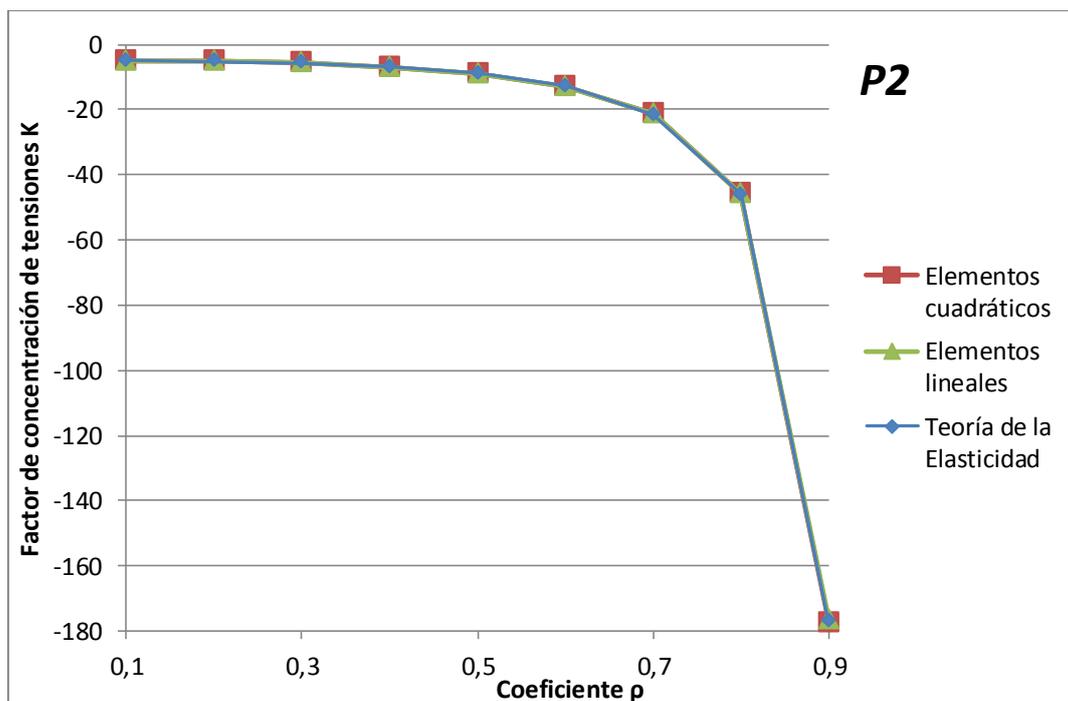
$\rho$	$K_{FEM}$		$\rho$	$K_{FEM}$	
	P2 (interior)	P1 (exterior)		P2 (interior)	P1 (exterior)
0,1	-4,987	0,070	0,1	-5,023	0,071
0,2	-5,229	0,302	0,2	-5,248	0,303
0,3	-5,752	0,749	0,3	-5,767	0,750
0,4	-6,823	1,527	0,4	-6,840	1,529
0,5	-8,865	2,919	0,5	-8,882	2,923
0,6	-12,815	5,690	0,6	-12,834	5,695
0,7	-21,405	12,164	0,7	-21,452	12,188
0,8	-45,796	32,177	0,8	-45,938	32,269
0,9	-176,272	149,336	0,9	-177,320	150,186

**Tabla 5.4** Valores de  $K$  obtenidos por Elementos Finitos empleando elementos lineales (izquierda) y cuadráticos (derecha)

Seguidamente se muestran las gráficas 5.9 y 5.10, donde aparecen los resultados alcanzados aplicando la Teoría de la Elasticidad y del Método de los Elementos Finitos empleando elementos lineales y cuadráticos:



**Gráfica 5.9** Valores de  $K$  en función de  $\rho$  en **P1** (exterior) mediante la Teoría de la Elasticidad y Elementos Finitos empleando elementos lineales y cuadráticos



**Gráfica 5.10** Valores de  $K$  en función de  $\rho$  en **P2** (interior) mediante la Teoría de la Elasticidad y Elementos Finitos empleando elementos lineales y cuadráticos

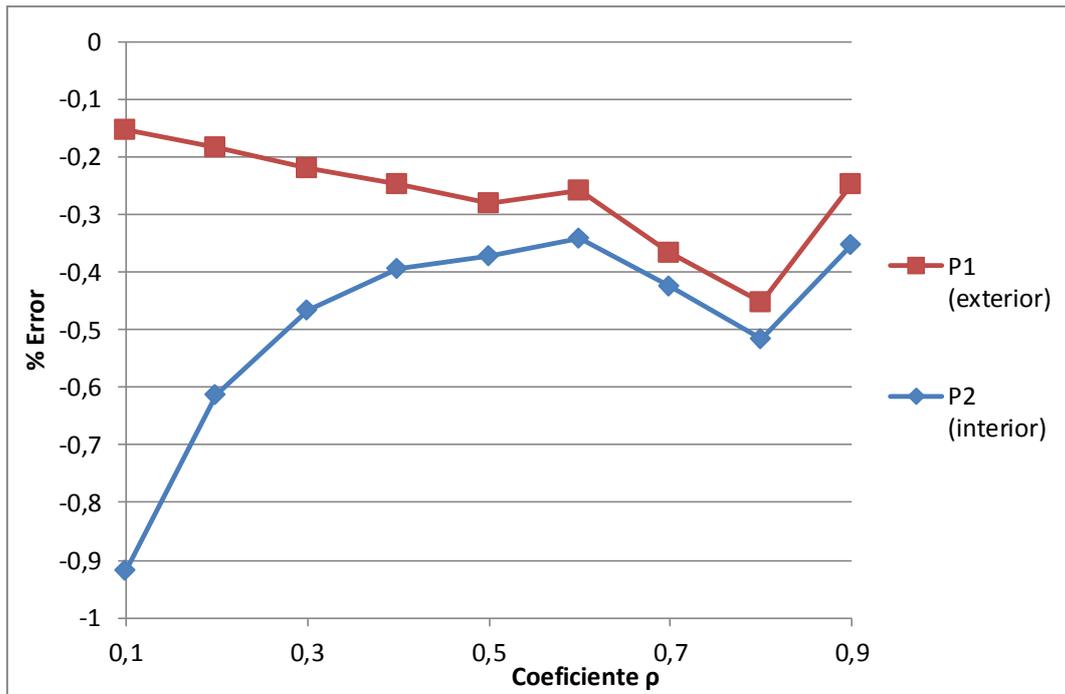
Como se puede observar en las gráficas 5.9 y 5.10, los resultados están tan igualados que no se puede distinguir la diferencia entre ellos, con el nivel de detalle mostrado. Por tanto, el análisis de los resultados prosigue examinando los errores que estos poseen, en comparación con los obtenidos mediante la Teoría de la Elasticidad.

$\rho$	Error (%)		$\rho$	Error (%)	
	P2 (interior)	P1 (exterior)		P2 (interior)	P1 (exterior)
0,1	-0,92	-0,15	0,1	-0,60	-0,46
0,2	-0,61	-0,18	0,2	-0,33	-0,21
0,3	-0,47	-0,22	0,3	-0,24	-0,17
0,4	-0,39	-0,25	0,4	-0,16	-0,14
0,5	-0,37	-0,28	0,5	-0,18	-0,16
0,6	-0,34	-0,26	0,6	-0,19	-0,17
0,7	-0,43	-0,37	0,7	-0,21	-0,17
0,8	-0,52	-0,45	0,8	-0,21	-0,17
0,9	-0,35	-0,25	0,9	0,24	0,32

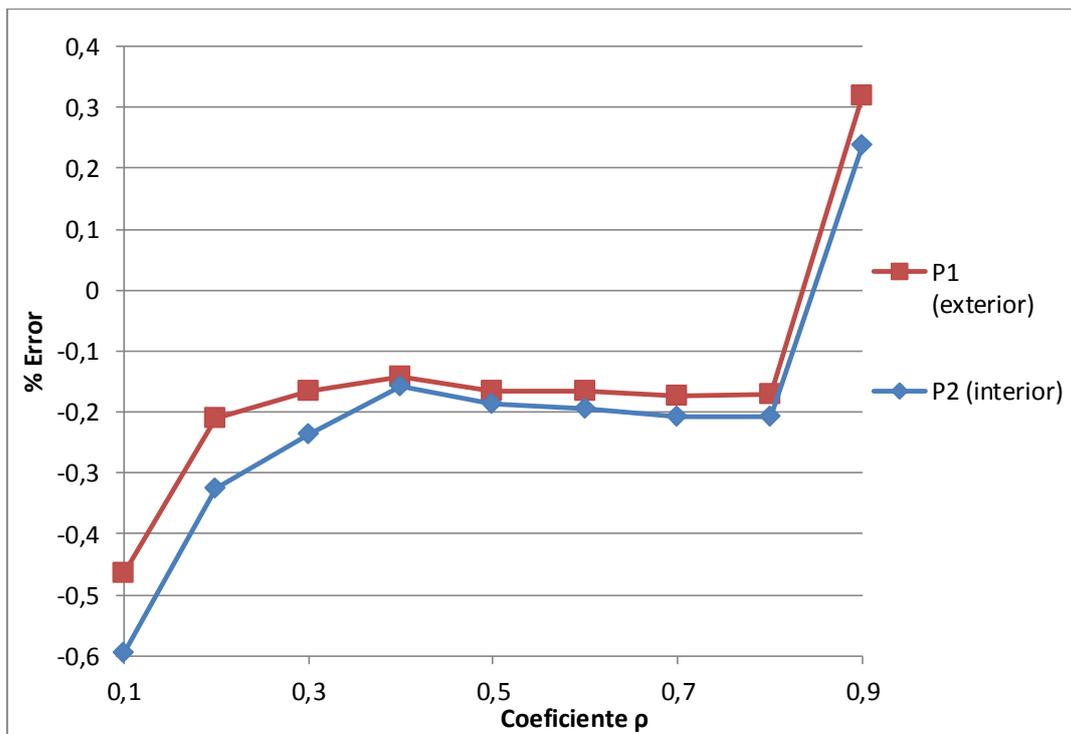
**Tabla 5.5** Errores de los valores de  $K$  obtenidos mediante Elementos empleando elementos lineales (izquierda) y cuadráticos (derecha) en comparación con la Teoría de la Elasticidad

El primer hecho destacable al analizar los errores obtenidos es que, en todos los casos, se consiguen errores inferiores al 1%. Por esta razón, partiendo de que todos los resultados del Método de los Elementos Finitos, para el caso del anillo comprimido diametralmente, son válidos en comparación con la Teoría de la Elasticidad, para los puntos  $P1$  y  $P2$ , se continúa su análisis con el fin de identificar las causas de las diferencias de precisión obtenidas.

En la gráfica 5.11 se puede apreciar, como principal característica de los resultados obtenidos con elementos lineales, la diferencia significativa de precisión en la zona con valores de  $\rho$  bajos. Esto puede ser debido a la dificultad que tienen los elementos lineales para transmitir ciertos tipos de esfuerzos, ya que la diferencia en las precisiones aumenta en los anillos en los que la sección comparada con el radio es más grande, situación esta, en la que disminuye la predominancia del momento flector.

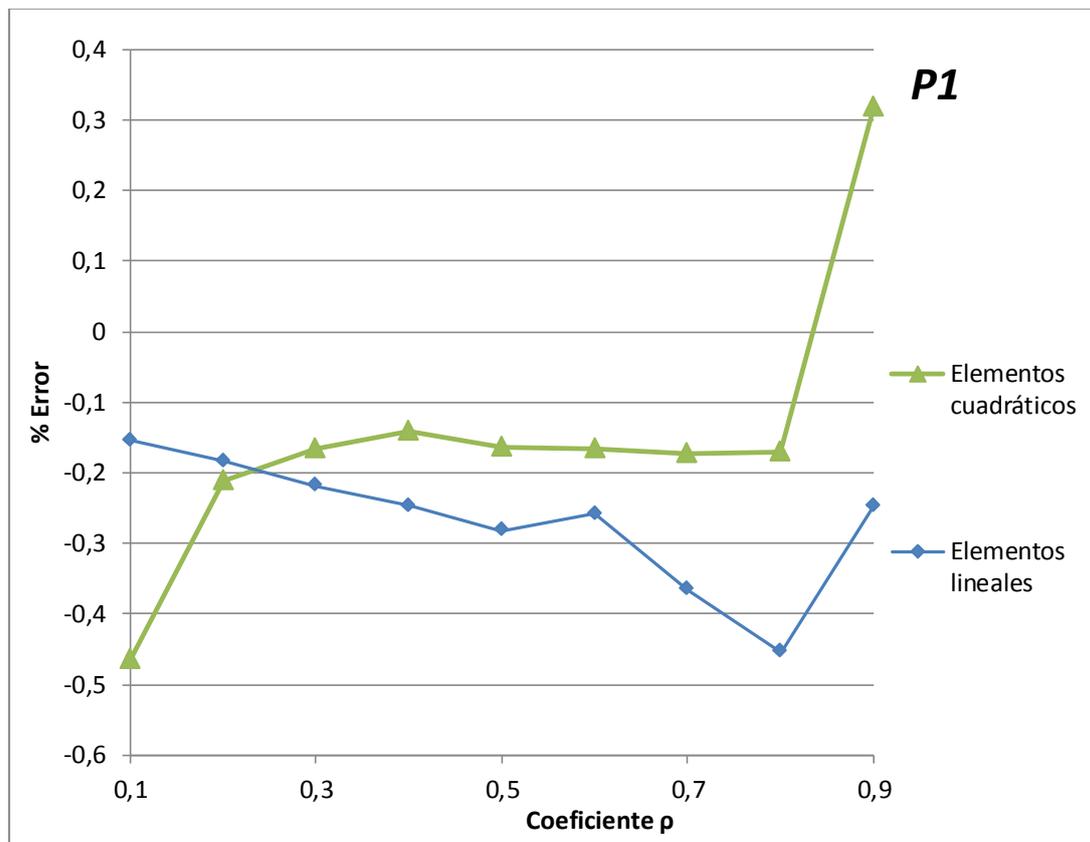


Gráfica 5.11 Errores de los valores de  $K$  obtenidos mediante Elementos Finitos empleando elementos **lineales** en  $P1$  y  $P2$  en comparación con la Teoría de la Elasticidad



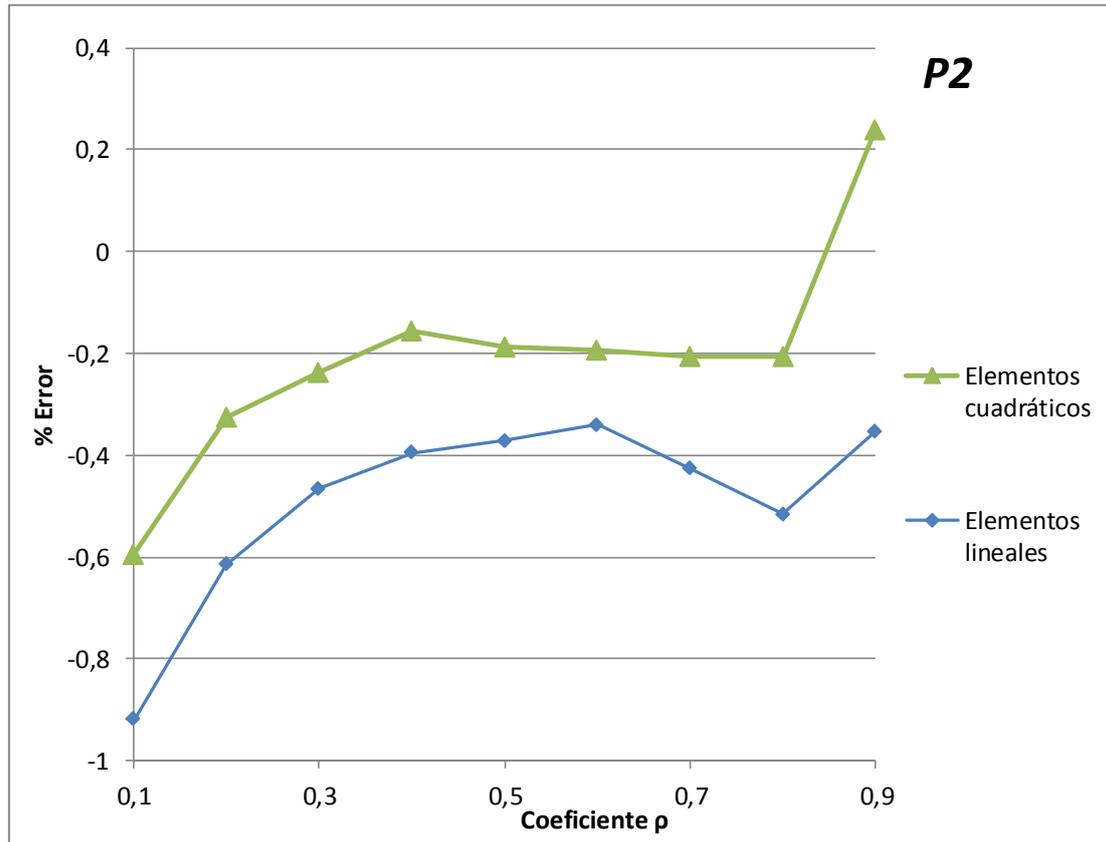
Gráfica 5.12 Errores de los valores de  $K$  obtenidos mediante Elementos Finitos empleando elementos **cuadráticos** en  $P1$  y  $P2$  en comparación con la Teoría de la Elasticidad

En lo que se refiere a los resultados alcanzados empleando elementos cuadráticos, tal y como se observa en la gráfica 5.12, no existen grandes diferencias en los errores entre los dos puntos de cálculo. Y se aprecia una tendencia, menos acusada en el caso de los elementos lineales, a mantener los errores prácticamente constantes en la zona con  $\rho$  medios, variando estos en gran medida para los valores de  $\rho$  extremos.



**Gráfica 5.13** Errores de los valores de  $K$  obtenidos mediante Elementos Finitos en  $P1$  (exterior), empleando elementos lineales y cuadráticos, en comparación con la Teoría de la Elasticidad

Comparando gráficamente los resultados para el punto  $P1$ , de los casos de uso de elementos lineales y cuadráticos, en la gráfica 5.13 se puede apreciar que estos son notablemente mejores con el empleo de elementos cuadráticos, exceptuando la zona de los valores de  $\rho$  más bajos, zona que, por otro lado, puede no ser especialmente representativa debido a las grandes variaciones encontradas en la gráfica 5.11 y descritas previamente.



**Gráfica 5.14** Errores de los valores de  $K$  obtenidos mediante Elementos Finitos en  $P2$  (interior), empleando elementos lineales y cuadráticos, en comparación con la Teoría de la Elasticidad

Los errores de ambos tipos de elementos en el punto  $P2$ , mostrados en la gráfica 5.14, mantienen tendencias similares, y son en todos los casos menores para elementos cuadráticos.

Tras el análisis de los resultados ofrecidos por el Método de los Elementos Finitos, para el caso del anillo comprimido diametralmente, se puede concluir que dichos resultados están en consonancia con los obtenidos mediante la Teoría de la Elasticidad. No obstante, se observa cierta variación en las soluciones en función de las proporciones del anillo estudiado, especialmente en las de los valores extremos de  $\rho$ , variación que, en ninguno de los casos, anula su validez. Además, queda demostrado que el empleo de

elementos cuadráticos puede ofrecer mejores resultados en este problema que el uso de elementos lineales, aparentemente por su mayor capacidad para transmitir los esfuerzos en casos de concentración de tensiones.

## Capítulo VI

# CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

---

### 6.1.- Conclusiones

Tras el análisis del problema del anillo se puede concluir que:

- Los resultados ofrecidos por la Resistencia de Materiales dependen en gran medida de las proporciones del anillo considerado en el problema, llegando en la mayoría de los casos a resultados con errores no asumibles.
- Configurando el modelo correctamente, tal y como se ha realizado a lo largo de la presente memoria, el Método de los Elementos Finitos permite obtener resultados con un alto nivel de precisión con elementos tanto lineales como cuadráticos.
- El empleo del Método de los Elementos Finitos con elementos cuadráticos en el caso tratado, mejora la precisión de los resultados.
- Aun existiendo cierta variación en los errores de los resultados proporcionados por el Método de los Elementos Finitos, en función de las proporciones del problema, se mantiene la validez de sus resultados en todo el rango considerado.

## 6.2.- Trabajos futuros

Como objeto de estudio para próximos trabajos, relacionados con el problema analizado, se proponen los siguientes aspectos:

- La influencia del ángulo en la posición del punto de toma de tensiones.
- La influencia de la cantidad de deformación del anillo en los resultados del factor de concentración de tensiones  $K$ .
- La influencia del uso de materiales con distintas propiedades mecánicas.
- Análisis empleando intervalos menores para los valores de  $\rho$ .
- La influencia del empleo de materiales con distintos coeficientes de fricción en los resultados del problema del anillo.
- Tensiones en el anillo por la aplicación de tres fuerzas puntuales, separadas  $120^\circ$ .

## REFERENCIAS

---

- [1] <http://www.tecnotest.it/f/sp/Prod/bb-050-anillo-dinamometrico-de-50-kn>
- [2] M.A. Martín-Rengel a, F.J. Gómez Sánchez b,1, J. Ruiz-Hervías a, L. Caballero. *Determination of the hoop fracture properties of unirradiated hydrogen-charged nuclear fuel cladding from ring compression tests.*
- [3] José Luis San Román García. *Técnicas experimentales en ingeniería mecánica: fotoelasticidad.* Universidad Carlos III de Madrid. Departamento de Ing. Mecánica.
- [4] Yu. V. Tokovyy, K.-M. Hung and C.-C. Ma. *Determination of stresses and displacements in a thin annular disk subjected to diametral compression.* Journal of Mathematical Sciences. Vol. 165, No. 3, 2010
- [5] S. P. Timoshenko, *On the stress distribution in a circular ring compressed with two mutually opposite forces.* Izv. Kiev. Politekhn. Institut., 9, No. 1, 21–37 (1909).
- [6] L. N. G. Filon. *The stresses in a circular ring.* Inst. Civil Eng. London: Selected Engineer. Papers, 1, No. 12, 4–26 (1924).

- [7] E. A. Ripperger and N. Davids. *Critical stresses in a circular ring*. American society of civil engineer. Paper No. 2308
- [8] Reismann, H., & Pawlik, P., *Elasticity*, Wiley - Interscience
- [9] [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stress\\_in\\_a\\_continuum.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stress_in_a_continuum.svg)
- [10] Introduction to basic elements of Elasticity Theory. Elsevier Science B. V. Amsterdam, The Netherlands, 1999.
- [11] *CÁLCULO DE MÁQUINAS MEF*. Universidad Carlos III de Madrid. Departamento de Ing. Mecánica. Octubre 2000
- [12] <http://n.ethz.ch/~peterda/rays.html>
- [13] J. P. Den. (1952). "Advanced Strength of Materials.", McGraw-Hill, United States.
- [14] E. H. Mansfield, F. R. S. y D. H. Young. Stephen Prokofievitch Timoshenko 1878-1944 Elected For. Mem. R.S. 1944.
- [15] S. Timoshenko. (1940). "Strength of Materials, Part II: Advanced Theory and Problems." 2nd, D. Van Nostrand Company, Inc., United States.
- [16] A. P. Boresi, and R. J. Schmidt. (1993). "Advanced Mechanics of Materials." 5th, John Wiley & Sons, United States.
- [17] S. Timoshenko. (1951). "Theory of Elasticity." 2nd, McGraw-Hill, United States.
- [18] Prof. S. Timoshenko. *Distribution of Stresses in a Circular Ring*.
- [19] R. B. Chianese and R. J. Erdlac. (1988). *The General Solution to the Distribution of Stresses in a Circular Ring Compressed by Two Forces Acting Along a Diameter*. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. 41, pp. 239-247.
- [20] *ABAQUS Getting Started with Abaqus*. SIMULIA
- [21] *Toma de decisiones en el análisis por el M.E.F*. Universidad Carlos III de Madrid. Departamento de Ing. Mecánica
- [22] Joseph E. Shigley y Charles R. Mischke. *Diseño en ingeniería mecánica*.
- [23] S. Timoshenko. (1922). *On the Distribution of Stresses in a Circular Ring Compressed by Two Forces Acting Along a Diameter*. Philosophical Magazine Series 6, vol. 44, pp. 1014-1019.